ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

Học phần: Đồ án 1

Phương pháp hướng giảm sâu nhất giải một lớp bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc

---

Giảng viên hướng dẫn:	TS. Trần Ngọc Thăng
Sinh viên thực hiện:	Nguyễn Đức Ánh
Mã số sinh viên:	20204811
Lớp:	CTTN Toán Tin K65

Hà Nội, tháng 7 năm 2023

NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN

1. Mục tiêu và nội dung của đồ án

(a) Mục tiêu: ....
....
....
....

(b) Nội dung: ....
....
....
....

2. Kết quả đạt được: ....
....
....
....
....
....

3. Ý thức làm việc của sinh viên: ....
....
....
....
....
....

Hà Nội, ngày tháng năm 2023
Giảng viên hướng dẫn

Trần Ngọc Thăng

Lời cảm ơn

Báo cáo này được thực hiện và hoàn thành tại Đại học Bách Khoa Hà Nội, nằm trong nội dung học phần *Đồ án 1* kỳ học 20222.

Thông qua bài báo cáo này, tác giả đã đúc kết được cho mình những kiến thức bổ ích và mở rộng những kiến thức liên quan đến học phần đồ án 1. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến TS Trần Ngọc Thăng, giảng viên hướng dẫn đồ án. Trong suốt quá trình học và nghiên cứu, thầy đã có những góp ý và đề xuất cũng như tận tình chỉ bảo để em có thể hoàn thiện báo cáo một cách tốt nhất. Em xin kính chúc thầy sức khỏe và thành công trên con đường sắp tới.

Bên cạnh đó, tác giả xin gửi lời cảm ơn và tri ân sâc sắc tới các tác giả với những công trình nghiên cứu từ trước, chính những nghiên cứu quý báu này là hành trang để tác giả có thể hoàn thiện đề tài này.

Lời cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy cô tại Viện Toán ứng dụng và Tin học, đã luôn hỗ trợ và mang đến cho em một môi trường học tập và nghiên cứu tốt. Em xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày tháng năm 2023

Tác giả đồ án

Nguyễn Đức Ánh

Mục lục

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$x \in D$	x thuộc tập D
$x \notin D$	x không thuộc tập D
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y
$\|x\|$	chuẩn Euclide của x
v.đ.k	viết tắt của cụm từ "với điều kiện"
$\mathrm{argmin}(P)$	tập nghiệm tối ưu của bài toán (P)
$\mathrm{int}X$	phần trong của tập X
∂f	Dưới vi phân hàm lồi f
$\partial^C f$	Dưới vi phân tổng quát Clarke của hàm f
$\partial^{\uparrow} f$	Dưới vi phân tổng quát Clarke-Rockafellar của hàm f

Danh sách hình vẽ

Lời mở đầu

Trong cuộc sống hiện nay, có rất nhiều vấn đề cần được giải quyết nhằm đáp ứng các nhu cầu của con người, trải dài trên các khía cạnh khác nhau từ kinh tế, kỹ thuật và công nghệ,... Khi ấy, với những giải pháp đã được tìm ra, con người mong muốn tìm kiếm được phương án tốt hơn nữa để đạt được mục tiêu trong những điều kiện ràng buộc nhất định. Như Leonhard Euler đã đề cập: “Vì thế giới được thiết lập một cách hoàn hảo và vì nó là sản phẩm của đấng sáng tạo tinh thông nên không thể tìm thấy một cái gì mà không mang tính chất cực đại hay cực tiểu nào đó”. Từ đó, dựa trên nhu cầu thực tiễn và sự phát triển của khoa học công nghệ, thuật ngữ “Tối ưu hóa” đã ra đời cùng với sự phát triển vượt bậc trong suốt những thập kỷ qua.

Các lĩnh vực của Tối ưu hóa ngày càng trở nên đa dạng, mang nhiều tên gọi khác nhau như Quy hoạch toán học, Điều khiển tối ưu, Vận trù học, Lý thuyết trò chơi, ... Xuyên suốt chiều dài lịch sử, lý thuyết tối ưu đã được áp dụng vào các lĩnh vực của đời sống và cải thiện đáng kể đời sống của con người.

Trong bài báo cáo này, tác giả sẽ trình bày các giới thiệu về bài toán tối ưu, cơ sở lý thuyết, một số bài toán quy hoạch lồi suy rộng, trình bày thuật toán hướng giảm sâu nhất giải bài toán MP (Minimax Problem), cùng với việc thực hiện chạy một số ví dụ minh họa.

Cấu trúc đồ án

Trong đồ án này, tác giả sẽ trình bày về phương pháp hướng giảm sâu nhất giải một lớp bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc. Trong đó, đồ án được chia thành các đầu mục chính như sau

- **Chương 1** sẽ trình bày các khái niệm liên quan đến hàm lồi, tập lồi, hàm lồi suy rộng cùng với những tính chất đi kèm.
- **Chương 2** sẽ trình bày tổng quan về bài toán quy hoạch lồi suy rộng, bao gồm bài toán quy hoạch giả lồi, bài toán quy hoạch tựa lồi có cấu trúc, bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc và một lớp cụ thể trong lớp này là bài toán MP (Minimax Problem) - bài toán được nghiên cứu trong bài báo cáo này.
- **Chương 3** sẽ trình bày về thuật toán hướng giảm sâu nhất giải bài toán MP, bao gồm các phần như cơ sở lý thuyết của thuật toán, ý tưởng tiếp cận và hình thành thuật toán, phát biểu thuật toán cùng với việc chứng minh sự hội tụ của thuật toán.
- **Chương 4** sẽ thực hiện chạy chương trình với ba ví dụ minh họa thuật toán, ứng với các trường hợp khác nhau, từ đó khẳng định được kết quả thực nghiệm tương ứng và phù hợp với kết quả về mặt lý thuyết, ở đây là việc chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

Hà Nội, ngày tháng năm 2023
Tác giả đồ án

Nguyễn Đức Ánh

Giới thiệu về bài toán tối ưu

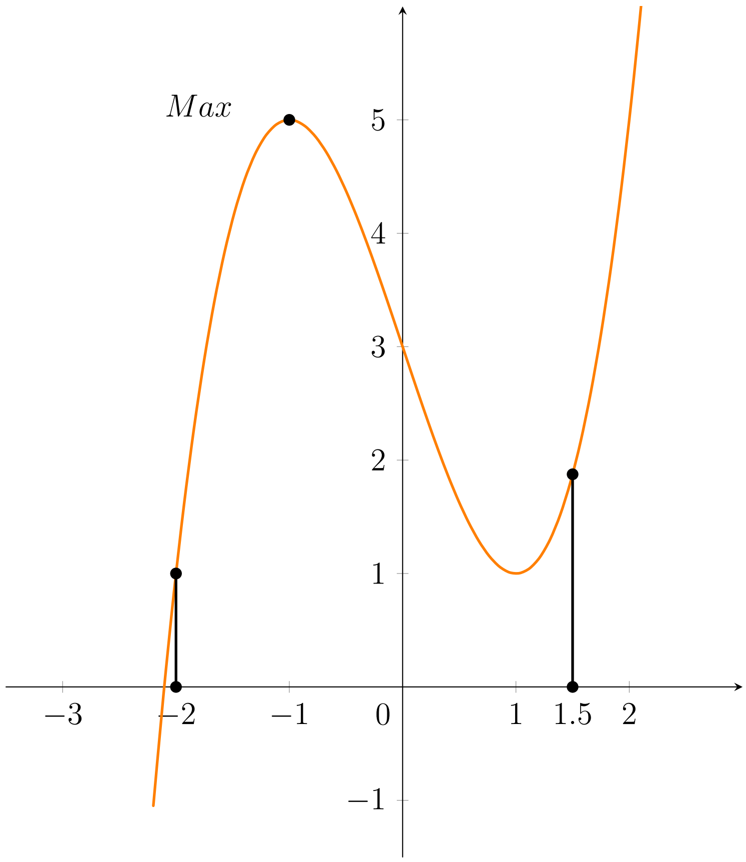
Giới thiệu tổng quan và một vài khái niệm cơ bản

Như tác giả đã đề cập ở phần mở đầu, tối ưu hóa là một trong những lĩnh vực được quan tâm và có ảnh hưởng đến hầu hết các lĩnh vực khoa học - công nghệ và kinh tế - xã hội. Trong thực tế, việc tìm giải pháp tối ưu cho một vấn đề nào đó chiếm một vai trò hết sức quan trọng. Phương án tối ưu là phương án hợp lý nhất, tốt nhất, tiết kiệm chi phí, tài nguyên, nguồn lực mà lại cho hiệu quả cao.

Ví dụ. Tìm $x \in D = [-2, 1.5]$ sao cho $f(x) = x^3 - 3x + 3$ đạt max.

Bài toán trên có mục tiêu tìm cực đại hàm f và có thể được giải như sau

Xét $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, ta có các điểm tới hạn là $x = -1, x = 1$. Xét giá trị hàm số $f(x)$ tại các điểm tới hạn vừa tìm được và tại các giá trị đầu mút $x = -2$ và $x = 1.5$. Ta có, $f(-2) = 1, f(-1) = 5, f(1) = 1, f(1.5) = 1.875$. Vậy hàm số f đạt cực đại tại $x = -1$ với giá trị tương ứng là 5. Kết quả của bài toán được minh họa như hình dưới đây.



Hình 1: Đồ thị hàm f trên một đoạn cho trước

Đặt vấn đề. Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Bài toán tối ưu tổng quát có dạng: Max(Min) $f(x), x \in D$. Ta cần tìm điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ sao cho hàm mục tiêu $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất với bài toán Max - cực đại hóa (giá trị nhỏ nhất đối với bài toán Min - cực tiểu hóa).

Điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là phương án khả thi (hay phương án chấp nhận được) của bài toán tối ưu: Max(Min)$f(x)$, với $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Miền D được gọi là miền ràng buộc. Các toạ độ thành phần của điểm x được gọi là các biến quyết định, còn x cũng được gọi là vector quyết định.

- Xét bài toán cực đại hoá: Max $f(x)$, với $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) toàn cục của bài toán nếu $x^* \in D$ và $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$. Điểm $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) địa phương (local optima) nếu $x \in D$ và tồn tại một quả cầu mở tâm $\overline{x}$, bán kính ε đủ nhỏ, ký hiệu là $B(\overline{x}, \varepsilon)$ sao cho $f(\bar{x}) \geq f(x), \forall x \in B(\overline{x}, \varepsilon) \cap D$.

- Xét bài toán cực tiểu hóa: Min $f(x)$, với $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad (P)$

Điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) toàn cục nếu $x^* \in D$ và $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$. Điểm $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) địa phương (local optima) nếu $\bar{x} \in D$ và tồn tại một quả cầu mở tâm $\overline{x}$, bán kính ε đủ nhỏ, ký hiệu là $B(\overline{x}, \varepsilon)$ sao cho $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in B(\overline{x}, \varepsilon) \cap D$.

Ta thấy rằng mọi điểm tối ưu toàn cục cũng là điểm tối ưu địa phương, tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Theo hình 1 , điểm $x = 1.5$ là một điểm cực đại địa phương nhưng không phải một điểm cực đại toàn cục khi xét miền $D = [-2, 1.5]$.

Ví dụ. Xét bài toán tối ưu sau: Max $f(x) = 8x_1 + 6x_2$, vơi điều kiện ràng buộc

$$x \in D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 + 2x_2 \leq 60; 2x_1 + 4x_2 \leq 48; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}.$$

Bài toán tối ưu được đề cập ở trên là bài toán quy hoạch tuyến tính. Đây là một bài toán quy hoạch lồi trên tập lồi đa diện, hàm mục tiêu là hàm tuyến tính afin, người ta đã chứng minh được rằng nghiệm tối ưu địa phương của bài toán quy hoạch tuyến tính cũng đồng thời là nghiệm tối ưu toàn cục.

Phân loại các bài toán tối ưu

Các bài toán tối ưu, cũng còn được gọi là các bài toán quy hoạch toán học, được chia ra thành các lớp sau

1. Bài toán quy hoạch tuyến tính (BTQHTT).
2. Bài toán tối ưu phi tuyến hay còn gọi là bài toán quy hoạch phi tuyến (BTQHPT), bao gồm cả bài toán quy hoạch lồi (BTQHL) và bài toán quy hoạch toàn phương (BTQHTP).

3. Bài toán tối ưu nguyên và hỗn hợp nguyên.

4. Bài toán quy hoạch động.

5. Bài toán quy hoạch đa mục tiêu.

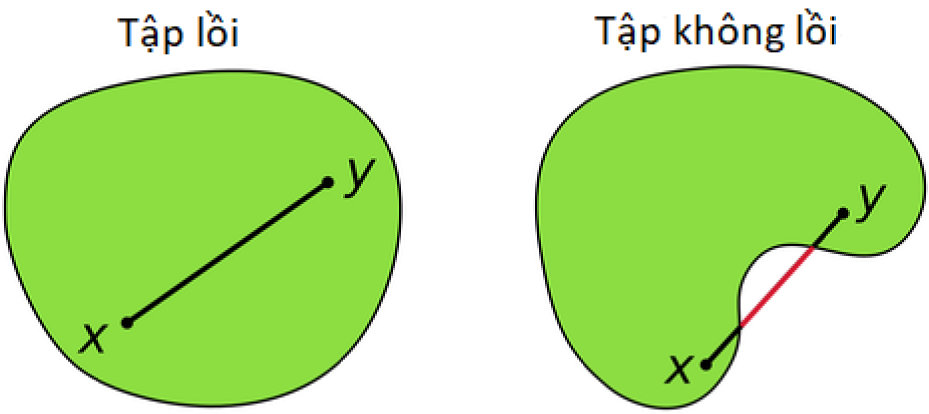
6. Bài toán quy hoạch ngẫu nhiên...

1 Cơ sở lý thuyết

1.1 Tập lồi, hàm lồi

1.1.1 Tập lồi

Định nghĩa. [9] Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* (convex set) nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó, tức với mọi $x^1, x^2 \in M$ và $0 \le \lambda \le 1$ ta có $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$. Hình dưới đây minh họa về tập lồi và tập không lồi



Hình 2: Minh họa về tập lồi và tập không lồi

Chú ý. Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi. Tuy nhiên, hợp của các tập lồi chưa chắc là tập lồi.

Ta gọi điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ với } \lambda_1, \cdots, \lambda_k \ge 0 \text{ và } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

là tổ hợp lồi của các điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\lambda_i > 0$ với mọi $i = 1, \cdots, k$ thì ta nói x là tổ hợp lồi chặt của $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$.

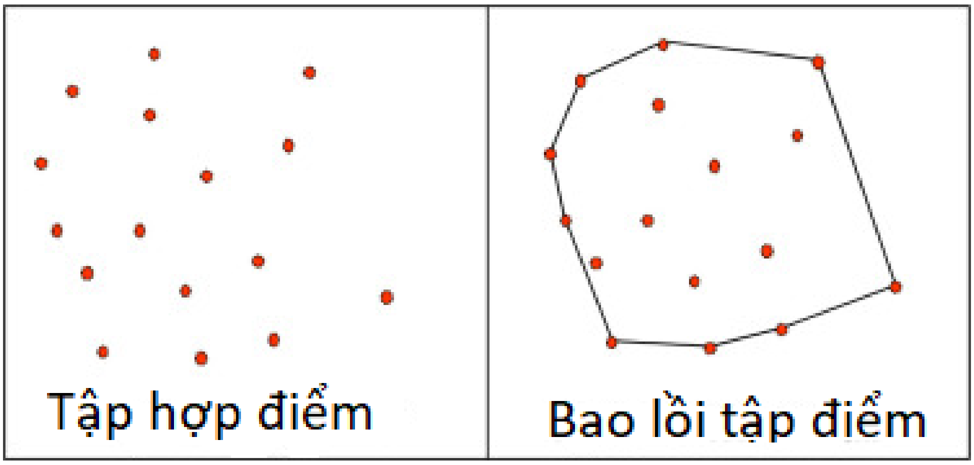
Mệnh đề 1.1. [9] Một tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của những phần tử thuộc nó.

Mệnh đề 1.2. [9]

i) Nếu $M \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha M = \{y \mid y = \alpha x, x \in M\}$ cũng là tập lồi.

ii) Nếu $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ là hai tập lồi thì $M_1 + M_2 = \left\{x \mid x = x^1 + x^2, x^1 \in M_1, x^2 \in M_2\right\}$ cũng là tập lồi.

Bao lồi (convex hull) của tập $E \subset \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập lồi chứa E và được ký hiệu là conv E. Đó là tập lới nhỏ nhất chứa E. Hai ví dụ về bao lồi được minh họa ở Hình dưới đây.



Hình 3: Bao lồi của một tập các điểm

1.1.2 Hàm lồi

Định nghĩa. [9] Hàm f được gọi là *hàm lồi* (convex function) xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nếu

$$f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) \leq \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right),$$

với bất kỳ $x^1, x^2 \in X$ và số thực $\lambda \in [0, 1]$. Ta gọi f là hàm lồi chặt (strictly convex function) trên tập lồi X nếu

$$f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) < \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right),$$

với bất kỳ $x^1, x^2 \in X, x^1 \neq x^2$ và $0 < \lambda < 1$. Miền xác định hữu hiệu của hàm f là

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Hàm số có dạng $f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha$, trong đó vector $c \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ cho trước, được gọi là *hàm afin* hay *hàm tuyến tính afin*. Đây là một lớp đặc biệt trong lớp hàm lồi.

Epigraph của hàm lồi f là tập

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R} \mid \xi \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Hàm lồi $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ có thể được mở rộng thành một hàm lồi trên toàn không gian $\mathbb{R}^n$ bằng cách đặt $f(x) = +\infty$ nếu $x \notin \operatorname{dom} f$. Vì vậy, để đơn giản, ta thường xét f là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$.

Hàm f được gọi là hàm lõm (concave function) (tương ứng hàm lõm chặt (strictly concave function)) nếu $-f$ là hàm lồi (tương ứng hàm lồi chặt).

Một số tính chất.

Mệnh đề 1.3. [9]

i) Hàm số f xác định trên tập lồi khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm lồi khi và chi khi epi(f) là tập lồi.

ii) Hàm số g xác định trên tập lồi khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm lõm khi và chỉ khi tập hypograph của nó

$$\operatorname{hypo}(g) = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R} \mid \xi \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

là tập lồi.

Chứng minh.

Ta chứng minh mệnh đề 1.3 ý i), ý sau chứng minh tương tự.

($\Longrightarrow$) Giả sử f là hàm lồi trên tập lồi X. Lấy hai điểm bất kỳ $\left(x^1, \xi_1\right)$ và $\left(x^2, \xi_2\right)$ thuộc epi (f). Theo định nghĩa, ta có

$$\xi_1 \geq f\left(x^1\right) \text{ và } \xi_2 \geq f\left(x^2\right).$$

Với mọi $0 \leq \lambda \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2\right) & \leq \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right) \\ & \leq \lambda \xi_1 + (1-\lambda) \xi_2 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \lambda \xi_1 + (1-\lambda) \xi_2\right) = \lambda\left(x^1, \xi_1\right) + (1-\lambda)\left(x^2, \xi_2\right) \in \operatorname{epi}(f)$$

($\Longleftarrow$) Ngược lại, giả sử epi (f) là tập lồi. Vì $\left(x^1, f\left(x^1\right)\right)$ và $\left(x^2, f\left(x^2\right)\right)$ đều thuộc epi (f) nên với mọi $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda\left(x^1, f\left(x^1\right)\right) + (1-\lambda)\left(x^2, f\left(x^2\right)\right) = \left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right)\right) \in \operatorname{epi}(f).$$

Theo định nghĩa ta có

$$f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2\right) \leq \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Từ đó, ta kết luận được f là hàm lồi.

Mệnh đề 1.4. [9]

i) Nếu hàm số f xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm lồi thì tập mức dưới $L_\alpha(f) := \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii) Nếu g là hàm lõm xác định trên tập lồi khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ thì tập mức trên $L^\alpha(g) := \{x \in X \mid g(x) \geq \alpha\}$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Chứng minh.
Ta chứng minh i), ý ii) chứng minh tương tự.
Thật vậy, lấy bất kỳ $x^1, x^2 \in L_\alpha(f)$ và $0 \leq \lambda \leq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) &\leq \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right) \\ &\leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Khi đó, $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in L_\alpha(f)$. Vậy $L_\alpha(f)$ là một tập lồi.

Các phép toán trên hàm lồi

Cho hàm lồi f_1 xác định trên tập lồi $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, hàm lồi f_2 xác định trên tập lồi $X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ và số thực $\lambda > 0$. Các phép toán $\lambda f_1, f_1 + f_2, \max\{f_1, f_2\}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} (\lambda f_1)(x) &:= \lambda f_1(x), x \in X_1; \\ (f_1 + f_2)(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \quad x \in X_1 \cap X_2; \\ \max\{f_1, f_2\}(x) &:= \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad x \in X_1 \cap X_2. \end{aligned}$$

Dựa theo các phép toán được định nghĩa ở trên, mệnh đề sau được đề xuất

Mệnh đề 1.5. [9] Cho f_1 là hàm lồi trên tập lồi X_1, f_2 là hàm lồi trên tập lồi X_2 và các số thực $\alpha > 0, \beta > 0$. Khi đó các hàm $\alpha f_1 + \beta f_2$ và $\max\{f_1, f_2\}$ là hàm lồi trên $X_1 \cap X_2$.

Bổ đề 1.6. [8] Hàm f khả vi là hàm lồi khi và chỉ khi $\operatorname{dom}(f)$ là tập lồi và với mọi $x, y \in \operatorname{dom}(f)$,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x).$$

Định lý 1.7. [9] Cho f là hàm khả vi hai lần trên tập lồi mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó,

i) Hàm f là hàm lồi trên X khi và chi khi ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là nửa xác định dương trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm f là hàm lồi chặt trên X nếu $\nabla^2 f(x)$ xác định dương trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

ii) Hàm f là hàm lõm trên X khi và chỉ khi ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là nửa xác định âm trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm f là hàm lõm chặt trên X nếu $\nabla^2 f(x)$ xác định âm trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y < 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Bài toán quy hoạch lồi

Bài toán quy hoạch lồi là bài toán quy hoạch mà ở đó hàm mục tiêu là *hàm lồi* trên một tập lồi. Chẳng hạn, bài toán quy hoạch tuyến tính chính là một dạng đặc biệt của bài toán quy hoạch lồi (khi đó hàm mục tiêu và các ràng buộc là các hàm tuyến tính afin).

Xét bài toán quy hoạch phi tuyến

$$\min f(x) \text{ v.đ.k. } x \in X, \quad \left(P_1^{rb}\right)$$

trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập nghiệm của hệ

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, m; \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \cdots, k. \end{cases}$$

với $f, g_i, i = 1, \cdots, m$ và $h_j, j = 1, \cdots, k$ là các hàm số khả vi bất kỳ xác định trên $\mathbb{R}^n$.

Định lý 1.8. [9] Điều kiện chính quy được thỏa mãn tại x^0 nếu có một trong các điều kiện sau

i) Các hàm $h_j, j = 1, \cdots, k$ và $g_i, i = 1, \cdots, m$, đều là các hàm afin.

ii) Các hàm $h_j, j = 1, \ldots, k$ là afin; các hàm $g_i, i = 1, \cdots, m$ là lồi và điều kiện Slater dưới đây thỏa mãn

$$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\bar{x}) < 0, i = 1, \ldots, m \text{ và } h_j(\bar{x}) = 0, j = 1, \cdots, k.$$

iii) Các vector $\nabla g_i(x^0), i \in I(x^0)$ và $\nabla h_j(x^0), j = 1, \cdots, k$ là độc lập tuyến tính, tại đó $I(x^0) := \{i = \{1, ..., m\}, g_i(x^0) = 0\}$ là tập chỉ số thỏa mãn ràng buộc chặt tại x^0.

Định lý Karush-Kuhn-Tucker

Định lý 1.9. [9] Định lý Karush-Kuhn-Tucker. Cho các hàm $f, g_i, i = 1, \cdots, m$ và $h_j, j = 1, \cdots, k$ là các hàm khả vi liên tục trên một tập mở chứa X. Giả sử x^* là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán $\left(P_1^{\text{rb}}\right)$ và điều kiện chính quy được thỏa mãn tại x^*. Khi đó điều kiện KKT sau đúng

i) $g_i(x^*) \leq 0, i = 1, \cdots, m$ và $h_j(x^*) = 0, j = 1, \cdots, k$.

ii) Tồn tại các số $\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, m$ và các số $\mu_j, j = 1, \cdots, k$ sao cho

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0.$$

iii) $\lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i = 1, \cdots, m$. (Điều kiện bù)

Định lý Karush-Kuhn-Tucker đối với bài toán quy hoạch lồi

Xét bài toán quy hoạch lồi

$$\min f(x) \text{ v.đ.k. } x \in X, \quad (P_1^{\text{conv}})$$

trong đó

$$X = \{x \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, m\},$$

và f và $g_i, i = 1, 2, \cdots, m$, là các hàm lồi, khả vi liên tục trên một tập mở chứa X. Trong bài toán quy hoạch lồi, nếu xuất hiện ràng buộc $h_j(x) = 0$ thì $h_j(x)$ phải là hàm afin. Hơn nữa, vì

$$h_j(x) = 0 \text{ tương đương với } h_j(x) \leq 0, -h_j(x) \leq 0,$$

nên ta chỉ cần xét ràng buộc dạng bất đẳng thức.

Định lý 1.10. [9] Giả sử các hàm f, $g_i, i = 1, \cdots, m$ là các hàm lồi khả vi trên một tập mở chứa X và điều kiện Slater được thỏa mãn. Khi đó $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (P_1^{conv}) khi và chỉ khi x^* thỏa mãn điều kiện KKT sau đây

i) $g_i(x^*) \leq 0, i = 1, \cdots, m.$

ii) Tồn tại các số $\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, m$ sao cho

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0.$$

iii) $\lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i = 1, \cdots, m.$

Ta thấy rằng khi xét với bài toán quy hoạch lồi, định lý KKT với điều kiện Slater được thỏa mãn vừa là điều kiện cần và đủ về nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán.

Dưới vi phân hàm lồi

Định nghĩa. [10] Cho tập lồi mở khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ và hàm lồi $f : X \to \mathbb{R}$. Vector $p \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *dưới gradient* của hàm lồi f tại $x^0 \in X$ nếu

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle p, x - x^0 \rangle \quad \forall x \in X.$$

Tương tự, giả sử $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm lõm. Vector $p \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *dưới gradient* của hàm lõm f tại $x^0 \in X$ nếu

$$f(x) \leq f(x^0) + \langle p, x - x^0 \rangle \quad \forall x \in X.$$

Tập tất cả các dưới gradient của hàm số f tại x^0, ký hiệu là $\partial f(x^0)$,được gọi là *dưới vi phân (Subdifferential)* của f tại x^0.

Mệnh đề 1.11. [10] Cho hàm lồi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Nếu $x^0 \notin \text{dom} f$ thì $\partial f(x^0) = \emptyset$.

Định lý 1.12. [10] Cho hàm lồi $f : X \to \mathbb{R}$, trong đó $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi có $\text{int} X \neq \emptyset$. Với mỗi điểm $x^0 \in \text{int} X$, ta có

i) Dưới vi phân của hàm f khác rỗng, tức $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

ii) Nếu f khả vi tại x^0 thì $\partial f(x^0) = \{\nabla f(x^0)\}$.

Ví dụ. Xét hàm số

$$f(x) = |x|. \tag{1}$$

Hàm $f(x)$ là hàm lồi và không khả vi tại $x = 0$, do vậy áp dụng định lý 1.12, ta có $\partial f(x^0) = 1$ nếu $x^0 > 0$ và $\partial f(x^0) = -1$ nếu $x^0 < 0$.

Xét $x^0 = 0$, khi đó xét đẳng thức sau

$$f(x) \geq f(0) + \langle p, x - 0 \rangle,$$

đẳng thức trên tương đương

$$|x| \geq px,$$

từ đó ta thấy $p \in [-1, 1]$. Tóm lại, dưới vi phân của hàm f như sau

$$\partial f(x^0) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{nếu } x^0 = 0, \\ 1 & \text{nếu } x^0 > 0, \\ -1 & \text{nếu } x^0 < 0. \end{cases}$$

Một số tính chất.

Hệ quả 1.13. Xét hàm lồi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, khi đó $0 \in \partial f(x^0)$ khi và chỉ khi x^0 là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán min $f(x), x \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh.

($\Longrightarrow$) $0 \in \partial f(x^0)$, khi đó ta có

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle 0, x - x^0 \rangle,$$

tức $f(x) \geq f(x^0)$ hay x^0 là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán min $f(x), x \in \mathbb{R}^n$.

($\Longleftarrow$) Giả sử x^0 là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán min $f(x), x \in \mathbb{R}^n$, tức $f(x) \geq f(x^0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, khi đó ta có

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle 0, x - x^0 \rangle,$$

hay $0 \in \partial f(x^0)$. □

Mệnh đề 1.14. Xét $f_i(x), i = \overline{1, m}$ là các hàm lồi, khi đó $f(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1, m}\}$ là một hàm lồi.

Chứng minh. Ta xét ví dụ với hai hàm lồi f, g, và đặt $h = \max\{f, g\}$, ta sẽ chứng minh h là hàm lồi.

Thật vậy, do f và g là hai hàm lồi nên $\forall t \in [0, 1], z = tx + (1 - t)y$, ta có

$$f(z) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y),$$

và

$$g(z) \leqslant tg(x) + (1 - t)g(y).$$

Khi đó, với phép đặt $h = \max\{f, g\}$, ta thu được

$$f(z) \leqslant th(x) + (1 - t)h(y), \quad g(z) \leqslant th(x) + (1 - t)h(y),$$

dẫn đến $h(z) = \max\{f(z), g(z)\} \le h(x) + (1-t)h(y)$, $\forall t \in [0,1], z = tx + (1-t)y$.

Quay trở lại mệnh đề, dựa trên biến đổi

$$f(x) = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_m\} = \max\{\max\{f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\}, f_m\},$$

kết hợp với việc chứng minh mệnh đề trong trường hợp hai hàm lồi, ta thu được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.15. [11] Xét $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ là các hàm lồi và khả vi, khi đó dưới vi phân tại x^0 chứa các tổ hợp lồi các gradient ứng với từng hàm thành phần mà tại đó giá trị hàm thành phần bằng giá trị hàm f, tức là

$$\partial f(x^0) = \operatorname{conv}\{\nabla f_i(x^0) | f_i(x^0) = f(x^0)\}.$$

1.2 Hàm lồi suy rộng

Trong mục này, tác giả sẽ trình bày về các dạng hàm lồi suy rộng, bao gồm lớp hàm giả lồi, tựa lồi, nửa lồi,...

1.2.1 Một số khái niệm tổng quát

Liên tục Lipschitz

Xét $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, hàm f được gọi là liên tục Lipschitz nếu $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là Lipschitz địa phương (locally Lipschitz) nếu với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ hàm f là Lipschitz trong lân cận của x, tức tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x)$ liên tục Lipschitz trong $B(x, \varepsilon)$, tức quả cầu mở tâm x, bán kính ε.

Đạo hàm tổng quát Clarke-Rockafellar [12]

Xét X là không gian Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Giả sử rằng giá trị của hàm là hữu hạn tại mỗi điểm $x \in X$. Khi đó đạo hàm tổng quát Clarke-Rockafellar của hàm f tại x theo hướng v là

$$f^{\uparrow}(x, v) = \sup_{\varepsilon > 0} \lim_{(y,\alpha)\downarrow, x; t\downarrow 0} \sup_{u \in B(v,\varepsilon)} [f(y + tu) - \alpha]/t,$$

ở đó $(y, \alpha) \downarrow_f x$ nghĩa là $y \to x, \alpha \to f(x), \alpha \ge f(y)$, ký hiệu $t \downarrow x$ tức $t \to x+$.

Trong trường hợp f là hàm Lipschitz địa phương, đạo hàm tổng quát này chính là đạo hàm theo hướng Clarke [2] như sau

$$f^0(x, v) = \limsup_{z \to x, t\downarrow 0} [f(z + tv) - f(z)]/t.$$

Dưới vi phân tổng quát Clarke-Rockafellar

Dưới vi phân tổng quát Clarke-Rockafellar [12] của hàm f tại x là

$$\partial^{\uparrow} f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, v \rangle \le f^{\uparrow}(x, v), \forall v \in X \right\},$$

với điều kiện rằng $\partial^{\uparrow} f(x)$ bằng rỗng nếu f không hữu hạn tại x.

Đạo hàm theo hướng

Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ và một vector $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Giới hạn

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x^0 + td) - f(x^0)}{t},$$

nếu tồn tại (hữu hạn hoặc vô cùng), được gọi là *đạo hàm theo hướng* [9] d của hàm f tại điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $f'(x^0, d)$.

Dưới vi phân tổng quát Clarke

Dưới vi phân tổng quát Clarke [2] của hàm f tại x là

$$\partial^{C} f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, v \rangle \le f^{0}(x, v), \forall v \in X \right\},$$

với điều kiện rằng $\partial^C f(x)$ bằng rỗng nếu f không hữu hạn tại x.

Nhận xét. Trong trường hợp f là hàm Lipschitz địa phương, dưới vi phân tổng quát Clarke Rockafellar và trùng với dưới vi phân tổng quát Clarke (theo theo Penot và Quang [12]), ngoài ra khi f là hàm lồi, khi đó f là hàm Lipschitz địa phương và dưới vi phân tổng quát Clarke trùng với dưới vi phân hàm lồi (theo Mifflin [7], Proposition 3), tức là khi f là hàm lồi, ta được hệ thức sau

$$\partial^{\uparrow} f(x) = \partial^C f(x) = \partial f(x).$$

Tựa khả vi (Quasidifferentiable)

Định nghĩa. [7] Hàm f được gọi là *tựa khả vi (quasidifferentiable)* tại x nếu $f'(x, d)$ tồn tại và bằng $f^0(x, d)$ với mỗi $d \in \mathbb{R}^n$, tức là

$$f'(x, d) = f^0(x, d), \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm nửa trơn (semismooth function)

Định nghĩa. [7] Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm nửa trơn tại $x \in \mathbb{R}^n$ nếu

i) f là Lipschitz trong lân cận của điểm x.

ii) Với mỗi hướng $d \in \mathbb{R}^n$ và với mọi dãy $\{t_k\} \subset R_+ \coloneqq \{x | x \ge 0\}, \{\theta_k\} \subset \mathbb{R}^n$ và $\{g_k\} \subset \mathbb{R}^n$, thỏa mãn

$$\{t_k\} \downarrow 0, \{\theta_k / t_k\} \to 0 \in \mathbb{R}^n \text{ và } g_k \in \partial^C f(x + t_k d + \theta_k),$$

dãy $\{\langle g_k, d \rangle\}$ có đúng một điểm tụ.

Ví dụ. Xét hàm $f(x) = |x|$. Ta xét các dưới vi phân tại điểm $x = 0$.

Thật vậy, chọn hằng số $L = 1$, hàm $f(x)$ là hàm $1-$ Lipschitz dẫn đến $f(x)$ là hàm Lipschitz địa phương (Locally Lipschitz). Khi đó, theo Penot và Quang [12], Proposition 3, ta có $\partial^{\uparrow} f(0) = \partial^{C}(0)$.

Tiếp theo, sử dụng kết quả từ ví dụ 1, ta có $\partial f(0) = [-1, 1]$. Ta xét biến đổi

$$f^0(0, v) = \limsup_{z\to 0, t\downarrow 0} \frac{f(z+tv) - f(z)}{t} = \limsup_{z\to 0, t\downarrow 0} \frac{|z+tv| - |z|}{t} \le \limsup_{z\to 0, t\downarrow 0} \frac{|z| + t|v| - |z|}{t} = |v|.$$

Bên cạnh đó, xét dãy $z_\nu = \frac{1}{\nu^2}$ and $t_\nu = \frac{1}{\nu}$, ta được

$$\begin{aligned} f^0(0; v) &= \limsup_{z\to 0, t\downarrow 0} \frac{|z+tv| - |z|}{t} \\ &\ge \lim_{\nu} \frac{|z_\nu + t_\nu v| - |z_\nu|}{t_\nu} \\ &= |v|, \end{aligned}$$

trong đó, dấu bằng cuối xảy ra do khi xét giới hạn $\nu \to +\infty$, ta tính được cụ thể giá trị và thu được kết quả là $|v|$.

Như vậy, $f^0(0, v) = |v|$. Dưới vi phân tổng quát Clarke của f tại 0 khi đó là

$$\partial^C f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \le f^0(x, v), \forall v \in X \right\},$$

tức khi đó x^* thỏa mãn $x^* v \le |v|$ hay ta thu được $\partial^C f(x) = [-1, 1]$. Tức $\partial^{\uparrow} f(0) = \partial^C f(0) = \partial f(0)$.

1.2.2 Các lớp hàm lồi suy rộng

Hàm nửa lồi (semiconvex function)

Định nghĩa. [7] Với X là một tập con trong $\mathbb{R}^n$. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm nửa lồi tại $x \in X$ nếu

a) f là Lipschitz trên quả cầu mở tâm x.

b) f là tựa khả vi tại x.

c) $x + d \in X$ và $f'(x, d) \ge 0$ dẫn đến $f(x + d) \ge f(x)$.

Hàm giả lồi (pseudoconvex function)

Định nghĩa. [4] Xét X là không gian Banach. Hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được gọi là giả lồi nếu

$$\forall x, y \in X : f(y) < f(x) \to \forall x^* \in \partial^{\uparrow} f(x) : \langle x^*, y - x\rangle < 0.$$

Trong trường hợp hàm f là giả lồi, khả vi, được định nghĩa tại [10] như sau: với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, f là hàm giả lồi trên $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nếu với mọi $x, y \in X$, ta có

$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle \ge 0 \Rightarrow f(y) \ge f(x),$$

hoặc

$$f(y) < f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0.$$

Hàm tựa lồi (quasiconvex function)

Định nghĩa. Hàm $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là tựa lồi nếu với mọi $x, y \in X, \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Hàm $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là tựa lồi nửa chặt (semistrictly quasiconvex) nếu, với mọi $x, y \in \text{ dom} f$, $f(x) \neq f(y)$, khi đó

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Hàm $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tựa lồi chặt (strictly quasiconvex) nếu $\forall x, y \in X, x \neq y$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

1.2.3 Một số tính chất các lớp hàm lồi suy rộng

Theo Mangasarian [5], trong trường hợp hàm f khả vi, hệ thức liên hệ giữa các lớp hàm như sau

Hàm lồi $\to$ Hàm giả lồi $\to$ Hàm tựa lồi chặt $\to$ Hàm tựa lồi.

Hàm nửa lồi (semiconvex function).

Mệnh đề 1.16. [7, Proposition 1]

a) $\partial^C F(x)$ là tập con lồi compact khác rỗng trên $\mathbb{R}^n$.

b) $F^o(x, d) = \max[\langle g, d \rangle : g \in \partial^C F(x)]$.

c) Nếu $\{x_k\} \subset B$ với B là một tập con mở trên $\mathbb{R}^n$ hội tụ đến x và $g_k \in \partial^C F(x_k)$ với mỗi k, khi đó $|g_k| \leq K$ và mỗi điểm tụ g của $\{g_k\}$ thỏa mãn $g \in \partial^C F(x)$.

Mệnh đề 1.17. [7, Proposition 4] Nếu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục, khi đó F là Lipschitz địa phương, $\partial^C F(x) = \{\nabla F(x)\}$ với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, và F là tựa khả vi và nửa trơn trên $\mathbb{R}^n$.

Bổ đề 1.18. [7, Lemma 2] Nếu F là hàm nửa trơn tại x thì với mỗi d thuộc $\mathbb{R}^n$, $F'(x, d)$ tồn tại và bằng $\lim_{k\to\infty}\langle g_k, d \rangle$, tại đó $\{g_k\}$ là dãy các dưới gradient của $F(x_k)$.

Định lý 1.19. [7, Theorem 6] Giả sử rằng các hàm $f_1, f_2, \dots, f_m$ là các hàm Lipschitz địa phương. X là tập con trong $\mathbb{R}^n$. Đặt $F(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1, m}\}$ và $J(x) = \{i : f_i(x) = F(x)\}$.

- Khi đó $F(x)$ là liên tục Lipschitz và với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$
$$\partial^C F(x) \subset \operatorname{conv}\{\partial^C f_i(x), i \in J(x)\}.$$
- Nếu $f_1, f_2, \dots, f_m$ là các hàm nửa trơn trên X thì F là hàm nửa trơn trên X.
- Nếu $f_1, f_2, \dots, f_m$ là các hàm nửa lồi (tựa khả vi) trên X, khi đó F là hàm nửa lồi (tựa khả vi) trên X và với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$,
$$\partial^C F(x) = \operatorname{conv}\{\partial^C f_i(x) : i \in J(x)\}.$$

Mệnh đề 1.20. [6, 7] Hàm f là hàm nửa lồi và khả vi thì f là hàm giả lồi.

Mệnh đề 1.21. [5] Xét X là một tập lồi trong $\mathbb{R}^n$. Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm giả lồi, khả vi thì mọi nghiệm tối ưu địa phương cũng là nghiệm tối ưu toàn cục.

2 Một số bài toán quy hoạch lồi suy rộng

2.1 Quy hoạch giả lồi

Bài toán quy hoạch giả lồi được xác định là bài toán tối ưu hóa (cực đại hóa hoặc cực tiểu hóa) với hàm mục tiêu là *hàm giả lồi.*

Trong mục này, tác giả tập trung xét lớp hàm giả lồi, khả vi cùng với các mệnh đề, tính chất đi kèm.

Mệnh đề 2.1. [3] Giả sử rằng f khả vi trên tập lồi C. Khi đó, ba điều kiện sau tương đương

i) f là hàm giả lồi trên C.

ii) $x, y \in C$ và $\langle \nabla f(x), y - x \rangle > 0 \Longrightarrow \langle \nabla f(y), y - x \rangle > 0$.

iii) $x, y \in C$ và $\langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle \nabla f(x), x - y \rangle \geq 0$.

Chứng minh.

Ràng buộc ii) và iii) là tương tự nhau, do vậy ta sẽ chứng minh tính tương đương giữa ràng buộc i) và iii).

Giả sử rằng ràng buộc iii) thỏa mãn, tuy nhiên ràng buộc i) không thỏa mãn, tức f không là hàm giả lồi. Khi đó tồn tại $x, y \in C$ sao cho $f(y) < f(x)$ và $\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$.

Khi đó, theo điều kiện iii), $\langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle \geq 0$ với mọi $t \in (0,1)$. Dẫn đến $f(y) \geq f(x)$, vô lý.

Tiếp theo, giả sử f là hàm giả lồi và điều kiện iii) không thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $x, y \in C$ sao cho

$$\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0 \quad \text{và} \quad \langle \nabla f(y), x-y \rangle > 0.$$

Ta có f là hàm giả lồi nên từ đó bất đẳng thức đầu tiên, ta có $f(y) \geq f(x)$, ngược lại với đẳng thức $f(x) > f(y)$ thu được từ bất đẳng thức thứ hai. Khi đó, ta có điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 2.2. [3] Giả sử f khả vi trên tập lồi C. Khi đó hai điều kiện dưới đây tương đương nhau

i) f là hàm giả lồi chặt (strictly pseudoconvex) trên C, tức là

$$\forall x, y \in C, \langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0 \Longrightarrow f(y) > f(x).$$

ii) $x, y \in C, x \neq y$ và $\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle \nabla f(y), y-x \rangle > 0$.

Chứng minh.

Giả sử điều kiện ii) thỏa mãn, tuy nhiên i) không thỏa mãn, tức f không là hàm giả lồi chặt. Khi đó, tồn tại $x, y \in C, x \neq y$ sao cho $f(y) \leq f(x)$ và $\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$. Khi đó, theo điều kiện ii), $\langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle > 0$ với mọi $t \in (0,1)$. Dẫn đến $f(y) > f(x)$, vô lý.

Ngược lại, giả sử rằng f là hàm giả lồi chặt, tuy nhiên điều kiện ii) không thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $x, y \in C, x \neq y$ sao cho $\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$ và $\langle \nabla f(y), x-y \rangle \geq 0$. Dựa trên tính giả lồi chặt, ta đưa về hai bất đẳng thức $f(y) > f(x)$ và $f(x) > f(y)$, dẫn đến điều vô lý hay ta có điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 2.3. [3] Giả sử rằng f là hàm giả lồi, khả vi trên tập lồi C. Giả sử $x \in C$ và $\nabla f(x) = 0$. Khi đó, x là nghiệm tối ưu toàn cục của f trên C.

Định lý 2.4. [3] Giả sử rằng f khả vi trên tập lồi mở C.

i) Nếu f là hàm giả lồi trên C, khi đó f là hàm tựa lồi trên C đạt nghiệm tối ưu toàn cục tại bất kỳ điểm $x \in C$ thỏa mãn $\nabla f(x) = 0$.

ii) Nếu f là hàm tựa lồi trên C và có nghiệm tối ưu địa phương $x \in C$ thỏa mãn $\nabla f(x) = 0$, khi đó f là hàm giả lồi trên C.

Định lý 2.5. [10] Cho $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi mở khác rỗng và hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi. Khi đó,

i) Nếu f là hàm giả lồi trên X thì f vừa là hàm tựa lồi chặt vầ là hàm tựa lồi trên X.

i) Nếu f là hàm giả lõm trên X thì f vừa là hàm tựa lõm chặt vừa là hàm tựa lõm trên X.

Ví dụ về lớp bài toán quy hoạch giả lồi là lớp hàm phân thức, được trình bày cụ thể hơn dưới đây

Lớp hàm phân thức

Ví dụ. Hàm phân thức afin $f : X \to \mathbb{R}$ vừa là hàm giả lồi, vừa là hàm giả lõm trên X, trong đó

$$f(x) = \frac{\langle a, x\rangle + a_0}{\langle b, x\rangle + b_0},$$

với $a, b \in \mathbb{R}^n$ và $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ và $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x\rangle + b_0 > 0\}$.

Chứng minh. Xét hàm $f(x)$ khả vi trên X. Giả sử đang xét $x^1, x^2 \in X$ thỏa mãn

$$\left\langle \nabla f\left(x^1\right), x^2 - x^1\right\rangle \geq 0,$$

trong đó

$$\nabla f\left(x^1\right) = \frac{\left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] a - \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] b}{\left[\langle b, x^1\rangle + b_0\right]^2}.$$

Ta cần chi ra $f\left(x^2\right) \geq f\left(x^2\right)$. Thật vậy, do

$$\left\langle \nabla f\left(x^1\right), x^2 - x^1\right\rangle \geq 0 \text{ và } \left(\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right)^2 > 0,$$

nên ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle \left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] a - \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] b, x^2 - x^1\right\rangle \\
&= \left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] \left\langle a, x^2 - x^1\right\rangle - \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] \left\langle b, x^2 - x^1\right\rangle \\
&= \left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] \left[\left\langle a, x^2\right\rangle - \left\langle a, x^1\right\rangle\right] - \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] \left[\left\langle b, x^2\right\rangle - \left\langle b, x^1\right\rangle\right] \\
&= \left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] \left[\left\langle a, x^2\right\rangle + a_0 - \left\langle a, x^1\right\rangle - a_0\right] \\
&- \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] \left[\left\langle b, x^2\right\rangle + b_0 - \left\langle b, x^1\right\rangle - b_0\right] \\
&= \left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] \left[\left\langle a, x^2\right\rangle + a_0\right] - \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] \left[\left\langle b, x^2\right\rangle + b_0\right].
\end{aligned}$$

Từ đó, ta thu được biểu thức sau

$$\left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] \left[\left\langle a, x^2\right\rangle + a_0\right] \geq \left[\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0\right] \left[\left\langle b, x^2\right\rangle + b_0\right]$$

Do $\left[\left\langle b, x^1\right\rangle + b_0\right] > 0$ và $\left[\left\langle b, x^2\right\rangle + b_0\right] > 0$ nên ta thu được

$$\frac{\left\langle a, x^2\right\rangle + a_0}{\langle b, x^2\rangle + b_0} \geq \frac{\left\langle a, x^1\right\rangle + a_0}{\langle b, x^1\rangle + b_0} \text{ tức là } f\left(x^2\right) \geq f\left(x^1\right).$$

Theo định nghĩa, ta có $f(x)$ là hàm giả lồi trên X. Lập luận tương tự ta có $f(x)$ là hàm giả lõm trên X. □

2.2 Quy hoạch tựa lồi có cấu trúc

Trong mục này, tác giả đề cập đến bài toán quy hoạch tựa lồi có cấu trúc, khi đó hàm mục tiêu là một tập hợp các hàm tựa lồi qua một toán tử cho trước.

Ta xét ánh xạ $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Đặt $f_1, f_2, \ldots, f_k$ là các thành phần của f, được biểu thị như sau

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)) \quad (x \in C).$$

Định lý 2.6. [1] Giả sử rằng h là một hàm tựa lồi, ánh xạ từ tập $C \subseteq \mathbb{R}^k$ đến $\mathbb{R} \cup \infty$, và $\{I_1, I_2, I_3\}$ là tập chỉ số được trích từ $\{1, 2, \ldots, k\}$ sao cho h là hàm không giảm ứng với các chỉ số của I_1 và không tăng với các chỉ số của I_2, và g ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}^k$ sao cho các thành phần g_i là hàm lồi với $i \in I_1$, hàm lõm với $i \in I_2$, và hàm afin $i \in I_3$. Khi đó hàm hợp

$$f = h \circ g,$$

là tựa lồi. Nếu có thêm điều kiện h là hàm lồi, khi đó f cũng là hàm lồi.

Dựa trên nghiên cứu này, Agrawal et al. [1] đã đề xuất và xây dựng lớp bài toán quy hoạch tựa lồi có cấu trúc như sau

S	$\to$ QCVX
S	$\to$ QCCV
LEAF	$\to$ constant
LEAF	$\to$ variable
AFF	$\to$ LEAF
AFF	$\to$ aff(AFF, . . . , AFF)
CVX	$\to$ AFF
CVX	$\to$ cvx(CVX, . . . , CVX, CCV, . . . , CCV, AFF, . . . , AFF)
CCV	$\to$ AFF
CCV	$\to$ ccv(CCV, . . . , CCV, CVX, . . . , CVX, AFF, . . . , AFF)
QCVX	$\to$ CVX
QCVX	$\to$ qcvx(CVX, . . . , CVX, CCV, . . . , CCV, AFF, . . . , AFF)
QCVX	$\to$ incr(QCVX)
QCVX	$\to$ decr(QCCV)
QCVX	$\to$ max{QCVX, . . . , QCVX}
QCCV	$\to$ CCV
QCCV	$\to$ qccv(CCV, . . . , CCV, CVX, . . . , CVX, AFF, . . . , AFF)
QCCV	$\to$ incr(QCCV)
QCCV	$\to$ decr(QCVX)
QCCV	$\to$ min{QCCV, . . . , QCCV}

Hình 4: Bài toán quy hoạch tựa lồi có cấu trúc

Trong đó, các ký hiệu AFF, CVX, CCV, QCVX, QCCV lần lượt biểu thị hàm affine, hàm lồi, hàm lõm, hàm tựa lồi, hàm tựa lõm. Các thành phần viết in thường, biểu thị tính chất của từng hàm thành phần (chẳng hạn cvx là hàm thành phần là lồi). Ký hiệu LEAF là các nút lá trong biểu diễn biểu thức đại số dưới dạng đồ thị, tham khảo thêm tại [1]. Ký hiệu incr, decr là lần lượt biểu thị hàm không giảm và không tăng, cùng với constant, variable lần lượt là hằng số và biến.

2.3 Quy hoạch giả lồi có cấu trúc

Bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc được xây dựng dựa trên bài toán quy hoạch giả lồi, với hàm mục tiêu có thể là tập hợp các hàm giả lồi, qua một ánh xạ hay toán tử tăng, toán tử $\min, \max$, toán tử tuyến tính,...

Trong bài báo cáo, tác giả tập trung nghiên cứu về bài toán MP (Minimax Problem) với hàm mục tiêu là max của các hàm giả lồi, khả vi liên tục.

Bên cạnh đó, tác giả đã chứng minh được max của các hàm giả lồi, khả vi liên tục là hàm giả lồi, không trơn.

Định lý 2.7. *[Nguyễn Đức Ánh]* Xét hàm $f_i : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$ là các hàm giả lồi, khả vi liên tục. Đặt $F(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1,m}\}$. Khi đó $F(x)$ là hàm giả lồi.

Chứng minh.

Áp dụng mệnh đề 1.17, các hàm $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ là các hàm Lipschitz địa phương và dưới vi phân tổng quát của các hàm f_i là $\partial^C f_i(x) = \{\nabla f_i(x)\}$.

Với $f_i, i = \overline{1,m}$ là các hàm Lipschitz địa phương, áp dụng định lý 1.19[c], ta có

$$\partial^C F(x) = \text{ conv}\{\partial^C f_i(x), f_i(x) = F(x)\}.$$

Dựa trên định nghĩa của hàm giả lồi tổng quát, giả sử $F(y) < F(x)$, tức là với mỗi $i = \overline{1,m}$ thỏa mãn $f_i(x) = F(x)$, $F(y) < f_i(x)$ hay $f_i(y) \le F(y) < f_i(x)$, khi đó do f_i là các hàm giả lồi, khả vi dẫn đến ta có $\langle \nabla f_i(x), y - x \rangle < 0$.

Từ đó lấy tổ hợp lồi của các $\nabla f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ mà tại đó $f_i(x) = F(x)$, ta có với mọi $x^* \in \partial^C F(x)$, tức $x^* = \sum\limits_{f_i(x)=F(x)} u^i \nabla f_i(x)$, dẫn đến $\langle x^*, y-x \rangle = \left\langle \sum\limits_{f_i(x)=F(x)} u^i \nabla f_i(x), y - x \right\rangle = \sum u^i \langle \nabla f_i(x), y - x \rangle < 0$ hay $F(x)$ là hàm giả lồi. □

2.4 Bài toán MP

Bài toán MP (Minimax Problem)

Xét $f_i(x)$ là các hàm giả lồi, khả vi liên tục, $i = \overline{1,m}$. Bài toán minimax được xây dựng với mục tiêu tìm

$$\min F(x) := \max\{f_i(x)\}, \quad i = \overline{1,m}, x \in \mathbb{R}^n.$$

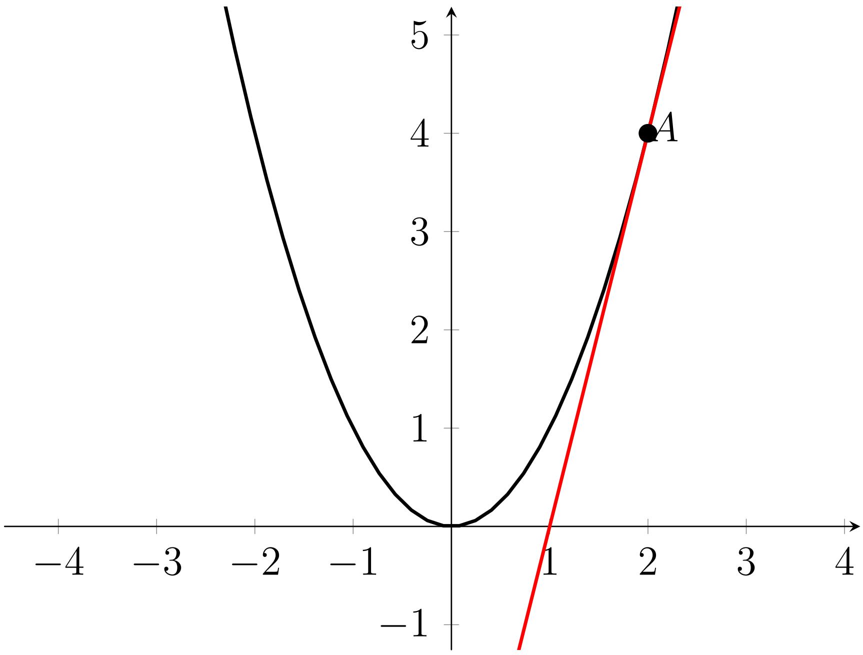
Trong báo cáo này, tác giả nghiên cứu về phương pháp hướng giảm sâu nhất giải bài toán MP (Minimax Problem).

3 Thuật toán hướng giảm sâu nhất giải bài toán MP

3.1 Cơ sở lý thuyết thuật toán

Phương pháp tuyến tính hóa: Ý tưởng của phương pháp tuyến tính hóa là phương pháp xấp xỉ một hàm phi tuyến thành một hàm tuyến tính trong lân cận của điểm cho trước.

Ta xét trong không gian một chiều, bản chất của phương pháp tuyến tính hóa là tiếp tuyến của đồ thị hàm số, ví dụ như sau



Hình 5: Đồ thị hàm f trên một đoạn cho trước

Ví dụ. Xét hàm $f(x) = x^2$, khi đó tiếp tuyến tại $x = 2$ là $g(x) = f'(2)(x-2)+f(2) = 4(x-2)+4 = 4x-4$ là xấp xỉ tuyến tính hóa của hàm $f(x)$ tại lân cận của điểm $x = 2$.

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, xấp xỉ tuyến tính hóa hàm $f(x)$ tại lân cận của điểm x_0, theo hướng giảm p được viết tổng quát như công thức sau $\langle f'(x_0), p\rangle + f(x_0)$.

3.2 Ý tưởng thuật toán

Pshenichny và Danilin [13] đề xuất thuật toán dựa trên ý tưởng việc dùng phương pháp tuyến tính hóa, bên cạnh đó ta đánh giá việc tìm $\min F(x) := \max\{f_i(x), i = \overline{1,m}\}$ bằng việc xét biến mới x^{m+1} sao cho $x^{m+1} \geq F(x)$, khi đó x^* - nghiệm tối ưu địa phương của hàm $F(x)$ cũng là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} &\min\ g_o(x, x^{m+1}) = x^{m+1}, \\ &\text{v.d.k}\ g_i(x, x^{m+1}) \equiv f_i(x) - x^{m+1} \leq 0, i = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

Ta xét bài toán con sau

$$\min\ \beta + \frac{1}{2}\|p\|^2, \tag{2}$$

với ràng buộc dưới đây

$$\langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x) - \beta(x) \leq 0, i \in J_\delta(x),$$

ở đó, $\delta > 0$ và $J_\delta(x) = \{i = \overline{1,m} : f_i(x) \geq F(x) - \delta\}$. Tại đó, $F(x)$ được xấp xỉ bởi đại lượng b, và thêm thành phần $\frac{1}{2}\|p\|^2$ để đảm bảo hàm mục tiêu không giảm xuống vô cùng hay không tồn tại nghiệm tối ưu, đồng thời đưa bài toán về dạng toàn phương.

Ràng buộc của bài toán được tuyến tính hóa, tức với mỗi $i \in J_\delta(x)$, ta thực hiện tuyến tính hóa đại lượng $f_i(x)$ trong lân cận của điểm x dưới dạng $\langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x)$ với ràng buộc $\langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x) \leq \beta$.

Việc sử dụng kết hợp giữa phương pháp tuyến tính hóa và xấp xỉ hàm không trơn thành một biến đại diện là cơ sở để dùng định lý KKT cho bài toán quy hoạch lồi dạng toàn phương, sẽ được thảo luận cụ thể ở phần tiếp theo.

3.3 Phát biểu thuật toán

Dựa trên nghiên cứu của Pshenichny và Danilin [13], tác giả nghiên cứu và đề xuất thuật toán cũng như chứng minh sự hội tụ của thuật toán với lớp các hàm thành phần là hàm giả lồi, khả vi liên tục.

Thuật toán 3.1. Xét $F(x) = \max\{f_i(x)\}, i = \overline{1,m}, x \in \mathbb{R}^n$.
Bước 0. Điểm xấp xỉ đầu x_0, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \kappa \in (0,1), \delta > 0, k = 0$.
Bước 1. Tại bước lặp thứ k, tìm p_k là nghiệm của bài toán phụ tại x_k, tức tìm nghiệm cực tiểu của bài toán

$$\beta + \frac{1}{2}\|p\|^2, \tag{3}$$

với ràng buộc dưới đây

$$\langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x) - \beta(x) \leq 0, i \in J_\delta(x),$$

ở đó, $\delta > 0$ và $J_\delta(x) = \{i = \overline{1,m} : f_i(x) \geq F(x) - \delta\}$.
Bước 2. Duyệt $\alpha_k = \kappa^{i_0}$ với i_0 là chỉ số đầu tiên trong dãy $\{0,1,2,\ldots\}$ thỏa mãn $F(x_k + \alpha_k p_k) \leq F(x_k) - \alpha_k \varepsilon \|p_k\|^2$, đặt $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.
Bước 3. Cập nhật $k = k + 1$. Nếu $x_{k+1} = x_k$ thì dừng ngược lại đến **Bước 1**.

3.4 Chứng minh sự hội tụ của thuật toán

Xét bài toán phụ tại 3, đây là bài toán quy hoạch lồi, tại đó điều kiện Slater thỏa mãn khi ta chọn $\beta(x)$ đủ lớn, khi đó $p(x)$ và $\beta(x)$ là nghiệm của bài toán 3 khi và chỉ khi tồn tại $u_i \geq 0$, $i \in J_\delta(x)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \sum_{i\in J_\delta(x)} u^i = 1, \\ p(x) + \sum_{i\in J_\delta(x)} u^i f_i'(x) = 0, \\ u^i(\langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x) - \beta(x)) = 0. \end{cases}$$

$p = 0, \beta(x) = F(x)$ là một nghiệm chấp nhận được của bài toán 3, khi đó ta được

$$\beta(x) + \frac{1}{2}\|p(x)\|^2 \leq F(x).$$

Định lý 3.2. Xét $f_i(x), i = \overline{1,m}$ là các hàm giả lồi, khả vi liên tục, miền $\Omega = \{x : F(x) \leq F(x_0)\}$ bị chặn và $f_i'(x)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên miền Ω với tham số L. Khi đó với mọi điểm tới hạn x_* của dãy $\{x_k\}, k = 0, 1, \ldots,$ được sinh ra từ thuật toán sẽ thỏa mãn điều kiện cần về nghiệm tối ưu của bài toán MP. Bên cạnh đó, x^* là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán MP.

Đặt $p_k \equiv p(x_k), \beta_k \equiv \beta(x_k)$.

Xét $i \in J_\delta(x_k)$, ta có

$$\begin{aligned} f_i(x_k + \alpha p_k) &= f_i(x_k) + \alpha\langle f_i'(x_k), p_k\rangle + \alpha\langle f'(\theta_k) - f_i'(x_k), p_k\rangle \\ &\leq f_i(x_k) + \alpha\langle f_i'(x_k), p_k\rangle + L\alpha^2\|p_k\|^2, \end{aligned}$$

tại đó $\theta_k = x_k + \alpha_k\eta p_k$, $\eta \in (0, 1)$.

Với $i \notin J_\delta(x)$, khi đó

$$\begin{aligned} f_i(x_k + \alpha p_k) &= f_i(x_k) + \alpha\langle f'(\theta_{k0}), p_k\rangle \\ &\leq f_i(x_k) + \alpha K\|p_k\| \\ &\leq F(x_K) - \delta + \alpha K\|p_k\|, \end{aligned}$$

ở đó $K = \max_{x\in\Omega} \left\|f_i'(x)\right\|$.

Xét $i \in J_\delta(x_k)$, ta được

$$\begin{aligned} f_i(x_k + \alpha p_k) &\leq f_i(x_k) + \alpha\langle f_i'(x_k), p_k\rangle + L\alpha^2\|p_k\|^2 \\ &\leq f_i(x_k) + \alpha(\beta(x_k) - f_i(x_k)) + L\alpha^2\|p_k\|^2 \\ &\leq (1-\alpha)f_i(x_k) + \alpha\left(F(x_k) - \frac{1}{2}\|p_k\|^2\right) + L\alpha^2\|p_k\|^2 \\ &\leq F(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|p_k\|^2 + L\alpha^2\|p_k\|^2. \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $0 \leq \alpha \leq \alpha_k^1$, $\alpha_k^1 = \dfrac{\delta}{\|p_k\|\left(K + \frac{1}{2}\|p_k\|\right)}$, khi đó ta có

$$f_i(x_k + \alpha p_k) \leq F(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|p_k\|^2 + L\alpha^2\|p_k\|^2 \quad i = \overline{1,m},$$

tương đương với $F(x_k + \alpha p_k) \le F(x_k) - \dfrac{\alpha}{2}\|p_k\|^2 + L\alpha^2\|p_k\|^2, i = \overline{1,m}$.

Khi đó, với $i = \overline{1,m}$,

$$F(x_k + \alpha p_k) \le F(x_k) - \alpha\|p_k\|^2\left(\frac{1}{2} - \alpha L\right),$$

với cách chọn $0 \le \alpha \le \alpha'_k := \dfrac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{L}$, ta thu được đẳng thức sau

$$F(x_k + \alpha p_k) \le F(x_k) - \alpha\|p_k\|^2\varepsilon; \quad i = \overline{1,m}.$$

Tóm lại, với $0 \le \alpha \le \overline{\alpha}_k$, $\overline{\alpha}_k = \min\{1, \alpha_k^1, \alpha'_k\}$, ta có

$$F(x_k + \alpha p_k) \le F(x_k) - \alpha\|p_k\|^2\varepsilon; \quad i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Sau mỗi vòng lặp, với đầu vào $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, ta có $\alpha_k\|p_k\|^2 \to 0$ khi $k \to \infty$. Ta đi chứng minh $\|p_k\| \to 0, k \to \infty$. Ngược lại, giả sử $\alpha_k \to 0, k \to \infty$. Bằng việc chọn chỉ số i_0 đầu tiên trong dãy $i = \{0, 1, \dots,\}$ thỏa mãn với $\alpha_k = \kappa^{i_0}$, ta thu được 4, và $\alpha_k > \kappa\overline{\alpha}_k$, khi đó nếu $\alpha_k \to 0$, dẫn tới $\|p_k\| \to \infty$ khi $k \to \infty$, tuy nhiên, p_k bị chặn trên Ω, vô lý. Do đó, $\|p_k\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Xét bài toán phụ 3, xét $i \in J_\delta(x_k)$, khi đó nếu $i \notin J_\delta(x_k)$, ta gán $u_k^i = 0$, khi đó điều kiện cần và đủ về nghiệm tối ưu của bài toán 3 được biểu thị như sau

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_k^i = 1, \\ p(x_k) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_k^i f'_i(x_k) = 0, \\ u_k^i(\langle f'_i(x_k), p_k\rangle + f_i(x_k) - \beta(x_k)) = 0. \end{cases}$$

Với $i \in J_\delta(x_k)$ và $f_i(x_k) = F(x_k)$, ta có

$$\beta_k \ge f_i(x_k) - \langle f'_i(x_k), p(x_k)\rangle \ge F(x_k) - K\|p_k\|,$$

và $\beta_k \le F(x_k) - \dfrac{1}{2}\|p_k\|^2$, vì vậy với mỗi điểm tới hạn x^* được sinh ra từ thuật toán từ dãy $\{x_k\}$, ta có $\beta_k \to F(x^*)$ khi $k \to \infty$. Khi đó điểm tới hạn x^* sẽ thỏa mãn một vài điều kiện dưới đây

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \overline{u}^i = 1, \overline{u}^i \ge 0, i = \overline{1,m}; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \overline{u}^i f'_i(x^*) = 0, \\ \overline{u}^i(f_i(x^*) - F(x^*)) = 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Xét $J(x^*) = \{i = \overline{1,m}, f_i(x^*) = F(x^*)\}$ và $\overline{u}^i \ge 0, i = \overline{1,m}$, khi đó với $i \notin J(x^*)$, ta có $\overline{u}^i = 0$ hay ta có thể đưa điều kiện trên dạng như sau

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in J(x^*)} \overline{u}^i = 1, \\ \sum\limits_{i \in J(x^*)} \overline{u}^i f_i'(x^*) = 0, \\ \overline{u}^i (f_i(x^*) - F(x^*)) = 0, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Áp dụng mệnh đề 1.17, các hàm $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ là các hàm Lipschitz địa phương và dưới vi phân tổng quát của các hàm f_i là $\partial^C f_i(x^*) = \{\nabla f_i(x^*)\}$.

Với $f_i, i = \overline{1, m}$ là các hàm Lipschitz địa phương, áp dụng định lý 1.19[c], ta có

$$\partial^C F(x^*) = \text{ conv}\{\partial f_i(x^*), i \in J(x^*)\}.$$

Khi đó, ta thấy rằng $0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{u}^i f_i'(x^*) \in \text{ conv}\{\partial^C f_i(x^*), i \in J(x^*)\} = \partial^C F(x^*)$.

Theo định lý 1.19[c], $F(x)$ là một hàm nửa lồi, khi đó tựa khả vi tại x. Do F là tựa khả vi tại x, theo định nghĩa ta có $F'(x, d)$ tồn tại $\forall d \in \mathbb{R}^n$ và $F'(x, d) = F^0(x, d)$.

Khi đó, theo định nghĩa $\partial^C F(x^*)$, ta có $0 \in \partial^C F(x^*)$ dẫn đến $F^0(x^*, d) \geq 0$ với mọi $d \in \mathbb{R}^n$. Hàm $F(x)$ là hàm nửa lồi, tức hàm $F(x)$ là hàm tựa khả vi hay ta có $0 \leq F^0(x^*, d) = F'(x^*, d) = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{F(x^* + td) - F(x^*)}{t}$ với mọi $d \in \mathbb{R}^n$, từ đó $F(x^* + td) \geq F(x^*)$ $\forall d \in \mathbb{R}^n$ dẫn đến x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán.

Bản chất thì $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq F(x_0)\}$ nên nếu bài toán MP có nghiệm tối ưu địa phương hay toàn cục thì nghiệm đó sẽ thuộc Ω. Bên cạnh đó, xét với mọi hướng giảm $d \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $x^* + d \in \Omega$, khi đó do F là hàm nửa lồi tại x^*, theo định nghĩa, $F'(x^*, d) \geq 0$, dẫn đến $F(x^* + d) \geq F(x^*)$. Khi đó, với mỗi điểm $x \in \Omega$, tồn tại $d \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x = x^* + d$ hay $F(x) \geq F(x^*)$, $\forall x \in \Omega$, hay x^* là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán MP. □

4 Chạy ví dụ minh họa

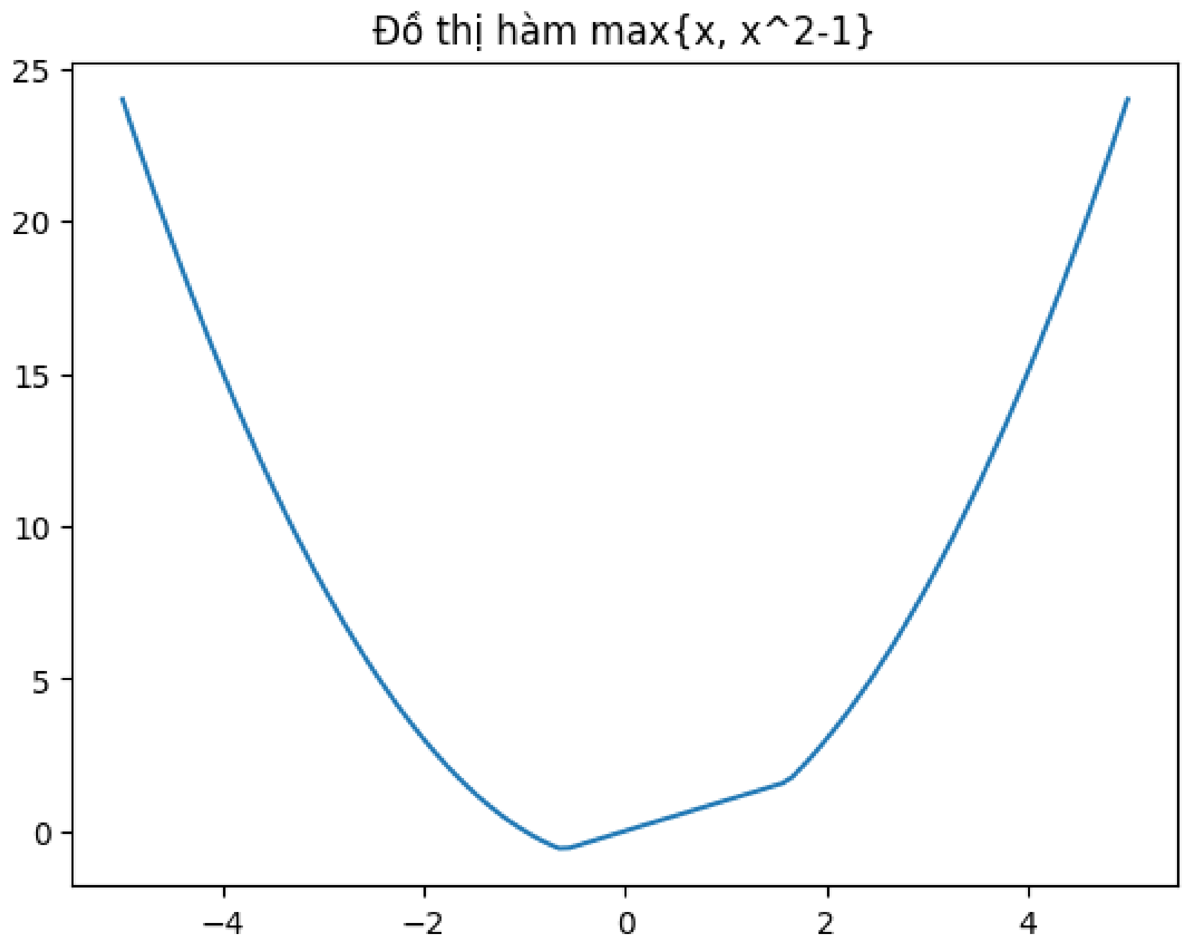
Trong mục này, tác giả thực hiện chạy chương trình, và sau đó so sánh kết quả việc thực hiện thuật toán với các ví dụ trong các bài viết khác nhau để quan sát sự hội tụ của thuật toán.

4.1 Ví dụ với hai hàm lồi đơn biến

Trước hết, ta xét ví dụ với hai hàm lồi, đơn biến.

Ví dụ 1

Xét bài toán MP, hàm $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa $F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, trong đó $f_1(x) = x$ và $f_2(x) = x^2 - 1$.

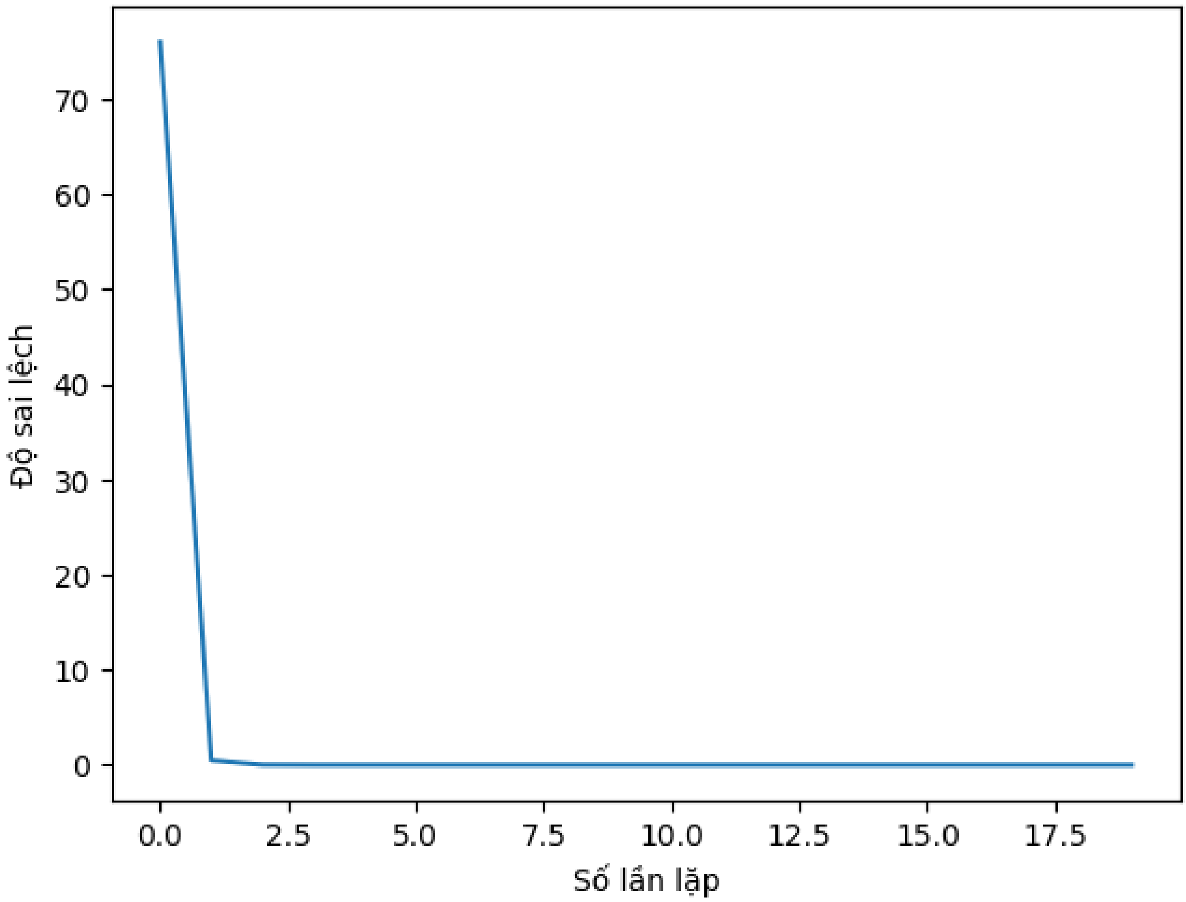


Hình 6: Đồ thị ví dụ 1

Thực hiện giải bài toán, ta thấy nghiệm tối ưu của bài toán là A với tọa độ xấp xỉ $(-0.618, -0.618)$, cụ thể tại đó nghiệm tối ưu $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Thực hiện khởi tạo ban đầu các tham số $x_0 = 5.0$, $\kappa = 0.5$, $\varepsilon = 0.4$, $\delta = 0.3$, số lần lặp là 20.

Dựa trên thực nghiệm, ta thu được hướng giảm tại thời điểm dừng thuật toán là $p = 2.054220057335558e{-}10$, tức là $p \to 0$ hay dựa trên chứng minh sự hội tụ, ta thấy rằng dãy lặp dần đến nghiệm tối ưu của bài toán. Cụ thể, tại đó điểm dừng thu được là $x^* = -0.6180339887498698$ cùng với giá trị tối ưu $F(x^*) = -0.6180339887498698$, và giá trị $b(x^*)$ khi đó là -0.6180339887498698. Độ lệch của $F(x_k) - b(x_k)$ theo 20 bước lặp được hiển thị như hình sau



Hình 7: Độ sai lệch theo số lần lặp của ví dụ 1

Như vậy, ta thấy rằng kết quả thực nghiệm phù hợp với kết quả về mặt lý thuyết, thu được từ việc chứng minh sự hội tụ nghiệm tối ưu dựa trên thuật toán.

4.2 Ví dụ với hai hàm giả lồi, ba biến

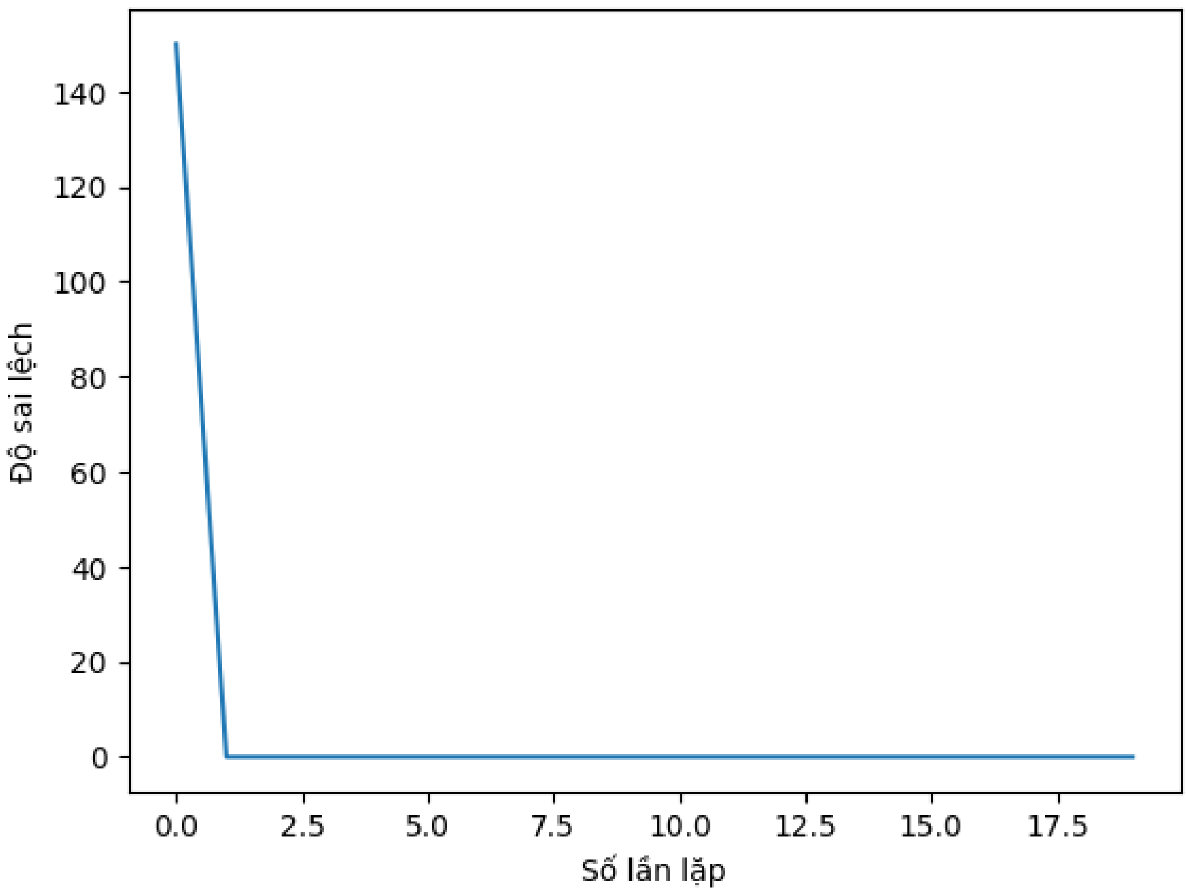
Tiếp theo, tác giả xét ví dụ với trường hợp hai hàm giả lồi ba biến.

Ví dụ 2

Xét hàm $F : X \to \mathbb{R}$ và bài toán $\min F(x) := \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, trong đó $f_1(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$, $f_2(x) = \dfrac{3x_0 - 2x_1 + 4x_2}{2x_0 + x_1 + 3x_2 + 1}$, ở đó $X := \{x = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_0 + x_1 + 3x_2 + 1 > 0\}$.

Ta thấy rằng $F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \geq f_1(x)$, và $f_1(x)$ bị chặn dưới bởi 0 (dấu bằng xảy ra khi $x = [0, 0, 0]^T$, đồng thời khi đó $f_2(x) = 0$, do vậy nghiệm tối ưu của bài toán là $x = [0, 0, 0]^T$.

Quay lại việc thực thi chương trình, ta khởi tạo tham số $x_0 = [5.0, 4.0, -3.0], \varepsilon = 0.4, \kappa = 0.5, \delta = 0.3$, số lần lặp là 20. Khi đó, ta thu được hướng giảm tại thời điểm dừng là $p = [4.57179133e-07, 3.44265687e-07, -1.78632499e-07]$, điểm dừng khi đó là $x = [-3.7252903e-09, -3.7252903e-09, -3.7252903e-09]$ cùng với giá trị tối ưu tương ứng là $F(x) = 4.163336340880842e-17$. Bên cạnh đó, $\beta(x)$ tương ứng là $4.163336340880842e-17$. Đồ thị sai số giữa $b(x_k)$ và $F(x_k)$ được biểu diễn như sau



Hình 8: Độ sai lệch theo số lần lặp của ví dụ 2

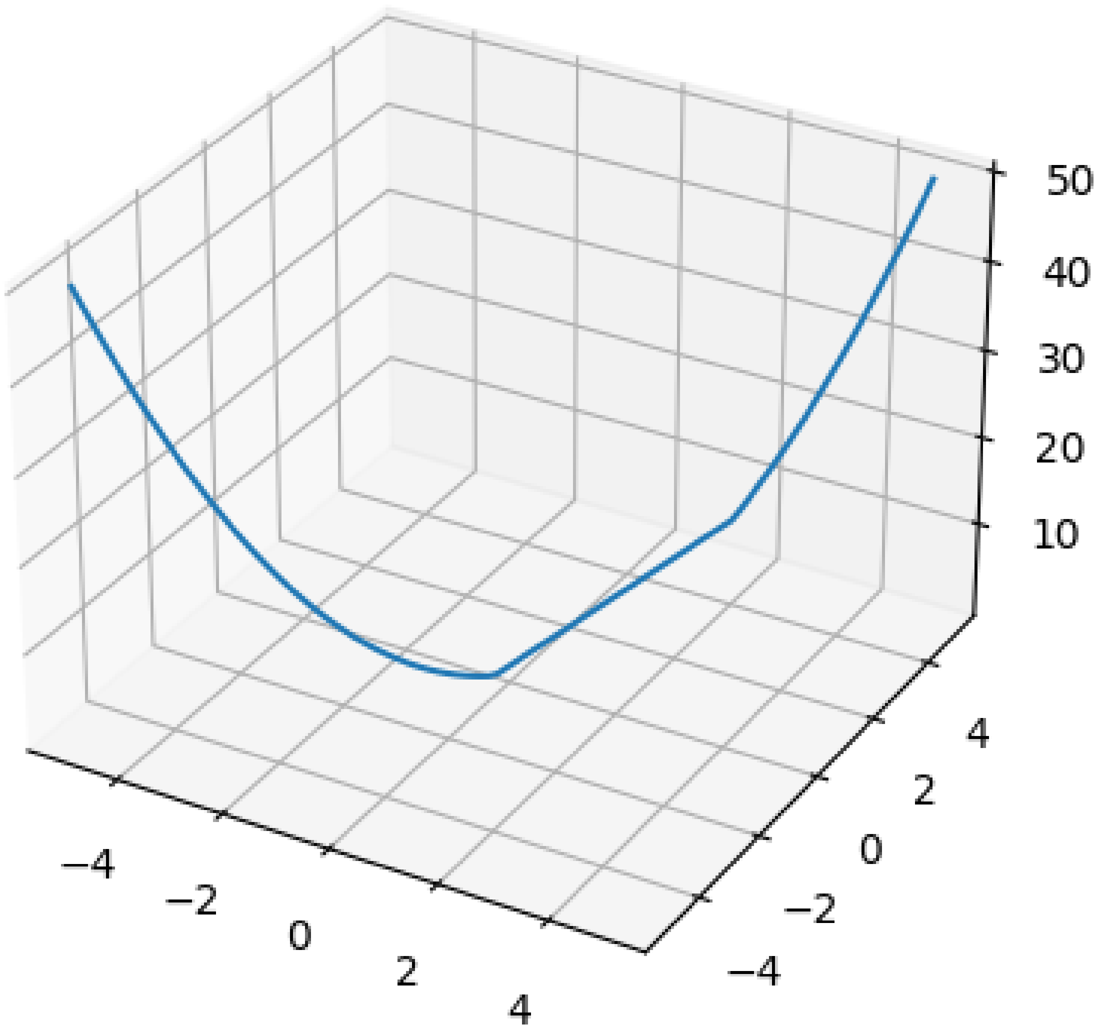
Như vậy, ta thấy rằng kết quả thực nghiệm phù hợp với kết quả về mặt lý thuyết, thu được từ việc chứng minh sự hội tụ nghiệm tối ưu dựa trên thuật toán.

4.3 Ví dụ với ba hàm giả lồi, hai biến

Tiếp theo, tác giả xét ví dụ với trường hợp ba hàm giả lồi, 2 biến.

Ví dụ 3

Xét hàm $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ và bài toán $\min F(x) := \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$, trong đó $f_1(x) = x_0^2 + x_1^2,\ f_2(x) = 2x_0 + 3x_1,\ f_3(x) = \dfrac{x_0^2 + x_1^2}{x_0^2 + x_1^2 + 1}$.

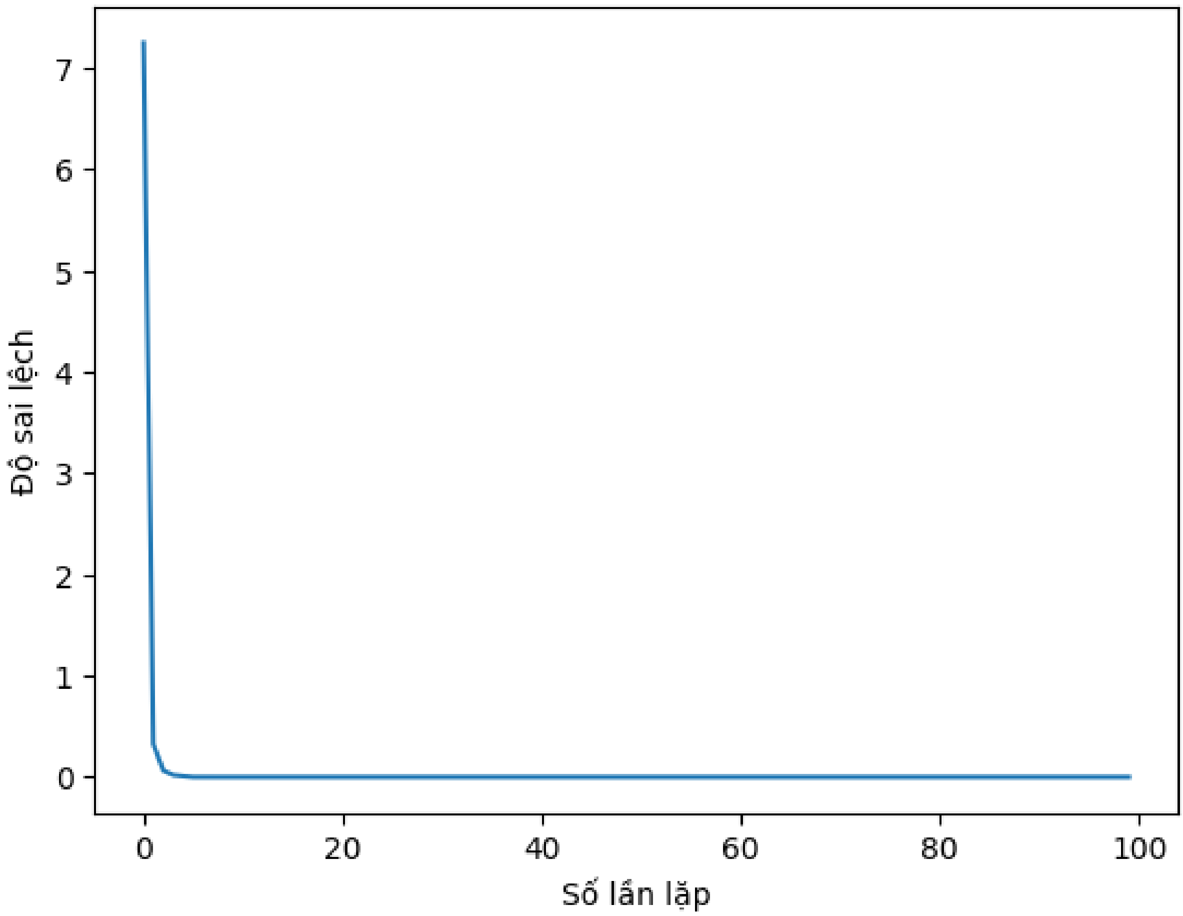


Hình 9: Đồ thị ví dụ 3

Quay trở lại chương trình, thực hiện khởi tạo $x_0 = [1.0, 1.0], \kappa = 0.5, \varepsilon = 0.4, \delta = 0.3$, số lần lặp là 100. Khi đó, hướng giảm thu được tại thời điểm dừng thuật toán là $p = -9.773609540089504e - 05$. Đồng thời, ta thu được điểm dừng là $x =$

$[-0.14358719, -0.21528666]$ cùng với giá trị tối ưu là $F(x) = 0.06696562994430566$. Bên cạnh đó, $b(x)$ tương ứng là 0.06696562994430566.

Độ sai lệch giữa $F(x_k)$ và $b(x_k)$ tại từng vòng lặp được hiển thị dưới hình sau



Hình 10: Độ sai lệch theo số lần lặp của ví dụ 3

Như vậy, ta thấy rằng kết quả thực nghiệm phù hợp với kết quả về mặt lý thuyết, thu được từ việc chứng minh sự hội tụ nghiệm tối ưu dựa trên thuật toán.

Nhận xét. Tác giả cũng đã thử các hệ số khác khi xét ví dụ trên và đều thu được kết quả sát với kết quả về nghiệm tối ưu được rút ra thông qua thực nghiệm và phác họa đồ thị, từ đó đảm bảo về sự hội tụ của thuật toán đã được chứng minh về mặt lý thuyết.

Kết luận

Kết quả đồ án

Đồ án này đã trình bày được các kiến thức liên quan đến một lớp bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc. Đồng thời, tác giả đề xuất và chứng minh định lý về tính giả lồi không trơn của tập hợp các hàm giả lồi, khả vi liên tục qua toán tử max, cùng với mở rộng kết quả của Pshenichny và Danilin [13] về nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán MP trong trường hợp các hàm thành phần là các hàm giả lồi, khả vi liên tục. Một số kết quả mà chúng tôi đạt được trong quá trình hoàn thiện đồ án này như sau:

- Trình bày nội dung lý thuyết về lớp hàm lồi, tập lồi và lớp hàm lồi suy rộng cùng các tính chất liên quan.
- Trình bày một số bài toán quy hoạch lồi suy rộng, bao gồm quy hoạch giả lồi, quy hoạch tựa lồi có cấu trúc, quy hoạch giả lồi có cấu trúc và nghiên cứu một lớp bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc là bài toán MP. Bên cạnh đó, tác giả đề xuất định lý và chứng minh định lý về tính giả lồi không trơn của tập hợp các hàm giả lồi, khả vi qua toán tử max.
- Trình bày thuật toán hướng giảm sâu nhất giải bài toán MP, cùng với chứng minh sự hội tụ của thuật toán trong trường hợp các hàm thành phần là các hàm giả lồi, khả vi liên tục.
- Code thuật toán và đạt được các kết quả như kỳ vọng.

Hướng phát triển của đề tài

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu đề tài và tiến hành bổ sung, thực hiện các ý tưởng sau

- Nghiên cứu về các lớp bài toán khác trong bài toán quy hoạch giả lồi có cấu trúc, hay mở rộng hơn là lớp bài toán quy hoạch tựa lồi có cấu trúc.
- Tìm hiểu sâu hơn về bài toán MP trong trường hợp các hàm thành phần không trơn.
- Sử dụng cỡ bước tự thích nghi (Adaptive Step Size) để tăng tốc độ hội tụ của thuật toán, giảm độ phức tạp đồng thời vẫn đảm bảo sự hội tụ của thuật toán.
- Ứng dụng cho bài toán học đa nhiệm (Multi-task Learning) trong lĩnh vực học máy (Machine Learning).

Tài liệu

[1] Akshay Agrawal and Stephen Boyd. "Disciplined quasiconvex programming". In: *Optimization Letters* 14 (2020), pp. 1643–1657.

[2] Frank H Clarke. "Generalized gradients and applications". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 205 (1975), pp. 247–262.

[3] Nicolas Hadjisavvas, Sándor Komlósi, and Siegfried S Schaible. *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity*. Vol. 76. Springer Science & Business Media, 2006.

[4] A Hassouni and A Jaddar. "On pseudoconvex functions and applications to global optimization". In: *ESAIM: Proceedings*. Vol. 20. EDP Sciences. 2007, pp. 138–148.

[5] O. L. Mangasarian. "Pseudo-Convex Functions". In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control* 3.2 (1965), pp. 281–290.

[6] Olvi L Mangasarian. *Nonlinear programming*. SIAM, 1994.

[7] Robert Mifflin. "Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization". In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 15.6 (1977), pp. 959–972.

[8] Ioannis Mitliagkas. "IFT 6085-Lecture 2 Basics of convex analysis and gradient descent". In: (2020).

[9] Thị Bạch Kim Nguyễn. *Các phương pháp tối ưu: Lý thuyết và thuật toán*. 2014.

[10] Thị Bạch Kim Nguyễn. "Nhập môn lý thuyết tối ưu". In: (2021).

[11] Thị Mai Nông. "Dưới vi phân của hàm lồi và một số ứng dụng trong tối ưu". In: (2008).

[12] J-P Penot and PH Quang. "Generalized convexity of functions and generalized monotonicity of set-valued maps". In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 92 (1997), pp. 343–356.

[13] Boris Nikolaevich Pshenichny and Yu M Danilin. *Numerical methods in extremal problems*. Mir Publishers, 1978.