Câu 1. Một học sinh chứng minh mệnh đề " 8^n+1 chia hết cho 7, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ " $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức 8^k+1 chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1}+1=8\left(8^k+1\right)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết quy nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết quy nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp quy nạp.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Tính u_{n+1}?

A. $u_{n+1}=3^n+3$. **B.** $u_{n+1}=3.3^n$. **C.** $u_{n+1}=3^n+1$. **D.** $u_{n+1}=3(n+1)$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-2$ và công sai $d=3$. Tìm số hạng u_{10}.

A. $u_{10}=-2.3^9$. **B.** $u_{10}=25$. **C.** $u_{10}=28$. **D.** $u_{10}=-29$.

Câu 4. Cho cấp số cộng $(u_n): 2,\ a,\ 6,\ b.$ Tích ab bằng?

A. 32. **B.** 40. **C.** 12. **D.** 22.

Câu 5. Tổng $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-2$ và công bội $q=3$. Số hạng u_2 là

A. $u_2=-6$. **B.** $u_2=6$. **C.** $u_2=1$. **D.** $u_2=-18$.

Câu 7. Cho $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+......+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{1}{6}$. **C.** $S_2=\frac{2}{3}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Câu 8. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với $\forall n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. Gía trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

A. Không có n. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 10 . Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{5-3n}{2n+3}, (n \in \mathbb{N}^*)$. **B.** $u_n = \dfrac{n-5}{4n+1}, (n \in \mathbb{N}^*)$.

C. $u_n = 2n^3 + 3, (n \in \mathbb{N}^*)$. **D.** $u_n = \cos(2n+1), (n \in \mathbb{N}^*)$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16} = -24$. **B.** $S_{16} = 26$. **C.** $S_{16} = -25$. **D.** $S_{16} = 24$.

Câu 13. Cấp số nhân (u_n) có công bội âm, biết $u_3 = 12$, $u_7 = 192$. Tìm u_{10}.

A. $u_{10} = 1536$. **B.** $u_{10} = -1536$. **C.** $u_{10} = 3072$. **D.** $u_{10} = -3072$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\dfrac{1}{10}$. Hỏi $\dfrac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A. Số hạng thứ 2018. **B.** Số hạng thứ 2017. **C.** Số hạng thứ 2019. **D.** Số hạng thứ 2016.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 16. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1} thứ tự là trung điểm các cạnh A_kB_k, B_kC_k, C_kD_k, D_kA_k (với $k = 1, 2, ...$). Chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2018}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2017}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1006}}$.

Câu 17. Cho hai cấp số cộng (x_n): 4, 7, 10,... và (y_n): 1, 6, 11,.... Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. **B.** 673. **C.** 403. **D.** 672.

Câu 18. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết rằng độ dài cạnh BC, trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q. Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $q=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $q=\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$. **C.** $q=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $q=\dfrac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1^2+u_2^2+10=2u_1+6u_2$ và $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$ bằng

A. 100. **B.** 99. **C.** 101. **D.** 102.

Câu 20. Trong dịp hội trại hè 2019, bạn Anh thả một quả bóng cao su từ độ cao $6(\text{m})$ so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng:

A. $44(\text{m})$. **B.** $45(\text{m})$. **C.** $42(\text{m})$. **D.** $43(\text{m})$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	B	A	D	A	C	A	C	A	D	D	B	A	B	B	C	B	D	C

Câu 1. Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho 7, $\forall n\in\mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức 8^k+1 chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1}+1=8(8^k+1)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết quy nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết quy nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp quy nạp.

Lời giải

Chọn D.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Tính u_{n+1}?

A. $u_{n+1}=3^n+3$. **B.** $u_{n+1}=3.3^n$. **C.** $u_{n+1}=3^n+1$. **D.** $u_{n+1}=3(n+1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3.3^n$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_{10}.

A. $u_{10} = -2.3^9$. **B.** $u_{10} = 25$. **C.** $u_{10} = 28$. **D.** $u_{10} = -29$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $u_{10} = u_1 + 9d = -2 + 9.3 = 25$.

Câu 4. Cho cấp số cộng $(u_n): 2,\ a,\ 6,\ b.$ Tích ab bằng?

A. 32. **B.** 40. **C.** 12. **D.** 22.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} 2+6=2a \\ a+b=2.6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow ab = 32.$

Câu 5. Tổng $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$ có giá trị là:

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{3^n}$ có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{3}$, công sai $q = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 là

A. $u_2 = -6$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 1$. **D.** $u_2 = -18$.

Lời giải

Chọn A.

Số hạng u_2 là $u_2 = u_1.q = -6$.

Câu 7. Cho $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3 = \frac{1}{12}$.　　**B.** $S_2 = \frac{1}{6}$.　　**C.** $S_2 = \frac{2}{3}$.　　**D.** $S_3 = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Kiểm tra với $n = 2; n = 3$.

Câu 8. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, số $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

II) Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I.　　**B.** Chỉ II.　　**C.** Không có.　　**D.** Cả I và II.

Lời giải

Chọn A.

- Ta chứng minh I đúng.

Với $n = 1$, ta có: $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n = 1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9 \vdots 3$. Vậy I đúng với $n = 1$.

Gỉa sử I đúng với $n = k\left(k \in \mathbb{N}, k \geq 1\right)$, tức $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k, u_k \vdots 3$.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = \left(k+1\right)^3 + 3\left(k+1\right)^2 + 5\left(k+1\right), u_{k+1} \vdots 3$. Thật vậy:

$u_{k+1} = \left(k+1\right)^3 + 3\left(k+1\right)^2 + 5\left(k+1\right) = u_k + 3\left(k^2 + 3k + 3\right) \vdots 3$

Suy ra đpcm hay I đúng.

- II sai với $n = 1$: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} < \frac{13}{24}$.

Câu 9. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. Gía trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

A. Không có n.　　**B.** 1009.　　**C.** 2018.　　**D.** 2017.

Lời giải

Chọn C.

Với $n = 1$ ta có: $u_2 = u_1 + 3 = 4 = 2^2$.

Với $n = 2$ ta có: $u_3 = u_2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2$.

Với $n = 3$ ta có: $u_4 = u_3 + 2.3 + 1 = 16 = 4^2$.

Từ đó ta có: $u_n = n^2$.

Suy ra $-u_n+2017n+2018=0 \Leftrightarrow -n^2+2017n+2018=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-1(L) \\ n=2018(N) \end{array}\right.$.

Câu 10 . Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n=\dfrac{5-3n}{2n+3},\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.
B. $u_n=\dfrac{n-5}{4n+1},\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.
C. $u_n=2n^3+3,\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.
D. $u_n=\cos(2n+1),\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $u_n=\dfrac{5-3n}{2n+3},\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$, ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5-3(n+1)}{2(n+1)+3}-\dfrac{5-3n}{2n+3}=\dfrac{2-3n}{2n+5}-\dfrac{5-3n}{2n+3}$

$=\dfrac{(2-3n)(2n+3)-(2n+5)(5-3n)}{(2n+5)(2n+3)}=\dfrac{4n-6n^2+6-9n-10n+6n^2-25+15n}{(2n+5)(2n+3)}$

$=\dfrac{-19}{(2n+5)(2n+3)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n=\dfrac{5-3n}{2n+3},\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là dãy giảm.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết $u_2=3$ và $u_4=7$ suy ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1+d=3 \\ u_1+3d=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=2 \end{cases}$.

Vậy $u_{15}=u_1+14d=29$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-12$, $u_{14}=18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16}=-24$. **B.** $S_{16}=26$. **C.** $S_{16}=-25$. **D.** $S_{16}=24$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} u_1+3d=-12 \\ u_1+13d=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-21 \\ d=3 \end{cases}$.

Khi đó, $S_{16}=\dfrac{(2u_1+15d).16}{2}=8(-42+45)=24$.

Câu 13. Cấp số nhân (u_n) có công bội âm, biết $u_3 = 12$, $u_7 = 192$. Tìm u_{10}.

A. $u_{10} = 1536$. **B.** $u_{10} = -1536$. **C.** $u_{10} = 3072$. **D.** $u_{10} = -3072$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi q là công bội của cấp số nhân đề bài cho $(q < 0)$.

Ta có $\begin{cases} u_3 = 12 = u_1 q^2 \\ u_7 = 192 = u_1 q^6 \end{cases} \Rightarrow \frac{u_1 q^6}{u_1 q^2} = \frac{192}{12} \Rightarrow q^4 = 16$.

Mà $q < 0 \Rightarrow q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{12}{q^2} = 3$.

Do đó $u_{10} = u_1 q^9 = 3.(-2)^9 = -1536$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Hỏi $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A. Số hạng thứ 2018. **B.** Số hạng thứ 2017. **C.** Số hạng thứ 2019. **D.** Số hạng thứ 2016.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $u_n = u_1 q^{n-1} = -\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Khi đó $u_n = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow n = 2018$.

Do đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ 2018 của (u_n).

Câu 15. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

* Cách 1:

Ta có $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ suy ra

$\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$

$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\dots$

…

$u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ nên $\lim u_n = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

* Cách 2:

Ta có $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{2}{5}$; $u_3 = \frac{3}{7}$. Ta chứng minh $u_n = \frac{n}{2n+1}$ $(*)$ bằng qui nạp

+ Với $n = 1$, công thức $(*)$ đúng.

+ Giả sử công thức $(*)$ đúng với $n = k > 1 \Rightarrow u_k = \frac{k}{2k+1}$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$. Thật vậy, ta có

$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$. Vậy công thức $u_n = \frac{n}{2n+1}$ $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

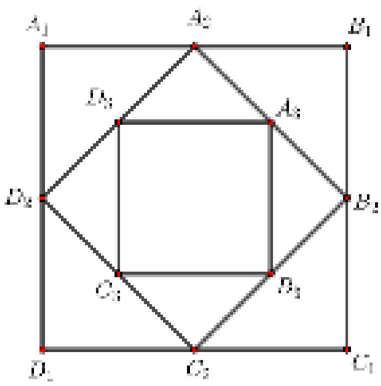
Khi đó $\lim u_n = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1} thứ tự là trung điểm các cạnh A_kB_k, B_kC_k, C_kD_k, D_kA_k (với $k = 1, 2, ...$). Chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2^{2018}}$.. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2^{2017}}$.. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2^{1006}}$..

Lời giải

Chọn B.



Hình vuông có cạnh bằng a thì có chu vi là $4a$. Hình vuông có các đỉnh là trung điểm của hình vuông ban đầu có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ có chu vi là $2a\sqrt{2}$.

Đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có độ dài bằng $\sqrt{2}$ nên cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có độ dài bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đường chéo của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có độ dài bằng 1 nên cạnh của hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có độ dài bằng $\dfrac{1}{2}$.

Đường chéo của hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có độ dài bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên cạnh của hình vuông $A_4B_4C_4D_4$ có độ dài bằng $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Cứ như thế độ dài các cạnh hình vuông tạo thành một cấp số nhân có $u_1 = 1$, công bội $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên độ dài cạnh của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ là: $u_{2008} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2017}}$ nên chu vi hình vuông đó là: $4u_{2018} = \dfrac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^{2017}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.

Câu 17. Cho hai cấp số cộng $(x_n): 4,\ 7,\ 10, \ldots$ và $(y_n): 1,\ 6,\ 11, \ldots$. Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. **B.** 673. **C.** 403. **D.** 672.

Lời giải

Chọn C.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (x_n) là: $x_n = 4 + (n-1).3 = 3n + 1$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (y_n) là: $y_m = 1 + (m-1).5 = 5m - 4$.

Giả sử k là 1 số hạng chung của hai cấp số cộng trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (x_n) nên $k = 3i + 1$ với $1 \le i \le 2018$ và $i \in \mathbb{N}^*$.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (y_n) nên $k = 5j - 4$ với $1 \le j \le 2018$ và $j \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $3i + 1 = 5j - 4 \Rightarrow 3i = 5j - 5 \Rightarrow i \vdots 5 \Rightarrow i \in \{5;10;15;\ldots;2015\} \Rightarrow$ có 403 số hạng chung.

Câu 18. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết rằng độ dài cạnh BC, trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q. Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $q = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $q = \dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$. **C.** $q = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $q = \dfrac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $AM^2 = \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$ (1).

Do ba cạnh BC, AM, AB lập thành cấp số nhân nên ta có: $BC.AB = AM^2$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4} = BC.AB \Leftrightarrow 4AB^2 - 4AB.BC - BC^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 4\frac{AB}{BC} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \quad (loai) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}.$$

Câu 19. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1^2 + u_2^2 + 10 = 2u_1 + 6u_2$ và $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1$ với mọi $n \ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$ bằng

A. 100. **B.** 99. **C.** 101. **D.** 102.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $u_1^2 + u_2^2 + 10 = 2u_1 + 6u_2 \Leftrightarrow (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \end{cases}$.

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ với $n \ge 1 \Rightarrow v_1 = u_2 - u_1 = 2$.

Theo giả thiết: $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 1$, $\forall n \ge 1$.

Suy ra (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = 1 \Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d = n - 3$.

Ta có: $u_{n+1} = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{v_n} + \underbrace{u_n - u_{n-1}}_{v_{n-1}} + \ldots + \underbrace{u_3 - u_2}_{v_2} + \underbrace{u_2 - u_1}_{v_1} + u_1 = S_n + u_1$.

Với $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \dfrac{n}{2}(v_1 + v_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Suy ra: $u_{n+1} = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1 \Rightarrow u_n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$.

Ta có: $u_n > 5050 \Leftrightarrow \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 > 5050 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 10096 > 0 \Leftrightarrow n > 101,99$.

Vậy số n nhỏ nhất thỏa yêu cầu là 102.

Câu 20. Trong dịp hội trại hè 2019, bạn Anh thả một quả bóng cao su từ độ cao $6\left(\text{m}\right)$ so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng:

A. $44\left(\text{m}\right)$. **B.** $45\left(\text{m}\right)$. **C.** $42\left(\text{m}\right)$. **D.** $43\left(\text{m}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có quãng đường bóng bay bằng tổng quảng đường bóng nảy lên và quãng đường bóng rơi xuống.

Vì mỗi lần bóng nảy lên bằng $\frac{3}{4}$ lần nảy trước nên ta có tổng quãng đường bóng nảy lên là

$$S_1 = 6.\frac{3}{4} + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^n + \ldots$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 6.\frac{3}{4} = \frac{9}{2}$ và công bội $q = \frac{3}{4}$. Suy ra

$$S_1 = \frac{\frac{9}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = 18.$$

Tổng quãng đường bóng rơi xuống bằng khoảng cách độ cao ban đầu và tổng quãng đường bóng nảy lên nên là $S_2 = 6 + 6.\left(\frac{3}{4}\right) + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^n + \ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 6$ và công bội $q = \frac{3}{4}$. Suy ra

$$S_2 = \frac{6}{1 - \frac{3}{4}} = 24 .$$

Vậy tổng quãng đường bóng bay là $S = S_1 + S_2 = 18 + 24 = 42$.