Nguyễn Doãn Phước

LÝ THUYẾT
ĐIỀU KHIỂN NÂNG CAO

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU – ĐIỀU KHIỂN BỀN VỮNG – ĐIỀU KHIỂN THÍCH NGHI

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Hà Nội 2005

Author **Nguyen Doan Phuoc**

Assoc. Prof. of Department of Automatic Control, Hanoi University of Technology.

Title **Theory of Advanced Control**

This book aims to provide basic knowledges of optimal control, adaptive control and of robust control. It presents not only the conceptual basis such as optimizations, optimal control, Lyapunov theory, ISS stabilization, exact linearization control ... but also their applications in identification, in RH$_\infty$ control and in disturbance attenuation control ... Many examples are given in the book to illustrate the theory.

This book is the product of several courses given by the author at the Hanoi University of Technology (HUT). It is written for control engineering students and master students in Universities as a course and self study textbook.

Chịu trách nhiệm xuất bản: **PGS. TS. Tô Đăng Hải**

Biên tập: **Nguyễn Đăng**

Trình bày và chế bản: **Tác giả**

Vẽ bìa: **Trần Thắng**

In tại: Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc

Số lượng: 700 cuốn, khuôn khổ 16 x 24cm

Giấy phép xuất bản số: 1527-34CXB ngày 20/10/2004

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2005.

Lời nói đầu

Quyển sách này được viết ra từ các bài giảng trong nhiều năm của tác giả cho sinh viên, học viên cao học ngành Điều khiển tự động, Đo lường và Tin học công nghiệp thuộc Khoa Điện, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội về Lý thuyết Điều khiển nâng cao, gồm bốn phần chính:

- *Điều khiển tối ưu,*
- *Nhận dạng đối tượng điều khiển,*
- *Điều khiển bền vững và*
- *Điều khiển thích nghi.*

Để có thể mô tả được mối liên kết hữu cơ giữa bốn phần trên trong một bài toán điều khiển, trước tiên quyển sách tập trung trình bày các kiến thức cơ bản của điều khiển tối ưu, bao gồm: Điều khiển tối ưu tĩnh; Điều khiển tối ưu động; Điều khiển tối ưu ngẫu nhiên; Điều khiển tối ưu RH_∞ *, sau đó mới đi vào các nội dung: Nhận dạng đối tượng điều khiển, Điều khiển bền vững, Điều khiển thích nghi, dưới dạng các ứng dụng khác nhau của điều khiển tối ưu.*

Quyển sách được bố cục thành sáu chương:

1) *Chương 1 trình bày về các phương pháp điều khiển tối ưu tĩnh (tối ưu hóa), những ứng dụng của chúng trong việc chọn tham số tối ưu cho bộ điều khiển, trong nhận dạng đối tượng điều khiển, cũng như để thiết kế bộ điều khiển bền vững trong không gian trạng thái ....*

2) *Nội dung của chương 2 là ba phương pháp cơ bản để giải quyết một bài toán tối ưu động. Đó là phương pháp biến phân, nguyên lý cực đại của Pontryagin và phương pháp quy hoạch động của Bellman. Ứng dụng của điều khiển tối ưu động vào thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu LQR cũng được trình bày trong chương này.*

3) *Chương 3 viết về các phương pháp thiết kế bộ điều khiển tối ưu ngẫu nhiên, gồm bộ lọc Wiener, bộ lọc Kalman và vai trò của chúng trong việc thiết kế bộ điều khiển tối ưu LQG.*

4) *Chương 4 trình bày các nguyên tắc điều khiển bền vững thông qua phương pháp tham số hóa Youla, phục vụ việc chuyển bài toán điều khiển bền vững thành bài toán tối ưu* RH_∞ *dưới dạng cân bằng mô hình. Chương này cũng trình bày hai phương pháp tìm nghiệm bài toán tối ưu cân bằng mô hình đó gồm phương pháp nội suy Nevannlinna–Pick và phương pháp xấp xỉ chuẩn Hankel–Nehari.*

5) *Nội dung của chương 5 là các phương pháp điều khiển thích nghi, tập trung chủ yếu vào hai cấu trúc điều khiển điển hình của điều khiển thích nghi đối tượng tuyến tính là thích nghi tự chỉnh (STR) và thích nghi có mô hình theo dõi (MRAC). Sau đó là các ứng dụng mở rộng của lý thuyết Lyapunov, ISS vào điều khiển thích nghi đối tượng phi tuyến, như phương pháp cuốn chiếu thích nghi (adaptive backstepping), phương pháp giả định rõ (certainty equivalence), phương pháp co miền hấp dẫn (damping), điều khiển thích nghi kháng nhiễu (disturbance attenuation), điều khiển tuyến tính hóa chính xác thích nghi, ...*

6) *Phần bổ sung thêm trong chương 6 là những khái niệm toán học cơ bản, lý thuyết hàm biến phức và các vấn đề rải rác còn lại có liên quan đến điều khiển nâng cao, như kỹ thuật phân tích phổ tín hiệu, lý thuyết ổn định Kharitonov cũng như ứng dụng của chúng vào bài toán thiết kế bộ điều khiển bền vững.*

Mục đích của tác giả khi viết quyển sách này chỉ đơn giản là mong muốn cung cấp cho các bạn sinh viên đang theo học các ngành Điều khiển tự động, Đo lường và Tin học công nghiệp, Tự động hóa, thêm một tài liệu bổ trợ cho việc hiểu kỹ, hiểu sâu bài giảng cũng như hỗ trợ việc tự học của sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh thuộc các ngành liên quan.

Quyển sách đã được viết với sự cảm thông, chịu đựng rất to lớn của hai thành viên khác trong gia đình tác giả là vợ Ngô Kim Thư và con gái Nguyễn Phước My. Không có họ, không có sự cổ vũ, khuyến khích, sự bền vững của tổ ấm gia đình, chắc chắn quyển sách không thể hoàn thành được.

Quyển sách còn được hoàn thành nhờ sự cổ vũ, khuyến khích và tạo điều kiện thuận lợi của các đồng nghiệp trong Bộ môn Điều khiển Tự động, Trường Đại học Bách khoa, nơi tác giả đang công tác, đặc biệt là bạn PGS.TS. Phan Xuân Minh. Tác giả xin được gửi tới bạn lời cảm ơn chân thành.

Mặc dù đã rất nỗ lực, song chắc không thể không có thiếu sót. Do đó tác giả rất mong nhận được những góp ý sửa đổi, bổ sung thêm của bạn đọc để hoàn thiện. Thư góp ý xin gửi về:

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Khoa Điện, Bộ môn Điều khiển Tự động

phuocnd-ac@mail.hut.edu.vn

Hà Nội, ngày 4-5 tháng 11 năm 2004

Mục lục

1 ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TĨNH

1.1 Nhập môn

1.1.1 Thế nào là bài toán điều khiển tối ưu tĩnh?

Trong quá trình điều khiển hệ thống, ta thường hay gặp phải loại bài toán chọn các tham số điều khiển trong số những tham số thích hợp sao cho hệ thống *đạt được chất lượng một cách tốt nhất*. Nếu sử dụng ký hiệu:

- tập các tham số điều khiển thích hợp là P,
- các tham số điều khiển cần chọn là vector $\underline{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$, tức là bài toán có n tham số, và
- chất lượng hệ thống do bộ tham số $\underline{p}$ mang lại là $Q(\underline{p})$

thì các bài toán nêu trên được viết chung lại thành:

$$Q(\underline{p}) \underset{\underline{p}\in P}{\longrightarrow} \min \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p}) \tag{1.1a}$$

hoặc

$$Q(\underline{p}) \underset{\underline{p}\in P}{\longrightarrow} \max \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p}^* = \arg\max_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p}) \tag{1.1b}$$

Định nghĩa 1.1: Vector tham số điều khiển hệ thống được gọi là *tối ưu* nếu:

a) Nó thỏa mãn các yêu cầu của bài toán điều khiển (*phương án thích hợp*).

b) Nó mang lại cho hệ thống một chất lượng điều khiển tốt nhất.

Ví dụ 1.1: (Đầu tư để có lợi nhuận cao nhất)

Trong một nhà máy có n phân xưởng $A_1, \ldots, A_n$. Nhà máy hiện có nguyên vật liệu với số lượng a trong kho và có dự định chia cho các phân xưởng để sản xuất. Gọi p_k, $k=1, \ldots, n$ là số vật liệu mà phân xưởng A_k nhận được cũng như $h_k(p_k)$ là lãi suất mà nó mang lại cho phân xưởng. Bài toán đặt ra cho nhà máy là phải phân chia nguyên vật liệu đó như thế nào cho các phân xưởng để cuối cùng tổng lợi nhuận của nhà máy là lớn nhất.

Rõ ràng, tham số điều khiển ở đây là:

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

và tập các tham số điều khiển thích hợp có dạng:

$$P = \left\{ \underline{p} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} p_k \le a \text{ và } p_k \ge 0\,,\ k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Lợi nhuận của nhà máy do phương án $\underline{p}$ mang lại được tính bằng:

$$Q(\underline{p}) = \sum_{k=1}^{n} h_k(p_k)$$

Vậy, nhiệm vụ của nhà máy là phải tìm được cách chia tối ưu $\underline{p}^*$ là nghiệm của:

$$\underline{p}^* = \arg\max_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p})$$ □

Ví dụ 1.2: (Chọn tham số tối ưu cho bộ điều khiển PI)

Hình 1.1a) mô tả hệ thống gồm đối tượng điều khiển có hàm truyền đạt:

$$S(s) = \frac{2}{(1+s)(3+s)}$$

và bộ điều khiển PI với hàm truyền đạt:

$$R(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p(1 + T_I s)}{T_I s}$$

Nhiệm vụ bài toán điều khiển đặt ra là phải xác định tham số k_p, T_I cho bộ điều khiển PI trong khoảng:

$$0 < k_p^- \le k_p \le k_p^+ \qquad \text{cũng như} \qquad 0 < T_I^- \le T_I \le T_I^+ \tag{1.2}$$

sao cho bình phương sai lệch giữa tín hiệu ra $y(t)$ và tín hiệu vào $w(t)$ là nhỏ nhất:

$$Q = \int_0^{\infty} \left[w(t) - y(t) \right]^2 dt \to \min! . \tag{1.3}$$

Các hằng số giới hạn (dương) k_p^-, k_p^+, T_I^-, T_I^+ được quy định bởi chủng loại bộ điều khiển PI mà ta sử dụng.

Trước hết ta thấy, để Q hữu hạn thì cần phải có:

$$\lim_{t \to \infty} \left[y(t) - w(t) \right] = 0$$

Điều này chứng tỏ rằng các tham số thích hợp k_p, T_I của bộ điều khiển phải là những tham số làm hệ kín ổn định, tức làm cho hàm truyền đạt hệ kín:

$$G(s) = \frac{S(s)R(s)}{1+S(s)R(s)} = \frac{2k_p(1+T_I s)}{T_I s(1+s)(3+s)+2k_p(1+T_I s)} \tag{1.4}$$

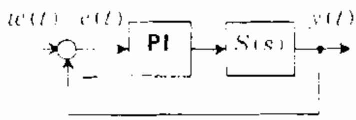
là hàm bền. Suy ra phải có:

$$(3+2k_p) > \frac{k_p}{2T_I}$$

và như vậy, tập P gồm bộ tham số điều khiển thích hợp có dạng như sau:

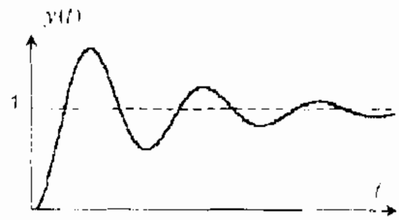
$$P = \left\{ p = \begin{pmatrix} k_p \\ T_I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; k_p^- \le k_p \le k_p^+ ,\; T_I^- \le T_I \le T_I^+ \text{ và } 3+2k_p > \frac{k_p}{2T_I} \right\}. \tag{1.5}$$

a)



Hình 1.1: Minh họa ví dụ 1.2

b)



Tiếp tục, nhờ công thức *Parseval*, hàm đo chất lượng $Q(p)$ cho trong (1.3) được viết lại thành:

$$Q(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s)ds \tag{1.6a}$$

trong đó (xem thêm bảng 1.1 của mục 1.6.1)

$$E(s) = \frac{1}{1+S(s)R(s)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{T_I(3+4s+s^2)}{2k_p + T_I(3+2k_p)s + 4T_I s^2 + T_I s^3} \tag{1.6b}$$

là ảnh Laplace của sai lệch $e(t)=w(t)-y(t)$. Từ đây suy ra:

$$Q(p) = \frac{T_I}{4k_p}\cdot\frac{2k_p(3+2k_p)+20k_p+36T_I}{4T_I(3+2k_p)-2k_p} \tag{1.7}$$

Vậy dạng chuẩn (1.1) của bài toán xác định tham số tối ưu PI sẽ là:

$$p^* = \begin{pmatrix} k_p^* \\ T_I^* \end{pmatrix} = \arg\min_{p\in P} \underbrace{\frac{T_I}{4k_p}\cdot\frac{2k_p(3+2k_p)+20k_p+36T_I}{4T_I(3+2k_p)-2k_p}}_{Q(p)}$$ ❐

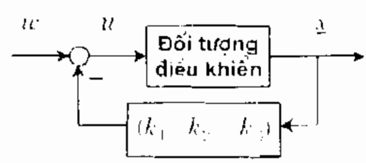
Ví dụ 1.3: (Bộ điều khiển có giá thành thấp nhất)

Cho đối tượng tuyến tính (giả sử không ổn định) được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển như sau:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

với $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ là ký hiệu chỉ vector các biến trạng thái x_1, x_2, x_3. Đối tượng được điều khiển phản hồi trạng thái bằng bộ điều khiển (tĩnh)

$$\underline{k}^T = (k_1 \quad k_2 \quad k_3)$$



Hình 1.2: Minh họa ví dụ 1.3

Với bộ điều khiển này, hệ kín (hình 1.2) sẽ có phương trình đặc tính

$$A(s) = (a_0+k_1) + (a_1+k_2)s + (a_2+k_3)s^2$$

Do đó nó ổn định khi và chỉ khi

$$k_1 > -a_0 \qquad k_2 > -a_1 \qquad \text{và} \qquad k_3 > -a_2$$

Nói cách khác, tập P là tập con trong không gian ba chiều R^3 gồm các phương án điều khiển thích hợp (các phương án chọn tham số k_1, k_2, k_3) có dạng

$$P = \left\{ \underline{p} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; k_1 > -a_0\,,\ k_2 > -a_1 \text{ và } k_3 > -a_2 \right\} \tag{1.8}$$

Giá thành chi phí cho bộ điều khiển $\underline{k}^T$ được tính theo từng kênh. Kênh một k_1 sẽ có giá thành là 12 đồng trên một đơn vị, kênh hai k_2 là 18 đồng/đơn vị và kênh ba k_3 là 15 đồng/đơn vị. Suy ra

$$Q(\underline{p}) = 12\,k_1 + 18\,k_2 + 15\,k_3 \tag{1.9}$$

là giá thành của bộ điều khiển $\underline{k}^T$.

Người thiết kế bộ điều khiển có nhiệm vụ là phải chọn một phương án $\underline{p}^* \in P$ để có $Q(\underline{p})$ nhỏ nhất, tức là

$$p^* = \begin{pmatrix} k_1^* \\ k_2^* \\ k_3^* \end{pmatrix} = \arg\min_{\underline{p} \in P} \underbrace{(12k_1 + 18k_2 + 15k_3)}_{Q(p)} . \qquad \square$$

Nhìn lại cả ba ví dụ nêu trên ta thấy chúng có một điểm chung. Đó là tập P các tham số điều khiển và hàm đo chất lượng $Q(\underline{p})$ đều có dạng đại số (không chứa toán tử tích phân, vi phân). Những dạng bài toán điều khiển tối ưu như vậy được gọi là điều khiển tối ưu tĩnh.

Định nghĩa 1.2: Bài toán *điều khiển tối ưu tĩnh* là bài toán (1.1), trong đó tập P của các tham số điều khiển thích hợp $\underline{p}$ và *mục tiêu chất lượng* $Q(\underline{p})$ đều được mô tả bằng các hàm đại số.

1.1.2 Phân loại bài toán tối ưu

Trước hết ta thấy, việc cho rằng bài toán tối ưu chỉ có dạng:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p}) \qquad (1.10)$$

sẽ không làm mất tính tổng quát của bài toán điều khiển tối ưu. Vì nếu ngược lại, tham số điều khiển tối ưu $\underline{p}^*$ thực sự phải làm cho $Q(\underline{p}^*)$ là lớn nhất, thì ta chỉ cần thay $Q(\underline{p})$ bởi $\tilde{Q}(\underline{p}) = -Q(\underline{p})$ là sẽ lại trở về bài toán (1.10) nêu trên.

Bài toán tối ưu tuyến tính/phi tuyến

Định nghĩa 1.3: Bài toán điều khiển tối ưu (1.10) được gọi là *tuyến tính*, nếu tập P của các tham số điều khiển thích hợp $\underline{p}$ và hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ đều được mô tả bằng các bất phương trình hoặc phương trình tuyến tính. Ngược lại thì nó được gọi là bài toán *điều khiển tối ưu phi tuyến*.

Ví dụ 1.4: (Bài toán tối ưu tuyến tính)

Bài toán tối ưu (1.10) với

$$\begin{aligned} P = \{ & a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n \le b_1 \\ & a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n \le b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n \le b_m \} \end{aligned}$$

và

$$Q(\underline{p}) = c_1p_1 + c_2p_2 + \cdots + c_np_n$$

là bài toán tối ưu tuyến tính. ❐

Như vậy, để quyết định một bài toán điều khiển tối ưu là tuyến tính hay phi tuyến, không thể chỉ căn cứ vào mô hình hệ thống mà phải dựa vào dạng chuẩn (1.10) của nó. Điển hình nhất là bài toán nêu trong ví dụ 1.2. Rõ ràng ở đó hệ thống là tuyến tính và được mô tả bởi mô hình hàm truyền đạt $G(s)$, song bài toán xác định tham số tối ưu ứng với nó lại là bài toán điều khiển tối ưu tĩnh và phi tuyến.

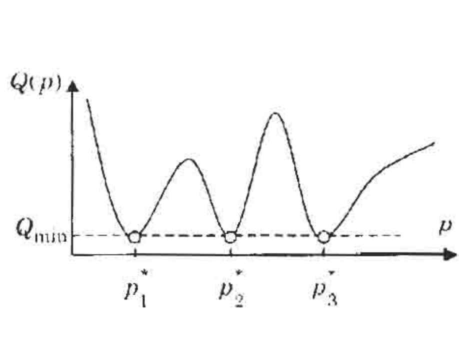
Trong quyển sách này, chúng ta sẽ tập trung chủ yếu vào các phương pháp giải bài toán tối ưu phi tuyến và xem bài toán tối ưu tuyến tính như là một trường hợp riêng.

Bài toán cận tối ưu (suboptimal)

Tiếp theo, ta bàn đến tên gọi *tối ưu* của bài toán (1.10). Giả sử $\underline{p}^*$ là tham số điều khiển tối ưu. Vậy thì giá trị $Q(\underline{p}^*)$ phải là nhỏ nhất. Điều này chỉ rằng sẽ không có các khái niệm "tối ưu hơn" hay "tối ưu nhất". Thật vậy nếu như bên cạnh $\underline{p}^*$ còn có một phương án $\underline{\tilde{p}}$ "tối ưu hơn", tức là với nó $Q(\underline{\tilde{p}})$ còn có giá trị nhỏ hơn $Q(\underline{p}^*)$ thì điều này lại mâu thuẫn với giả thiết rằng $\underline{p}^*$ là tối ưu.

Như vậy bản thân tên gọi *tối ưu* đã mang ý nghĩa *nhất*. Tuy nhiên cũng phải chú ý rằng nghĩa *nhất* của tối ưu là nói rằng hàm $Q(\underline{p})$ chỉ có *một giá trị nhỏ nhất* $Q(\underline{p}^*)$ chứ không phải tham số điều khiển tối ưu $\underline{p}^*$ là duy nhất. Có thể một bài toán điều khiển tối ưu có *nhiều vector tham số tối ưu* $\underline{p}_1^*$, $\underline{p}_2^*$, ... Những vector tham số này đều mang đến cho hệ thống một chất lượng giống nhau là hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ nhận giá trị nhỏ nhất tại đó (hình 1.3):

$$Q(\underline{p}_1^*) = Q(\underline{p}_2^*) = \cdots = Q_{\min} = \min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p}).$$



Hình 1.3: Nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu.

Khi đã đề cập đến vấn đề một bài toán điều khiển tối ưu có thể có nhiều nghiệm thì cũng cần bàn đến những bài toán điều khiển tối ưu không có nghiệm. Để minh họa cho trường hợp này ta xét ví dụ 1.5 dưới đây:

Ví dụ 1.5: (Bài toán tối ưu vô nghiệm)

Ở ví dụ 1.3 ta đã xét bài toán tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái có giá thành thấp nhất để ổn định đối tượng và cũng đã đi đến dạng chuẩn của nó như sau

$$\underline{p}^* = \begin{pmatrix} k_1^* \\ k_2^* \\ k_3^* \end{pmatrix} = \arg\min_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p}) \qquad (1.11)$$

trong đó

$$P = \left\{ \underline{p} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; k_1 > -a_0 \,,\; k_2 > -a_1 \text{ và } k_3 > -a_2 \right\}$$

và $\qquad Q(\underline{p}) = 12\,k_1 + 18\,k_2 + 15\,k_3$.

Hiển nhiên rằng bài toán (1.11) với các hằng số dương a_0, a_1, a_2 vô nghiệm. Thật vậy, ta giả sử rằng tồn tại $\underline{p}^*$ tối ưu, hay:

$$Q(\underline{p}^*) = 12\,k_1^* + 18\,k_2^* + 15\,k_3^*$$

là giá trị nhỏ nhất của $Q(\underline{p})$. Gọi $\underline{\tilde{p}}$ là một phương án khác với ba thành phần $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ được xác định như sau:

$$\tilde{k}_1 = \frac{k_1^* + a_0}{2}\,, \qquad \tilde{k}_2 = \frac{k_2^* + a_1}{2}\,, \qquad \tilde{k}_3 = \frac{k_3^* + a_2}{2}$$

Khi đó thì do:

$$\tilde{k}_1 < k_1^*\,, \qquad \tilde{k}_2 < k_2^*\,, \qquad \tilde{k}_3 < k_3^*$$

nên:

$$Q(\underline{\tilde{p}}) = 12\,\tilde{k}_1 + 18\,\tilde{k}_2 + 15\,\tilde{k}_3 < Q(\underline{p}^*) = 12\,k_1^* + 18\,k_2^* + 15\,k_3^* .$$

và đó là điều phi lý. □

Bằng ví dụ 1.5 ta đã chỉ ra sự tồn tại các bài toán điều khiển tối ưu vô nghiệm, tức là không có một phương án điều khiển $\underline{p}^* \in P$ nào làm cho $Q(\underline{p})$ có giá trị nhỏ nhất. Trường hợp này thường hay gặp phải ở loại bài toán có P là tập hở nhưng đạo hàm của $Q(\underline{p})$ lại khác 0 trong P.

Tuy nhiên, nếu như $Q(\underline{p})$ với $\underline{p} \in P$ lại có giá trị chặn dưới lớn nhất (*infimum*):

$$q = \inf_{p} Q(\underline{p})$$

và khi cho trước một hằng số dương ε nhỏ tùy ý ta luôn tìm được $\underline{\tilde{p}} \in P$ sao cho

$$|Q(\underline{\tilde{p}}) - q| < \varepsilon$$

thì phương án $\underline{\tilde{p}}$ đó được gọi là *cận tối ưu*.

Định nghĩa 1.4: Một phương án điều khiển $\underline{\tilde{p}}$ thuộc tập các phương án điều khiển thích hợp P sẽ được gọi là *lời giải cận tối ưu* của bài toán điều khiển tối ưu $\arg\min_{p \in P} Q(\underline{p})$ nếu

$$|Q(\underline{\tilde{p}}) - \inf_{p} Q(\underline{p})| < \varepsilon$$

trong đó ε là hằng số dương nhỏ tùy ý nhưng cho trước.

Mặc dù ở đây nghiệm $\underline{\tilde{p}} \in P$ không phải là tối ưu thực sự theo đúng nghĩa của nó, nhưng lại là một phương án điều khiển chấp nhận được trong miền sai số cho phép, đủ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán, nên nó vẫn được xem như là lời giải *gần đúng* của bài toán tối ưu (1.10).

Bài toán tối ưu có ràng buộc/không ràng buộc

Các bài toán tối ưu dạng (1.10) không bắt buộc phải có điều kiện ràng buộc $\underline{p} \in P$. Nói cách khác không bắt buộc phải có tập các tham số điều khiển thích hợp P. Những bài toán không có điều kiện ràng buộc cho $\underline{p}$, hay $P = \mathbb{R}^n$, được gọi là bài toán không bị ràng buộc (*unconstrained*).

Định nghĩa 1.5: Bài toán (1.10) có $P = \mathbb{R}^n$ được gọi là bài toán điều khiển tối ưu tĩnh không bị ràng buộc (*unconstrained*). Ngược lại nếu $P \subset \mathbb{R}^n$ (tập con thực trong $\mathbb{R}^n$) thì nó được gọi là bài toán tối ưu bị ràng buộc (*constrained*)

Nghiệm tối ưu địa phương/toàn cục

Nghiệm của bài toán (1.10) được gọi là nghiệm toàn cục (*global*). Tên gọi này hàm ý chỉ rằng tại $\underline{p}^*$ hàm $Q(\underline{p})$ có giá trị nhỏ nhất và điều đó đúng trong toàn bộ tập P. Tuy nhiên trong khá nhiều phương pháp giải bài toán tối ưu (1.10) người ta thường phải đi vòng qua nghiệm tối ưu địa phương (*local*). Đó là những nghiệm chỉ thỏa mãn:

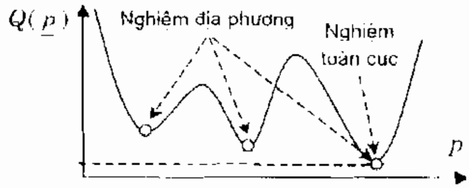
$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p} \in U} Q(\underline{p}) \tag{1.12}$$

với $U \subset P$ là một lân cận nhỏ của $\underline{p}^*$ (hình 1.4).

Định nghĩa 1.6: Xét bài toán tối ưu (1.10). Nếu có một điểm $\underline{p}_0 \in P$ thỏa mãn

$$Q(\underline{p}_0) \le Q(\underline{p})$$

với mọi $\underline{p}$ thuộc một lân cận $U \subset P$ nào đó của $\underline{p}_0$ thì $\underline{p}_0$ được gọi là nghiệm địa phương (*local*) của bài toán (1.10).



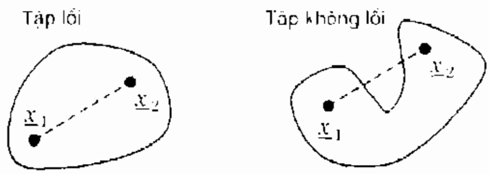
Hình 1.4: Nghiệm tối ưu địa phương/toàn cục

1.1.3 Công cụ toán học: Tập lồi và hàm lồi

Định nghĩa 1.7: Tập hợp L được gọi là *lồi*, nếu đoạn thẳng nối hai điểm $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ bất kỳ của L, được ký hiệu là $[\underline{x}_1, \underline{x}_2]$, cũng sẽ nằm hoàn toàn trong L. Nói cách khác nếu có $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in L$ thì cũng có:

$$a\underline{x}_1 + b\underline{x}_2 \in L$$

với a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a+b=1$.



Hình 1.5: Minh họa định nghĩa 1.7.

Theo định nghĩa trên thì tập rỗng Ø cũng là một tập lồi. Hình 1.5 minh họa cho định nghĩa 1.7. Để nghiên cứu về tập lồi, bên cạnh định nghĩa 1.6, người ta còn thường sử dụng các khái niệm sau:

1) *Tập tổ hợp tuyến tính lồi*: Cho n phần tử $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ của một không gian vector X. Tập tổ hợp tuyến tính lồi M của nó được hiểu là:

$$M = \{\, \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{x}_i \;|\; a_i \in \mathbb{R}_+ \,,\; i=1,2,\ \ldots\ ,n \text{ và } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \,\}$$

Như vậy, khác với khái niệm bao tuyến tính, ở đây còn có thêm điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ trong đó a_i chỉ là những số thực dương (hình 1.6a).

2) *Bao lồi*: Cho tập hợp M (chưa cần phải là lồi). Bao lồi L của M là tập lồi nhỏ nhất chứa M (hình 1.6b).

3) *Điểm biên $\underline{x}_b$ của tập lồi M*: Là điểm mà *không biểu diễn* được dưới dạng:

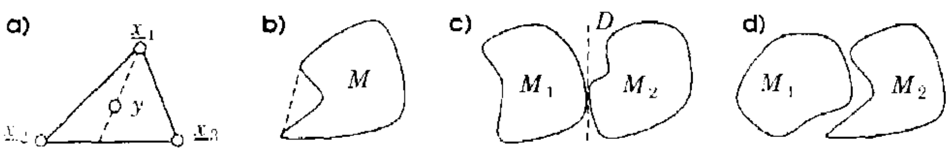
$\underline{x}_b = a\underline{x}_1 + b\underline{x}_2$, trong đó $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in L$, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ và $a, b > 0$ với $a+b=1$.

4) *Rời tuyến tính*: Cho hai tập hợp con M_1 và M_2 (chưa cần phải là lồi) của không gian vector X. Chúng được gọi là *rời tuyến tính với nhau*, nếu như tồn tại *mặt phẳng* (đa tạp tuyến tính):

$D = \{ \underline{c}^T\underline{x} = k \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ và $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n \}$

thỏa mãn (hình 1.6c và 1.6d):

$\underline{x} \in M_1 \Rightarrow \underline{c}^T\underline{x} \le k$ và $\underline{x} \in M_2 \Rightarrow \underline{c}^T\underline{x} \ge k$.



Hình 1.6: Một số khái niệm được sử dụng để nghiên cứu tập lồi.

Về tập lồi ta có những phát biểu sau:

- Để tập con M của không gian $\mathbb{R}^n$ là tập lồi, thì cần và đủ là mọi tập lồi tuyến tính tạo bởi các phần tử của M lại thuộc M. Nói cách khác nếu có $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in M$ thì cũng có $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in M$ với mọi $a_i \in \mathbb{R}_+$ và $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$.
- Tổng $M = M_1 + M_2 = \{ \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \mid \underline{x}_1 \in M_1, \underline{x}_2 \in M_2 \}$ của hai tập lồi là một tập lồi.
- Tích $M = M_1 \times M_2 = \{ \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} \mid \underline{x}_1 \in M_1, \underline{x}_2 \in M_2 \}$ của hai tập lồi là một tập lồi
- Tập giao $M = \bigcap_k M_k$ của (vô số) các tập lồi M_k là một tập lồi.
- Tập L gồm tất cả các tổ hợp lồi tuyến tính của các phần tử $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ của tập M (chưa cần lồi) sẽ là bao lồi của M.
- Phần tử $\underline{x}_b \in M$ là điểm biên của tập lồi M khi và chỉ khi $M \setminus \{\underline{x}_b\}$ cũng là tập lồi.

- Nếu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi đóng, không rỗng, với $0 \notin M$ thì sẽ tồn tại ít nhất một mặt phẳng $\underline{c}^T\underline{x}=k$ $(k>0)$ để từ $\underline{x}\in M$ suy ra được $\underline{c}^T\underline{x}>k$.

  Nếu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi đóng, không rỗng, với $\underline{0}\in M$ thì sẽ tồn tại ít nhất một mặt phẳng $\underline{c}^T\underline{x}=0$ để từ $\underline{x}\in M$ suy ra được $\underline{c}^T\underline{x}\ge 0$.

  Nếu M_1 và M_2 là hai tập lồi thỏa mãn $M_1\cap M_2=\emptyset$, thì chúng sẽ rời tuyến tính với nhau, tức là sẽ tồn tại ít nhất một mặt phẳng $\underline{c}^T\underline{x}=k$ để nếu $\underline{x}\in M_1$ thì $\underline{c}^T\underline{x}\le k$ và nếu $\underline{x}\in M_2$ thì $\underline{c}^T\underline{x}\ge k$.

- Nếu M_1 và M_2 là hai tập lồi đóng thỏa mãn $M_1\cap M_2=\emptyset$, thì chúng sẽ rời tuyến tính với nhau theo nghĩa chặt, tức là sẽ tồn tại ít nhất một mặt phẳng $\underline{c}^T\underline{x}=k$ để nếu $\underline{x}\in M_1$ thì $\underline{c}^T\underline{x}<k$ và nếu $\underline{x}\in M_2$ thì $\underline{c}^T\underline{x}>k$.

Định nghĩa 1.8: Xét hàm $y=f(\underline{x})$ xác định trên tập lồi M ($\underline{x}\in M$). Khi đó nó sẽ được gọi là:

a) *hàm lồi* nếu:

$$f(a\underline{x}_1+b\underline{x}_2)\le af(\underline{x}_1)+bf(\underline{x}_2)$$

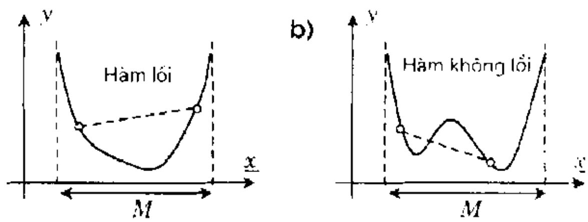
với mọi $\underline{x}_1,\underline{x}_2\in M$, $a+b=1$ và $a,b>0$.

c) *hàm lồi chặt* nếu:

$$f(a\underline{x}_1+b\underline{x}_2)< af(\underline{x}_1)+bf(\underline{x}_2)$$

với mọi $\underline{x}_1,\underline{x}_2\in M$, $\underline{x}_1\neq\underline{x}_2$, $a+b=1$ và $a,b>0$.

d) *hàm lõm* (hay *lõm chặt*) nếu $-f(\underline{x})$ là hàm lồi (hay lồi chặt).



Hình 1.7: a) Hàm lồi
b) Hàm không lồi.

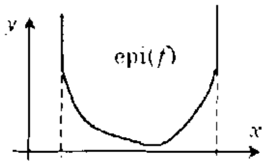
Hình 1.7 minh họa định nghĩa 1.8 thông qua đồ thị hàm số. Ở hàm lồi, đoạn nối hai điểm bất kỳ của đồ thị hàm số không được nằm dưới đường đồ thị hàm số. Với hàm lồi chặt thì đường nối đó phải luôn nằm phía trên đường đồ thị hàm số.

Nếu định nghĩa tập *epi* của hàm số $y=f(\underline{x})$ là tập tất cả các điểm $\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ có $\tilde{y}\ge f(\underline{x})$, tức là (hình 1.8):

$$\mathrm{epi}(f)=\left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \;\middle|\; \tilde{y} \geq f(\underline{x}) \right\}$$

thì rõ ràng hàm $y=f(\underline{x})$ lồi khi và chỉ khi tập epi(f) của nó là tập lồi.

Hình 1.8: Minh họa tập epi của hàm số.



Về hàm lồi ta có những phát biểu sau:

1) Nếu $f_i(\underline{x})$, $i=1,2,\ \ldots\ ,n$ là các hàm lồi thì hàm $f(\underline{x})=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\underline{x})$ với $a_i \geq 0$, $i=1,2,\ \ldots\ ,n$, cũng là hàm lồi.

2) Nếu $f_i(\underline{x})$, $i=1,2,\ \ldots\ ,n$ là các hàm lồi và ứng với mỗi điểm $\underline{x}$ chúng đều bị chặn trên, thì $f(\underline{x})=\max_{1\leq i\leq n} f_i(\underline{x})$ cũng là hàm lồi.

3) Cho hàm $y=f(\underline{x})$ xác định và khả vi trên tập lồi (mở) M. Để $f(\underline{x})$ là hàm lồi thì cần và đủ là

$$(\underline{x}_2-\underline{x}_1)^T \mathrm{grad} f(\underline{x}_1) \leq f(\underline{x}_2)-f(\underline{x}_1), \quad \text{với mọi } \underline{x}_1,\ \underline{x}_2 \in M,$$

trong đó

$$\mathrm{grad} f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n} \right)^T$$

4) Cho hàm $y=f(\underline{x})$ xác định trên tập lồi M và khả vi hai lần tại đó. Ma trận Hesse được định nghĩa là:

$$H(\underline{x})=(h_{ij})=\left(\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad \text{phần tử ở hàng } i \text{ cột } j \text{ là } \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Khi đó thì:

a) $f(\underline{x})$ sẽ là hàm lồi khi và chỉ khi $H(\underline{x})$ xác định bán dương (*positiv semidefinit*) với mọi $\underline{x} \in M$, tức là khi và chỉ khi $H(\underline{x})$ là ma trận đối xứng và tất cả các giá trị riêng của nó có phần thực không âm với mọi $\underline{x} \in M$.

b) $f(\underline{x})$ sẽ là hàm lồi chặt khi và chỉ khi $H(\underline{x})$ xác định dương (*positiv definit*) với mọi $\underline{x} \in M$, tức là khi và chỉ khi $H(\underline{x})$ là ma trận đối xứng và tất cả các giá trị riêng của nó có phần thực dương với mọi $\underline{x} \in M$.

5) Cho m hàm lồi $f_i(\underline{x})$, $i=1,2,\ \dots\ ,m$ cùng xác định trên tập lồi $M\neq\emptyset$. Vậy thì:

a) Hoặc hệ bất phương trình $f_i(\underline{x})<0$, $i=1,2,\ \dots\ ,m$ có nghiệm $\underline{x}\in M$.

b) Hoặc tồn tại m số dương $a_i\geq 0$, $i=1,2,\ \dots\ ,m$, để có $\underline{a}^T f(\underline{x})=\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(\underline{x})>0$ với mọi $\underline{x}\in M$.

1.2 Những bài toán tối ưu điển hình

1.2.1 Bài toán tối ưu lồi

Định nghĩa 1.9: Nếu bài toán tối ưu:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p}) \tag{1.13}$$

có $Q(\underline{p})$ là hàm lồi và

$$P=\{\ \underline{p}\in\mathbb{R}^n \mid g_i(\underline{p})\leq 0,\quad i=1,2,\ \dots\ ,m\ \}$$

trong đó $g_i(\underline{p})$, $i=1,2,\ \dots\ ,m$ cũng là những hàm lồi, thì nó sẽ được gọi là *bài toán tối ưu lồi*.

Nhiều bài toán tối ưu tĩnh, chỉ cần một vài biến đổi nhỏ, là ta đã có thể chuyển được nó về dạng bài toán tối ưu lồi. Ngoài ra, do hàm tuyến tính cũng là hàm lồi, nên bài toán tối ưu lồi định nghĩa như trên bao gồm luôn cả lớp bài toán (1.13) có tập tham số điều khiển P dạng:

$$P=\{\ \underline{p}\in\mathbb{R}^n \mid g_i(\underline{p})\leq 0,\quad h_j(\underline{p})=b_j,\quad i=1,2,\ \dots\ ,m;\ j=1,2,\ \dots\ ,q\ \}$$

với $g_i(\underline{p})$, $i=1,2,\ \dots\ ,m$ là những hàm lồi, và $h_j(\underline{p})$, $j=1,2,\ \dots\ ,q$ là những hàm tuyến tính, tức là $h_j(\underline{p})=\underline{a}_j^T\underline{p}$, trong đó $\underline{a}_j^T=(a_{j,1},\ \dots\ ,a_{j,n})$.

Định lý 1.1: Bài toán tối ưu lồi (1.13) có những tính chất cơ bản sau:

a) Tập P các tham số điều khiển thích hợp là một tập lồi.

b) Mọi nghiệm tối ưu địa phương của bài toán tối ưu lồi cũng sẽ là nghiệm toàn cục, hay bài toán *không có nghiệm tối ưu địa phương*.

c) Nếu bài toán có nhiều nghiệm thì tập của tất cả các nghiệm tối ưu $\underline{p}^*$ là một tập lồi.

d) Nếu P không rỗng và giới nội thì bài toán luôn có nghiệm. Nếu $Q(\underline{p})$ còn là hàm lồi chặt thì bài toán sẽ có nghiệm duy nhất.

Chứng minh:

a) Gọi $M_k = \{\, \underline{p} \in R^n \mid g_k(\underline{p}) \le 0 \,\}$. Khi đó $P = \bigcap_{k=1}^{r} M_k$ nên sẽ đủ nếu ta chỉ ra được M_k là tập lồi. Giả sử $\underline{p}_1, \underline{p}_2 \in M_k$. Vậy thì $g_k(\underline{p}_1) \le 0$ và $g_k(\underline{p}_2) \le 0$. Từ đây, cùng với tính lồi của $g_k(\underline{p})$ ta suy ra được $g_k(a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2) \le a g_k(\underline{p}_1) + b g_k(\underline{p}_2) \le 0$, trong đó $a+b=1$, và $a, b > 0$. Vậy $(a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2)$ cũng thuộc M_k, hay M_k là tập lồi (đ.p.c.m).

b) Gọi $\underline{p}^*$ là nghiệm toàn cục. Giả sử $\underline{p}_0$ là nghiệm địa phương với $\underline{p}^* \ne \underline{p}_0$. Vậy thì $Q(\underline{p}^*) < Q(\underline{p}_0)$. Suy ra với mọi cặp giá trị $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b=1$ có:

$$Q(a\underline{p}^* + b\underline{p}_0) \le a\, Q(\underline{p}^*) + b\, Q(\underline{p}_0) < a\, Q(\underline{p}_0) + b\, Q(\underline{p}_0) = Q(\underline{p}_0)$$

Cho $a \to 0$ thì $(a\underline{p}^* + b\underline{p}_0) \to \underline{p}_0$. Như vậy, trong mọi lân cận U của $\underline{p}_0$ ta luôn tìm được ít nhất một điểm $\underline{p} = (a\underline{p}^* + b\underline{p}_0)$ có $Q(\underline{p}) < Q(\underline{p}_0)$ và điều này mâu thuẫn với giả thiết $\underline{p}_0$ là nghiệm địa phương. Vậy điều giả sử là sai (đ.p.c.m).

c) Giả sử bài toán (1.13) có hai nghiệm tối ưu $\underline{p}_1, \underline{p}_2$, tức là $Q(\underline{p}_1) = Q(\underline{p}_2) = Q_{min}$. Như vậy thì với mọi cặp giá trị $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b=1$ ta sẽ có từ tính lồi của $Q(\underline{p})$:

$$Q(a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2) \le a\, Q(\underline{p}_1) + b\, Q(\underline{p}_2) = Q(\underline{p}_1) \tag{1.14}$$

Ngoài ra, do $\underline{p}_1$ là nghiệm tối ưu nên còn phải có

$$Q(a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2) \ge Q(\underline{p}_1) \tag{1.15}$$

Suy ra phải có $Q(a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2) = Q(\underline{p}_1)$. Điều này chỉ rằng $a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2$ cũng là nghiệm tối ưu, hay tập của tất cả các nghiệm tối ưu $\underline{p}^*$ là một tập lồi (đ.p.c.m).

d) Do P là tập đóng, nên hiển nhiên khi không rỗng và giới nội, bài toán sẽ có nghiệm. Giả sử rằng bài toán có hai nghiệm $\underline{p}_1 \ne \underline{p}_2$. Nếu $Q(\underline{p})$ là hàm lồi chặt thì bất đẳng thức (1.14) sẽ được thay bằng

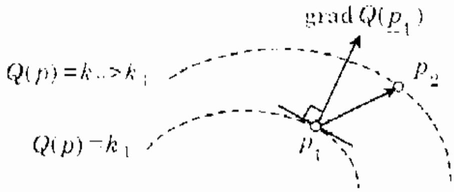
$$Q(a\underline{p}_1 + b\underline{p}_2) < Q(\underline{p}_1) \tag{1.16}$$

và điều này mâu thuẫn với (1.15). Vậy điều giả sử là sai. ❐

Gọi đường đồng mức $Q(\underline{p}) = k$ là quỹ tích tất cả các điểm $\underline{p}$ mà tại đó hàm $Q(\underline{p})$ của bài toán tối ưu lồi (1.13) có cùng một giá trị k. Hình 1.9 minh họa hai đường đồng mức của $Q(\underline{p})$ ứng với hai giá trị khác nhau $k_2>k_1$. Nếu $Q(\underline{p})$ khả vi, tức là tồn tại vector gradient, ký hiệu bởi $\operatorname{grad} Q(\underline{p})$, thì vector này sẽ vuông góc với đường đồng mức, đồng thời có hướng chỉ chiều tăng theo k. Với tính chất như vậy của vector gradient, tại điểm $\underline{p}_1$ trên đường đồng mức $Q(\underline{p})=k_1$, hai vector $\operatorname{grad} Q(\underline{p}_1)$ và $(\underline{p}_2-\underline{p}_1)$ sẽ phải tạo với nhau một góc không lớn hơn 90° (hình 1.9). Điều này chỉ rằng:

Nếu có $Q(\underline{p}_1)<Q(\underline{p}_2)$ thì cũng phải có $(\underline{p}_2-\underline{p}_1)^T \operatorname{grad} Q(\underline{p}_1)\geq 0$.

Hình 1.9: Đường đồng mức và vector gradient



Từ đây, ta suy ra được:

Định lý 1.2: Nếu bài toán tối ưu (1.13) có $Q(\underline{p})$ khả vi trong P thì:

a) $\underline{p}^*$ là nghiệm tối ưu của bài toán khi và chỉ khi:

$$(\underline{p}-\underline{p}^*)^T \operatorname{grad} Q(\underline{p}^*)\geq 0 \quad \text{với mọi } \underline{p}\in P. \tag{1.17}$$

b) Nếu $\underline{p}^*$ là điểm trong của P thì điều kiện (1.17) sẽ được thay bằng:

$$\operatorname{grad} Q(\underline{p}^*)=\underline{0}. \tag{1.18}$$

Ví dụ 1.6: (Minh họa định lý 1.2)

Xét bài toán tối ưu $\arg\min\limits_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p})$ có:

$$Q(\underline{p})=p_1^2+p_2^2+4p_1$$

và $$P=\left\{\,\underline{p}=\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} \;\middle|\; p_1\geq 0,\ p_2\geq 0,\ p_1+p_2\leq 6,\ p_2\geq (p_1-1)^2\,\right\}$$

Đây là bài toán tối ưu lồi. Nó có nghiệm toàn cục $\underline{p}^*=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Để khẳng định điều đó ta sử dụng định lý 1.2. Vì tại $\underline{p}^*$ hàm $Q(\underline{p})$ có $\operatorname{grad} Q(\underline{p}^*)=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ nên:

$$(\underline{p}-\underline{p}^*)^T \operatorname{grad} Q(\underline{p}^*)=4p_1+2(p_2-1)\geq 2p_1^2\geq 0. \qquad \square$$

1.2.2 Bài toán tối ưu toàn phương

Định nghĩa 1.10: Bài toán tối ưu $\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p})$ được gọi là *toàn phương*, nếu:

$$Q(\underline{p}) = \underline{p}^T A \underline{p} + \underline{a}^T \underline{p} \quad \text{và} \quad P = \left\{ \underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \;\middle|\; B\underline{p} = \underline{b} \;,\; p_i \geq 0,\; i = 1, \ldots, n \right\}$$

trong đó $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ và $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đối xứng.

Bài toán tối ưu toàn phương nêu trên bao gồm luôn cả lớp các bài toán có tập tham số điều khiển thích hợp dạng:

$$P = \{ \underline{p} \in \mathbb{R}^n \mid B\underline{p} \leq \underline{b} \} \tag{1.19}$$

hoặc $\quad P = \{ \underline{p} \in \mathbb{R}^n \mid B\underline{p} = \underline{b} \;,\; p_i \geq 0,\; i = 1, \ldots, n \}$ $\hfill (1.20)$

Thật vậy, nếu P có dạng (1.19) thì ta có thể thay:

$$p_i = q_i - r_i \qquad \text{với} \qquad q_i \geq 0,\; r_i \geq 0,\; i = 1, \ldots, n$$

sẽ có được bài toán toàn phương cho $2n$ biến q_i, r_i, $i = 1, \ldots, n$. Hoặc nếu P có dạng (1.20) thì ta thêm n biến mới $q_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ và viết lại:

$$\underline{b} \geq B\underline{p} \;\Leftrightarrow\; \underline{b} = \underbrace{(B \;\; -I)}_{\tilde{B}} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{q} \end{pmatrix}, \quad \text{trong đó} \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Hàm tuyến tính là hàm lồi. Ngoài ra hàm mục tiêu $Q(\underline{p}) = \underline{a}^T \underline{p} + \underline{p}^T A \underline{p}$ có ma trận Hesse:

$$H(\underline{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Q}{\partial p_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial p_n \partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial p_n^2} \end{pmatrix} = A^T + A = 2A$$

nên nó sẽ là hàm lồi khi và chỉ khi A xác định bán dương (mục 1.1.3). Suy ra:

Định lý 1.3: Để bài toán tối ưu toàn phương trong định nghĩa 1.10 là bài toán lồi thì cần và đủ là ma trận A xác định bán dương. Nếu A còn là ma trận xác định dương thì hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ sẽ là hàm lồi chặt.

Từ đây, và với định lý 1.1, 1.2 của bài toán tối ưu lồi, ta có được:

Định lý 1.4: Bài toán tối ưu cho trong định nghĩa 1.10, với A là ma trận xác định bán dương, tức là bài toán tối ưu lồi, toàn phương, có những tính chất cơ bản sau:

a) Mọi nghiệm địa phương của nó cũng là nghiệm toàn cục.

b) $\underline{p}^*$ là nghiệm tối ưu của bài toán khi và chỉ khi:

$$(\underline{p}-\underline{p}^*)^T(2A\underline{p}^*+\underline{a})\geq 0 \quad \text{với mọi } \underline{p}\in P. \tag{1.21}$$

c) Nếu $\underline{p}^*$ là điểm trong của P thì điều kiện (1.21) sẽ được thay bằng:

$$2A\underline{p}^*+\underline{a}=\underline{0}. \tag{1.22}$$

Ví dụ 1.7: (Nghiệm của bài toán tối ưu toàn phương không bị ràng buộc)

Cho bài toán tối ưu không bị ràng buộc (*unconstrained*) với:

$$Q(\underline{p})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}p_ip_j+\sum_{i=1}^{n}a_ip_i$$

Đây là bài toán tối ưu toàn phương có miền tham số điều khiển thích hợp P là toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$. Để chuyển về dạng chính tắc như trong định nghĩa 1.10, ta đặt:

$$\widetilde{A}=(a_{ij}) \qquad \text{với} \qquad a_{ij}=\frac{\beta_{ij}+\beta_{ji}}{2}$$

và

$$\underline{a}=(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n)^T$$

sẽ có

$$Q(\underline{p})=\underline{p}^T\underbrace{(\widetilde{A}^T+\widetilde{A})}_{A}\underline{p}+\underline{a}^T\underline{p}=\underline{p}^TA\underline{p}+\underline{a}^T\underline{p} \qquad \text{với} \qquad \underline{p}=(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)^T$$

Ma trận A là đối xứng. Giả thiết A xác định dương (các giá trị riêng nằm bên phải trục ảo). Vậy thì A sẽ không suy biến. Theo định lý 1.3, đây là bài toán tối ưu toàn phương, lồi, có nghiệm $\underline{p}^*$ bên trong P. Do đó nghiệm này được tính theo (1.22):

$$2A\underline{p}^*+\underline{a}=\underline{0}. \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{p}^*=-\frac{1}{2}A^{-1}\underline{a}.$$ ❐

1.2.3 Bài toán tối ưu hyperbol

Định nghĩa 1.11: Bài toán tối ưu $\underline{p}^*=\arg\min_{\underline{p}\in P}Q(\underline{p})$ được gọi là *hyperbol*, nếu hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ có dạng:

$$Q(\underline{p})=\frac{u(\underline{p})}{v(\underline{p})} \tag{1.23}$$

trong đó $v(\underline{p})>0$ với mọi $\underline{p}\in P$ và

$$P=\{\ \underline{p}\in\mathbb{R}^n\ |\ \ g_i(\underline{p})\le 0,\ \ i=1,2,\ \dots,m\ \}$$

Dạng bài toán tối ưu hyperbol là khá phổ biến trong thực tế, nhất là trong các bài toán chọn tham số điều khiển tối ưu cho bộ điều khiển (xem lại ví dụ 1.2 về chọn tham số bộ điều khiển PI). Hơn nữa, để kết hợp hai mục tiêu tối ưu với nhau, chẳng hạn kết hợp mục tiêu chi phí nhỏ nhất $u(\underline{p})\to\min$, với lợi nhuận cao nhất $v(\underline{p})\to\max$, người ta vẫn thường lập hàm mục tiêu chung $Q(\underline{p})$ dạng (1.23).

Do trong định nghĩa 1.11 chưa có sự ràng buộc rằng hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ phải là hàm lồi, nên nói chung bài toán tối ưu hyperbol chưa phải là bài toán tối ưu lồi. Để cụ thể hơn nữa, người ta đã chia bài toán tối ưu hyperbol thành các lớp bài toán con như sau:

1) *Bài toán tối ưu hyperbol– lồi–lõm*, nếu $u(\underline{p})>0$ là hàm lồi, $v(\underline{p})>0$ là hàm lõm với mọi $\underline{p}\in P$

2) *Bài toán tối ưu hyperbol–toàn phương*, nếu:

$$u(\underline{p})=\underline{p}^TA\underline{p}+\underline{a}^T\underline{p}+a_0\qquad\text{và}\qquad v(\underline{p})=\underline{p}^TB\underline{p}+\underline{b}^T\underline{p}+b_0$$

trong đó $u(\underline{p})>0$, $v(\underline{p})>0$ với mọi $\underline{p}\in P$, $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^n$, $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ và A là ma trận xác định dương.

3) *Bài toán hyperbol–tuyến tính*, nếu:

$$u(\underline{p})=\underline{a}^T\underline{p}+a_0\ ,\qquad v(\underline{p})=\underline{b}^T\underline{p}+b_0 \tag{1.24a}$$

$$P=\{\ \underline{p}\in\mathbb{R}^n\ |\ \ C\underline{p}\le\underline{d}\ \} \tag{1.24b}$$

trong đó $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{d}\in\mathbb{R}^m$, $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ và $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Định lý 1.5: Mọi bài toán tối ưu hyperbol–tuyến tính đều chuyển được về dạng bài toán tối ưu tuyến tính $(\underline{x},t)^*=\arg\min\limits_{\underline{x}\in X} f(\underline{x},t)$ với

$$\underline{x}=t\underline{p}\ ,\qquad f(\underline{x},t)=\underline{a}^T\underline{x}+a_0t$$

$$X=\{\ \begin{pmatrix}\underline{x}\\ t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1}\ |\ \ C\underline{x}-\underline{d}t\le\underline{0}\ ,\ t>0\quad\text{và}\quad\underline{b}^T\underline{x}+b_0t=1\ \}$$

Chứng minh:

Đặt $\frac{x}{t} = p$ với $t>0$ thì bài toán hyperpol tuyến tính (1.24) được viết lại thành:

$$\min \tilde{Q}(x,t) = \min\left\{ \frac{a^T x + a_0 t}{b^T x + b_0 t} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \tilde{P} \right\} \tag{1.25a}$$

$$\tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \Re^{n+1} \;\middle|\; C\underline{x} - \underline{d}t \le \underline{0}\,,\ t > 0 \right\} \tag{1.25b}$$

Nhưng vì khi $\begin{pmatrix} x^* \\ t^* \end{pmatrix}$ là nghiệm của (1.25) thì $\begin{pmatrix} \lambda x^* \\ \lambda t^* \end{pmatrix}$ với $\lambda>0$ cũng là nghiệm của nó, nên cùng với $c(\underline{p})>0$ ta suy ra được điều phải chứng minh. □

1.3 Tìm nghiệm bằng phương pháp lý thuyết

Sự đảm bảo cho bài toán tối ưu $p^* = \arg\min_{p\in P} Q(\underline{p})$ có nghiệm là định lý sau:

Định lý 1.6: (Weierstrass) Nếu miền P là đóng, giới nội và hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ là liên tục trên P, tức là thuộc không gian $C[P]$, thì $Q(\underline{p})$ luôn có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trong P.

1.3.1 Mối quan hệ giữa bài toán tối ưu và bài toán điểm yên ngựa

Xét bài toán tối ưu

$$p^* = \arg\min_{p\in P} Q(p) \tag{1.26a}$$

$$P = \{\, \underline{p} \in \Re^n \mid g_i(\underline{p}) \le 0\,,\ i = 1,2,\ldots,m \,\} \tag{1.26b}$$

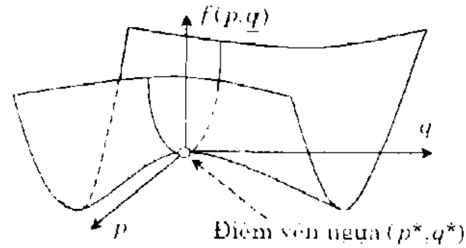
trong đó $m \le n$. Từ bài toán tối ưu trên ta lập một hàm chung:

$$f(\underline{p},\underline{q}) = Q(\underline{p}) + q^T \underline{g}(\underline{p}) \quad \text{với} \quad \underline{g}(\underline{p}) = \begin{pmatrix} g_1(\underline{p}) \\ \vdots \\ g_m(\underline{p}) \end{pmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \ \text{và} \ q_i \ge 0. \tag{1.27}$$

Định nghĩa 1.12: Điểm $(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$ được gọi là điểm yên ngựa của hàm (1.27) nếu $\underline{p}^*$ là điểm cực tiểu của $f(p,\underline{q}^*)$ và $\underline{q}^*$ là điểm cực đại của $f(p^*,\underline{q})$. Nói cách khác, nếu:

$$f(\underline{p}^*,q) \le f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) \le f(p,\underline{q}^*) \tag{1.28}$$

Hình 1.10 minh họa hàm $f(\underline{p},\underline{q})$ và điểm yên ngựa $(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$ của nó.



Hình 1.10: Minh họa điểm yên ngựa.

Định lý 1.7: Xét bài toán tối ưu (1.26) và hàm (1.27).

a) (Điều kiện đủ) Nếu (p^*,q^*) là điểm yên ngựa của hàm $f(p,q)$ tính theo (1.27) thì p^* sẽ là nghiệm tối ưu của bài toán (1.26).

b) (Điều kiện cần và đủ) Giả sử $Q(p)$, $g_i(p)$, $i=1,2,\ldots,m$ là các hàm lồi, tức là bài toán (1.26) là bài toán tối ưu lồi, và tập P có ít nhất một điểm trong, tức là tồn tại ít nhất một điểm $p\in P$ để có $g_i(p)<0$, $i=1,2,\ldots,m$. Khi đó, điểm (p^*,q^*) là điểm yên ngựa của hàm $f(p,q)$ khi và chỉ khi p^* là nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu lồi (1.26).

Chứng minh:

a) Trước hết, do (p^*,q^*) là điểm yên ngựa của $f(p,q)$ nên theo (1.28) có:

$$q^T g(p^*)\le (q^*)^T g(p^*) \qquad \text{với mọi } q\ge 0$$

Thay $q=q^*+e_i$, trong đó e_i là vector đơn vị thứ i của $\mathbb{R}^m$, tức là vector có phần tử thứ i bằng 1, các phần tử khác bằng 0, sẽ được $g_i(p^*)\le 0$. Vậy p^* là phần tử thuộc P.

Tiếp tục, cũng do (p^*,q^*) là điểm yên ngựa của $f(p,q)$ và vì vector q^* có các phần tử không âm, ký hiệu là $q^*\ge 0$ cũng như $g(p)\le 0$ nên theo (1.28) lại có:

$$Q(p)\ge Q(p)+(q^*)^T g(p)=f(p,q^*)\ge f(p^*,q^*)\ge f(p^*,q)=Q(p^*)+q^T g(p^*)$$

đúng với mọi $q\ge 0$. Bởi vậy, với $q=0$ ta có được $Q(p)\ge Q(p^*)$ (đ.p.c.m.).

b) Điều kiện đủ đã được chứng minh ở câu a) với điều kiện yếu hơn. Ta chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Do p^* là nghiệm của bài toán tối ưu lồi (1.26) nên $Q(p)-Q(p^*)$ cũng là một hàm lồi. Xét hệ gồm $m+1$ các bất phương trình lồi.

$$\begin{cases} g_i(p)<0, & i=1,2,\ldots,m \\ Q(p)-Q(p^*)<0 \end{cases}$$

Vì p^* là nghiệm tối ưu nên hệ không có nghiệm $p \in P$. Vậy theo tính chất 5) của hệ các bất phương trình lồi (xem mục 1.1.3), phải tồn tại $m+1$ số dương $a_i \geq 0$, $i=0,1,\ldots,m$, để có:

$$a_0[\,Q(p)-Q(p^*)\,]+\sum_{i=1}^{m}a_i g_i(p)\geq 0 \tag{1.29}$$

đúng với mọi $p \in P$. Có thể thấy ở đây phải có $a_0 \neq 0$ vì trong trường hợp ngược lại ta sẽ thu được điều vô lý $\sum_{i=1}^{m}a_i g_i(\underline{p})<0$. Do $a_0>0$ nên sẽ không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng $a_0=1$. Khi đó thì từ (1.29) sẽ có:

$$Q(\underline{p})-Q(\underline{p}^*)+\sum_{i=1}^{m}a_i g_i(\underline{p})\geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(\underline{p},\underline{a})\geq Q(\underline{p}^*) \quad \text{với} \quad \underline{a}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_m\end{pmatrix}$$

Ngoài ra, hiển nhiên với mọi $\underline{q}\geq\underline{0}$ còn có:

$$Q(\underline{p}^*)\geq Q(\underline{p}^*)+\underline{q}^T\underline{g}(\underline{p}^*)=f(\underline{p}^*,\underline{q})$$

Suy ra:

$$f(\underline{p}^*,\underline{q})\leq Q(\underline{p}^*)\leq f(\underline{p},\underline{q})$$

Thay $\underline{q}=\underline{a}$ và $\underline{p}=\underline{p}^*$ ta được $Q(\underline{p}^*)=f(\underline{p}^*,\underline{a})$ và điều này dẫn đến:

$$f(\underline{p}^*,\underline{q})\leq f(\underline{p}^*,\underline{a})\leq f(\underline{p},\underline{a})$$

Vậy $(\underline{p}^*,\underline{a})$ chính là điểm yên ngựa của (1.27) (đ.p.c.m). ❑

Chú ý: Trong phần chứng minh ta đã sử dụng ký hiệu so sánh vector, chẳng hạn, $\underline{q}\geq\underline{0}$ cho một vector $\underline{q}$. Nó được hiểu là các phần tử của vector $\underline{q}$ đó là không âm.

1.3.2 Phương pháp Kuhn–Tucker

Định lý 1.7 cho thấy việc xác định nghiệm $\underline{p}^*$ của bài toán tối ưu (1.26) có thể được thay bằng việc xác định điểm yên ngựa $(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$ của hàm (1.27). Ưu điểm chính của cách giải này là ta đã chuyển hoàn toàn bài toán tối ưu thành bài toán giải hệ các bất phương trình và phương trình.

Công cụ hỗ trợ việc xác định điểm yên ngựa $(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$ của hàm (1.27) là định lý Kuhn–Tucker phát biểu dưới đây. Thực chất, nội dung định lý Kuhn–Tucker mang nhiều nét của một thuật toán hơn là một định lý toán học. Chính vì lẽ đó mà ta đã gọi nó là *phương pháp* Kuhn–Tucker.

Định lý 1.8: Cho bài toán tối ưu (1.26) có $Q(\underline{p})$, $g_i(\underline{p})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ là các hàm khả vi. Lập hàm $f(\underline{p}, \underline{q})$ theo (1.27). Khi đó:

a) (Điều kiện cần): Nếu $(\underline{p}^*, \underline{q}^*)$ là điểm yên ngựa của $f(\underline{p}, \underline{q})$ thì nó sẽ thỏa mãn hệ các bất phương trình và phương trình:

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_{\underline{p}} f(\underline{p}^*, \underline{q}^*) = \underline{0} & (1.30a) \\ \operatorname{grad}_{\underline{q}} f(\underline{p}^*, \underline{q}^*) \le \underline{0} & (1.30b) \\ (\underline{q}^*)^T \operatorname{grad}_{\underline{q}} f(\underline{p}^*, \underline{q}^*) = 0 & (1.30c) \end{cases}$$

trong đó $\operatorname{grad}_{\underline{p}} f(\underline{p}, \underline{q}) = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \right)^T$

và $\operatorname{grad}_{\underline{q}} f(\underline{p}, \underline{q}) = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial q_m} \right)^T$

b) (Điều kiện cần và đủ): Nếu (1.26) còn là bài toán tối ưu lồi và tập P có ít nhất một điểm trong, thì phát biểu a) sẽ là điều kiện cần và đủ.

Chứng minh:

a) Vì $(\underline{p}^*, \underline{q}^*)$ là điểm yên ngựa của $f(\underline{p}, \underline{q})$ nên theo định nghĩa 1.12, $\underline{p}^*$ là điểm cực tiểu của $f(\underline{p}, \underline{q}^*) = \tilde{f}(\underline{p})$. Do bài toán $\min \tilde{f}(\underline{p})$ không bị ràng buộc (*unconstained*) nên tại $\underline{p}^*$ có $\operatorname{grad} \tilde{f}(\underline{p}^*) = \underline{0}$ và điều này tương đương với (1.30a). Mặt khác, cũng vì $(\underline{p}^*, \underline{q}^*)$ là điểm yên ngựa của $f(\underline{p}, \underline{q})$ nên $\underline{q}^*$ là điểm cực đại của $f(\underline{p}^*, \underline{q}) = \hat{f}(\underline{q})$, tức là điểm cực tiểu của $-\hat{f}(\underline{q})$. Do $-\hat{f}(\underline{q})$ tuyến tính theo $\underline{q}$ nên bài toán $\underline{q}^* = \arg\min_{\underline{q} \in U} (-\hat{f}(\underline{q}))$ là bài toán tối ưu lồi bị rằng buộc $U = \{ \underline{q} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{q} \ge \underline{0} \}$. Theo định lý 1.2 thì có hai khả năng xảy ra: Nếu $\underline{q}^*$ là điểm trong của miền U thì $-\operatorname{grad} \hat{f}(\underline{q}^*) = \underline{0}$ và điều này tương đương với (1.30b) và (1.30c). Ngược lại, nếu $\underline{q}^*$ là điểm biên của miền U, tức là $\underline{q}^* = \underline{0}$, thì hiển nhiên có (1.30c), còn khẳng định (1.30b) được suy ra từ định lý 1.2 mà cụ thể là bất đẳng thức (1.17):

$$(\underline{q} - \underline{q}^*)^T \operatorname{grad} \hat{f}(\underline{q}^*) \le 0, \quad \forall\, \underline{q} \ge \underline{q}^* = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} \hat{f}(\underline{q}^*) \le \underline{0}$$

b) Điều kiện cần đã được chứng minh ở câu a), ta chỉ còn phải chứng minh điều kiện đủ. Do $Q(p)$, $g_i(p)$, $i=1,2,\dots,m$ là các hàm lồi nên $f(p,q)$ cũng là hàm lồi theo p. Theo tính chất hàm lồi (mục 1.1.3) ta được:

$$f(\underline{p},\underline{q}^*) - f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) \ge (\underline{p}-\underline{p}^*)^T \operatorname{grad}_p f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad f(\underline{p},\underline{q}^*) \ge f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) \quad \text{với mọi } \underline{p}$$

Mặt khác, vì $-f(\underline{p},\underline{q})$ tuyến tính theo $\underline{q}$, nên nó cũng là hàm lồi theo $\underline{q}$. Vậy:

$$f(\underline{p}^*,\underline{q}) - f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) \le (\underline{q}-\underline{q}^*)^T \operatorname{grad}_q f(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$$

$$= \underline{q}^T \operatorname{grad}_q f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) - (\underline{q}^*)^T \operatorname{grad}_q f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) \le 0$$

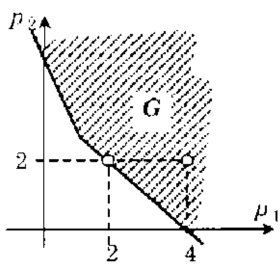
$$\Rightarrow \qquad f(\underline{p}^*,\underline{q}) \le f(\underline{p}^*,\underline{q}^*) \qquad \text{với mọi } \underline{q}^* \ge \underline{0}$$

Điều này chứng tỏ $(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$ chính là điểm yên ngựa của $f(\underline{p},\underline{q})$. □

Ví dụ 1.8: (Minh họa ứng dụng phương pháp Kuhn–Tucker)

Xác định khoảng cách từ gốc tọa độ tới tập lồi G (hình 1.11):

$$G = \left\{ \underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; p_1+p_2 \ge 4 \ \text{ và } \ 2p_1+p_2 \ge 5 \right\}.$$



Hình 1.11: Minh hoạ ví dụ 1.8.

Bài toán trên được viết lại thành:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} \underbrace{(p_1^2 + p_2^2)}_{Q(\underline{p})}$$

$$P = \{ \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid 4-p_1-p_2 \le 0,\ 5-2p_1-p_2 \le 0 \}$$

Rõ ràng đây là bài toán tối lồi và tập P có chứa ít nhất một điểm trong, chẳng hạn đó là điểm $\underline{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Lập hàm:

$$f(p,q) = Q(p) + q^T g(p) = p_1^2 + p_2^2 + q_1(4 - p_1 - p_2) + q_2(5 - 2p_1 - p_2)$$

trong đó $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$. Khi đó, theo định lý 1.8, $\underline{p}^*$ sẽ được tìm thông qua việc giải hệ phương trình và bất phương trình:

$$\mathrm{grad}_p f = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2p_1 - q_1 - 2q_2 = 0 \\ 2p_2 - q_1 - q_2 = 0 \end{cases} \tag{1.31a}$$

$$\mathrm{grad}_q f \leq \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 - p_1 - p_2 \leq 0 \\ 5 - 2p_1 - p_2 \leq 0 \end{cases} \tag{1.31b}$$

$$\underline{q}^T \ \mathrm{grad}_q f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_1(4-p_1-p_2)+q_2(5-2p_1-p_2)=0 \tag{1.31c}$$

Để giải hệ các phương trình và bất phương trình trên cho 4 ẩn số p_1, p_2, q_1, q_2, trước hết ta thấy do có (1.31b) và $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ nên (1.31c) thay được bằng:

$$\begin{cases} q_1(4 - p_1 - p_2) = 0 \\ q_2(5 - 2p_1 - p_2) = 0 \end{cases} \tag{1.31d}$$

- *Trường hợp 1*: Nếu $q_1 = q_2 = 0$ thì $p_1 = p_1 = 0$ và điều này mâu thuẫn với (1.31b) nên bị loại.
- *Trường hợp 2*: Nếu $q_1 = 0$, $q_2 > 0$ thì từ (1.31a) và (1.31d) ta suy ra được $p_1 = q_2 = 2$, $q_2 = 1$. Song kết quả này lại mâu thuẫn với (1.31b) nên cũng bị loại.
- *Trường hợp 3*: Nếu $q_1 > 0$, $q_2 = 0$ thì từ (1.31d) có $p_2 = 4 - p_1$ và từ (1.31a) có $2p_1 - q_1 = 0$ cũng như $-2p_1 - q_1 = -8$. Vậy $p_1 = p_2 = 2$, $q_1 = 4$, $q_2 = 0$. Kết quả này thỏa mãn (1.31b) nên là nghiệm của hệ các phương trình, bất phương trình (1.31). Nói cách khác, bài toán tối ưu có một nghiệm là $\underline{p}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ta không cần phải xét tiếp trường hợp cuối $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ vì ở bài toán tối ưu lồi này có $Q(\underline{p})$ là hàm lồi chặt nên theo định lý 1.1, nó chỉ có thể có nghiệm duy nhất. □

1.3.3 Phương pháp Lagrange

Cho bài toán tối ưu:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p}) \tag{1.32a}$$

$$P = \{ \underline{p} \in \mathbb{R}^n \mid h_i(\underline{p}) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \} \tag{1.32b}$$

Khác với bài toán (1.26) đã xét, ở đây, bài toán (1.32) có điều kiện ràng buộc P được biểu diễn bởi m phương trình, đồng thời các hàm $Q(\underline{p})$, $h_i(\underline{p}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ được giả thiết là khả vi (trong một miền hở), tức là thuộc $C_1[P]$. Nếu P không rỗng và giới nội thì theo định lý 1.6, bài toán (1.32) chắc chắn có nghiệm.

Tương tự như phương pháp Kuhn–Tucker, ta lập hàm:

$$f(\underline{p},\underline{a}) = Q(\underline{p}) + \sum_{i=1}^{m} a_i h_i(\underline{p}) = Q(\underline{p}) + \underline{a}^T \underline{h}(\underline{p}) \tag{1.33}$$

nhưng với $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là m số thực tùy ý (không bắt buộc phải không âm). Ký hiệu $\underline{a}$ và $\underline{h}(\underline{p})$ trong (1.33) được hiểu là:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad \underline{h}(\underline{p}) = \begin{pmatrix} h_1(\underline{p}) \\ \vdots \\ h_m(\underline{p}) \end{pmatrix}$$

Giữa hàm $f(\underline{p},\underline{a})$ và bài toán (1.32) có mối quan hệ như sau:

Định lý 1.9: Giả sử bài toán (1.32) có nghiệm tối ưu $\underline{p}^*$. Khi đó

a) Hoặc nghiệm $\underline{p}^*$ thỏa mãn:

$$\mathrm{grad}_p f(\underline{p}^*,\underline{a}) = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}} + \underline{a}^T \frac{\partial \underline{h}(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}} = \underline{0}^T \tag{1.34a}$$

nếu phương trình có nghiệm $\underline{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

b) Hoặc p^* thỏa mãn:

$$\underline{a}^T \frac{\partial \underline{h}(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}} = \underline{0}^T \tag{1.34b}$$

với vô số các giá trị $\underline{a}^T$.

Ký hiệu $\dfrac{\partial}{\partial \underline{p}}$ trong các công thức (1.34) là chỉ ma trận Jacobi của (vector) hàm nhiều biến:

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{p}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial p_n} \right) \qquad \text{và} \qquad \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Dễ dàng thấy, để hệ phương trình tuyến tính (1.34a) có nghiệm $\underline{a}^T$ thì phải có (xem thêm phần phụ lục về ánh xạ và ánh xạ tuyến tính, mục 6.1.1):

$$\text{Rank}\left(\frac{\partial \underline{h}(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}}\right) = \text{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{h}(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}} \\ \dfrac{\partial Q(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}} \end{pmatrix}$$

cũng như để (1.34b) có vô số nghiệm $\underline{a}^T$ thì ma trận $\left(\dfrac{\partial \underline{h}(\underline{p}^*)}{\partial \underline{p}}\right)$ phải có hạng nhỏ hơn m.

Định lý 1.9 chỉ là điều kiện cần. Tuy nhiên, nó vẫn thường được sử dụng như một thuật toán để xác định nghiệm $\underline{p}^*$ qua các bước như sau:

- Tìm tất cả các điểm $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_l$ làm cho ma trận $\dfrac{\partial \underline{h}(\underline{p})}{\partial \underline{p}}$ bị sụt hạng.
- Tìm tất cả các điểm $\underline{p}_{l+1}, \ldots, \underline{p}_k$ là nghiệm của (1.34a) và $\underline{h}(\underline{p}) = \underline{0}$.
- Xác định $\underline{p}^* = \arg\min\limits_{1 \le i \le k} Q(\underline{p}_i)$.

Ví dụ 1.9: (Minh họa ứng dụng phương pháp Lagrange)

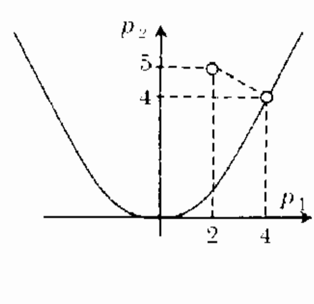
Xác định khoảng cách ngắn nhất từ điểm $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ tới đường parabol $p_2 = \dfrac{1}{4} p_1^2$.

Chuyển về dạng bài toán tối ưu chuẩn được:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p} \in P} \underbrace{[(p_1 - 2)^2 + (p_2 - 5)^2]}_{Q(\underline{p})}$$

trong đó

$$P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{p_1^2 - 4p_2}_{h(\underline{p})} = 0 \,\}$$



Hình 1.12: Minh họa ví dụ 1.9

Trước hết ta lập hàm:

$$f(\underline{p}, \underline{a}) = (p_1 - 2)^2 + (p_2 - 5)^2 + a(p_1^2 - 4p_2)$$

sau đó thực hiện lần lượt các bước:

Xác định ma trận $\frac{\partial h(p)}{\partial p}=(2p_1 \quad -4)$. Ma trận này luôn có hạng bằng $m=1$ với mọi $\underline{p}$, tức là không bị sụt hạng với mọi $\underline{p}$.

- Tính

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_{p} f(p,a)=0 \\ h(p)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(p_1-2)+2ap_1=0 \\ 2(p_2-5)-4a=0 \\ p_1^2-4p_2=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{p}_1=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \text{ và } \underline{p}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

- So sánh $Q(\underline{p}_1)=5<Q(\underline{p}_2)=32$ ta rút ra được $\underline{p}^*=\underline{p}_1=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$. ❐

1.4 Tìm nghiệm bằng phương pháp số

1.4.1 Bài toán tối ưu tuyến tính và phương pháp đơn hình (simplex)

Bài toán tối ưu $\underline{p}^*=\arg\min\limits_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p})$ được gọi là tuyến tính chuẩn (NOP–*normal linear optimal problem*) nếu có:

$$Q(\underline{p})=\underline{q}^T\underline{p}=q_1p_1+q_2p_2+\cdots+q_np_n \tag{1.35a}$$

$$P=\{\,\underline{p}\in\mathbb{R}^n \mid A\underline{p}=\underline{b} \text{ và } \underline{p}\geq\underline{0}\,\} \tag{1.35b}$$

Có thể một số bài toán tuyến tính ban đầu chưa có dạng chuẩn (1.35). Song ta luôn chuyển được về dạng (1.35). Chẳng hạn như từ:

$$P=\{\,\underline{p}\in\mathbb{R}^n \mid A\underline{p}\leq\underline{b} \text{ và } \underline{p}\geq\underline{0}\,\}$$

tức là từ

$$a_{k1}p_1+a_{k2}p_2+\cdots+a_{kn}p_n\leq b_k$$

thì bằng cách thêm vào các biến mới $p_{n+k}\geq 0$ ta sẽ được:

$$a_{k1}p_1+a_{k2}p_2+\cdots+a_{kn}p_n+p_{n+k}=b_k$$

Cũng như vậy nếu như chưa có điều kiện $\underline{p}\geq\underline{0}$ thì ta sẽ thế biến $\underline{p}=\underline{\tilde{p}}-\underline{\hat{p}}$ với $\underline{\tilde{p}}\geq\underline{0}$ và $\underline{\hat{p}}\geq\underline{0}$ để lại có dạng (1.35).

Tuy rằng việc trình bày các phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính không phải là nhiệm vụ chính của quyển sách này, song để áp dụng cho bài toán tối ưu phi tuyến, ta cũng nên biết đến phương pháp đơn hình (simplex) của Danzig. Nó bao gồm các bước:

1) Giả sử Rank(A)=r. Chọn tất cả r vector cột độc lập tuyến tính của A. Không mất tính tổng quát, nếu ta cho rằng đó là r cột đầu tiên. Biểu diễn các biến $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n$ qua các biến $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sau đó thay vào Q và P sẽ được

$$Q(p) = d_1 p_1 + d_2 p_2 + \cdots + d_r p_r$$

$$P = \left\{ \underline{p} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{pmatrix} p_{r+1} \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1,1} & \cdots & e_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n-r,1} & \cdots & e_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-r} \end{pmatrix} \text{ và } p \geq \underline{0} \right\}$$

Nếu biểu diễn dưới dạng bảng sẽ có:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_r	T
p_{r+1}	$e_{1,1}$	$e_{1,2}$	$\cdots$	$e_{1,r}$	f_1
p_{r+2}	$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$\cdots$	$e_{2,r}$	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_n	$e_{n-r,1}$	$e_{n-r,2}$	$\cdots$	$e_{n-r,r}$	f_{n-r}
Q	d_1	d_2	$\cdots$	d_r	0

2) Đổi chỗ một hàng và một cột cho nhau để hàng cuối cùng gồm toàn số không âm, không đổi hàng Q và cột T. Nguyên tắc đổi chỗ giống như trong thuật toán giải hệ phương trình tuyến tính. Ví dụ muốn đổi chỗ cột k và hàng l của:

$$p_l = \cdots + a p_k + \cdots + b p_m + \cdots$$

$$p_s = \cdots + c p_k + \cdots + d p_m + \cdots$$

cho nhau thì với biến phụ $\lambda = \dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ sẽ có:

$$p_k = \cdots + \lambda p_l - \cdots - b\lambda p_m + \cdots$$

$$p_s = \cdots + c\lambda p_l + \cdots + (d - cb\lambda) p_m + \cdots$$

Biểu diễn kết quả trên dưới dạng bảng thì được:

Trước khi đổi hàng/cột

	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_m	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
p_l	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	$\cdots$	c		d	
	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

$\lambda = 1/a$

Sau khi đổi hàng / cột

	.	p_l	$\cdots$	p_m	$\cdots$
.		$\vdots$		$\vdots$	
p_l	$\cdots$	$\boldsymbol{\lambda}$	$\cdots$	$\boldsymbol{-b\lambda}$	$\cdots$
.		$\vdots$		$\vdots$	
	$\cdots$	$\boldsymbol{c\lambda}$	$\cdots$	$\boldsymbol{d-cb\lambda}$	$\cdots$
	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

3) Với n phần tử p_i và Rank(A)=r thì nhiều nhất chỉ có C_n^r phép đổi cột–hàng. Giả sử sau một lần đổi hàng–cột, bảng ma trận có dạng:

	y_1	y_2	$\cdots$	y_r	$\boldsymbol{T}$
y_{r+1}	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,r}$	$\boldsymbol{T_{r+1}}$
y_{r+2}	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,r}$	$\boldsymbol{T_{r+2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
y_n	$h_{n-r,1}$	$h_{n-r,2}$	$\cdots$	$h_{n-r,r}$	$\boldsymbol{T_n}$
$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{m_r}$	$\boldsymbol{M}$

với T_1, T_2, $\cdots$, T_{n-r} là những giá trị không âm. Khi đó, dựa theo định lý (đủ) về nguyên tắc đơn hình ta có các kết luận sau:

a) Nếu $m_k \geq 0$, $k = 1, 2, \cdots, r$ điểm tối ưu sẽ là điểm có các phần tử $y_k=0$ với $k=1,2,\cdots,r$ và $y_m = T_m$, $m=r+1, r+2, \cdots, n$. Giá trị hàm mục tiêu tại đó là M.

b) Nếu có một phần tử $m_k<0$ và những số hạng còn lại cùng cột k đều không âm thì bài toán vô nghiệm.

Ví dụ 1.10: (Chuyển bài toán tuyến tính thông thường về dạng chuẩn)

Cho bài toán tối ưu tuyến tính $\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p})$ với:

$$Q(p) = -6p_1 - 9p_3$$

$$P=\{ p \in \Re^4 \mid p_1+p_2\leq 8,\ \ p_3+p_4\leq 8,\ \ 2p_1-p_2+3p_3\ \ p_4=0$$

$$\text{và } p_1\geq 0,\ p_2\geq 0,\ p_3\geq 0,\ p_4\geq 0 \}$$

Để đưa được về dạng chuẩn (1.35) ta định nghĩa thêm các biến phụ mới $p_5>0$, $p_6\geq 0$ và biến đổi P thành:

$$p_1+p_2+p_5=8 \quad \text{và} \quad p_3+p_4+p_6=8$$

Khi đó bài toán sẽ trở thành:

$$Q(\underline{p}) = -6p_1 - 9p_3$$

$$P = \{\, p \in \mathbb{R}^6 \mid p_1+p_2+p_5=8,\ p_3+p_4+p_6=8,\ 2p_1-p_2+3p_3-p_4=0$$
$$\text{và } p_1\geq 0,\ p_2\geq 0,\ p_3\geq 0,\ p_4\geq 0,\ p_5\geq 0,\ p_6\geq 0 \,\}.$$ ❒

Ví dụ 1.11: (Minh họa phương pháp đơn hình)

Cho bài toán NOP sau:

$$Q(p) = -6p_1 - 9p_3$$

$$P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^6 \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underline{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \text{ và } \underline{p} \geq 0 \,\}$$

Ma trận A có 3 cột đầu độc lập tuyến tính. Biểu diễn p_4, p_5, p_6 và $Q(p)$ theo p_1, p_2, p_3. Sau đó lập bảng ma trận và sau 2 lần đổi hàng- cột có:

	p_1	p_2	p_3	T	
p_5	−1	−1	**0**	8	
p_6	**−2**	**1**	**−4**	**8**	−1/4
p_4	2	1	**3**	0	
Q	−6	0	**−9**	0	

	p_1	p_2	p_6	T	
p_5	**−1**	**−1**	**0**	**8**	−1
p_3	−1/2	**1/4**	−1/4	2	
p_4	1/2	**−1/4**	−3/4	6	
M	−3/2	**−9/4**	9/4	−18	

	p_1	p_5	p_6	T
p_2	−1	−1	0	**8**
p_3	−3/4	−1/4	−1/4	**4**
p_4	3/4	1/4	−3/4	**4**
M	**3/4**	**9/4**	**9/4**	**−36**

Cuối cùng ta có kết luận sau về nghiệm tối ưu:

$p_1=p_5=p_6=0$; $p_2=8$; $p_3=p_4=4$ và $Q_{min}=-36$. ❒

Chú ý: Bài toán ở ví dụ 1.11 chính là dạng chuẩn của bài toán tối ưu tuyến tính cho trong ví dụ 1.10. Từ nghiệm của bài toán dạng chuẩn của nó ở ví dụ 1.11 ta cũng sẽ có được nghiệm của bài toán trong ví dụ 1.10 bằng cách bỏ đi tất cả những biến phụ đã thêm vào. Cụ thể, nghiệm của bài toán tối ưu ở ví dụ 1.10 sẽ là:

$p_1=0$; $p_2=8$; $p_3=4$ và $p_4=4$.

1.4.2 Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

Để áp dụng được những phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính, chẳng hạn như phương pháp đơn hình, cho các bài toán tối ưu phi tuyến, thì trước hết ta cần phải xấp xỉ bài toán phi tuyến thành tuyến tính. Công việc tuyến tính hóa bài toán phi tuyến $p^* = \arg\min_{p \in P} Q(p)$ được thực hiện ở hai công đoạn:

tuyến tính hóa điều kiện ràng buộc P,

và tuyến tính hóa hàm mục tiêu $Q(p)$.

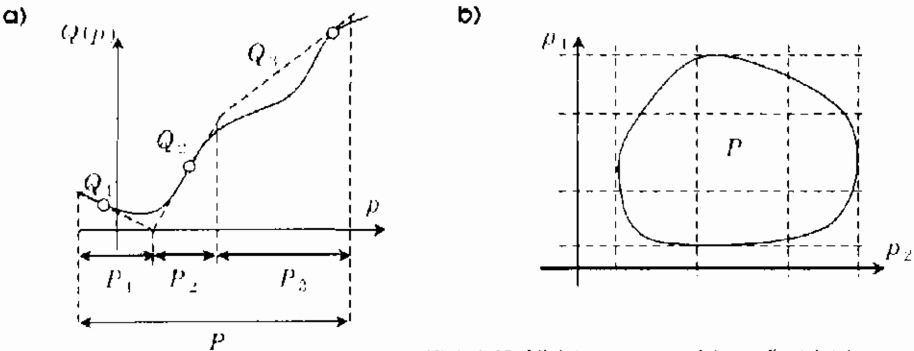
Hình 1.13a) là ví dụ minh họa. Ở đó, bài toán tối ưu phi tuyến $\underline{p}^* = \arg\min_{p \in P} Q(\underline{p})$ ban đầu đã được tuyến tính hóa (từng đoạn) thành ba bài toán tối ưu tuyến tính con là $p^* = \arg\min_{p \in P_k} Q_k(\underline{p})$, $k = 1,2,3$, trong đó P_k phải là các miền đủ nhỏ thuộc P sao cho trong đó hàm phi tuyến $Q(p)$ có thể xấp xỉ được bằng các hàm tuyến tính:

$$Q_k(\underline{p}) = Q(\underline{p}_k) + (\underline{p} - \underline{p}_k)^T \mathrm{grad}\, Q(\underline{p}_k) \tag{1.36}$$

và p_k là một điểm tùy ý thuộc P_k. Các miền P_k không được phép giao nhau đôi một và phải phủ kín P. Ngoài ra, chúng càng nhỏ thì việc xấp xỉ $Q(\underline{p})$ từng đoạn theo (1.36) sẽ càng chính xác. Thông thường, người ta hay tuyến tính hóa điều kiện ràng buộc P thành các điều kiện ràng buộc tuyến tính P_k dưới dạng (hình 1.13b):

$$P_k = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^n \mid a_{ik} \le p_k \le b_{ik} \text{ với } i = 1,2,\ldots,n \,\}$$

tức là chia nhỏ miền P thành các miền (siêu diện) P_k bằng các "tấm lưới" có cạnh song song với các trục tọa độ.



Hình 1.13: Minh họa phương pháp tuyến tính hóa.

Sau khi đã tuyến tính hóa bài toán tối ưu $\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p})$ ban đầu thành m bài toán tối ưu tuyến tính con $\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P_k} Q_k(\underline{p})$, $k=1,2,\cdots,m$, thì việc giải bài toán tối ưu phi tuyến sẽ được thay bằng việc giải m bài toán tối ưu tuyến tính với các bước như sau:

1) Tìm nghiệm bài toán tối ưu tuyến tính $\min_{\underline{p}\in P_k} Q_k(\underline{p})$. Gọi nghiệm đó là $\tilde{\underline{p}}_k$.

2) Xác định $\underline{p}^* = \min_{1\le k\le m} \tilde{\underline{p}}_k$.

1.4.3 Phương pháp Newton–Raphson

Phương pháp Newton–Raphson tiến hành việc tìm nghiệm $\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p})$ theo nguyên lý lặp (*iterative*) qua nhiều bước tính. Bắt đầu là điểm khởi phát $\underline{p}_0 \in P$, nó tìm một điểm $\underline{p}_1 \in P$, sao cho có được $Q(\underline{p}_1) < Q(\underline{p}_0)$. Nếu sai số $|Q(\underline{p}_1) - Q(\underline{p}_0)|$ vẫn còn quá lớn thì nó thực hiện lại bước tính trên nhưng từ điểm xuất phát mới là $\underline{p}_1 \in P$ để có $\underline{p}_2 \in P$ sao cho $Q(\underline{p}_2) < Q(\underline{p}_1)$. Nếu sai số $|Q(\underline{p}_2) - Q(\underline{p}_1)|$ vẫn lớn thì lại tìm $\underline{p}_3 \in P$ từ $\underline{p}_2 \in P$ .... Cứ như vậy, qua nhiều bước tính, phương pháp sẽ đưa ra được một dãy các giá trị $\{\underline{p}_k\}$ và chắc chắn dãy giá trị đó sẽ tiệm cận tới nghiệm tối ưu $\underline{p}^*$ cần tìm, tức là chắc chắn có $\lim_{k\to\infty} \underline{p}_k = \underline{p}^*$ nếu như mọi nghiệm địa phương của bài toán cũng là nghiệm toàn cục, chẳng hạn như ở bài toán tối ưu lồi (định lý 1.1 và 1.4).

Trong nhiều tài liệu, phương pháp này còn có tên là *giả Newton* (Quasi Newton).

Xét bài toán tối ưu không bị ràng buộc (*uncontrained*) $\underline{p}^* = \arg\min Q(\underline{p})$ có $Q(\underline{p})$ khả vi và lồi. Theo định lý 1.2, tại $\underline{p}^*$ có $\operatorname{grad} Q(\underline{p}^*) = \underline{0}$, tức là có:

$$f_i(\underline{p}^*) = \frac{\partial Q(\underline{p}^*)}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Giả sử $f_i(\underline{p})$ là hàm giải tích, vậy thì tại một điểm $\underline{p}_k$ thuộc lân cận $\underline{p}^*$, nó phân tích được thành chuỗi Taylor:

$$0 = f_i(\underline{p}^*) = f_i(\underline{p}_k) + (\underline{p}^* - \underline{p}_k)^T \operatorname{grad} f_i(\underline{p}_k) + \cdots \tag{1.37}$$

Nếu bỏ qua tất cả thành phần bậc cao ở vế phải, thì tất nhiên (1.37) chỉ còn là công thức xấp xỉ:

$$0 \approx f_i(p_k) + (p^* - p_k)^T \operatorname{grad} f_i(\underline{p}_k)$$

song để vẫn có được quan hệ đẳng thức, ta có thể thay p^* bằng điểm xấp xỉ p_{k+1}. Khi đó sẽ được:

$$0 = f_i(p_k) + (p_{k+1} - p_k)^T \operatorname{grad} f_i(\underline{p}_k) \text{ với } i=1,2,\ldots,n$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underline{0} = \operatorname{grad} Q(p_k) + H_k(p_{k+1} - p_k) \tag{1.38a}$$

trong đó H_k là ký hiệu chỉ ma trận Hesse của hàm mục tiêu $Q(p)$ tại điểm $\underline{p}_k$, tức là:

$$H_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Q(\underline{p}_k)}{\partial p_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 Q(\underline{p}_k)}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 Q(\underline{p}_k)}{\partial p_n \partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 Q(\underline{p}_k)}{\partial p_n^2} \end{pmatrix} \tag{1.38b}$$

Từ đây suy ra:

$$p_{k+1} = p_k - H_k^{-1} \operatorname{grad} Q(\underline{p}_k) \tag{1.38c}$$

và đó chính là công thức xác định xấp xỉ $\underline{p}_{k+1} \approx \underline{p}^*$ từ $\underline{p}_k$. Dựa vào công thức (1.38c) ta có được các bước tìm p^* như sau:

1) Chọn một điểm xuất phát p_0 và một số dương e nhỏ tùy ý.
2) Thực hiện lần lượt các bước sau với $k=0,1,\ldots$
   a) Tính $\underline{p}_{k+1}$ từ $\underline{p}_k$ theo (1.38c).
   b) Nếu $|Q(\underline{p}_{k+1}) - Q(\underline{p}_k)| \geq e$ thì gán $k:=k+1$ rồi quay lại bước a). Ngược lại thì chuyển sang bước 3).
3) Dừng với đáp số: $\underline{p}^* \approx \underline{p}_{k+1}$.

Điều kiện để áp dụng được phương pháp Newton–Raphson là hàm $Q(\underline{p})$ phải khả vi hai lần, vì khi đó ta mới có ma trận Hesse của nó.

Ngoài ra, phương pháp còn có những tính chất sau:

- Sẽ cho ra nghiệm toàn cục, nếu $Q(\underline{p})$ là hàm lồi.
- Phương pháp sẽ có tốc độ hội tụ tốt nếu ma trận H_k là xác định dương, vì:

$$\text{grad}^T Q(\underline{p}_k)(\underline{p}_{k+1} - \underline{p}_k) = -\text{grad}^T Q(\underline{p}_k) H_k^{-1} \text{grad}\, Q(\underline{p}_k) < 0$$

hay vector $(\underline{p}_{k+1} - \underline{p}_k)$ luôn có hướng ngược với hướng của vector $\text{grad}\, Q(\underline{p}_k)$, là vector chỉ chiều tăng giá trị của các đường đồng mức của $Q(\underline{p})$.

- Ma trận Hesse H_k tính theo (1.38b) có thể được xác định truy hồi như sau [11]:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\underline{g}_k \underline{g}_k^T}{\underline{g}_k^T \underline{c}_k} - \frac{H_k^T \underline{c}_k^T \underline{c}_k H_k}{\underline{c}_k^T H_k \underline{c}_k} \tag{1.38d}$$

trong đó $\quad \underline{g}_k = \text{grad}\, Q(\underline{p}_{k+1}) - \text{grad}\, Q(\underline{p}_k)$

$\underline{c}_k = \underline{p}_{k+1} - \underline{p}_k$

Nếu $Q(\underline{p})$ có dạng toàn phương $Q(\underline{p}) = \underline{p}^T A \underline{p} + \underline{a}^T \underline{p}$ với A là ma trận đối xứng, xác định dương, hay $Q(\underline{p})$ là lồi chặt, thì phương pháp sẽ cho ra nghiệm chính xác chỉ sau đúng một bước tính, vì:

$$\begin{cases} \text{grad}\, Q(\underline{p}_k) = 2A\underline{p}_k + \underline{a} \\ H_k = 2A \end{cases} \quad \rightarrow \quad \underline{p}_{k+1} = -\frac{1}{2} A^{-1} \underline{a} = \underline{p}^*$$

Ví dụ 1.12: (Minh họa phương pháp Newton-Raphson)

Xét bài toán tối ưu toàn phương không bị ràng buộc với hàm mục tiêu:

$$Q(\underline{p}) = 3(p_1 - 1)^2 + 4(p_2 - 2)^2$$

Dễ thấy bài toán có nghiệm $\underline{p}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm tối ưu đó theo phương pháp Newton/Raphson. Lấy điểm khởi phát $\underline{p}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bất kỳ, tính vector $\text{grad}\, Q(\underline{p})$ và ma trận Hesse H_0 tại đó:

$$\text{grad}\, Q(\underline{p}_0) = \begin{pmatrix} 6(a-1) \\ 8(b-2) \end{pmatrix}, \qquad H_0 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

rồi thay vào (1.38b) sẽ được:

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_0 - H_0^{-1} \text{grad}\, Q(\underline{p}_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6(a-1) \\ 8(b-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{p}^*.$$

Như vậy, rõ ràng là chỉ sau một bước tính ta đã đến được điểm tối ưu p^* và điều này hoàn toàn không phụ thuộc vào điểm xuất phát. ❐

1.5 Tìm nghiệm bằng phương pháp hướng đến cực trị

1.5.1 Nguyên lý chung

Về nguyên tắc, giống như ở phương pháp Newton-Raphson, các phương pháp hướng đến cực trị là phương pháp tìm $p^* = \arg\min_{p \in P} Q(p)$ theo nguyên lý lặp (*iterative*), tức là tìm lần lượt $\underline{p}_{k+1} \in P$ từ $\underline{p}_k \in P$ với $k = 0, 1, \ldots$ sao cho có được $Q(\underline{p}_{k+1}) < Q(\underline{p}_k)$, cho tới khi đạt được sai số cho phép $|Q(\underline{p}_{k+1}) - Q(\underline{p}_k)| < \varepsilon$. Điểm khác của chúng so với Newton-Raphson là $\underline{p}_{k+1}$ được tìm từ $\underline{p}_k$ với một hướng tìm $\underline{h}_k$ được chọn trước sao cho đi dọc trên nó bằng khoảng cách bước tìm s_k ta luôn tìm được điểm:

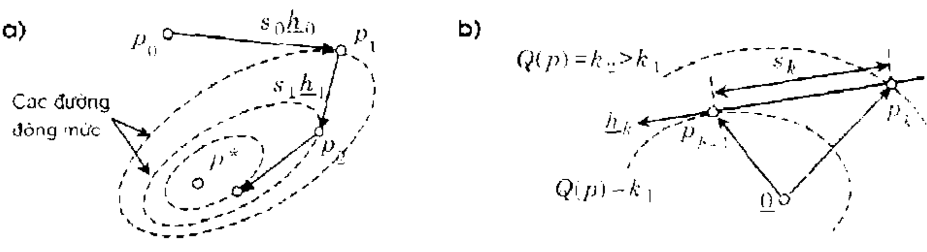
$$\underline{p}_{k+1} = \underline{p}_k + s_k \underline{h}_k \tag{1.39}$$

thỏa mãn $Q(\underline{p}_{k+1}) < Q(\underline{p}_k)$, tức là tại $\underline{p}_{k+1}$ đường đồng mức của hàm $Q(p)$ có giá trị nhỏ hơn là tại $\underline{p}_k$ (hình 1.14a).

Để tìm $\underline{p}_{k+1}$ từ điểm $\underline{p}_k$ dọc theo hướng tìm $\underline{h}_k$ nhờ công thức (1.39), ta còn phải cần đến khoảng cách bước tìm s_k. Nó có thể là một hằng số cho trước, song cũng có thể được chọn tối ưu theo nghĩa:

$$s_k = \arg\min_s Q(\underline{p}_k + s\underline{h}_k) = \arg\min_s f(s) \tag{1.40}$$

với điều kiện ràng buộc $\underline{p}_k + s\underline{h}_k \in P$ (hình 1.14b). Chú ý rằng khi cho trước s_k người ta sẽ không cần phải giải bài toán tối ưu con (1.40), song việc chọn trước khoảng cách bước tìm này ảnh hưởng khá nhiều đến tốc độ hội tụ của thuật toán. Nếu điểm $\underline{p}_k$ còn cách khá xa điểm tối ưu $\underline{p}^*$ thì tốc độ hội tụ sẽ càng tốt khi s_k được chọn càng lớn, nhưng nếu $\underline{p}_k$ đã đến gần $\underline{p}^*$ thì s_k càng nhỏ, nghiệm tìm được sẽ càng chính xác.



Hình 1.14: Minh họa nguyên lý chung của phương pháp hướng đến cực trị.

Các phương pháp hướng đến cực trị có dạng chung như sau:

1) Chọn điểm khởi phát $\underline{p}_0$ và một số dương e nhỏ tùy ý.

2) Thực hiện lần lượt các bước sau với $k=0, 1, \ldots$

   a) Chọn hướng tìm $\underline{h}_k$.

   b) Chọn khoảng cách bước tìm s_k. Có hai cách chọn s_k: hoặc là hằng số cho trước, hoặc là nghiệm của bài toán tối ưu hàm một biến (1.40).

   c) Tính $\underline{p}_{k+1} = \underline{p}_k + s_k\underline{h}_k$.

   d) Nếu $|Q(\underline{p}_{k+1}) - Q(\underline{p}_k)| > e$ thì gán $k:=k+1$ rồi quay lại bước a). Ngược lại thì chuyển sang bước 3).

3) Dừng với đáp số: $\underline{p}^* \approx \underline{p}_{k+1}$.

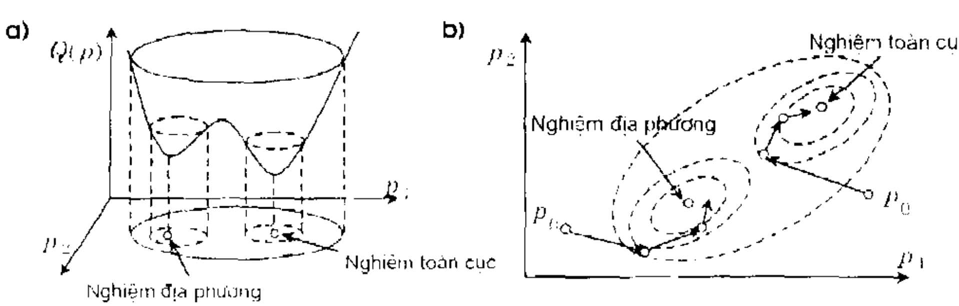
Điểm khác nhau cụ thể của từng phương pháp hướng đến cực trị chỉ nằm ở chỗ xác định hướng tìm $\underline{h}_k$ (phụ thuộc $\underline{p}_k$). Chẳng hạn như:

Phương pháp Gauss–Seidel có hướng tìm $\underline{h}_k$ song song với trục tọa độ của không gian $\mathbb{R}^n$ chứa điều kiện ràng buộc P.

Phương pháp gradient có hướng tìm $\underline{h}_k$ ngược với hướng của vector gradient của hàm mục tiêu tại $\underline{p}_k$ là grad $Q(\underline{p}_k)$.

...

Ngoài ra, ta có thể thấy thêm rằng phương pháp rất dễ cho ra nghiệm địa phương, và điều này phụ thuộc vào việc chọn điểm xuất phát $\underline{p}_0$ (hình 1.15). Tuy nhiên, nếu bài toán tối ưu đã cho là bài toán tối ưu lồi thì không phụ thuộc điểm xuất phát, phương pháp luôn cho ra nghiệm toàn cục (định lý 1.1 và 1.4).



Hình 1.15: Nếu không phải là bài toán tối ưu lồi thì vị trí điểm xuất phát sẽ quyết định đến tính toàn cục hay địa phương của nghiệm tìm được

1.5.2 Xác định bước tìm tối ưu

Thực chất của việc chọn khoảng cách bước tìm tối ưu là giải bài toán tối ưu hàm một biến (1.40) với điều kiện ràng buộc $p_k + s\underline{h}_k \in P$. Không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng bài toán có dạng:

$$s^* = \arg\min_{0\le s\le 1} f(s), \text{ tức là chỉ với } 0\le s\le 1$$

Có thể dễ dàng thấy được $f(s)=Q(p_k + s\underline{h}_k)$ là hàm lồi và nghiệm tối ưu s^* chính là điểm tiếp xúc của vector hướng tìm $\underline{h}_k$ với một đường đồng mức của $Q(\underline{p})$. Cụ thể là:

hàm $f(s)$ *giảm* từ $s=0$ đến điểm cực tiểu s^* và sau đó *tăng* với $s^*<s\le 1$,
nghiệm s^* nằm trong khoảng $[0,1]$.

Xác định bằng phương pháp giải tích

Do (1.41) là bài toán tối ưu lồi nên khi hàm $f(s)$ khả vi thì theo định lý 1.2, nghiệm s^* của nó sẽ được tìm như sau:

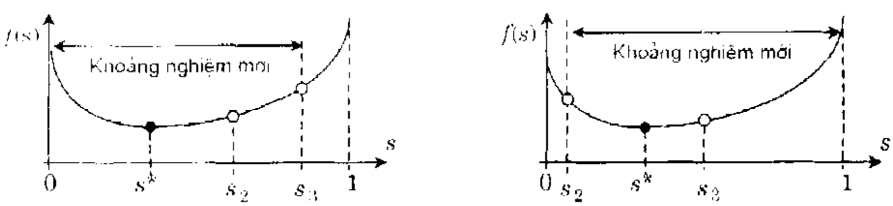
1) $\frac{df(s^*)}{ds}=0$ nếu s^* không nằm trên biên của khoảng nghiệm. (1.42a)

2) Hoặc là nghiệm của $(s-s^*)\frac{df(s^*)}{ds}\ge 0$ với mọi $0\le s<1$. (1.42b)

Xác định bằng phương pháp số

Tiếp theo, ta sẽ làm quen với một phương pháp số tìm kiếm s^* để cài đặt mà không cần phải có giả thiết về tính khả vi của $f(s)$, tức là không cần phải tính đạo hàm của $f(s)$. Đó là phương pháp thu nhỏ khoảng nghiệm. Ban đầu, nếu ta ký hiệu $s_0=0$ và $s_1=1$ thì khoảng chứa nghiệm s^* sẽ là $[s_0,s_1]$. Để thu nhỏ khoảng chứa nghiệm ta lấy hai điểm s_2 và s_3 với $s_2<s_3$ thuộc khoảng nghiệm đó, tức là $s_0=0<s_2<s_3<s_1=1$. Khi đó, từ tính lồi của $f(s)$ sẽ suy ra được (hình 1.16):

- Nếu $f(s_2)<f(s_3)$ thì s^* phải thuộc khoảng $[s_0,s_3]$.
- Ngược lại, nếu $f(s_2)\ge f(s_3)$ thì s^* phải thuộc khoảng $[s_2,s_1]$.



Hình 1.16: Thu nhỏ khoảng nghiệm.

Từ đây ta đi đến các bước tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán tối ưu (1.41) như sau:

1) Đặt $s_0=0$, $s_1=1$ và chọn một hằng số dương e đủ nhỏ.

2) Thực hiện lần lượt các bước sau:

   a) Lấy hai điểm $s_2, s_3 \in (s_0, s_1)$ với $s_2<s_3$.

   b) Nếu $f(s_2)<f(s_3)$ thì gán $s_1:=s_3$. Ngược lại thì gán $s_0:=s_2$.

   c) Nếu khoảng nghiệm $|s_1-s_0|$ vẫn còn lớn, tức là $|s_1-s_0| \geq e$ thì quay lại bước a). Ngược lại thì chuyển sang bước 3).

3) Đáp số $s^* \approx s_k$ với s_k là một điểm tùy ý thuộc khoảng nghiệm $[s_0, s_1]$.

Từ thuật toán trên và thêm sự gợi ý về cách chọn hai điểm s_2, s_3 với $s_2<s_3$ thuộc khoảng nghiệm $[s_0, s_1]$ để thuật toán có tốc độ hội tụ tốt, người ta đi đến một số thuật toán chi tiết hơn mà điển hình là *thuật toán nhát cắt vàng*.

Thuật toán nhát cắt vàng

Ở thuật toán nhát cắt vàng, hai điểm s_2, s_3 được chọn như sau:

– Điểm s_2 được chọn sao cho nó chia khoảng nghiệm $[s_0, s_1]$ theo nguyên tắc: tỷ lệ của đoạn ngắn trên đoạn dài bằng tỷ lệ đoạn dài trên toàn khoảng. Nói cách khác điểm s_2 phải thỏa mãn (hình 1.17):

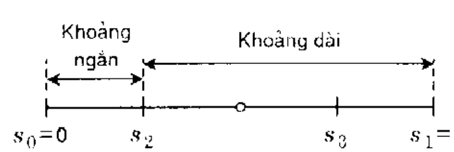
$$\frac{s_2-s_0}{s_1-s_2}=\frac{s_1-s_2}{s_1-s_0} \tag{1.43a}$$

Điểm s_3 được lấy đối xứng với s_2 qua tâm của khoảng nghiệm $[s_0, s_1]$. Khi đó s_3 cũng sẽ chia khoảng nghiệm theo đúng nguyên tắc tỷ lệ của đoạn ngắn trên đoạn dài bằng tỷ lệ đoạn dài trên toàn khoảng, tức là cũng có:

$$\frac{s_1-s_3}{s_3-s_0}=\frac{s_3-s_0}{s_1-s_0} \tag{1.43b}$$

Trong bước đầu tiên, với $s_0=0$, $s_1=1$ thì từ (1.43a) có:

$$\frac{s_2}{1-s_2}=1-s_2 \quad\Rightarrow\quad s_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0.382.$$



Hình 1.17: Chọn điểm chia khoảng nghiệm theo nguyên lý nhát cắt vàng.

Điều đặc biệt của *phương thức nhát cắt vàng* là hai điểm s_2, s_3 luôn nằm đối xứng qua tâm của khoảng $[s_0, s_1]$. Do đó, kể từ những bước sau ta không cần phải tính lại công thức (1.43a) hoặc (1.43b) để có cả hai điểm s_2, s_3 mà chỉ cần lấy điểm đối xứng qua tâm của khoảng $[s_0, s_1]$ với một trong hai điểm s_2, s_3 là sẽ có điểm còn lại.

Kết hợp chung với thuật toán đã nêu, ta có thuật toán nhát cắt vàng gồm các bước sau (hình 1.18):

1) Đặt $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=0{,}382$ và chọn một hằng số dương ε đủ nhỏ.

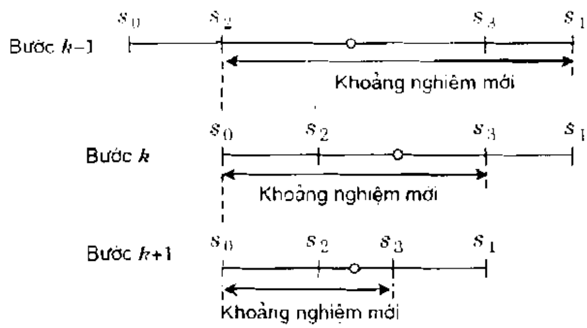
2) Lấy điểm s_3 đối xứng với s_2 qua tâm của khoảng $[s_0, s_1]$.

3) Thực hiện lần lượt các bước sau:

   a) Nếu $f(s_2)<f(s_3)$ thì gán $s_1:=s_3$ rồi lấy điểm s_3 khác đối xứng với s_2 qua tâm của khoảng nghiệm mới $[s_0, s_1]$. Ngược lại thì gán $s_0:=s_2$ rồi lấy điểm s_2 khác đối xứng với s_3 qua tâm của khoảng nghiệm mới $[s_0, s_1]$.

   b) Nếu khoảng nghiệm $|s_1-s_0|$ vẫn còn lớn, tức là $|s_1-s_0| \geq \varepsilon$ thì quay lại bước a). Ngược lại thì chuyển sang bước 4).

4) Đáp số $s^* \approx s_k$ với s_k là một điểm tùy ý thuộc khoảng nghiệm $[s_0, s_1]$.



Hình 1.18: Minh họa các bước thực hiện của thuật toán nhát cắt vàng.

1.5.3 Phương pháp Gauss–Seidel

Ở phương pháp Gauss-Seidel, hướng tìm được chọn lần lượt song song với các trục tọa độ của không gian $\mathbb{R}^n$, trong đó n là số chiều của vector $\underline{p}$. Nếu ký hiệu $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ là các vector cơ sở của $\mathbb{R}^n$ tức là các vector tạo thành hệ trục tọa độ của $\mathbb{R}^n$

$$\underline{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$$

Phần tử thứ i

thì hướng tìm $\underline{h}_k$ tại bước thứ $k=0, 1, \ldots$ sẽ được xác định như sau:

$$h_k = \begin{cases} \underline{e}_{k+1} & \text{nếu} \quad k < n \\ \underline{h}_{n-k+1} & \text{nếu} \quad k \geq n \end{cases} \tag{1.44}$$

Kết hợp hướng tìm (1.44) với dạng chung của các phương pháp hướng đến cực trị đã được trình bày tại mục 1.5.1 ta có (hình 1.19a):

1) Chọn điểm khởi phát p_0 và một số dương ϵ nhỏ tùy ý.

2) Thực hiện lần lượt các bước sau với $k = 0, 1, \ldots$

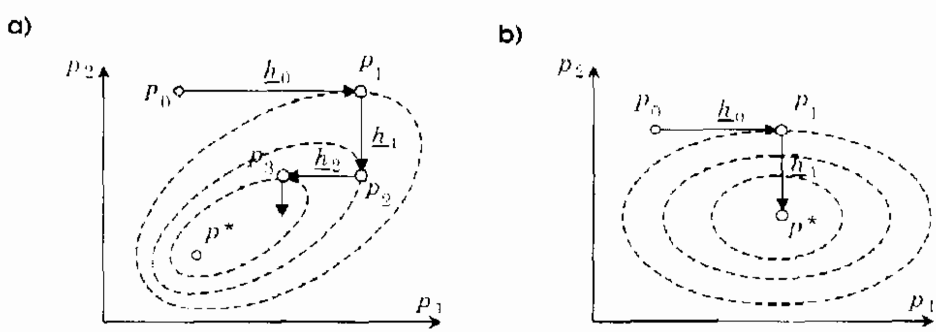
   a) Xác định hướng tìm $\underline{h}_k$ theo (1.44).

   b) Xác định bước tìm $s_k = \arg\min_s \underbrace{Q(\underline{p}_k + s\underline{h}_k)}_{f(s)}$, với ràng buộc $p_k + s\underline{h}_k \in P$.

   c) Tính $\underline{p}_{k+1} = \underline{p}_k + s_k \underline{h}_k$.

   d) Nếu $|Q(\underline{p}_{k+1}) - Q(p_k)| \geq \epsilon$ thì gán $k := k+1$ rồi quay lại bước a). Ngược lại thì chuyển sang bước 3).

3) Dừng với đáp số: $p^* \approx \underline{p}_{k+1}$.



Hình 1.19: Minh họa phương pháp Gauss-Seidel.

Phương pháp Gauss-Seidel có các tính chất sau:

- Tốc độ hội tụ của phương pháp phụ thuộc vào vị trí của hệ trục tọa độ so với đường đồng mức của $Q(\underline{p})$.
- Nếu bài toán tối ưu là không bị ràng buộc (*uncontrained*) và hàm $Q(p)$ có dạng toàn phương $Q(\underline{p}) = \underline{p}^T D \underline{p} + \underline{a}^T \underline{p}$ với D là ma trận đường chéo, xác định dương, thì phương pháp sẽ cho ra nghiệm chính xác sau đúng n bước tính (hình 1.19b).

Ví dụ 1.13: (Minh họa phương pháp Gauss–Seidel)

Xét bài toán tối ưu toàn phương không bị ràng buộc với hàm mục tiêu:

$$Q(p) = p_1^2 + 4p_2^2 - 2p_1 + 16p_2\,, \qquad n=2$$

Chọn điểm xuất phát $\underline{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vậy thì:

– Khi $k=0$: Với hướng tìm $\underline{h}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ta có $\underline{p}_0 + s\underline{h}_0 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$f(s) = Q(\underline{p}_0 + s\underline{h}_0) = s^2 - 2s$$

Do bài toán là không bị ràng buộc, nên bước tìm tối ưu được tính theo (1.42a):

$$0 = \frac{df(s_0)}{ds} = 2s_0 - 2 \quad \Rightarrow \quad s_0 = \arg\min_s f(s) = 1$$

Vậy

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_0 + s_0\underline{h}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– Khi $k=1$: Với hướng tìm $\underline{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ta có $\underline{p}_1 + s\underline{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$. Suy ra

$$f(s) = Q(\underline{p}_1 + s\underline{h}_1) = -1 + 4s^2 + 16s$$

và từ đây ta được

$$0 = \frac{df(s_1)}{ds} = 8s_1 + 16 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \arg\min_s f(s) = -2$$

Vậy

$$\underline{p}_2 = \underline{p}_1 + s_1\underline{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có thể thấy nghiệm $\underline{p}_2$ tìm được chính là nghiệm tối ưu $\underline{p}^*$ vì

$$Q(\underline{p}) = p_1^2 + 4p_2^2 - 2p_1 + 16p_2 = (p_1 - 1)^2 + 4(p_2 + 2)^2 - 17$$

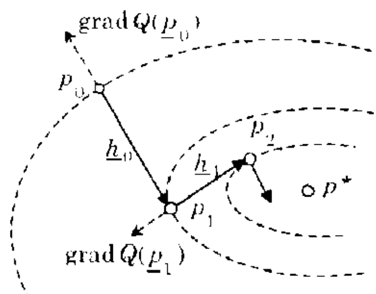
Nói cách khác, phương pháp đã cho ra nghiệm chính xác chỉ sau 2 bước tính. Điều này phù hợp với kết luận rằng khi hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ có dạng:

$$Q(\underline{p}) = p_1^2 + 4p_2^2 - 2p_1 + 16p_2 = \underline{p}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underline{p} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 16 \end{pmatrix}}_{\underline{a}^T} \underline{p}$$

với D là ma trận đường chéo, xác định dương, thì phương pháp sẽ cho ra nghiệm chính xác sau đúng $n=2$ bước tính. ❐

1.5.4 Phương pháp gradient

Từ tính chất của gradient là luôn vuông góc với đường đồng mức, đồng thời có hướng chỉ chiều tăng giá trị các đường đồng mức nên người ta đã chọn hướng tìm $\underline{h}_k$ là hướng ngược với hướng của vector gradient tại điểm $\underline{p}_k$ là $\mathrm{grad}\,Q(\underline{p}_k)$. Phương pháp hướng đến cực trị có sử dụng hướng tìm $\underline{h}_k = -\mathrm{grad}\,Q(\underline{p}_k)$ được gọi là *phương pháp gradient* (hình 1.20). Điều kiện để áp dụng được phương pháp gradient là hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ phải khả vi.



Hình 1.20: Minh họa phương pháp gradient.

Kết hợp với dạng chung của các phương pháp hướng đến cực trị đã được trình bày tại mục 1.5.1, ta đi đến:

1) Chọn điểm khởi phát $\underline{p}_0$ và một số dương ε nhỏ tùy ý.

2) Thực hiện lần lượt các bước sau với $k = 0, 1, \ldots$

   a) Xác định hướng tìm $\underline{h}_k = -\mathrm{grad}\,Q(\underline{p}_k)$.

   b) Xác định bước tìm $s_k = \arg\min\limits_{s} \underbrace{Q(\underline{p}_k + s\underline{h}_k)}_{f(s)}$, với ràng buộc $\underline{p}_k + s\underline{h}_k \in P$. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp ứng dụng người ta thường hay chọn bước tìm s_k là một hằng số dương đủ nhỏ.

   c) Tính $\underline{p}_{k+1} = \underline{p}_k + s_k\underline{h}_k$.

   d) Nếu $|Q(\underline{p}_{k+1}) - Q(\underline{p}_k)| \geq \varepsilon$ thì gán $k:=k+1$ rồi quay lại bước a). Ngược lại thì chuyển sang bước 3).

3) Dừng với đáp số: $\underline{p}^* \approx \underline{p}_{k+1}$.

Ví dụ 1.14: (Minh họa phương pháp gradient)

Cho bài toán tối ưu toàn phương không bị ràng buộc với hàm mục tiêu:

$$Q(\underline{p})=(p_1-1\,,\,p_2+2)\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1-1\\p_2+2\end{pmatrix}=p_1^2+4p_2^2+p_1p_2+15(p_2+1)$$

$$\Rightarrow \qquad \text{grad}\,Q(\underline{p})=\begin{pmatrix}2p_1+p_2\\8p_2+p_1+15\end{pmatrix}$$

Có thể thấy ngay nghiệm của bài toán là $\underline{p}^*=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Bây giờ ta sẽ áp dụng phương pháp gradient. Chọn điểm xuất phát $\underline{p}_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Vậy thì khi thực hiện lần lượt các bước của thuật toán với $k=0,1,\ \ldots$, trong đó, vì bài toán đã cho không bị ràng buộc, nên ta xác định bước tìm tối ưu s_k theo (1.42a), rồi biểu diễn các giá trị tìm được của:

$$\underline{h}_k=-\text{grad}\,Q(\underline{p}_k)\,,\quad f(s)=Q(\underline{p}_k+s\underline{h}_k)\,,\quad \frac{df(s_k)}{ds}=0,\quad \underline{p}_{k+1}=\underline{p}_k+s_k\underline{h}_k$$

dưới dạng bảng, sẽ có:

	$\underline{h}_k$	$f(s)$	s_k	$\underline{p}_{k+1}$
$k=0$	$\begin{pmatrix}0\\-15\end{pmatrix}$	$900s^2-225s$	0,125	$\begin{pmatrix}0\\-1,875\end{pmatrix}$
$k=1$	$\begin{pmatrix}1,875\\0\end{pmatrix}$	$3,516s^2-3,516s-14,06$	0,5	$\begin{pmatrix}0,9375\\-1,875\end{pmatrix}$
$k=2$	$\begin{pmatrix}0\\-0,9375\end{pmatrix}$	$3,516s^2-0,8789s-14,94$	0,125	$\begin{pmatrix}0,9385\\-1,9922\end{pmatrix}$
$k=3$	$\begin{pmatrix}0,1172\\0,0001\end{pmatrix}$	$3,419s^2-0,8789s-14,96$	0,1285	$\begin{pmatrix}0,9526\\-1,9951\end{pmatrix}$

Rõ ràng dãy kết quả $\underline{p}_k$ thu được có xu hướng tiến về $\underline{p}^*=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. ❐

1.5.5 Kỹ thuật hàm phạt và hàm chặn

Điều hạn chế khả năng ứng dụng của các phương pháp hướng đến cực trị để giải quyết những bài toán tối ưu bị ràng buộc (*contrained*) là xác định khoảng cách bước tìm tối ưu. Trong khi ở bài toán tối ưu không bị ràng buộc (*unconstrained*), khoảng cách bước tìm tối ưu được tìm rất đơn giản theo công thức tính đạo hàm (1.42a), thì nói chung ở bài toán tối ưu bị ràng buộc bởi điều kiện $\underline{p}\in P$, ta đều gặp khó khăn, nhất là khi miền P có dạng không tường minh. Mặc dù đã được một số thuật toán hỗ trợ như thuật toán nhát cắt vàng (mục 1.5.2), song ngay cả ở đó thì việc xác định miền giới hạn cho biến s từ điều kiện ràng buộc $\underline{p}_k + s\underline{h}_k \in P$ cũng hoàn toàn không đơn giản. Đó cũng là lý do tại sao trong các ví dụ minh họa phương pháp hướng đến cực trị ta thường chỉ xét bài toán không bị ràng buộc.

Do mong muốn vẫn có thể sử dụng được công thức (1.42a) để xác định bước tìm tối ưu cho các bài toán tối ưu bị ràng buộc bởi điều kiện P, người ta đã tìm cách chuyển bài toán đó thành bài toán tối ưu không bị ràng buộc, hoặc ít ra là bài toán bị ràng buộc song nghiệm $\underline{p}^*$ của nó chắc chắn là điểm trong của P. Hai kỹ thuật điển hình hỗ trợ việc chuyển đổi này là kỹ thuật hàm phạt và kỹ thuật hàm chặn.

Kỹ thuật hàm phạt

Đây là kỹ thuật chuyển bài toán tối ưu *có ràng buộc P* thành bài toán tối ưu *không bị ràng buộc*.

Xét bài toán tối ưu bị ràng buộc:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p}) \tag{1.44a}$$

có $$P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\underline{p}) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \ \text{ và } \ h_j(\underline{p}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, q \,\} \tag{1.44b}$$

Giả sử $S(\underline{p})$ là một hàm liên tục, thỏa mãn:

$$S(\underline{p}) = \begin{cases} > 0 & \text{nếu } \underline{p} \notin P \\ = 0 & \text{nếu } \underline{p} \in P \end{cases} \tag{1.45}$$

Khi đó, nếu ta lập hàm mục tiêu mới xác định với mọi $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$H(\underline{p},\lambda) = Q(\underline{p}) + \lambda\, S(\underline{p}) \tag{1.46a}$$

trong đó λ một số dương thích hợp, thì giữa nghiệm

$$\underline{p}_\lambda^* = \arg\min H(\underline{p},\lambda) \tag{1.46b}$$

của bài toán tối ưu *không bị ràng buộc* (1.46) và nghiệm $\underline{p}^*$ của bài toán tối ưu bị ràng buộc (1.44) có quan hệ sau:

Định lý 1.10: Gọi $\underline{p}^*$ là nghiệm của bài toán (1.44) và $\underline{p}_\lambda^*$ là nghiệm của bài toán (1.46). Khi đó:

a) Nếu $\underline{p}_\lambda^* \in P$ thì $\underline{p}_\lambda^* = \underline{p}^*$.

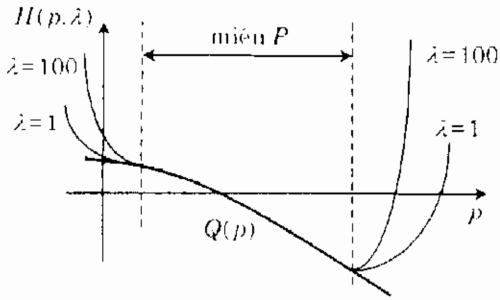
b) Luôn tồn tại số dương λ đủ lớn để có $\underline{p}_\lambda^* \in P$, tức là luôn có $\lim_{\lambda\to\infty} \underline{p}_\lambda^* = \underline{p}^*$.

Chứng minh:

Khẳng định a) là hiển nhiên vì với $S(\underline{p}^*_\lambda)=0$, luôn có:

$$Q(\underline{p}^*_\lambda) = H(\underline{p}^*_\lambda,\lambda) \le H(\underline{p},\lambda) = Q(\underline{p}) \quad \text{với mọi } \underline{p}\in P$$

Để chứng minh khẳng định b) ta sử dụng hình minh họa 1.21. Rõ ràng từ tính chất (1.45) của hàm $S(p)$ ta luôn tìm được số dương λ đủ lớn để giá trị hàm $H(p,\lambda)$ sẽ rất lớn khi $p\notin P$. Như vậy nghiệm p^*_λ của (1.45) phải thuộc P. ❒



Hình 1.21: Minh họa kỹ thuật hàm phạt

Hơn nữa, vì hàm $S(p)$ thỏa mãn (1.45) đã giúp cho $H(\underline{p},\lambda)$ nhận giá trị rất lớn khi $p\notin P$ nên người ta gọi nó là hàm phạt, tức là nó sẽ *phạt* khi vector $\underline{p}$ vượt ra ngoài miền P.

Nếu có hai hàm một biến:

$$s_1(z)=\begin{cases} >0 & \text{nếu } z>0 \\ =0 & \text{nếu } z\le 0 \end{cases} \qquad \text{và} \qquad s_2(z)=\begin{cases} >0 & \text{nếu } z\ne 0 \\ =0 & \text{nếu } z=0 \end{cases} \tag{1.47a}$$

thì một số các hàm phạt $S(p)$ thường được sử dụng cho bài toán tối ưu (1.44) là:

a) $$S(p)=\max_i s_1(g_i(\underline{p}))+\max_j s_2(h_j(\underline{p})) \tag{1.47b}$$

b) $$S(\underline{p})=\sum_{i=1}^{m} s_1(g_i(\underline{p}))+\sum_{j=1}^{q} s_2(h_j(\underline{p})) \tag{1.47c}$$

Ví dụ 1.15: (Minh họa kỹ thuật hàm phạt)

Cho bài toán tối ưu một biến, bị ràng buộc $p^*=\arg\min_{p\in P} Q(p)$ với:

$$Q(p) = -p^2 \quad \text{và} \quad P=\{\, p\in\mathbb{R} \mid (1-p)\le 0 \text{ và } (p^2-4)\le 0 \,\}$$

Có thể thấy bài toán có nghiệm $p^* = 2$.

Định nghĩa hàm liên tục:

$$S(p) = \max^2\{0,\ (1-p)\} + \max^2\{0,\ (p^2-4)\}$$

ta thấy $S(p)$ thỏa mãn tính chất (1.45). Lập hàm:

$$H(p,\lambda) = -p^2 + \lambda\left[\max^2\{0,\ (1-p)\} + \max^2\{0,\ (p^2-4)\}\right]$$

trong đó λ là số dương đủ lớn, sẽ được:

$$H(p,\lambda) = \begin{cases} -p^2 + \lambda\left[(1-p)^2 + (p^2-4)^2\right] & \text{khi } p < -2 \\ -p^2 + \lambda(1-p)^2 & \text{khi } -2 \le p < 1 \\ -p^2 & \text{khi } 1 \le p \le 2 \\ -p^2 + \lambda(p^2-4)^2 & \text{khi } p > 2 \end{cases}$$

Vì $\underline{p}_\lambda^* = \arg\min H(p,\lambda)$ là bài toán không bị ràng buộc nên nghiệm $\underline{p}_\lambda^*$ của nó sẽ được tìm theo công thức (1.42a), tức là từ $\dfrac{dH(p,\lambda)}{dp} = 0$.

Nhưng vì $\dfrac{dH(p,\lambda)}{dp} < 0$ khi $p \le 2$ nên $\underline{p}_\lambda^*$ chỉ có thể là nghiệm của:

$$0 = \frac{d}{dp}\left[-p^2 + \lambda(p^2-4)^2\right] = 2p\left[-1 + 2\lambda(p^2-4)\right] \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\frac{1}{2\lambda}+4}$$

Từ đây ta suy ra được nhờ nội dung định lý 1.10.

$$p^* = \lim_{\lambda\to\infty} p_\lambda^* = 2.$$ ❒

Kỹ thuật hàm chặn

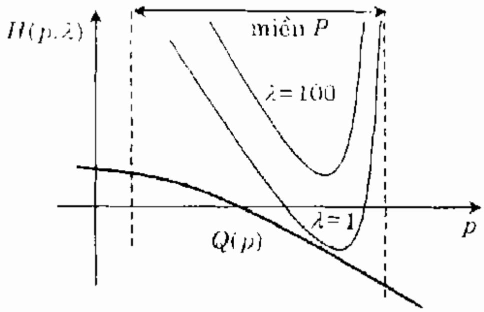
Nhằm sử dụng được công thức (1.42a) cho việc tìm khoảng cách bước tìm tối ưu, tức là phải đảm bảo được nghiệm p^* của bài toán tối ưu bị ràng buộc $\underline{p}^* = \arg\min_{p\in P} Q(\underline{p})$ *không nằm trên biên* của P, kỹ thuật *hàm chặn* đặt ra mục đích là chuyển hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ thành hàm $H(\underline{p},\lambda)$ có giá trị càng lớn khi càng $\underline{p}$ tiến tới gần biên của P, nhưng vẫn thuộc P (hình 1.22). Nếu làm được như vậy, rõ ràng điểm cực tiểu $\underline{p}_\lambda^*$ của bài toán $\underline{p}_\lambda^* = \arg\min_{p\in P} H(\underline{p},\lambda)$ luôn nằm phía bên trong P (là điểm trong của P).

Ta có thể thấy, để có hàm $H(\underline{p},\lambda)$ xác định trên P với giá trị càng lớn khi $\underline{p}$ càng tiến tới gần biên của P thì tập P phải chứa ít nhất một điểm trong (điểm mà cả nó và một lân cận của nó thuộc P). Như vậy, kỹ thuật hàm chặn chỉ thích hợp cho bài toán tối ưu bị ràng buộc có P mô tả bằng các bất phương trình:

$$\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p}) \tag{1.48a}$$

với

$$P = \{\, \underline{p} \in \Re^n \mid g_i(\underline{p}) \le 0,\ i=1,2,\ \ldots\ ,m \,\} \tag{1.48b}$$



Hình 1.22: Minh họa kỹ thuật hàm chặn.

Một hàm nào đó làm cho $H(\underline{p},\lambda)$ xác định trên P với giá trị càng lớn khi $\underline{p}$ càng tiến tới gần biên của P được gọi là *hàm chặn*. Sử dụng hàm một biến:

$$b_1(z) = z^{-r}\ (r>0) \quad \text{hoặc} \quad b_2(z) = -\ln z \tag{1.49a}$$

thì các hàm sau đây sẽ là hàm chặn:

$$\text{a)}\quad B(\underline{p}) = \max_i b_1(-g_i(\underline{p})) \tag{1.49b}$$

$$\text{b)}\quad B(\underline{p}) = \sum_{i=1}^{m} b(-g_i(\underline{p})) \tag{1.49c}$$

tức là với chúng, hàm:

$$H(\underline{p},\lambda) = Q(\underline{p}) + \lambda\, B(\underline{p}) \tag{1.50}$$

sẽ có giá trị càng lớn khi $\underline{p}$ càng tiến tới gần biên của P. Giữa nghiệm $\underline{p}^*_\lambda$ (nằm bên trong miền P) của bài toán tối ưu $\underline{p}^*_\lambda = \arg\min_{\underline{p}\in P} H(\underline{p},\lambda)$ và nghiệm $\underline{p}^*$ (có thể nằm trên biên của P) của bài toán tối ưu bị ràng buộc (1.48) có quan hệ sau:

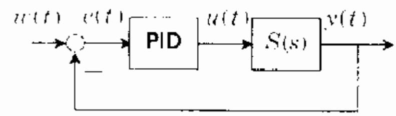
$$\lim_{\lambda\to 0} \underline{p}^*_\lambda = \underline{p}^* . \tag{1.51}$$

1.6 Một số ví dụ ứng dụng

1.6.1 Xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển PID

Một trong những bộ điều khiển được sử dụng rộng rãi nhất trong thực tế là bộ PID với hàm truyền đạt:

$$R(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$



Hình 1.23: Điều khiển với PID

trong đó: k_p – là hằng số khuếch đại,

T_I – là hằng số thời gian tích phân,

T_D – là hằng số thời gian vi phân.

Nguyên lý điều khiển bằng PID là phản hồi tín hiệu ra (hình 1.23), trong đó, phụ thuộc vào đối tượng, các tham số k_p, T_I, T_D cần phải được chọn sao cho hệ kín có được chất lượng như mong muốn, chẳng hạn như ổn định, độ quá điều chỉnh nhỏ, thời gian quá độ ngắn, không có sai lệch tĩnh ...

Một mục tiêu chất lượng kết hợp hài hòa tất cả các chỉ tiêu chất lượng nói trên là chọn k_p, T_I, T_D sao cho:

$$Q = \int_0^\infty e^2(t)dt \to \min \tag{1.52}$$

trong đó $e(t)$ là tín hiệu sai lệch. Bộ tham số k_p, T_I, T_D thỏa mãn (1.52) được gọi là bộ *tham số tối ưu*. Như vậy, để tìm được bộ tham số tối ưu k_p, T_I, T_D ta cần phải tiến hành các bước:

- Xác định sự phụ thuộc của Q vào vector tham số $\underline{p}^T = (k_p, T_I, T_D)$, tức là xác định $Q = Q(\underline{p})$.
- Giải bài toán tối ưu $\underline{p}^* = \arg\min Q(\underline{p})$.

Để minh họa việc xác định $Q = Q(\underline{p})$ ta xét trường hợp cụ thể với:

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + \cdots + c_{n-1}s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \cdots + d_n s^n}, \quad d_n \neq 0$$

trong đó $E(s)$ là ảnh Laplace của $e(t)$. Khi đó, nhờ công thức Parseval:

$$Q = \int_0^\infty e^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s)ds$$

hàm mục tiêu Q sẽ được tính qua hai bước [35]:

Xác định tất cả các điểm cực s_k của $E(s)$.

Tính $Q = \operatorname{Res}_{s_k}[E(s)E(-s)]$

Với hai bước tính trên ta đi đến một số kết quả cho $n = 1,2,3,4$ như sau [20]:

Bảng 1.1: Công thức tính hàm mục tiêu Q cho một số trường hợp $n = 1,2,3,4$

n	$Q(p)$
1	$\dfrac{c_0^2}{2d_0d_1}$
2	$\dfrac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}$
3	$\dfrac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}$
4	$\dfrac{c_3^2(d_0d_1d_2 - d_0^2d_3) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0d_1d_4 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3d_4 + c_0^2(d_2d_3d_4 - d_1d_4^2)}{2d_0d_4(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_1^2d_4)}$

Ngoài ra, từ công thức

$$E(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1 + R(s)S(s)}$$

thì rõ ràng các tham số $c_0, \ldots, c_{n-1}, d_0, d_1, \ldots, d_n$ của $E(s)$ là những hàm số của $\underline{p}^T = (k_p, T_I, T_D)$. Thay các hàm số $c_0(\underline{p}), \ldots, c_{n-1}(\underline{p}), d_0(\underline{p}), \ldots, d_n(\underline{p})$ vào công thức ở bảng trên ta được $Q = Q(\underline{p})$.

Ví dụ 1.16: (Xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển tích phân)

Cho hệ kín mô tả ở hình 1.24, trong đó

$$R(s) = \frac{1}{T_I s} \quad \text{và} \quad S(s) = \frac{0.5}{(1+2s)^2}.$$

Hệ có nhiễu $n(t)$ và nhiệm vụ điều khiển đặt ra ở đây là xác định tham số T_I cho bộ điều khiển để hệ có khả năng kháng nhiễu tức thời $n(t) = 1(t)$ tốt nhất theo nghĩa:

$$Q = \int_0^\infty e^2(t)dt \rightarrow \min$$

Trước hết, để có ảnh Laplace $E(s)$ của sai lệch $e(t)$, ta xác định hàm truyền từ tín hiệu nhiễu $n(t)$ tới đầu ra $y(t)$:

$$G_{ny}(s) = \frac{S(s)}{1+R(s)S(s)} = \frac{0{,}5T_I s}{4T_I s^3 + 4T_I s^2 + T_I s + 0{,}5}$$

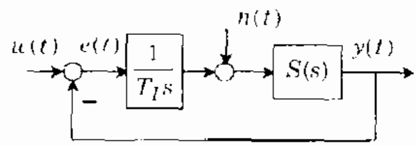
Từ đây, với $u(t)=0$ và $n(t)=1(t)$, tức là $N(s)=\frac{1}{s}$ ta có ảnh Laplace của sai lệch $e(t)$:

$$E(s) = -Y(s) = -G_{ny}(s)N(s) = \frac{-0{,}5T_I}{4T_I s^3 + 4T_I s^2 + T_I s + 0{,}5}$$

Tra bảng cho trường hợp $n=3$ với

$$c_0 = -0{,}5T_I,\ c_1 = c_2 = 0,$$

$$d_0 = 0{,}5,\ d_1 = T_I,\ d_2 = d_3 = 4T_I,$$



Hình 1.24: Minh họa ví dụ 1.16.

ta đi đến:

$$Q = \frac{T_I^2}{4T_I - 2}.$$

Suy ra

$$Q = \frac{T_I^2}{4T_I - 2} \to \min \quad \Rightarrow \quad T_I = 1. \qquad \square$$

1.6.2 Nhận dạng tham số mô hình đối tượng tiền định

Trong điều khiển ta rất hay gặp phải bài toán xây dựng mô hình toán học mô tả đối tượng trên cơ sở quan sát (đo) các tín hiệu vào ra của nó. Bài toán đó có tên gọi là *nhận dạng đối tượng điều khiển*. Nó được Zadeh định nghĩa như sau [36]:

Định nghĩa 1.13: Nhận dạng (*identification*) là phương pháp *xác định mô hình toán học* cụ thể trong *lớp các mô hình thích hợp* đã cho trên cơ sở *quan sát các tín hiệu vào ra* của đối tượng sao cho sai lệch giữa mô hình tìm được với đối tượng thực là *nhỏ nhất*.

Định nghĩa cho thấy bài toán nhận dạng có nét của một bài toán tối ưu. Công việc nhận dạng luôn được bắt đầu với những thông tin hiểu biết mang tính gợi ý, tuy còn có thể khá sơ đẳng, về đối tượng. Các thông tin đó được gọi là thông tin A-priori. Chẳng hạn thông tin A-priori cho biết rằng đối tượng là tuyến tính hay phi tuyến, liên tục hay rời rạc ….

Xét đối tượng SISO với tín hiệu vào u và tín hiệu ra y. Nếu thông tin A-priori cho biết đối tượng là tuyến tính có cấu trúc, thì mô hình toán học của nó sẽ thuộc lớp các hàm phức, thực-hữu tỷ, hợp thức với cấu trúc biết trước:

- $G(z)$ cho đối tượng không liên tục,
- $G(s)$ cho đối tượng liên tục.

trong đó tử số và mẫu số của hàm truyền đạt là *hai đa thức nguyên tố cùng nhau* (không có chung nghiệm), đồng thời có bậc xác định là n, m. Nhiệm vụ nhận dạng đặt ra ở đây chỉ còn là xác định tham số cho hai đa thức đó để sai lệch giữa $G(z)$ hoặc $G(s)$ với đối tượng được nhỏ nhất. Bài toán nhận dạng đó có tên gọi là *nhận dạng tham số mô hình đối tượng*.

Nhận dạng tham số mô hình không liên tục

Xét đối tượng SISO không liên tục có mô hình thuộc lớp:

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{1.53}$$

Nếu gọi u_k, y_k, $k=0, 1, \ldots$ là dãy giá trị tín hiệu vào/ra quan sát được với chu kỳ lấy mẫu T, tức là:

$$u_k = u(kT), \qquad y_k = y(kT), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

thì khi mô hình (1.53) *là tuyệt đối chính xác*, ta sẽ có:

$$u_k + \sum_{i=1}^{m} b_i u_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i y_{k-i}$$

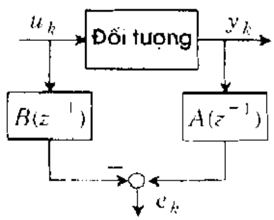
Song do mô hình (1.53) còn cần phải được xác định nên đẳng thức trên không còn đúng. Giữa hai vế của nó có một sai lệch. Sai lệch này có tên gọi là *sai lệch dự báo tuyến tính* tại thời điểm $t = kT$ giữa mô hình và đối tượng (hình 1.25):

$$e_k = u_k + \sum_{i=1}^{m} b_i u_{k-i} - \sum_{i=0}^{n} a_i y_{k-i}$$

$$\Leftrightarrow \qquad e_k = u_k - \underline{f}_k^T \underline{p}$$

trong đó

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ -b_m \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{f}_k = \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-m} \\ y_k \\ \vdots \\ y_{k-n} \end{pmatrix}.$$



Hình 1.25: Sai lệch dự báo tuyến tính.

Từ đây ta lập hàm mục tiêu Q là hàm mô tả sai số chung giữa mô hình và đối tượng cho toàn bộ khoảng thời gian quan sát, tức là tổng bình phương của từng sai lệch tại các thời điểm $t = kT$, $k=0, 1, \ldots, N$ như sau:

$$Q(\underline{p}) = \sum_{k=0}^{N} e_k^2 = \underline{e}^T \underline{e} = (\underline{h} - F\underline{p})^T(\underline{h} - F\underline{p})$$

$$= \underline{p}^T \underbrace{(F^T F)}_{A}\underline{p} - \underbrace{(2\underline{h}^T F)}_{\underline{b}^T}\underline{p} + \underbrace{\underline{h}^T \underline{h}}_{c} = \underline{p}^T A \underline{p} - \underline{b}^T \underline{p} + c \qquad (1.54)$$

trong đó

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad F = \begin{pmatrix} \underline{f}_0^T \\ \vdots \\ \underline{f}_N^T \end{pmatrix}$$

Rõ ràng A là ma trận xác định bán dương và do đó $Q(\underline{p})$ cho trong công thức (1.54) là hàm toàn phương, lồi. Từ đây, bài toán nhận dạng vector tham số $\underline{p}^*$ cho mô hình (1.53) được phát biểu lại dưới dạng bài toán *tối ưu lồi, toàn phương không bị ràng buộc* như sau:

$$\underline{p}^* = \arg\min Q(\underline{p}) \quad \Leftrightarrow \quad 2A\,\underline{p}^* - \underline{b} = \underline{0} \quad \text{(xem định lý 1.4)} \qquad (1.55)$$

Chú ý: Trong mô hình (1.53) ta đã giả thiết đối tượng có $b_0 = 1 \neq 0$. Nếu thực sự đối tượng lại có mô hình với $b_0 = 0$ thì phải có $a_0 \neq 0$, vì khi $a_0 = b_0 = 0$, đa thức tử số và đa thức mẫu số sẽ có cùng nghiệm z^{-1} nên không còn là nguyên tố cùng nhau. Do $a_0 \neq 0$, nên ta có thể cho rằng đối tượng có mô hình thuộc lớp:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}, \quad (n \geq m) \qquad (1.56)$$

Khi đó, làm tương tự như với mô hình (1.53) ta cũng sẽ đi đến bài toán tối ưu lồi, toàn phương, không bị ràng buộc (1.55) với:

$$Q(\underline{p}) = (\underline{h} - F\underline{p})^T(\underline{h} - F\underline{p}) = \underline{p}^T \underbrace{(F^T F)}_{A}\underline{p} - \underbrace{(2\underline{h}^T F)}_{\underline{b}^T}\underline{p} + \underbrace{\underline{h}^T \underline{h}}_{c}$$

và

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_k = \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-n} \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k-m} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \underline{f}_0^T \\ \vdots \\ \underline{f}_N^T \end{pmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Nhận dạng tham số mô hình liên tục

Xét đối tượng SISO tuyến tính với tín hiệu vào $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ có hàm truyền đạt thuộc lớp các mô hình không có thành phần vi phân:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}\,, \qquad (n\geq m) \tag{1.57}$$

trong đó $U(s)$, $Y(s)$ là ký hiệu chỉ ảnh Laplace của tín hiệu vào $u(t)$, ra $y(t)$. Nhiệm vụ của bài toán nhận dạng là thông qua việc quan sát tín hiệu $u(t)$, $y(t)$, xác định cụ thể các tham số thực $b_1,\ldots,b_m,a_0,a_1,\ldots,a_n$ sao cho sai lệch giữa $G(s)$ với đối tượng là nhỏ nhất.

Trước tiên, từ kết quả quan sát tín hiệu $u(t)$, $y(t)$ và thông qua các thuật toán phân tích phổ tín hiệu (xem thêm mục 6.3), ta xác định $U(j\omega)$, $Y(j\omega)$, tức là xác định dãy các giá trị ảnh Fourier của tín hiệu vào, ra tại các điểm tần số $k\Omega$, $k=0,1,\ldots,N$, trong đó Ω là chu kỳ trích mẫu trong miền tần số. Ký hiệu dãy các giá trị đó là:

$$U_k=U(jk\Omega) \quad \text{và} \quad Y_k=Y(jk\Omega), \qquad k=0,1,\ldots,N.$$

Tiếp theo, nếu ta thực hiện giống như đã làm ở mô hình đối tượng không liên tục, trong đó các vector $\underline{p}$, $\underline{f}_k$, $\underline{h}$ và ma trận F được thay bởi:

$$\underline{p}=\begin{pmatrix}-b_1\\ \vdots\\ -b_m\\ a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\qquad \underline{f}_k=\begin{pmatrix}(jk\Omega)U_k\\ \vdots\\ (jk\Omega)^mU_k\\ Y_k\\ (jk\Omega)Y_k\\ \vdots\\ (jk\Omega)^nY_k\end{pmatrix},\qquad \underline{h}=\begin{pmatrix}U_0\\ \vdots\\ U_N\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}\underline{f}_0^T\\ \vdots\\ \underline{f}_N^T\end{pmatrix},$$

thì cũng sẽ đi đến bài toán tối ưu toàn phương, lồi, không bị ràng buộc, để xác định tham số $\underline{p}^*$ cho mô hình (1.57) như sau:

$$\underline{p}^*=\arg\min Q(\underline{p}) \quad \Leftrightarrow \quad 2A\,\underline{p}^*-\underline{b}=\underline{0} \quad \text{(định lý 1.4).} \tag{1.58}$$

trong đó

$$Q(\underline{p})=\underline{p}^T\underbrace{(F^HF)}_{A}\underline{p}-\underbrace{2\,\mathrm{Re}(\underline{h}^HF)}_{\underline{b}^T}\underline{p}+\underbrace{\underline{h}^H\underline{h}}_{c}=\underline{p}^TA\underline{p}-\underline{b}^T\underline{p}+c$$

và chỉ số H ở vị trí lũy thừa là ký hiệu của phép tính chuyển vị, lấy liên hợp.

Chú ý: Nếu đối tượng có chứa thành phần vi phân thì nó không thể mô tả được bằng mô hình (1.57) mà thay vào đó là:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}, \qquad (n \ge m) \tag{1.59}$$

Khi đó, làm tương tự ta cũng sẽ đi đến bài toán tối ưu lồi, toàn phương, không bị ràng buộc (1.63) với:

$$Q(\underline{p}) = \underline{p}^T \underbrace{(F^H F)}_{A}\underline{p} - \underbrace{2\mathrm{Re}(\underline{h}^H F)}_{b^T}\underline{p} + \underbrace{\underline{h}^H \underline{h}}_{c} = \underline{p}^T A \underline{p} - \underline{b}^T \underline{p} + c$$

và $\underline{p} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\underline{f}_k = \begin{pmatrix} Y_k(jk\Omega) \\ \vdots \\ Y_k(jk\Omega)^n \\ U_k \\ U_k(jk\Omega) \\ \vdots \\ U_k(jk\Omega)^m \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} \underline{f}_0^T \\ \vdots \\ \underline{f}_N^T \end{pmatrix}$, $\underline{h} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix}$.

1.6.3 Ứng dụng vào điều khiển bền vững trong không gian trạng thái

Phát biểu bài toán

Xét đối tượng MIMO tuyến tính với mô hình trạng thái bất định (*uncertainties*):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A(\underline{\theta}) \cdot \underline{x} + B(\underline{\theta}) \cdot \underline{u} \\ \underline{y} = C(\underline{\theta}) \cdot \underline{x} \end{cases} \tag{1.60a}$$

trong đó $\underline{u}$ là vector các tín hiệu đầu vào, $\underline{y}$ là vector các tín hiệu đầu ra, $\underline{x}$ là vector các tín hiệu trạng thái, $\underline{\theta}$ là vector các tham số bất định của mô hình (không biết trước), và $A(\underline{\theta})$, $B(\underline{\theta})$, $C(\underline{\theta})$ là ba ma trận phụ thuộc tham số.

Dạng mô hình (1.60a) là khá phổ biến trong thực tế. Trong điều khiển bền vững, lớp mô hình này được gọi là *mô hình với sai lệch có cấu trúc*. Nếu đối tượng là SISO thì hàm truyền đạt tương ứng của (1.60a) là một hàm phức, thực–hữu tỷ, hợp thức chặt (*strictly proper*), có các hệ số phụ thuộc vector tham số bất định $\underline{\theta}$ như sau:

$$G(s) = \frac{b_0(\underline{\theta}) + b_1(\underline{\theta})s + \cdots + b_m(\underline{\theta})s^m}{a_0(\underline{\theta}) + a_1(\underline{\theta})s + \cdots + a_n(\underline{\theta})s^n}, \qquad (m < n). \tag{1.60b}$$

Nhiệm vụ điều khiển bền vững được đặt ra ở đây là phải thiết kế bộ điều khiển cho đối tượng (1.60) để hệ thống có *được chất lượng mong muốn* và chất lượng này "*bất biến*" với sự thay đổi vector tham số bất định $\underline{\theta}$ của mô hình.

Trong thực tế, để giải quyết bài toán điều khiển bền vững nêu trên, khi mà vector tham số bất định $\underline{\theta}$ có giá trị thuộc tập V biết trước ($\underline{\theta} \in V$), người ta thường hay thay V bằng tập hữu hạn m các giá trị tiêu biểu có thể có của $\underline{\theta}$, tức là:

$$V = \{ \underline{\theta}_1 , \underline{\theta}_2 , \cdots , \underline{\theta}_m \}$$

Khi đó, mô hình tham số bất định (1.60) sẽ được thay bằng m mô hình tham số hằng:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A_k \underline{x} + B_k \underline{u} \\ y = C_k \underline{x} \end{cases} \qquad (1.61a)$$

với

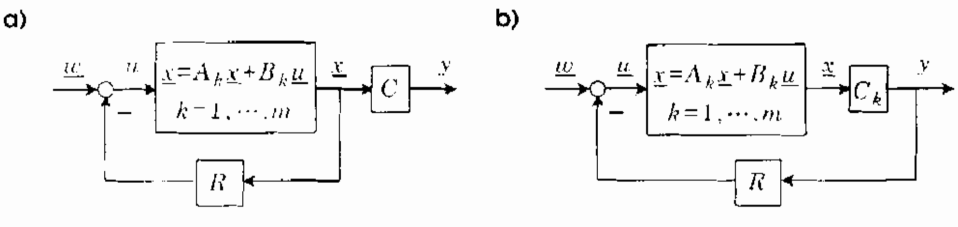
$$A_k = A(\underline{\theta}_k), \quad B_k = B(\underline{\theta}_k), \quad C_k = C(\underline{\theta}_k), \quad k = 1, 2, \cdots, m \qquad (1.61b)$$

và bài toán *điều khiển bền vững* trở thành bài toán *điều khiển đa mô hình* (multi-model-control) phát biểu như sau: "Hãy thiết kế *một* bộ điều khiển chung cho cho tất cả m đối tượng (1.61) để chúng luôn có cùng một chất lượng điều khiển mong muốn".

Tiếp tục, nếu xem *chất lượng điều khiển* mong muốn là *vị trí điểm cực* phải có của hệ kín [35], thì bài toán nêu trên trở thành:

> "*Hãy thiết kế một bộ điều khiển R phản hồi trạng thái* (hình 1.26a), *nếu ma trận C là hằng số (không phụ thuộc tham số $\underline{\theta}$), hoặc phản hồi đầu ra* (hình 1.26b), *chung cho toàn bộ m đối tượng* (1.61), *sao cho tất cả m hệ kín thu được đều có các điểm cực nằm trong một miền D cho trước của mặt phẳng phức*".

Tất nhiên chất lượng điều khiển mong muốn hàng đầu bao giờ cũng là tính ổn định, nên miền D cho trước của các điểm cực hệ kín bao giờ cũng *nằm bên trái trục ảo*.



Hình 1.26: Mô tả nhiệm vụ điều khiển bền vững trong không gian trạng thái.

Có hai phương pháp thường dùng để thực hiện bài toán vừa phát biểu. Đó là:

- Phương pháp Roppenecker cho bài toán phản hồi trạng thái.
- Phương pháp Konigorski cho bài toán phản hồi đầu ra.

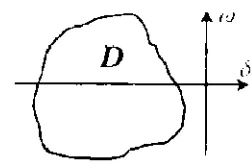
Phương pháp Roppenecker

Phương pháp Roppenecker là phương pháp thiết kế bộ điều khiển *phản hồi trạng thái R* (hình 1.26a) sao cho tất cả các điểm cực của toàn bộ m hệ kín thu được:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=(A_k-B_kR)\underline{x}+B_k\underline{w} \quad , \quad k=1,2,\cdots,m \tag{1.62}$$

nằm trong miền D cho trước của mặt phẳng phức $s=\delta+j\omega$. Nói cách khác, nó xác định ma trận R để tất cả $n\times m$ các giá trị riêng của m ma trận $\tilde{A}_k=(A_k-B_kR)$, $k=1,2,\cdots,m$ thuộc D.

Hình 1.27: Miền D cho phương pháp Roppenecker



Để giải quyết bài toán, trước hết ta xét cho một đối tượng cụ thể thứ k là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=A_k\underline{x}+B_k\underline{u} \tag{1.63a}$$

Tài liệu [35] đã trình bày khá kỹ về phương pháp Roppenecker phục vụ thiết kế bộ điều khiển phản hồi âm trạng thái cho đối tượng (1.63a), ký hiệu là R_k, sao cho hệ kín với mô hình (1.63a) tương ứng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=(A_k-B_kR_k)\underline{x}+B_k\underline{w} \tag{1.63b}$$

nhận n giá trị thuộc miền D cho trước $s_{k1}, s_{k2}, \ldots, s_{kn}$ làm điểm cực. Phương pháp này bao gồm các bước:

1) Tính các vector $\underline{a}_{ki}$ và $\underline{t}_{ki}$, $i=1,2,\cdots,n$:

a) Nếu ma trận $(s_{ki}I-A_k)$ suy biến thì $\underline{a}_{ki}$ được xác định là vector riêng bên phải của A_k ứng với giá trị riêng s_{ki}, tức là nghiệm của:

$$(s_{ki}I-A_k)\underline{a}_{ki}=\underline{0}$$

Đồng thời chọn vector $\underline{t}_{ki}=\underline{0}$.

b) Nếu ma trận $(s_{ki}I-A_k)$ không suy biến thì $\underline{a}_{ki}$ được tính bởi:

$$\underline{a}_{ki}=(s_{ki}I-A_k)^{-1}B_k\underline{t}_{ki}$$

trong đó vector $\underline{t}_{ki}$ được chọn sao cho tất cả n vector $\underline{a}_{k1}, \underline{a}_{k2}, \dots, \underline{a}_{kn}$ tạo thành hệ độc lập tuyến tính. Để có được điều này thì cần thiết các giá trị s_{k1}, $s_{k2}, \dots, s_{kn}$ phải khác nhau đôi một.

2) Xác định bộ điều khiển R_k theo công thức:

$$R_k = -(\underline{t}_{k1}, \underline{t}_{k2}, \dots, \underline{t}_{kn}) \cdot (\underline{a}_{k1}, \underline{a}_{k2}, \dots, \underline{a}_{kn})^{-1}$$

Như vậy bộ điều khiển R_k cho đối tượng thứ k phụ thuộc vào các giá trị $s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}$ cho trước. Biểu diễn sự phụ thuộc này ta có hàm:

$$R_k(s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}). \tag{1.64a}$$

Nói cách khác, từng phần tử r_{pq}^k của R_k là những hàm số của $s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}$:

$$r_{pq}^k = r_{pq}^k(s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}). \tag{1.64b}$$

Với mỗi một đối tượng (1.63a) ta có một bộ điều khiển (1.64). Cho m đối tượng ta sẽ có m bộ điều khiển $R_k=(r_{pq}^k)$, $k=1,2,\cdots,m$. Nhiệm vụ đặt ra bây giờ là phải ghép chung m bộ điều khiển đó lại với nhau thành một, tức là phải tìm $m\times n$ giá trị s_{ki}, $k=1,2,\cdots,m$; $i=1,2,\cdots,n$ thuộc D để có được $R_1=R_2=\cdots=R_m$. Nhằm đạt được điều này, ta xây dựng hàm mục tiêu:

$$Q(s_{ki}) = \sum_{k=2}^{m}\left(\sum_{p,q}(r_{pq}^1 - r_{pq}^k)^2\right) \geq 0 \tag{1.65}$$

Rõ ràng, nếu có $Q(s_{ki})=0$ ta cũng sẽ có $R_1=R_2=\cdots=R_m$ và bộ điều khiển bền vững R cần tìm sẽ là $R=R_1=(r_{pq}^1)$. Vậy khi hàm mục tiêu (1.65) có giá trị nhỏ nhất bằng 0, tức là có $Q_{min}=0$ thì bộ giá trị $s_{ki}\in D$, $k=1,2,\cdots,m$; $i=1,2,\cdots,n$ cần tìm sẽ là nghiệm của bài toán tối ưu:

$$(s_{ki})^* = \arg\min_{s_{ki}\in D} Q(s_{ki}) \tag{1.66}$$

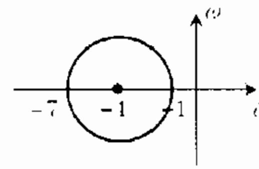
Ví dụ 1.17: (Minh họa phương pháp Roppenecker)

Cho đối tượng tham số bất định mô tả bằng hai mô hình tuyến tính tham số hằng:

$$M_1:\ \frac{d\underline{x}}{dt} = A_1\underline{x} + \underline{b}_1 u = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$$

$$M_2:\ \frac{dx}{dt} = A_2\underline{x} + \underline{b}_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Nhiệm vụ đặt ra là phải thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái (âm) sao cho hệ kín có các điểm cực nằm trong miền D tạo bởi mặt tròn $(\delta+4)^2+\omega^2 \le 9$ (hình 1.28).



Hình 1.28: Minh họa ví dụ 1.17

Bước 1: Áp dụng phương pháp Roppenecker cho mô hình M_1 với hai điểm cực cho trước là s_{11}, s_{12} ta thu được:

$$R_1 = -(t_{11}\quad t_{12})(\underline{a}_{11}\quad \underline{a}_{12})^{-1} = -(t_{11}\quad t_{12})\begin{pmatrix} \dfrac{t_{11}}{s_{11}(s_{11}-2)} & \dfrac{t_{12}}{s_{12}(s_{12}-2)} \\ \dfrac{t_{11}}{s_{11}-2} & \dfrac{t_{12}}{s_{12}-2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (s_{11}s_{12}\quad 2-s_{11}-s_{12})$$

Bước 2: Áp dụng phương pháp Roppenecker cho mô hình M_2 với hai điểm cực cho trước là s_{21}, s_{22} ta cũng thu được:

$$R_2 = -(t_{21}\quad t_{22})(\underline{a}_{21}\quad \underline{a}_{22})^{-1} = -(t_{21}\quad t_{22})\begin{pmatrix} \dfrac{t_{21}}{s_{21}(s_{21}-3)} & \dfrac{t_{22}}{s_{22}(s_{22}-3)} \\ \dfrac{t_{21}}{s_{21}-3} & \dfrac{t_{22}}{s_{22}-3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (s_{21}s_{22}\quad 3-s_{21}-s_{22})$$

Bước 3: Lập bài toán tối ưu:

$$Q = (s_{11}s_{12}-s_{21}s_{22})^2+[(2-s_{11}-s_{12})-(3-s_{21}-s_{22})]^2$$

$$= (s_{11}s_{12}-s_{21}s_{22})^2+(-1-s_{11}-s_{12}+s_{21}+s_{22})^2 \to \min.$$

với điều kiện ràng buộc $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} \in D$.

Bước 4: Bài toán tối ưu trên có vô số nghiệm và một trong số đó là:

$$s_{11}=-2\ ,\quad s_{12}=-6,\quad s_{21}=-3,\quad s_{22}=-4.$$

Bước 5: Do $Q_{\min}=0$ nên ta có bộ điều khiển bền vững sau:

$$R = R_1 = R_2 = (12\quad 10).$$ ❐

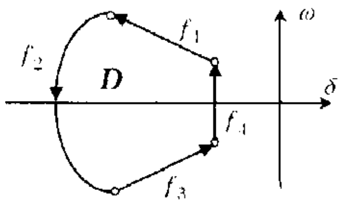
Phương pháp Konigorski

Phương pháp Konigorski là phương pháp thiết kế bộ điều khiển *phản hồi đầu ra R* (hình 1.26b) sao cho tất cả các điểm cực của m mô hình hệ kín:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A_k - B_k R C_k)\underline{x} + B_k \underline{w}$$
$$\underline{y} = C_k \underline{x}$$

nằm trong miền D cho trước của mặt phẳng phức $s = \delta + j\omega$, tức là để tất cả $n \times m$ giá trị riêng của toàn bộ m ma trận $\widetilde{A}_k = (A_k - B_k R C_k)$, $k = 1, 2, \cdots, m$ nằm trong D.

Miền D thích hợp cho phương pháp Konigorski là miền nằm bên trái trục ảo, đối xứng qua trục thực và được bao bởi *hữu hạn* các đường cong trơn f_l, $l = 1, 2, \cdots, q$. Các đường cong f_l được gọi là biên của D và ký hiệu bằng ∂D. Hình 1.29 là một ví dụ về miền D thích hợp cho phương pháp Konigorski.



Hình 1.29: Miền D thích hợp cho phương pháp Konigorski.

Ký hiệu v là số các tín hiệu vào và o là số các tín hiệu ra của đối tượng đa mô hình cần điều khiển. Vậy thì bộ điều khiển (tĩnh) R phải tìm sẽ là một ma trận kiểu $v \times o$ (v hàng, o cột).

Ký hiệu ma trận R và vector $\underline{p}$ gồm các phần tử của R như sau:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1o} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{v1} & \cdots & r_{vo} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{v \times o}, \tag{1.67a}$$

$$\underline{p} = (r_{11}, \cdots, r_{1o}, r_{21}, \cdots, r_{2o}, \cdots, r_{v1}, \cdots, r_{vo})^T \in \mathbb{R}^{vo} \tag{1.67b}$$

Khi đó, nhiệm vụ bài toán sẽ là xác định $\underline{p}$ để tất cả các giá trị riêng của m ma trận n hàng, o cột (n là số biến trạng thái của đối tượng):

$$\widetilde{A}_k = (A_k - B_k R C_k), \qquad k = 1, 2, \cdots, m \tag{1.68}$$

nằm trong D. Nếu ký hiệu λ_{ki}, $k=1,2,\cdots,m$ và $i=1,2,\cdots,n$ là các giá trị riêng của $\widetilde{A}_k$ thì rõ ràng những giá trị riêng này phụ thuộc vào vector tham số $\underline{p}$. Ta sẽ biểu diễn sự phụ thuộc đó bằng:

$$\lambda_{ki} = \lambda_{ki}(\underline{p}) \tag{1.69}$$

Để giải quyết bài toán, Konigorski đưa ra ý tưởng xây dựng hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ thỏa mãn:

- $Q(\underline{p})>1$, nếu có ít nhất một giá trị riêng λ_{ki} nằm ngoài miền D.
- $Q(\underline{p})<1$, nếu tất cả mn giá trị riêng λ_{ki} đều nằm trong miền D.

Với hàm $Q(\underline{p})$ như vậy, bài toán thiết kế R sẽ được chuyển về bài toán tối ưu không bị ràng buộc như sau:

$$\underline{p}^* = \arg\min Q(\underline{p})\,. \tag{1.70}$$

và để giải bài toán trên, Konigorski đề nghị sử dụng phương pháp gradient (mục 1.5.4).

Như vậy, nội dung phương pháp Konigorski bao gồm hai phần:

- Xây dựng hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$.
- Giải bài toán tối ưu (1.70) theo phương pháp gradient.

Trước hết ta đi vào phần thứ nhất là xây dựng hàm $Q(\underline{p})$. Gọi $f_l(\delta,\omega)=0$, $l=1,2,\cdots,q$ là các phương trình mô tả những đường cong trơn tạo thành biên của D. Chiều của các đường này được quy định là *chiều dương*, tức là khi đi theo chiều đó sẽ có:

$$f_l(\delta,\omega)=\begin{cases}>0 & \text{nếu} \quad s=\delta+j\omega \text{ nằm bên phải}\\ <0 & \text{nếu} \quad s=\delta+j\omega \text{ nằm bên trái}\end{cases} \tag{1.71a}$$

$$\Leftrightarrow \qquad e^{d_lf_l(\delta,\omega)}=\begin{cases}>>1 & \text{nếu} \quad s=\delta+j\omega \text{ nằm bên phải}\\ <<1 & \text{nếu} \quad s=\delta+j\omega \text{ nằm bên trái}\end{cases} \tag{1.71b}$$

trong đó $d_l>0$ là số dương đủ lớn (ký hiệu >> là rất lớn và << là rất nhỏ). Từ đây, và với ký hiệu:

$$\lambda_{ki}=\delta_{ki}+j\omega_{ki},\quad k=1,2,\cdots,m \text{ và } i=1,2,\cdots,n$$

cho giá trị riêng (phức) của các ma trận $\widetilde{A}_k$ thì rõ ràng:

$$\sum_{l=1}^{q} e^{d_lf_l(\delta_{ki},\omega_{ki})}=\begin{cases}>>1 & \text{nếu} \quad \lambda_{ki} \text{ nằm ngoài } D\\ <<1 & \text{nếu} \quad \lambda_{ki} \text{ nằm trong } D\end{cases} \tag{1.71c}$$

vì tổng hữu hạn các số dương vô cùng nhỏ cũng sẽ là một số dương vô cùng nhỏ.

Suy ra, hàm mục tiêu cần xác định có dạng như sau:

$$Q(\underline{p}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} e^{d_j f_j(\delta_{ki},\omega_{ki})} = \begin{cases} >> 1 & \text{nếu có một } \lambda_{ki} \text{ nằm ngoài } D \\ << 1 & \text{nếu mọi } \lambda_{ki} \text{ nằm trong } D \end{cases} \qquad (1.71d)$$

Phương pháp Konigorski bỏ qua trường hợp khi có giá trị riêng nằm trên biên δD.

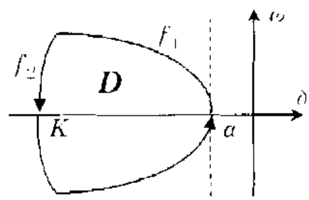
Chú ý: Tuy rằng vế phải của (1.71d) không có biến $\underline{p}$ giống như vế trái, song theo công thức (1.69), hay δ_{ki}, ω_{ki} là những hàm của $\underline{p}$, nên cuối cùng nó cũng vẫn là một hàm của $\underline{p}$.

Ví dụ 1.18: (Minh họa việc xây dựng hàm mục tiêu)

Xét miền D có biên δD được tạo bởi hai đường cong trơn (hình 1.30). Đường thứ nhất là đường hyperbol $\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{\omega^2}{b^2}=1$ và đường thứ hai là đường tròn $\delta^2+\omega^2=K^2$. Khi đó, tương ứng với chiều dương là chiều mà miền D luôn nằm phía bên trái, hai đường cong đó có phương trình mô tả như sau:

$$f_1(\delta,\omega) = \delta+\frac{a}{b}\sqrt{\omega^2-b^2}$$

$$f_2(\delta,\omega) = \sqrt{\delta^2+\omega^2}-K$$



Hình 1.30 Minh họa ví dụ 1.18

Suy ra:

$$Q(\underline{p}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[e^{d_1 f_1(\delta_{ki},\omega_{ki})}+e^{d_2 f_2(\delta_{ki},\omega_{ki})}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[e^{d_1\left(\delta_{ki}+\frac{a}{b}\sqrt{\omega_{ki}^2+b^2}\right)}+e^{d_2\left(\sqrt{\delta_{ki}^2+\omega_{ki}^2}-K\right)}\right]$$

trong đó m là số các mô hình mô tả đối tượng, n là số biến trạng thái của đối tượng và δ_{ki}, ω_{ki} là phần thực cũng như phần ảo của giá trị riêng λ_{ki} của các ma trận hệ kín $\widetilde{A}_k$, $k=1,2,\cdots,m$. ❐

Sau khi đã có hàm mục tiêu thì công việc còn lại chỉ là giải bài toán tối ưu không bị ràng buộc (1.70) để có được bộ điều khiển R (có các phần tử r_{ij} cũng là phần tử của $\underline{p}^*$). Như đã nói, phương pháp đã được Konigorski áp dụng để giải bài toán tối ưu đó là phương pháp gradient. Nếu như vậy, vấn đề vướng mắc cuối cùng chỉ còn là xác định hướng tìm ngược với hướng của:

$$\frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial \underline{p}} = \left(\frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{11}}, \cdots, \frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{1o}}, \cdots, \frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{t1}}, \cdots, \frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{to}} \right)$$

tức là cần phải xác định các phần tử của nó:

$$\frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{\mu\eta}}, \quad \mu=1,2,\cdots,t \quad \text{và} \quad \eta=1,2,\cdots,o \tag{1.72a}$$

Từ (1.71d) và (1.72a) có được

$$\frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{\mu\eta}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} d_l e^{d_l f_l(\delta_{ki},\omega_{ki})} \left[\frac{\partial f_l}{\partial \delta_{ki}} \cdot \frac{\partial \delta_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} + \frac{\partial f_l}{\partial \omega_{ki}} \cdot \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} \right] \tag{1.72b}$$

Do các hàm $f_l(\delta,\omega)$ mô tả các đường cong trơn thuộc biên ∂D nên thực chất để xác định được $\frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{\mu\eta}}$ của vector hướng tìm thì chỉ còn phải tính hai giá trị thực $\frac{\partial \delta_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$ và $\frac{\partial \omega_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$, tức là một giá trị phức $\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$, vì:

$$\frac{\partial \delta_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} \right) \quad \text{và} \quad \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \mathrm{Im}\left(\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} \right). \tag{1.72c}$$

Giá trị phức $\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$ có một ý nghĩa rất đặc biệt, nó chỉ ra *độ nhạy cảm của điểm cực hệ kín* đối với sự thay đổi các phần tử của bộ điều khiển R. Để có $\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$ ta phải cần đến vector riêng bên trái $\underline{\tilde{a}}_{ki}$ và bên phải $\underline{\tilde{b}}_{ki}$ của ma trận $\tilde{A}_k=(A_k- B_kRC)$, $k=1,2,\cdots,m$ ứng với giá trị riêng λ_{ki}. Tức là những vector thỏa mãn:

$$(\lambda_{ki}I-A_k+ B_kRC_k)\,\underline{\tilde{a}}_{ki}=\underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A_k- B_kRC_k)\,\underline{\tilde{a}}_{ki}=\lambda_{ki}\,\underline{\tilde{a}}_{ki} \tag{1.72d}$$

$$\underline{\tilde{b}}_{ki}^T(\lambda_{ki}I-A_k+ B_kRC_k)=\underline{0}^T \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\tilde{b}}_{ki}^T(A_k-B_kRC_k)=\underline{\tilde{b}}_{ki}^T\,\lambda_{ki} \tag{1.72e}$$

Lấy đạo hàm hai vế (1.72d) theo $r_{\mu\eta}$ và chú ý rằng A_k, B_k, C_k không phụ thuộc vào R, tức là không phụ thuộc vào $r_{\mu\eta}$, sẽ có:

$$-B_k\frac{\partial R}{\partial r_{\mu\eta}}C_k\,\underline{\tilde{a}}_{ki} + (A_k-B_kRC_k)\frac{\partial \underline{\tilde{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}\,\underline{\tilde{a}}_{ki} + \lambda_{ki}\frac{\partial \underline{\tilde{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$$

nhưng vì:

$$\frac{\partial R}{\partial r_{\mu\eta}} = \underline{e}_\mu \underline{e}_\eta^T \quad \text{trong đó} \quad \underline{e}_\mu = (0, \cdots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \cdots, 0)^T$$

phần tử thứ μ

nên

$$-B_k \underline{e}_\mu \underline{e}_\eta^T C_k \tilde{\underline{a}}_{ki} + (A_k - B_k R C_k)\frac{\partial \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}\tilde{\underline{a}}_{ki} + \lambda_{ki}\frac{\partial \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$$

Nhân cả hai vế phương trình trên với $\tilde{\underline{b}}_{ki}^T$

$$-\tilde{\underline{b}}_{ki}^T B_k \underline{e}_\mu \underline{e}_\eta^T C_k \tilde{\underline{a}}_{ki} + \tilde{\underline{b}}_{ki}^T (A_k - B_k R C_k)\frac{\partial \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \tilde{\underline{b}}_{ki}^T \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}\tilde{\underline{a}}_{ki} + \tilde{\underline{b}}_{ki}^T \lambda_{ki}\frac{\partial \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$$

và để ý rằng:

$$B_k \underline{e}_\mu = \underline{b}_{k\mu} \quad \text{và} \quad \underline{e}_\eta^T C_k = \underline{c}_{k\eta}^T .$$

trong đó $\underline{b}_{k\mu}$ là vector cột thứ μ của ma trận B_k và $\underline{c}_{k\eta}^T$ là vector hàng thứ η của C_k, sẽ được:

$$-\tilde{\underline{b}}_{ki}^T \underline{b}_{k\mu} \underline{c}_{k\eta}^T \tilde{\underline{a}}_{ki} + \tilde{\underline{b}}_{ki}^T (A_k - B_k R C_k)\frac{\partial \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \tilde{\underline{b}}_{ki}^T \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}\tilde{\underline{a}}_{ki} + \tilde{\underline{b}}_{ki}^T \lambda_{ki}\frac{\partial \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$$

Thay thành phần thứ hai của vế trái bằng (1.72e) thì có:

$$-\tilde{\underline{b}}_{ki}^T \underline{b}_{k\mu} \underline{c}_{k\eta}^T \tilde{\underline{a}}_{ki} = \tilde{\underline{b}}_{ki}^T \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}\tilde{\underline{a}}_{ki}$$

song do $\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}}$ là một giá trị vô hướng nên cuối cùng:

$$\frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{\mu\eta}} = \frac{-\tilde{\underline{b}}_{ki}^T \underline{b}_{k\mu} \underline{c}_{k\eta}^T \tilde{\underline{a}}_{ki}}{\tilde{\underline{b}}_{ki}^T \tilde{\underline{a}}_{ki}} . \tag{1.73}$$

Tổng kết lại, ta đi đến thuật toán mô tả phương pháp Konigorski gồm những bước sau:

1) Xây dựng hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ từ phương trình mô tả các đường cong trơn f_l, $l=1,2,\cdots,q$ tạo thành biên của miền D theo chiều dương, nhờ công thức (1.71d).

2) Chọn điểm xuất phát $R=(r_{\mu\eta})$, $\mu=1,2,\cdots,v$ và $\eta=1,2,\cdots,o$, trong đó v là số đầu vào, o là số đầu ra của đối tượng. Do vector $\underline{p}$ chẳng qua chỉ là sự sắp xếp lại các phần tử của ma trận R dưới dạng cột nên với điểm xuất phát R ta cũng có điểm khởi phát $\underline{p}$.

3) Thực hiện lần lượt các bước sau:

a) Nếu $Q(\underline{p}) \ll 1$ thì dừng với đáp số R.

b) Xác định các ma trận $\tilde{A}_k = (A_k - B_k R C_k)$, $k = 1, 2, \cdots, m$.

c) Xác định các giá trị riêng λ_{ki}, $i = 1, 2, \cdots, n$ cũng như các vector riêng bên trái $\tilde{a}_{ki}$ và bên phải $\tilde{b}_{ki}$ của ma trận $\tilde{A}_k$ ứng với giá trị riêng λ_{ki}, trong đó n là số biến trạng thái của đối tượng.

d) Tính $\dfrac{\partial \lambda_{ki}}{\partial r_{uv}}$ theo (1.73). Thay vào (1.72c) để có $\dfrac{\partial \delta_{ki}}{\partial r_{uv}}$ và $\dfrac{\partial \omega_{ki}}{\partial r_{uv}}$.

e) Tính $\dfrac{\partial Q(p)}{\partial r_{uv}}$ theo (1.72b). Từ đó xác định được hướng tìm:

$$\underline{h} = \left(\frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{11}}, \cdots, \frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{1s}}, \cdots, \frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{t1}}, \cdots, \frac{\partial Q(\underline{p})}{\partial r_{ts}} \right)^T$$

f) Xác định khoảng cách bước tìm $(s^*) = \arg\min\limits_{s} Q(\underline{p} + s\underline{h})$.

g) Gán $\underline{p} := \underline{p} + (s^*)\underline{h}$ rồi quay lại bước a).

Chú ý: Theo phương pháp gradient để tìm nghiệm tối ưu, sau mỗi bước tìm nghiệm, hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ phải có giá trị nhỏ hơn ở bước trước. Bởi vậy sau mỗi bước tìm nghiệm, nếu điều kiện trên không được thỏa mãn thì ta có thể dừng thuật toán mà khẳng định rằng bài toán không có nghiệm.

1.6.4 Ứng dụng vào điều khiển thích nghi

Mục đích của điều khiển thích nghi

Để điều khiển đối tượng có mô hình bất định (*uncertainties*), mục 1.6.3 đã giới thiệu khả năng sử dụng kỹ thuật điều khiển bền vững. Đó là kỹ thuật mà ở đó những tính bất định của mô hình đối tượng được xem như là sai lệch mô hình ΔS và điều khiển bền vững có nhiệm vụ thiết kế bộ điều khiển luôn giữ cho hệ thống có được chất lượng không đổi với mọi sai lệch mô hình ΔS của đối tượng nằm trong một miền cho phép.

Điều khiển thích nghi cũng có mục đích tương tự như điều khiển bền vững, tức là cũng phải tạo ra được bộ điều khiển làm cho hệ thống có chất lượng không đổi mặc dù đối tượng có sự thay đổi bên trong. Tuy nhiên sự khác nhau của hai kỹ thuật điều khiển trên nằm ở chỗ *trong khi điều khiển bền vững hướng tới một bộ điều khiển không đổi, chẳng hạn như bộ điều khiển tham số hằng, thì điều khiển thích nghi lại hướng tới một bộ điều khiển mềm dẻo, có khả năng tự thay đổi cấu trúc hoặc tham số và sự thay đổi đó* *phai phù hợp với sự thay đổi tương ứng trong đối tượng nhằm giữ được ổn định chất lượng hệ thống.*

Bộ điều khiển thích nghi thường có một trong hai loại cấu trúc cơ bản:

- cấu trúc tự chỉnh tham số,
- và cấu trúc có mô hình theo dõi.

1) *Bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số.*

Để hiểu rõ điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số, ta xét bài toán quen biết trong điều khiển tuyến tính là xác định tham số bộ điều khiển PID. Tài liệu [35] đã trình bày chi tiết một số phương pháp tìm tham số thích hợp cho bộ điều khiển PID, chẳng hạn như hai phương pháp của Ziegler–Nichols, phương pháp tổng các hằng số thời gian của Kuhn, phương pháp tối ưu độ lớn, tối ưu đối xứng ... Mục 1.6.1 cũng đã giới thiệu phương pháp xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển PID sao cho chuẩn bậc hai của sai lệch $e(t)$ của hệ kín (xem thêm phụ lục 6.1.2):

$$\| e \|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} e^2(t)dt}$$

đạt được giá trị nhỏ nhất. Tuy nhiên toàn bộ các phương pháp này có chung một nhược điểm là chúng đều bắt đầu từ *mô hình rõ* (certain) của đối tượng dưới dạng hàm truyền đạt $S(s)$, kiểu thực–hữu tỷ, hợp thức:

$$S(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \qquad (n \ge m)$$

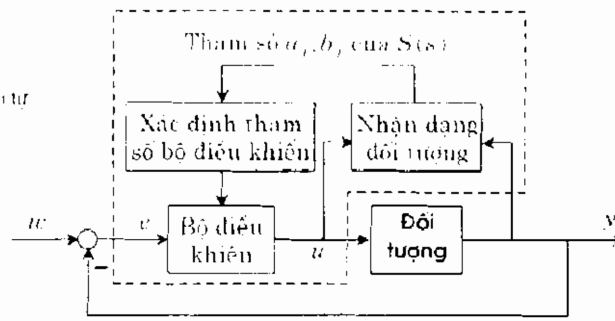
có các tham số a_i, $i=1,2,\cdots,n$ và b_j, $j=1,2,\cdots,m$ đã được xác định (hằng số cho trước). Như vậy chúng sẽ không áp dụng được trực tiếp cho bài toán điều khiển mà ở đó đối tượng lại có *mô hình bất định* (uncertain), tức là có bậc m, n hoặc các tham số a_i, b_j thay đổi ngẫu nhiên không biết trước.

Song, nếu ta đưa thêm vào bộ điều khiển một *cơ cấu nhận dạng* (hình 1.31) được tích hợp theo các thuật toán nhận dạng tham số mô hình đối tượng đã trình bày ở mục 1.6.2, nhằm xác định trực tuyến (on–line) các tham số a_i, $i=1,2,\cdots,n$ và b_j, $j=1,2,\cdots,m$ của đối tượng, tức là xác định mô hình đối tượng $S(s)$, và một *cơ cấu xác định tham số bộ điều khiển* trên cơ sở hàm truyền đạt $S(s)$ vừa nhận dạng được, thì cuối cùng ta sẽ có một bộ điều khiển mềm dẻo, linh hoạt với các khả năng sau:

- Nhờ có *cơ cấu nhận dạng* bộ điều khiển luôn phát hiện được sự thay đổi bên trong của đối tượng. Cụ thể là tại mọi thời điểm nó luôn xác định được các tham số a_i, $i=1,2,\cdots,n$ và b_j, $j=1,2,\cdots,m$ của đối tượng, và như vậy nó xác định được hàm truyền đạt $S(s)$ *thời sự* của đối tượng.

– *Cơ cấu xác định tham số điều khiển*, sử dụng thuật toán thiết kế bộ điều khiển có cấu trúc cho trước và mô hình thời sự $S(s)$ của đối tượng, luôn đưa ra được những tham số điều khiển mang tính *thời sự*. Vì vậy bộ điều khiển sẽ luôn đảm bảo được một chất lượng ổn định cho hệ thống cho dù đối tượng có thay đổi.

Bộ điều khiển với hai cơ cấu nhận dạng và xác định tham số điều khiển như trên được gọi là *bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số (self–tuning–regulator)*, viết tắt là STR.



Hình 1.31: Bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số.

2) *Điều khiển thích nghi có mô hình theo dõi.*

Mục đích của việc thiết kế bộ điều khiển là tạo ra cho hệ kín, bao gồm đối tượng điều khiển và bộ điều khiển, một chất lượng mong muốn. Thể hiện chất lượng mong muốn đó dưới dạng hàm truyền đạt hệ kín thì nhiệm vụ trên sẽ được cụ thể hóa là phải tạo ra bộ điều khiển sao cho hệ kín có được *hàm truyền đạt mẫu* mong muốn:

$$G_m(s)=\frac{B_m(s)}{A_m(s)} \qquad (1.74)$$

và điều này không được phụ thuộc vào sự thay đổi mô hình đối tượng. Nói cách khác, cho dù đối tượng thay đổi như thế nào đi nữa thì bộ điều khiển vẫn phải làm cho hệ kín có được hàm truyền đạt (1.74) không đổi. Điều này đồng nghĩa với việc là trong mọi trường hợp thay đổi bên trong đối tượng, bộ điều khiển phải luôn tạo ra được đầu ra $y(t)$ của hệ kín tương tự như đầu ra $y_m(t)$ của mô hình (1.74) khi mà cả hai, mô hình (1.74) và hệ thống cùng có chung tín hiệu đầu vào $w(t)$ – hình 1.32.

Hệ thống có bộ điều khiển làm cho nó thỏa mãn:

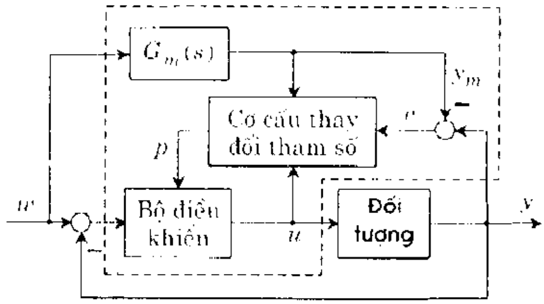
$$y_m(t)\approx y(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad e(t)=y(t)-y_m(t)\approx 0 \qquad (1.75a)$$

được gọi là *hệ điều khiển thích nghi có mô hình theo dõi (model reference adaptive control)*, viết tắt thành MRAC. Hình 1.32 mô tả cấu trúc bộ điều khiển thích nghi có mô hình theo dõi [1.7].

Nhiều khi, để đơn giản trong ứng dụng, thì thay vì (1.75a), người ta thường đặt ra mục tiêu thấp hơn như sau:

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=0 \qquad (1.75b)$$



Hình 1.32: Bộ điều khiển thích nghi có mô hình theo dõi.

Có thể thấy để đạt được mục đích (1.75b) ta có vô vàn phương án giải quyết. Vì vậy bài toán điều khiển thích nghi với mô hình theo dõi cũng sẽ có vô số lời giải. Chẳng hạn như để có được (1.75b) thì đơn giản nhất là ta phải thay đổi các tham số của bộ điều khiển, mà sau đây được viết chung lại thành vector $\underline{p}$, sao cho:

- Khi $e>0$ thì phải giảm $e(t)$, tức là phải tạo ra được $\frac{de}{dt}<0$.
- Ngược lại, khi $e<0$ thì phải tăng $e(t)$, tức là phải tạo được $\frac{de}{dt}>0$.

Nói cách khác, cần phải thay đổi vector tham số điều khiển $\underline{p}$ để luôn có:

$$e\frac{de}{dt}<0 \qquad (1.76)$$

Nhưng vì:

$$\frac{de}{dt}=\frac{\partial e}{\partial \underline{p}}\frac{d\underline{p}}{dt}$$

nên cuối cùng ta sẽ đạt được mục đích (1.76) nếu như thiết kế được bộ điều khiển phụ thuộc tham số $\underline{p}$ với cơ cấu thay đổi tham số thỏa mãn [3]:

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=-\gamma e\left(\frac{\partial e}{\partial \underline{p}}\right)^T , \quad (\gamma>0) \qquad (1.77a)$$

hoặc

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=-\gamma \operatorname{sgn}(e)\left(\frac{\partial e}{\partial \underline{p}}\right)^T , \quad (\gamma>0) \qquad (1.77b)$$

trong đó γ là một hằng số dương tùy ý.

Hai công thức thay đổi vector tham số $\underline{p}$ nêu trên vẫn thường được biết đến dưới tên gọi là *luật MIT* vì chúng có nguồn gốc từ Học viện công nghệ Massachusetts (Massachusetts Institute of Technology). Ngoài ra, ta có thể thấy đại lượng $\frac{\partial e}{\partial \underline{p}}$ trong các công thức đó chính là thước đo cho sự nhạy cảm của sai lệch $e(t)$ đối với sự thay đổi tham số $\underline{p}$ của bộ điều khiển.

Vai trò của điều khiển tối ưu tĩnh trong điều khiển thích nghi

Ý nghĩa ứng dụng của phương pháp giải bài toán tối ưu hóa (điều khiển tối ưu tĩnh) vào việc thiết kế bộ điều khiển thích nghi được nhìn thấy rõ nhất ở bài toán điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số (STR) với cấu trúc thể hiện trong hình 1.31, vì ở đó có chứa cơ cấu nhận dạng. Mục 1.6.2, cụ thể là định nghĩa 1.13, khi giới thiệu về nhận dạng, đã chỉ rõ mọi bài toán nhận dạng tham số mô hình đối tượng tuyến tính, tiền định, có cấu trúc xác định đều chuyển được về dạng bài toán tối ưu tĩnh. Chính vì vậy, để xây dựng được bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số STR ta không thể không sử dụng các phương pháp giải bài toán tối ưu tĩnh.

Ở bài toán điều khiển thích nghi có mô hình theo dõi (MRAC), với cấu trúc mô tả trong hình 1.32 thì vai trò của điều khiển tối ưu tĩnh không được rõ nét như ở bài toán STR. Lý do là vì bài toán MRAC có vô số lời giải, và không phải mọi lời giải đều bắt buộc phải sử dụng đến các phương pháp điều khiển tối ưu tĩnh, chẳng hạn như luật MIT (1.77) là một ví dụ. Tuy nhiên, nhằm nâng cao hơn nữa *chất lượng thích nghi* cho bộ điều khiển theo nghĩa $y_m \approx y$ thì thay vì tiêu chí (1.75b) ta có thể sử dụng

$$\| e \| \to \min \qquad (1.78)$$

và điều này đòi hỏi cơ cấu thay đổi tham số của bộ điều khiển MRAC phải có chứa thuật toán tìm nghiệm $\underline{p}$ của bài toán tối ưu tĩnh (1.78).

Câu hỏi ôn tập và bài tập

1) Cho bài toán tối ưu hyperbol $\underline{p}^* = \arg\min_{\underline{p}\in P} Q(\underline{p})$ với

$$Q(\underline{p}) = \frac{3p_1 - p_2 + 3}{p_1 + 2p_2 - 1}, \qquad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 + p_2 \le 1,\ 2p_1 - p_2 \le 2,\ p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0 \,\}$$

Hãy chuyển bài toán trên thành bài toán tối ưu tuyến tính và tìm nghiệm $\underline{p}^*$ của nó bằng phương pháp đơn hình (simplex).

2) Cho bài toán tối ưu $p^* = \arg\min_{p\in P} Q(p)$ với

$$Q(p) = -p, \qquad P = \{\, p \in \mathbb{R} \mid p \ge 0,\ p^2 \le 0 \,\} = \{0\}$$

a) Hãy xác định nghiệm p^* của bài toán.

b) Hãy xây dựng bài toán điểm yên ngựa từ bài toán tối ưu đã cho và xác định điểm yên ngựa của bài toán đó. Tại sao từ nghiệm p^* không suy ra được nghiệm của bài toán điểm yên ngựa.

3) Tìm nghiệm $\underline{p}^* = \arg\min\limits_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p})$ với

a) $Q(\underline{p}) = p_1^2 + p_2^2 - 8p_1 - 10p_2$, $\quad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ 3p_1 + 2p_2 \leq 6 \,\}$

b) $Q(\underline{p}) = tp_1^2 + 2tp_2^2 - p_1 - p_2$, $\quad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_1 + p_2 \leq 4 \,\}$

bằng phương pháp Kuhn–Tucker (biện luận theo tham số t).

4) Hãy chỉ rằng những bài toán tối ưu $\underline{p}^* = \arg\min\limits_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p})$ với hàm mục tiêu $Q(\underline{p})$ và ràng buộc P cho sau đây là bài toán tối ưu lồi. Tìm nghiệm $\underline{p}^*$.

a) $Q(\underline{p}) = p_1^4 + p_2^2 + 4p_1$, $\quad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_1 + p_2 \leq 6,\ p_2 \geq (p_1 - 1)^2 \,\}$

b) $Q(\underline{p}) = (p_1 - 3)^2 + (p_2 - 3)^2$, $\quad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_1 + p_2 \leq 6 \,\}$

c) $Q(\underline{p}) = (p_1 - 1)^2 + (p_2 - 1)^2$, $\quad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_1^2 + p_2 \leq 1 \,\}$

5) Cho bài toán tối ưu toàn phương $\underline{p}^* = \arg\min\limits_{\underline{p} \in P} \underbrace{\left(\underline{p}^T A \underline{p}\right)}_{Q(\underline{p})}$, trong đó $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ và

$$P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \geq p_1 \geq 0,\ 2 \geq p_2 \geq 0,\ p_1 + p_2 \geq 1,\ p_1 - p_2 \leq 1 \,\}$$

a) Với giá trị nào của a thì ma trận A là xác định dương / xác định bán dương.

b) Hãy vẽ các đường đồng mức của $Q(\underline{p})$ ứng với $a = 1, 4, 8$.

c) Tìm nghiệm $\underline{p}^*$ của bài toán khi $a = 1, 4, 8$.

6) Cho bài toán tối ưu tĩnh không ràng buộc

$$Q = p_1^2 - 2p_2^2 - 5p_1 - 14p_2 + p_1 p_2 \to \min$$

a) Hãy tìm nghiệm bài toan theo phương pháp Newton–Raphson với 2 bước tính kể từ điểm xuất phát tùy ý được chọn trước.

b) Có nhận xét gì về nghiệm tìm được.

7) Cho bài toán tối ưu tĩnh không ràng buộc

$$Q = p_1^2 - 2p_2^2 - 2p_1 - 4p_2 \to \min$$

a) Hãy tìm nghiệm bài toán theo phương pháp Gauss–Seidel với 2 bước tính kể từ điểm xuất phát tùy ý được chọn trước.

b) Có nhận xét gì về nghiệm tìm được.

8) Tìm nghiệm $p^* = \arg\min_{\underline{p} \in P} Q(\underline{p})$ với

$$Q(\underline{p}) = p_1^2 + 2p_2^2, \qquad P = \{\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_1^2 + p_2^2 \geq 1 \,\}$$

a) bằng kỹ thuật hàm phạt.

b) bằng kỹ thuật hàm chặn.

9) Xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển PI

$$R(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

để điều khiển đối tượng có hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{2}{s^2 + 2s - 3}$$

10) Tại sao để áp dụng được phương pháp Roppenecker cho việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái bền vững cần phải có điều kiện rằng ma trận C không được phụ thuộc vector tham số $\underline{\theta}$ (C phải là ma trận hằng)?

2 ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU ĐỘNG

2.1 Nhập môn

2.1.1 Thế nào là bài toán điều khiển tối ưu động?

Bài toán tối ưu động liên tục

Giống như ở bài toán tối ưu tĩnh, bài toán tối ưu động cũng có mục đích là tạo ra cho hệ thống một chất lượng tốt nhất. Tuy nhiên, giữa chúng lại có sự khác nhau về nhiệm vụ. Trong khi nhiệm vụ của điều khiển tối ưu tĩnh là chọn tham số điều khiển tối ưu trong số những tham số $\underline{p}$ thích hợp, thì điều khiển tối ưu động lại có nhiệm vụ (trọng tâm) là tìm tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ để chất lượng quá trình chuyển đổi trạng thái từ điểm đầu $\underline{x}_0$ tới điểm cuối $\underline{x}_T$ của hệ là tốt nhất.

Để hiểu rõ hơn về nhiệm vụ của điều khiển tối ưu động, ta xét ví dụ sau.

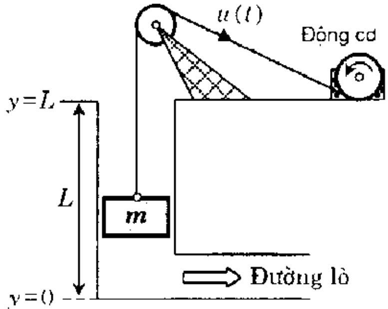
Ví dụ 2.1: (Bài toán vận chuyển quặng từ hầm mỏ lên mặt đất)

Hình 2.1 mô tả cơ cấu vận chuyển quặng với khối lượng m khai thác được từ hầm mỏ lên mặt đất. Nếu gọi quãng đường là $y(t)$, lực kéo của động cơ là $u_0(t)$, thì hệ thống chuyển quặng sẽ được mô tả bởi phương trình:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = u_0(t) - mg = u(t)$$

hay với ký hiệu vector trạng thái $\underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ thì

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} u \\ y = x_1 \end{cases}$$



Hình 2.1: Bài toán chuyển quặng.

trong đó: g – là gia tốc trọng trường,

x_1 – là quãng đường đi được,

x_2 – là vận tốc.

Nhiệm vụ điều khiển tối ưu được đặt ra ở đây là phải xác định tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ để đưa quang tử dưới hầm mỏ, tức là đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, lên trên mặt đất, tức là đạt tới điểm trạng thái $\underline{x}_T=\begin{pmatrix}L\\0\end{pmatrix}$, trong khoảng thời gian T và năng lượng tiêu hao cho quá trình vận chuyển đó, tính theo:

$$Q(\underline{x},u)=\int_0^T u^2 dt$$

là nhỏ nhất. ❐

Định nghĩa 2.1 (Tối ưu liên tục): Xét hệ thống liên tục mô tả bởi mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \tag{2.1}$$

trong đó: $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$ là vector của n biến trạng thái,

$\underline{u}=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \vdots \\ u_m(t)\end{pmatrix}$ là vector của m tín hiệu điều khiển.

$\underline{f}=\begin{pmatrix}f_1(\underline{x},\underline{u})\\ \vdots \\ f_n(\underline{x},\underline{u})\end{pmatrix}$ là vector của n phương trình mô tả hệ thống.

Một (vector) tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ thuộc lớp các tín hiệu điều khiển thích hợp U đưa hệ từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ tới điểm trạng thái cuối $x(T)=\underline{x}_T$ được gọi là *tối ưu*, nếu nó làm cho hàm mục tiêu đo chất lượng của quá trình chuyển đổi trạng thái của hệ thống:

$$Q(\underline{x},\underline{u})=\int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \tag{2.2}$$

có giá trị nhỏ nhất, trong đó:

a) Nghiệm $\underline{x}(t)$ của phương trình vi phân (2.1) ứng với *tín hiệu điều khiển tối ưu* $\underline{u}(t)$ được gọi là *quỹ đạo trạng thái tối ưu*.

b) T là khoảng *thời gian xảy ra quá trình tối ưu*.

Như vậy, ở bài toán tối ưu động trên, ta đã giả thiết là với mỗi một vector tín hiệu $\underline{u}(t)$ và một điểm đầu $\underline{x}_0$ (hoặc điểm cuối $\underline{x}_T$) cho trước, hệ phương trình vi phân (2.1) luôn có nghiệm $\underline{x}(t)$ duy nhất, tức là đã giả thiết vector hàm $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz phát biểu như sau (xem thêm định lý 5.3):

$$\| \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) - \underline{f}(\underline{x}_0,\underline{u}) \| < a \| \underline{x} - \underline{x}_0 \|$$

trong đó $\underline{u}(t)$ là đã biết và a là số thực dương.

Với các tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ khác nhau ta có những quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ khác nhau. Như vậy, rõ ràng nghiệm $\underline{x}(t)$ là một hàm theo $\underline{u}(t)$:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(\underline{u}(t))$$

Thay quan hệ trên vào hàm mục tiêu (2.2) thì

$$Q(\underline{x},\underline{u}) = Q(\underline{x}(\underline{u}),\underline{u}) = \underbrace{\int_0^T g(\underline{x}(\underline{u}),\underline{u})dt}_{\tilde{Q}(\underline{u})} \tag{2.3}$$

và bài toán tối ưu động lại đưa được về dạng chính tắc quen biết giống như ở bài toán điều khiển tối ưu tĩnh (chương 1) như sau:

$$\underline{u}^* = \arg \min_{\underline{u} \in U} \tilde{Q}(\underline{u}) . \tag{2.4}$$

Tuy nhiên, điểm khác biệt của (2.4) so với điều khiển tối ưu tĩnh là hàm mục tiêu $\tilde{Q}(\underline{u})$ không phải là hàm đại số. Trong nó có cả toán tử tích phân (2.2) và vi phân (2.1).

Bài toán điều khiển tối ưu không liên tục

Bên cạnh lớp hệ thống có các tín hiệu là những (vector) hàm liên tục theo biến thời gian t thì trong điều khiển người ta còn thường hay gặp những hệ thống khác mà ở đó các tín hiệu là không liên tục. Khi tín hiệu vào là không liên tục thì thay vì được mô tả bằng (vector) hàm thời gian $\underline{u}(t)$, nó sẽ được mô tả bởi dãy các giá trị $\{\underline{u}_k\}$ với:

$$\underline{u}_k = \underline{u}(kT_a) \quad \text{khi} \quad kT_a \le t < (k+1)T_a$$

Nói cách khác $\underline{u}_k$ chính là giá trị trích mẫu $\underline{u}(kT_a)$ của tín hiệu liên tục $\underline{u}(t)$ tại thời điểm $t=kT_a$, sau đó được giữ lại trong toàn bộ khoảng thời gian $kT_a \le t < (k+1)T_a$ giữa hai lần trích mẫu nhờ khâu $G_{ZOH}(s)$ – xem thêm tài liệu [35].

Quá trình thay (vector) hàm liên tục $\underline{u}(t)$ bởi dãy các giá trị $\{\underline{u}_k\}$ được gọi là lượng tử hóa $\underline{u}(t)$ theo thời gian. Nếu vector biến trạng thái $\underline{x}(t)$ cũng được lượng tử hoá theo thời gian một cách tương tự thành $\{\underline{x}_k\}$ thì mô hình trạng thái (2.1) sẽ được chuyển thể thành mô hình không liên tục như sau:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \tag{2.5}$$

trong đó

$$\underline{x}_k=\begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_k=\begin{pmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_m^k \end{pmatrix}, \quad \underline{f}=\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \end{pmatrix}$$

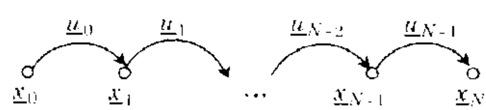
và các ký hiệu k ở vị trí "lũy thừa" không mang ý nghĩa lũy thừa thông thường. Chẳng hạn, ký hiệu u_i^k là để chỉ giá trị trích mẫu của phần tử $u_i(t)$ tại thời điểm $t=kT_a$ và được giữ lại trong khoảng thời gian $kT_a \le t < (k+1)T_a$ giữa hai lần trích mẫu.

Tương ứng với việc lượng tử hóa $\underline{u}(t)$ và $\underline{x}(t)$, mà từ đó mô hình (2.1) được chuyển thành (2.5), hàm đo chất lượng cho quá trình chuyển đổi trạng thái từ điểm đầu $\underline{x}_0$ tới điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N$ của hệ thống cũng có dạng biến thể như sau:

$$Q=\sum_{k=0}^{N-1} g(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \tag{2.6}$$

trong đó $NT_a=T$ là khoảng thời gian xảy ra quá trình chuyển đổi và N được gọi là *số bước điều khiển* (hình 2.2). Khi đó, bài toán tối ưu động liên tục phát biểu trong định nghĩa 2.1 sẽ trở thành.

Định nghĩa 2.2 (Tối ưu không liên tục): Một (vector) tín hiệu điều khiển không liên tục $\{\underline{u}_k\}$ thuộc lớp các tín hiệu điều khiển thích hợp U đưa hệ không liên tục mô tả bởi mô hình (2.5) đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ tới điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N=\underline{x}(NT_a)$, trong khoảng thời gian $T=NT_a$, được gọi là *tối ưu*, nếu nó làm cho hàm mục tiêu đo chất lượng của quá trình chuyển đổi trạng thái (2.6) có giá trị nhỏ nhất.



Hình 2.2: Điều khiển hệ không liên tục.

2.1.2 Phân loại bài toán tối ưu động

Bài toán tối ưu động đã được phát biểu trong định nghĩa 2.1 và 2.2. Tuy nhiên, còn tùy thuộc theo những điều kiện cụ thể, phát biểu thêm về điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$, về điểm trạng thái cuối $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$, về khoảng thời gian T của quá trình tối ưu, về điều kiện ràng buộc U cho vector tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ và về dạng mô hình trạng thái của hệ thống là liên tục hay rời rạc, mà bài toán đó còn được phân chia nhỏ một cách chi tiết hơn thành nhiều bài toán tối ưu động khác nhau như sau:

1) *Bài toán có ràng buộc/không ràng buộc*: Bài toán có giới hạn U là toàn bộ không gian điều khiển $\mathbb{R}^m$, tức là $U=\mathbb{R}^m$ được gọi là không ràng buộc (*unconstrained*). Ngược lại thì được gọi là có ràng buộc (*constrained*).

2) *Bài toán có điểm đầu cố định/điểm đầu ràng buộc*: Bài toán tối ưu có điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ xác định và cho trước được gọi là bài toán có điểm đầu cố định (*fixed start state*). Trong trường hợp $\underline{x}_0$ là cho trước, nhưng chưa được xác định cụ thể mà chỉ biết được rằng nó sẽ nằm trên một mặt cong S_0 nào đó thì được gọi là có điểm đầu ràng buộc (*start boundary conditions*).

3) *Bài toán có điểm cuối cố định/điểm cuối ràng buộc*: Bài toán tối ưu có điểm trạng thái cuối $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$ xác định và cho trước được gọi là bài toán có điểm cuối cố định (*fixed terminal state*). Trong trường hợp $\underline{x}_T$ là cho trước, nhưng chưa được xác định cụ thể mà chỉ biết được rằng nó sẽ nằm trên một mặt cong S_T nào đó thì được gọi là có điểm cuối ràng buộc (*terminal boundary conditions*).

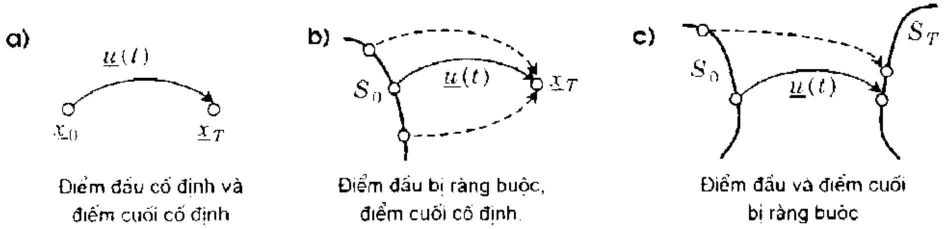
4) *Bài toán có khoảng thời gian T xác định/không xác định*: Bài toán có khoảng thời gian T cố định và cho trước được gọi là bài toán có T xác định (*fixed time*), chẳng hạn điều khiển tầu hoả đến ga đúng giờ là bài toán có T xác định. Ngược lại, nếu T là tùy ý thì được gọi là bài toán có T không xác định, ví dụ điều khiển tên lửa bắt mục tiêu nhanh nhất là bài toán có T không xác định.

5) *Bài toán có khoảng thời gian T hữu hạn/vô hạn*: Các bài toán có T xác định (*fixed time*) được phân chia tiếp thành bài toán có T hữu hạn (*finite time*) và có T vô hạn (*infinite time*). Bài toán có T vô hạn sẽ phải thỏa mãn:

$$\lim_{t\to\infty} g(\underline{x},\underline{u})=0$$

và do đó thường được áp dụng để thiết kế bộ điều khiển ổn định tối ưu.

Một bài toán tối ưu cụ thể có thể được kết hợp từ nhiều loại bài toán tối ưu nêu trên. Ví dụ bài toán tối ưu có điểm đầu cố định, điểm cuối ràng buộc, thời gian T không xác định, hữu hạn (hình 2.3).



Hình 2.3: Phân loại bài toán tối ưu động theo tính chất các điểm trạng thái đầu và cuối.

2.2 Phương pháp biến phân

Biến phân là một phương pháp được xây dựng từ điều kiện cần phải có của nghiệm tối ưu $\underline{u}(t)$ của bài toán tối ưu động, liên tục, có khoảng thời gian T xác định, cho trước và *không bị ràng buộc* bởi điều kiện U, hoặc nếu có bị ràng buộc thì tập U của các (vector) tín hiệu điều khiển thích hợp phải là *một tập hở*.

Ý tưởng chính của *biến phân* có thể được tóm tắt như sau:

- Từ giả thiết $\underline{u}(t)$ là tín hiệu điều khiển tối ưu, $\underline{x}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tối ưu, người ta xây dựng một tín hiệu điều khiển khác có một sai lệch nhỏ so với nó là:

  $\underline{\tilde{u}}(t)=\underline{u}(t)+\underline{\delta}_u(t)$, trong đó $\|\underline{\delta}_u(t)\|$ là rất nhỏ (2.7)

  và xem $\underline{\tilde{u}}(t)$ chưa phải là tín hiệu tối ưu.

- Tiếp theo, người ta giả thiết quỹ đạo trạng thái $\underline{\tilde{x}}(t)$ do $\underline{\tilde{u}}(t)$ tạo ra cho hệ thống cũng chỉ có một sai lệch rất nhỏ so với quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$, tức là :

  $\underline{\tilde{x}}(t)=\underline{x}(t)+\underline{\delta}_x(t)$ cũng có $\|\underline{\delta}_x(t)\|$ rất nhỏ. (2.8)

  Cuối cùng, từ điều kiện phải có của tín hiệu điều khiển tối ưu:

  $Q(\underline{x},\underline{u}) \le Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}})$ (2.9)

  người ta xác định tính chất của điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$, gọi là *tính chất biến phân*.

2.2.1 Hàm Hamilton, phương trình Euler–Lagrange và điều kiện cần

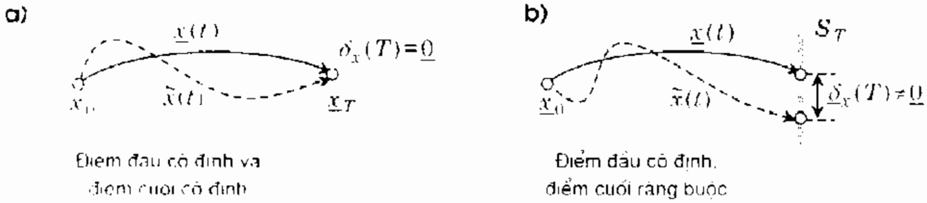
Xét bài toán tối ưu động, liên tục, có điểm đầu $\underline{x}_0$ và thời gian T cố định, cho trước:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u}), \quad \underline{x}_0=\underline{x}(0) & (2.10a) \\ Q(\underline{x},\underline{u})=\displaystyle\int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min & (2.10b) \end{cases}$$

Giả sử $\underline{u}(t)$ là nghiệm tối ưu của bài toán liên tục và $\underline{x}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tối ưu tương ứng. Ký hiệu tiếp $\underline{\tilde{u}}(t)$ là vector tín hiệu điều khiển được biến phân từ $\underline{u}(t)$ theo công thức (2.7) và $\underline{\tilde{x}}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tương ứng của nó thỏa mãn điều kiện biến phân (2.8). Hiển nhiên khi đó ta có bất đẳng thức (2.9). Hình 2.4 minh họa trực quan hai quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ và $\underline{\tilde{x}}(t)$. Từ hình minh họa đó ta rút ra ngay được quan hệ giữa lượng biến phân trạng thái $\underline{\delta}_x(t)$ và điểm trạng thái cuối $\underline{x}_T$ như sau:

- Nếu $\underline{x}_T$ là cố định và cho trước (*fixed*) thì phải có $\underline{\delta}_x(T)=\underline{0}$.

  Nếu $\underline{x}_T$ không cố định, chẳng hạn bị ràng buộc, thì có thể sẽ có $\underline{\delta}_x(T)\neq\underline{0}$.



Hình 2.4: Minh họa công thức biến phân.

Với các ký hiệu như trên thì sau cùng một khoảng thời gian T không đổi sẽ có :

$$Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}})=\int_0^T g(\underline{x}+\underline{\delta}_x,\underline{u}+\underline{\delta}_u)dt=Q(\underline{u},\underline{x})+\underline{\delta}_Q \qquad (0\le\underline{\delta}_Q)$$

Bởi vậy, từ bất đẳng thức (2.9) và bằng phân tích chuỗi Taylor ta sẽ xấp xỉ được thành:

$$0<\underline{\delta}_Q=Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}})-Q(\underline{u},\underline{x})=\int_0^T\left[\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}\underline{\delta}_x+\frac{\partial g}{\partial \underline{u}}\underline{\delta}_u\right]dt \tag{2.11}$$

trong đó

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \quad \text{và} \quad \frac{\partial g}{\partial \underline{u}}=\left(\frac{\partial g}{\partial u_1},\frac{\partial g}{\partial u_2},\cdots,\frac{\partial g}{\partial u_m}\right)$$

là các ký hiệu ma trận Jacobi của hàm nhiều biến $g(\underline{x},\underline{u})$.

Hoàn toàn tương tự, từ mô hình trạng thái (2.10a) của hệ ta cũng có:

$$\frac{dx}{dt}=f(\underline{x},\underline{u}) \quad \text{và} \quad \frac{d(x+\delta_x)}{dt}=\underline{f}(\underline{x}+\delta_x,\underline{u}+\delta_u)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\delta_x}{dt}=f(\underline{x}+\delta_x,\underline{u}+\delta_u)-f(\underline{x},\underline{u})=\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\underline{\delta}_x+\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}\underline{\delta}_u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\delta_x}{dt}-\frac{\partial f}{\partial x}\delta_x-\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}\underline{\delta}_u=0 \quad \Rightarrow \quad p^T\left(\frac{d\delta_x}{dt}-\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\delta_x-\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}\delta_u\right)=0 \tag{2.12}$$

trong đó $\underline{p}\in\mathbb{R}^n$ là một vector n chiều tuỳ ý, và

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}\end{pmatrix}$$

là các ma trận Jacobi của vector hàm $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$.

Kết hợp chung (2.11) và (2.12) lại với nhau ta đi đến:

$$0 \le \underline{\delta}_Q = \int_0^T \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{\delta}_x + \frac{\partial g}{\partial \underline{u}} \underline{\delta}_u + \underline{p}^T \left(\frac{d\underline{\delta}_x}{dt} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \underline{\delta}_x - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \underline{\delta}_u \right) \right] dt$$

và khi áp dụng công thức tích phân toàn phần, sẽ được:

$$0 \le \delta_Q = \underline{p}^T(T)\underline{\delta}_x(T) + \int_0^T \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \underline{u}} - \underline{p}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \right) \underline{\delta}_u - \left(\frac{d\underline{p}^T}{dt} + \underline{p}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} - \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \right) \underline{\delta}_x \right] dt \qquad (2.13a)$$

vì $\underline{\delta}_x(0)=\underline{0}$, do điểm đầu $\underline{x}_0$ là điểm xác định cho trước (hình 2.1).

Nhưng do vector $\underline{p}(t)$ là vector bất kỳ nên có thể chọn:

$$\frac{d\underline{p}^T}{dt} = -\underline{p}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \qquad \text{với điều kiện biên} \qquad \underline{p}^T(T)\underline{\delta}_x(T) = 0$$

Khi đó $\underline{p}(t)$ được gọi là vector *đồng trạng thái (costate)*, đồng thời bất đẳng thức (2.13a) trở thành:

$$0 \le \delta_Q = \int_0^T \left(\frac{\partial g}{\partial \underline{u}} - \underline{p}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \right) \underline{\delta}_u \, dt \qquad (2.13b)$$

Cuối cùng, sử dụng ký hiệu *hàm Hamilton*.

$$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p}) = \underline{p}^T \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) - g(\underline{x},\underline{u}) \qquad (2.14)$$

ta sẽ được *phương trình Euler-Lagrange* như sau:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \right)^T, \qquad \frac{d\underline{p}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right)^T \qquad \text{với} \qquad \underline{p}^T(T)\underline{\delta}_x(T) = 0 \qquad (2.15)$$

đồng thời, công thức biến phân bậc nhất hàm mục tiêu (2.13b) trở thành:

$$0 \le \underline{\delta}_Q = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} \underline{\delta}_u \, dt \, . \qquad (2.16)$$

Định lý 2.1 (điều kiện cần): Nếu $\underline{u}(t)$ là nghiệm của bài toán tối ưu động liên tục (2.10) có điểm đầu $\underline{x}_0$ và khoảng thời gian T cho trước thì nghiệm đó phải thỏa mãn:

$$\frac{\partial H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})}{\partial \underline{u}} = \underline{0}^T \qquad (2.17)$$

trong đó $H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})$ là hàm Hamilton xác định theo công thức (2.14) và vector $\underline{p}(t)$ là nghiệm của phương trình Euler–Lagrange (2.15) ứng với $\underline{u}(t)$, $\underline{x}(t)$ tối ưu.

Chứng minh:

Giả sử điều khẳng định trong định lý là sai, tức là $\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}$ không đồng nhất bằng không trong toàn bộ khoảng thời gian $0\le t<T$. Vậy thì khi chọn:

$$\underline{\delta}_u(t)=\varepsilon\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}\right)^T \quad \text{trong đó } \varepsilon \text{ là một số dương đủ nhỏ,}$$

sẽ có từ (2.16):

$$0\le \delta_Q=-\varepsilon\int_0^T\left|\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}\right|^2 dt<0$$

và đó là điều phi lý. ❐

Định lý 2.1 gợi ý cho ta *một* phương pháp tìm nghiệm $\underline{u}(t)$ tối ưu của bài toán (2.10) có điểm đầu $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ và khoảng thời gian T cố định, cho trước, bằng cách thực hiện lần lượt các bước sau

1) Lập hàm Hamilton (2.11).

2) Giải phương trình vi phân (2.17) để có quan hệ $\underline{u}(x,\underline{p})$.

3) Thay quan hệ $\underline{u}(x,p)$ tìm được vào (2.15) để được hệ phương trình vi phân cho các (vector) biến $\underline{x}$ và $\underline{p}$.

4) Giải hệ phương trình có từ bước 3) với các điều kiện biên $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$, và $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$ hoặc $\underline{p}^T(T)\underline{\delta}_x(T)=0$, để có nghiệm $\underline{x}(t)$ và $\underline{p}(t)$, trong đó:

   a) Nếu điểm cuối $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$ là tự do (hoặc bị ràng buộc), tức là khi có $\underline{\delta}_x(T)\neq\underline{0}$, thì phải có $\underline{p}(T)=\underline{0}$. Đây chính là bài toán tối ưu có điểm trạng thái đầu cố định, điểm trạng thái cuối tự do hoặc bị ràng buộc.

   b) Nếu cho trước điểm cuối $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$ thì $\underline{p}(T)$ là tùy ý, vì đã có $\underline{\delta}_x(T)=\underline{0}$. Đây chính là bài toán tối ưu có điểm đầu, cuối cố định và T cho trước.

5) Thay nghiệm $\underline{x}(t)$, $\underline{p}(t)$ tìm được ở bước 4) vào quan hệ $\underline{u}(x,\underline{p})$ đã có từ bước 2), hoặc trực tiếp vào mô hình (2.10a) của hệ thống để có nghiệm $\underline{u}(t)$ tối ưu.

Chú ý: Với điều kiện biên và các trường hợp của nó như ta đã bàn ở trên thì rõ ràng khi không biết trước chính xác điểm cuối $\underline{x}_T$ phương pháp biến phân chỉ áp dụng được nếu khoảng thời gian T đã được xác định và cho trước, có thể hoặc hữu hạn (*finite*), hoặc vô hạn (*infinite*). Nói cách khác, nó hoàn toàn không áp dụng được cho bài toán tối ưu khi mà ở đó khoảng thời gian T là không biết trước, chẳng hạn như cho bài toán tối ưu tác động nhanh.

Ví dụ 2.2 ([6]): (Minh họa phương pháp biến phân, trường hợp tổng quát)

Cho hệ có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u. \qquad (2.18)$$

Hãy tìm $u^*(t)$ đưa hệ đi từ điểm đầu $x(0)=4$ đến điểm cuối $x(4)=0$ và làm cho:

$$Q(x,u) = \int_0^4 \left(x^2 + u^2\right)dt \rightarrow \min.$$

Như vậy, đây là bài toán tối ưu động, liên tục, không ràng buộc, có điểm đầu, cuối cố định và khoảng thời gian $T=4$ là cho trước.

Để giải bài toán ta áp dụng phương pháp biến phân với các bước như sau:

Lập hàm Hamilton: $H(x,u,p) = p\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u\right) - x^2 - u^2$

- Xác định quan hệ $\underline{u}(x,p)$ từ $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ được $u = \frac{1}{4}p$.

- Thay quan hệ tìm được vào (2.15) ta thu được hệ phương trình:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

- Giải hệ phương trình vi phân trên được

$$\begin{cases} x = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \\ p = k_3 e^{s_1 t} + k_4 e^{s_2 t} \end{cases}$$

trong đó s_1, s_2 là những giá trị riêng của ma trận A, tức là nghiệm của:

$$\det(sI - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Các hệ số k_1, k_2 được xác định từ điều kiện biên $x(0)=4$, $x(4)=0$ như sau:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 4 \\ k_1 e^{2\sqrt{2}} + k_2 e^{-2\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = -0{,}014 \\ k_2 = 4{,}014 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -0.014\, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} + 4.014\, e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

- Thay nghiệm $\underline{x}(t)$ tìm được vào mô hình (2.18) của hệ sẽ được $\underline{u}(t)$ tối ưu:

$$u(t) = -0{,}034\, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} - 1{,}663\, e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}.$$

❐

2.2.2 Phương trình vi phân Riccati và bộ điều khiển tối ưu không dừng cho đối tượng tuyến tính (trường hợp thời gian hữu hạn)

Phát biểu bài toán và tìm nghiệm nhờ phương pháp biến phân

Cho đối tượng tuyến tính tham số hằng, mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x}+B\underline{u},\qquad \underline{x}_0=\underline{x}(0),\qquad \text{thời gian } T \text{ hữu hạn, cho trước.} \tag{2.19a}$$

Nhiệm vụ đặt ra là xác định (vector) tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ tối ưu, không bị ràng buộc bởi U, để đưa đối tượng (2.19a) đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ cho trước tới một điểm trạng thái $\underline{x}_T$ bất kỳ nào đó của không gian trạng thái $\mathbb{R}^n$ trong khoảng thời gian hữu hạn T xác định và cho trước, sao cho trong quá trình chuyển đổi trạng thái đó, chi phí tính theo (phiếm) hàm mục tiêu:

$$Q(\underline{x},\underline{u})=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\underline{x}^T C\underline{x}+\underline{u}^T D\underline{u}\right)dt \tag{2.19b}$$

đạt giá trị nhỏ nhất là Q_{min}.

Bài toán trên có những đặc điểm sau:

- Là bài toán không ràng buộc (*uncontrained*), có điểm đầu $\underline{x}_0$ cố định, cho trước, điểm cuối $\underline{x}_T$ tùy ý và khoảng thời gian T là xác định và cho trước. Đây là trường hợp riêng của bài toán có điểm cuối bị ràng buộc bởi S_T. Ta có thể thấy trong thực tế nhiều bài toán tối ưu có điểm cuối $\underline{x}_T$ tùy ý, chẳng hạn như bài toán bắn tên lửa đi được xa nhất.
- Để hàm mục tiêu (2.19b) có giá trị nhỏ nhất (hữu hạn) thì cần thiết $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ phải là ma trận *xác định bán dương* và $D\in\mathbb{R}^{m\times m}$ là ma trận *xác định dương*. Không mất tính tổng quát, ta có thể cho rằng C,D là hai *ma trận đối xứng*, vì nếu điều đó không xảy ra, ta có thể thay hàm mục tiêu (2.19b) bằng hàm mục tiêu khác tương đương như sau:

$$\widetilde{Q}=2Q=(Q^T+Q)=\frac{1}{2}\int_0^T\Big[\underline{x}^T\underbrace{(C^T+C)}_{\widetilde{C}}\underline{x}+\underline{u}^T\underbrace{(D^T+D)}_{\widetilde{D}}\underline{u}\Big]dt \tag{2.19c}$$

  mà không làm thay đổi bản chất của bài toán, trong đó rõ ràng $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ lại là hai ma trận đối xứng.

Để áp dụng phương pháp biến phân, trước hết ta lập hàm Hamilton theo (2.11):

$$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})=\underline{p}^T(A\underline{x}+B\underline{u})-\frac{1}{2}(\underline{x}^T C\underline{x}+\underline{u}^T D\underline{u})$$

sau đó sử dụng định lý 2.1, mà cụ thể là công thức (2.17), sẽ được:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0}^T \qquad \Leftrightarrow \qquad B^T \underline{p} - D\underline{u} = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underline{u} = D^{-1} B^T \underline{p} \tag{2.20}$$

Kết hợp (2.20) với hệ phương trình vi phân (2.15) ta đi đến:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & BD^{-1}B^T \\ C & -A^T \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{pmatrix} \tag{2.21a}$$

và hệ phương trình vi phân tham số hằng này có nghiệm:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{p}(t) \end{pmatrix} = e^{M(t-T)} \begin{pmatrix} \underline{x}_T \\ \underline{p}(T) \end{pmatrix} = e^{M(t-T)} \begin{pmatrix} \underline{x}_T \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{11}(t) & E_{12}(t) \\ E_{21}(t) & E_{22}(t) \end{pmatrix}}_{e^{M(t-T)}} \begin{pmatrix} \underline{x}_T \\ \underline{0} \end{pmatrix} \tag{2.21b}$$

vì $\underline{p}(T) = \underline{0}$, do bài toán có điểm cuối không cố định (ràng buộc).

Suy ra:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = E_{11}(t)\underline{x}_T \\ \underline{p}(t) = E_{21}(t)\underline{x}_T \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{p}(t) = \underbrace{E_{21}(t)E_{11}^{-1}(t)}_{K(t)}\underline{x}(t) \tag{2.21c}$$

Nói cách khác, giữa $\underline{p}(t)$ và $\underline{x}(t)$ có quan hệ tuyến tính (không dừng):

$$\underline{p}(t) = K(t)\underline{x}(t) \tag{2.22a}$$

Cuối cùng, thay (2.22a) vào (2.20) ta có được tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ tối ưu:

$$\underline{u} = D^{-1} B^T K(t)\underline{x} \tag{2.22b}$$

trong đó ma trận $K(t)$ là còn cần phải được xác định.

Tìm nghiệm tối ưu từ phương trình vi phân Riccati

Theo (2.22b) thì để có $\underline{u}(t)$ tối ưu, phải có $K(t)$. Tất nhiên ma trận $K(t)$ có thể được xác định từ $e^{M(t-T)}$ theo các công thức (2.21b) và (2.21c). Tuy nhiên, đơn giản hơn cả vẫn là xác định $K(t)$ từ phương trình vi phân Riccati được trình bày sau đây.

Trước hết ta đạo hàm hai vế của (2.21c) theo t rồi thay mô hình đối tượng (2.19a) và các quan hệ (2.22a), (2.22b) vào kết quả thu được sẽ có:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{dK}{dt}\underline{x} + K\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{dK}{dt}\underline{x} + K(A\underline{x} + BD^{-1}B^T\underline{p}) = (\frac{dK}{dt} + KA + KBD^{-1}B^TK)\underline{x}$$

Tiếp theo, ta so sánh với (2.21a) sẽ đi đến:

$$C\underline{x} - A^T\underline{p} = \left(\frac{dK}{dt} + KA + KBD^{-1}B^TK\right)\underline{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (C - A^TK)\underline{x} = \left(\frac{dK}{dt} + KA + KBD^{-1}B^TK\right)\underline{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad C - A^TK = \frac{dK}{dt} + KA + KBD^{-1}B^TK$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dK}{dt} = C - A^TK - KA - KBD^{-1}B^TK \qquad (2.23)$$

Phương trình (2.23) trên có tên là *phương trình vi phân Riccati*. Nhưng vì phương trình vi phân Riccati (2.23) là phi tuyến, có nhiều nghiệm, nên để xác định được chính xác nghiệm nào thỏa mãn bài toán tối ưu, ta cần phải khảo sát tiếp những tính chất cơ bản phải có của ma trận $K(t)$.

Định lý 2.3: Ma trận $K(t)$ của bài toán tối ưu có các tính chất sau:

a) $K(T)=\Theta$, trong đó Θ là ký hiệu chỉ ma trận có tất cả các phần tử bằng 0.

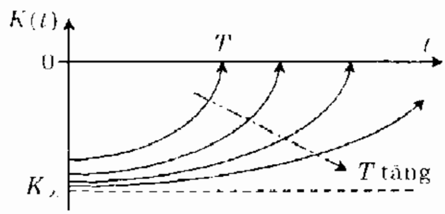
b) $K(t)$ phụ thuộc T và khi $T\to\infty$ thì $K(t)\to K_\infty$ là một ma trận hằng (hình 2.5).

c) $K(t)$ không phụ thuộc $\underline{x}_0$.

d) $K(t)$ là ma trận đối xứng.

e) $-\frac{1}{2}\underline{x}_0^T K(0)\underline{x}_0 = Q_{\min}$ (giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu).

f) $K(0)$ là ma trận xác định bán âm.



Hình 2.5: Minh họa nội dung định lý 2.3.

Chứng minh:

a) Điều khẳng định này được suy ra ngay từ (2.22a) và $\underline{p}(T)=\underline{0}$.

b) Vì $K(t)$ được tính từ $e^{M(t-T)}$ theo các công thức (2.21b), (2.21c) và ma trận $e^{M(t-T)}$ phụ thuộc T nên hiển nhiên $K(t)$ cũng phụ thuộc T. Khi $T\to\infty$, tức là khi T vô cùng lớn sẽ có $T\pm\Delta t=T$ với mọi Δt hữu hạn, hay $e^{M(t-T)}=e^{M(t+\Delta t-T)}$ và ma trận $e^{M(t-T)}$ trở thành ma trận không phụ thuộc t, nói cách khác $e^{M(t-T)}$ trở thành ma trận hằng. Suy ra $K(t)$ với $T\to\infty$ cũng là ma trận hằng. Hình 2.5 minh họa hiện tượng này của $K(t)$.

c) Do $e^{M(t-T)}$ không phụ thuộc $\underline{x}_0$ nên $K(t)$ cũng không phụ thuộc $\underline{x}_0$.

d) Chuyển vị cả hai vế của phương trình vi phân Riccati (2.23) và do C, D là hai ma trận đối xứng, ta sẽ có:

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)^T = (C-A^TK-KA-KBD^{-1}B^TK)^T$$
$$= C^T-K^TA-KA^T-K^TB(D^{-1})^TB^TK^T$$
$$= C^T-K^TA-KA^T-K^TB^T(D^T)^{-1}BK^T$$
$$= C-K^TA-KA^T-K^TBD^{-1}B^TK^T$$

Điều này chỉ rằng $K(t)$ và $K^T(t)$ đều là nghiệm của (2.23) nên $K(t)$ phải là ma trận đối xứng.

e) Trước hết ta biến phần tín hiệu tối ưu (2.22b) thành

$$\tilde{\underline{u}}(t) = \underline{u}(t)+\underline{v}(t) = -D^{-1}B^TK(t)\tilde{\underline{x}}+\underline{v}(t)$$

với $\tilde{\underline{x}}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tương ứng của hệ (2.19a) cũng đi từ $\underline{x}_0$, tức là:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = [A+BD^{-1}B^TK(t)]\tilde{\underline{x}}+B\underline{v} \quad \text{và} \quad \tilde{\underline{x}}(0)=\underline{x}_0$$

Thay vào hàm mục tiêu (2.19b) sẽ được nhờ tích phân toàn phần:

$$Q(\tilde{x},\tilde{u}) = -\frac{1}{2}x_0^TK(0)x_0+\frac{1}{2}\int_0^T v^TDvdt +$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T \tilde{\underline{x}}^T\left[\frac{dK}{dt}-A^TK-KA-KBD^{-1}B^TK-C\right]\tilde{\underline{x}}dt$$
$$= -\frac{1}{2}x_0^TK(0)x_0+\frac{1}{2}\int_0^T v^TDvdt$$

Hiển nhiên, khi $\underline{v}(t)=\underline{0}$ thì $\tilde{\underline{u}}(t)=\underline{u}(t)$ và $Q(\tilde{\underline{x}},\tilde{\underline{u}})=Q(x,u)=Q_{min}$. Suy ra:

$$Q_{min} = -\frac{1}{2}x_0^TK(0)x_0 \tag{2.24}$$

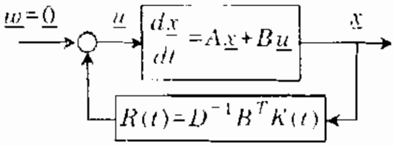
f) Do C xác định bán dương, D xác định dương nên $Q(\underline{x},\underline{u})=Q_{min}\geq 0$ và điều này không phụ thuộc điểm xuất phát $\underline{x}_0$. Bởi vậy, từ công thức (2.24), ma trận $K(0)$ phải xác định bán âm. □

Thiết kế bộ điều khiển tối ưu, phản hồi trạng thái, không dừng

Công thức (2.22b) cho thấy tín hiệu tối ưu $\underline{u}(t)$ có thể được tạo ra từ trạng thái $\underline{x}(t)$ thông qua bộ điều khiển phản hồi trạng thái không dừng (hình 2.6):

$$R(t)=D^{-1}B^{T}K(t). \tag{2.25}$$

Tất nhiên rằng bộ điều khiển này chỉ tạo ra được chất lượng tối ưu cho hệ thống trong khoảng thời gian $0\le t\le T$.



Hình 2.6: Bộ điều khiển phản hồi (dương) trạng thái không dừng tối ưu.

Từ phương trình vi phân Riccati (2.23) và nội dung định lý 2.3, bộ điều khiển tối ưu không dừng (2.25), làm việc theo nguyên tắc phản hồi dương trạng thái, đưa đối tượng tuyến tính (2.19a) đi từ điểm đầu $\underline{x}_0$ bất kỳ, nhưng cho trước tới điểm cuối $\underline{x}_T$ tùy ý, với khoảng thời gian T cố định, cho trước, sao cho hàm mục tiêu (2.19b) đạt giá trị nhỏ nhất Q_{min}, sẽ được thiết kế với hai bước như sau:

1) Giải phương trình vi phân Riccati (2.23) với điều kiện biên $K(T)=\Theta$. Chọn lấy nghiệm có $K(0)$ xác định bán âm.
2) Thay nghiệm $K(t)$ tìm được vào (2.25) để có bộ điều khiển $R(t)$.

Ví dụ 2.3: (Thiết kế bộ điều khiển tối ưu không dừng)

Xét bài toán tối ưu không ràng buộc:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x+u\ , \quad \underline{x}_0=1\ , \quad T=1\ , \quad x_T \ \text{ tùy ý} \\ Q(x,u)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\left(0{,}75x^2+0{,}25u^2\right)dt \to \min \end{cases}$$

Bài toán tối ưu này với $A=-1$, $B=1$, $C=0{,}75$, $D=0{,}25$ có phương trình vi phân Riccati (2.23) như sau:

$$\frac{dK}{dt}=0{,}75+2K-4K^2=1-4(K-0{,}25)^2.$$

Đặt $\widetilde{K}=K-0.25$ thì

$$-0{,}25\frac{d\widetilde{K}}{dt}=\widetilde{K}^2-0{,}25=(\widetilde{K}-0{,}5)(\widetilde{K}+0{,}5)$$

Điều này dẫn đến:

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{\widetilde{K}-0.5}{\widetilde{K}+0.5}=\frac{d\widetilde{K}}{dt}\left(\frac{1}{\widetilde{K}-0.5}-\frac{1}{\widetilde{K}+0{,}5}\right)=-4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\widetilde{K}-0{,}5}{\widetilde{K}+0{,}5}=\underbrace{ke^{-4t}}_{\lambda(t)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tilde{K} = \frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)} \quad \Leftrightarrow \quad K = \tilde{K} + 0{,}25 = \frac{3+\lambda}{4(1-\lambda)}$$

trong đó hằng số k và hàm $\lambda(t)$ được xác định từ điều kiện $K(1)=0$ hay $\tilde{K}(1)=-0{,}25$ như sau:

$$k=-3e^{-4} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda(t) = -3e^{4(t-1)}$$

Suy ra

$$K = \frac{3-3e^{4(t-1)}}{4+12e^{4(t-1)}}$$

Vậy bộ điều khiển tối ưu không dừng của đối tượng là:

$$R(t) = 4K(t) = \frac{3-3e^{-4(t-1)}}{1+3e^{-4(t-1)}}.$$

Ngoài ra, ta còn thấy với $0\le t\le 1$ có $K(t)\le 0$. Điều này xác nhận khẳng định f) của định lý 2.3 rằng $K(0)$ là số (ma trận xác định) không dương. □

2.2.3 Phương trình đại số Riccati và bộ điều khiển tối ưu tĩnh, phản hồi trạng thái cho đối tượng tuyến tính (trường hợp thời gian vô hạn)

Phát biểu bài toán

Giống như ở mục 2.2.2, ở đây ta cũng xét bài toán điều khiển tối ưu cho đối tượng tuyến tính, tham số hằng:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}+B\underline{u} & (2.26a) \\ Q(\underline{x},\underline{u}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\underline{x}^TC\underline{x}+\underline{u}^TD\underline{u}\right)dt \;\to\; \min & (2.26b) \end{cases}$$

trong đó ma trận C là xác định bán dương, ma trận D là xác định dương và không mất tính tổng quát, cả hai ma trận được giả thiết là đối xứng.

Điểm khác so với bài toán (1.19) đã xét ở mục trước, là ở đây, trong bài toán (2.26) vừa nêu ra này, khoảng thời gian T xảy ra quá trình tối ưu là vô cùng lớn ($T=\infty$). Nói cách khác, nhiệm vụ đặt ra ở đây là xác định (vector) tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ tối ưu, không bị ràng buộc bởi U, để đưa đối tượng (2.26a) đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ tùy ý, nhưng cho trước, tới một điểm trạng thái $\underline{x}_\infty$ bất kỳ nào đó của không gian trạng thái $\mathbb{R}^n$ trong khoảng thời gian vô cùng lớn ($T=\infty$), sao cho trong quá trình chuyển đổi trạng thái đó, chi phí tính theo (phiếm) hàm mục tiêu (2.26b) đạt giá trị nhỏ nhất là Q_{min}.

Lời giải của bài toán - Bộ điều khiển tối ưu phản hồi dương

Điểm khác biệt $T=\infty$ duy nhất của bài toán (2.26) so với bài toán (2.19) cùng với những kết quả đã có của bài toán (2.19), nhất là nội dung định lý 2.3, đã đưa đến các kết luận sau về lời giải của bài toán (2.26):

1) Nghiệm tối ưu $\underline{u}(t)$ của bài toán (2.26) có dạng:

$$\underline{u}=D^{-1}B^TK_\infty\underline{x} \tag{2.27}$$

trong đó $K_\infty=\lim\limits_{T\to\infty}K(t)$ là ma trận hằng, đối xứng và xác định bán âm.

2) Từ phương trình vi phân Riccati (2.23) với $\frac{dK_\infty}{dt}=\Theta$, ta suy ra được ma trận hằng K_∞ phải là *nghiệm xác định bán âm* của *phương trình đại số Riccati*:

$$K_\infty BD^{-1}B^TK_\infty+A^TK_\infty+K_\infty A=C \tag{2.28}$$

3) Với tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ xác định theo (2.27), (2.28), hàm mục tiêu sẽ đạt giá trị nhỏ nhất Q_{min} và giá trị đó được tính bằng:

$$Q_{min}=\frac{1}{2}\underline{x}_0^TK_\infty\underline{x}_0 \tag{2.29}$$

4) Tín hiệu điều khiển tối ưu (2.27) có thể được tạo ra bằng bộ điều khiển tĩnh R, phản hồi dương trạng thái, gọi là bộ điều khiển LQR (*linear quadratic regulator*):

$$R=D^{-1}B^TK_\infty \tag{2.30}$$

Khi đó hệ kín gồm đối tượng (2.26a) và bộ điều khiển (2.30) sẽ có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=(A+BR)\underline{x}+B\underline{u} \tag{2.31}$$

5) Tuy rằng điểm cuối $\underline{x}_\infty$ là bất kỳ, song để hàm mục tiêu $Q(\underline{x},\underline{u})$ có giá trị hữu hạn Q_{min} thì hàm dưới dấu tích phân của nó phải thỏa mãn:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\underline{x}^TC\underline{x}+\underline{u}^TD\underline{u}\right)=0$$

tức là hai giá trị $\underline{x}_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}\underline{x}(t)$ và $\underline{u}_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}\underline{u}(t)$ phải thỏa mãn:

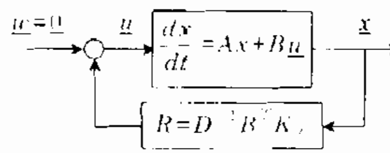
$$\underline{x}_\infty^TC\underline{x}_\infty=0 \quad \text{và} \quad \underline{u}_\infty^TD\underline{u}_\infty=0.$$

Nhưng vì C xác định bán dương, D xác định dương, nên cuối cùng, cần phải có:

a) $\underline{u}_\infty=\underline{0}$.

b) $\underline{x}_\infty$ phải là điểm cân bằng của hệ kín (2.31) và thỏa mãn $\underline{x}_\infty^TC\underline{x}_\infty=0$. Như vậy, chắc chắn sẽ có $\underline{x}_\infty=\underline{0}$ nếu $(A+BR)$ không suy biến hoặc C xác định dương.

c) Khi C xác định dương hoặc ma trận $(A+BR)$ không suy biến thì do chắc chắn có $\underline{x}_\infty=\underline{0}$ với mọi $\underline{x}_0$ nên bộ điều khiển tối ưu R sẽ làm ổn định hệ kín (2.31). Nói cách khác, khi bị nhiễu tức thời đánh bật ra khỏi điểm cân bằng gốc tọa độ $\underline{0}$, thì bộ điều khiển R sẽ đưa hệ quay trở lại về $\underline{0}$ và hơn thế, chi phí cho quá trình quay về đó tính theo (2.26b) là nhỏ nhất.



Hình 2.7: Bộ điều khiển tối ưu tĩnh, phản hồi (dương) trạng thái

Ví dụ 2.4: (Thiết kế bộ điều khiển tĩnh, tối ưu, phản hồi dương)

Cho đối tượng có mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u$$

và hàm mục tiêu:

$$Q=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\underline{x}^T\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\underline{x}+u^2\right]dt\ \to \min$$

Như vậy thì

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\ \text{và}\ \ D=1$$

Do đối tượng có 2 biến trạng thái $(n=2)$ nên nghiệm K_∞ của phương trình đại số Riccati (2.28) phải là ma trận 2×2. Ngoài ra, vì K_∞ là ma trận đối xứng giống như C,D nên nó có dạng $K_\infty=\begin{pmatrix}k_1 & k_3\\ k_3 & k_2\end{pmatrix}$. Thay các giá trị A,B,C,D và K_∞ vào (2.28) ta được:

$$\begin{pmatrix}k_1^2 & k_1k_3\\ k_1k_3 & k_3^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_3 & k_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_3 & 0\\ k_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}k_1^2+2k_3-5=0\\ k_3^2-4=0\\ k_1k_3+k_2=0\end{cases}$$

Hệ phương trình trên có các nghiệm sau:

a) $k_3=2$; $k_1=1$; $k_2=-2$.

b) $k_3=2$; $k_1=-1$; $k_2=2$.

c) $k_3=-2$; $k_1=3$; $k_2=6$.

d) $k_3=-2$; $k_1=-3$; $k_2=-6$.

trong đó chỉ có nghiệm d) mới làm cho K_x xác định bán âm, tức là ma trận có giá trị riêng với phần thực không dương. Bởi vậy:

$$K_x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

và bộ điều khiển tối ưu, phản hồi dương sẽ là:

$$R = D^{-1} B^T K_x = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = -(3 \quad 2). \qquad \square$$

Bộ điều khiển tối ưu phản hồi âm

Phương pháp xác định bộ điều khiển tối ưu tĩnh, phản hồi (2.30) với ma trận K_x là nghiệm xác định bán âm của phương trình đại số Riccati (2.28) cũng áp dụng được khi bộ điều khiển là phản hồi âm, bằng cách trong phương trình đại số Riccati (2.28) ta thay K_x bởi $K_x = -L_x$. Khi đó ta sẽ đi đến các bước thiết kế như sau:

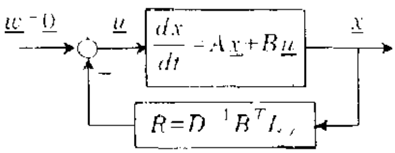
1) Tìm nghiệm L_x xác định bán dương của phương trình đại số Riccati:

$$L_x B D^{-1} B^T L_x - A^T L_x - L_x A = C \tag{2.32}$$

2) Xác định bộ điều khiển phản hồi âm, cũng được gọi là bộ điều khiển LQR (*linear quadratic regulator*):

$$R = D^{-1} B^T L_x \tag{2.33}$$

Chú ý: Giống như ở trường hợp phản hồi dương, nếu C xác định dương hoặc ma trận $(A - BR)$ của hệ kín (hình 2.8) không suy biến thì chắc chắn điểm trạng thái cuối sẽ là $\underline{x}_T = \underline{0}$ với mọi x_0, và do đó bộ điều khiển tối ưu (2.33) sẽ làm hệ kín ổn định



Hình 2.8: Bộ điều khiển tối ưu, tĩnh, phản hồi (âm) trạng thái.

Ví dụ 2.5: (Thiết kế bộ điều khiển tĩnh, tối ưu, phản hồi âm)

Cho bài toán tối ưu,

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad \text{và} \qquad Q(\underline{x}, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(16 x_2^2 + u^2 \right) dt$$

Như vậy, bài toán này có:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}\ \text{ và }\ D=1$$

Thay các giá trị trên, và ma trận $L_x=\begin{pmatrix}l_1 & l_3\\ l_3 & l_2\end{pmatrix}$ vào phương trình Riccati (2.32):

$$\begin{pmatrix}l_1 & l_3\\ l_3 & l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(1\quad 0)\begin{pmatrix}l_1 & l_3\\ l_3 & l_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1 & l_3\\ l_3 & l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1 & l_3\\ l_3 & l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$$

ta đi đến:

$$\begin{cases}l_1^2-2l_3=0\\ l_1(l_3-3)-l_2=0\\ l_3^2-6l_3=16\end{cases}$$

Hệ phương trình trên có bốn nghiệm, song chỉ có nghiệm

$$\begin{cases}l_1=4\\ l_2=20\\ l_3=8\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad L_x=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 8 & 20\end{pmatrix}$$

là xác định bán dương (có các giá trị riêng với phần thực không âm). Vậy bộ điều khiển cần tìm là:

$$R=D^{-1}B^TL_x=(1\quad 0)\begin{pmatrix}4 & 8\\ 8 & 20\end{pmatrix}=(4\quad 8).$$ ❐

2.2.4 Một số kết luận bổ sung, rút ra được từ phương pháp biến phân

Quay lại bài toán tổng quát (2.10) của phương pháp biến phân:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u}),\quad \underline{x}_0=\underline{x}(0),\ T \text{ cho trước, điểm cuối } \underline{x}_T=\underline{x}(T) \text{ là tự do} & (2.34a)\\ Q(\underline{x},\underline{u})=\displaystyle\int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt\ \to \min & (2.34b)\end{cases}$$

trong đó khoảng thời gian T xảy ra quá trình tối ưu có thể là *hữu hạn hoặc vô hạn*, nhưng là một giá trị cho trước.

Phương pháp biến phân (định lý 2.1) đã chỉ rằng nghiệm $\underline{u}(t)$ tối ưu của bài toán phải thỏa mãn:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}=\underline{0}^T,\tag{2.35a}$$

với

$$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})=\underline{p}^T\underline{f}(\underline{x},\underline{u})-g(\underline{x},\underline{u})\tag{2.35b}$$

và vector $\underline{p}$ là biến đồng trạng thái của (2.134), tức là nghiệm của phương trình Euler Lagrange:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T \tag{2.36}$$

thỏa mãn điều kiện biên

$$\underline{p}(T) = 0 \tag{2.37}$$

Sau đây ta sẽ đưa ra thêm một số kết luận bổ sung cho bài toán tối ưu trên, rút ra được từ các quan hệ (2.35) ÷ (2.37).

Phương trình xác định tín hiệu điều khiển tối ưu

Xuất phát từ

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = \underline{p}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} - \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} = \underline{p}^T F - \frac{\partial g}{\partial \underline{x}},$$

trong đó F là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi thứ nhất của vector $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$:

$$F = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ta sẽ có với (2.36):

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -F^T \underline{p} + \left(\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}\right)^T \tag{2.38}$$

và đó là phương trình vi phân xác định vector biến đồng trạng thái $\underline{p}(t)$.

Tương tự, từ:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{p}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} - \frac{\partial g}{\partial \underline{u}} = \underline{p}^T G - \frac{\partial g}{\partial \underline{u}},$$

trong đó G là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi thứ hai của vector $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$:

$$G = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

ta sẽ có với (2.35a):

$$\underline{p}^T G - \frac{\partial g}{\partial \underline{u}} = \underline{0}^T \tag{2.39}$$

Hai công thức (2.38) và (2.39) tạo thành thuật toán xác định tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ tối ưu với các bước như sau:

1) Giải phương trình vi phân (2.38) để có nghiệm $\underline{p}(t)$ thỏa mãn điều kiện biên (2.37).

2) Thay nghiệm $\underline{p}(t)$ tìm được vào phương trình đại số (2.39) để xác định $\underline{u}(t)$ tối ưu.

Bàn thêm về hàm Hamilton

Trước hết, ta sẽ gọi *hàm Hamilton tối ưu* là giá trị của hàm Hamilton (2.35b) khi mà các đối số quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$, tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ và vector biến đồng trạng thái $\underline{p}(t)$ đều là tối ưu.

Từ (2.35a) ta có với hàm Hamilton tối ưu:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \underline{u}}\frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\frac{d\underline{p}}{dt}$$

và khi kết hợp với phương trình Euler–Lagrange (2.15) sẽ được:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\right)^T + \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T = 0 \tag{2.40}$$

Điều này chỉ rằng hàm Hamilton tối ưu là một hằng số trong khoảng $0 \le t \le T$.

Tiếp tục, nếu giả thiết thêm rằng hàm $g(\underline{x},\underline{u})$ trong phiếm hàm mục tiêu (2.34b) không phụ thuộc $\underline{x}$, tức là:

$$g(\underline{x},\underline{u}) = g(\underline{u})$$

thì ở bài toán có điểm cuối $\underline{x}_T$ không cố định, sẽ có:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\underline{p} \quad \text{và} \quad \underline{p}(T) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{p}(t) = \underline{0} \quad \text{với mọi} \quad 0 \le t \le T$$

Suy ra:

Định lý 2.4: Hàm Hamilton thỏa mãn:

a) Nếu $\underline{x}(t)$, $\underline{u}(t)$, $\underline{p}(t)$ đều là tối ưu thì $H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})$ = hằng số khi $0 \le t \le T$.

b) Nếu $g(\underline{x},\underline{u}) = g(\underline{u})$ thì khi điểm cuối $\underline{x}_T$ là không cố định, điều kiện cần (2.17) sẽ được thay bằng: $\frac{\partial g}{\partial \underline{u}} = \underline{0}^T$.

2.3 Nguyên lý cực đại

Thông qua mục 2.2 ta thấy để có thể áp dụng được phương pháp biến phân thì:

- Bài toán tối ưu động, liên tục, phải không có ràng buộc U cho vector các tín hiệu điều khiển (*unconstrained*), hoặc nếu có ràng buộc U thì U phải là tập hở.
- Phải biết trước khoảng thời gian T xảy ra quá trình tối ưu. Nó có thể hữu hạn (*finite time*) hoặc vô hạn (*infinite time*), nhưng phải cho trước.

Như vậy, phương pháp biến phân không áp dụng được cho lớp các bài toán tối ưu động với miền U kín có nghiệm tối ưu $\underline{u}(t)$ nằm trên biên, hoặc cho các bài toán có T không xác định (cũng là biến tối ưu phải tìm) mà trường hợp này lại rất hay gặp, ngay cả ở những bài toán đơn giản như điều khiển tối ưu tác động nhanh.

Bù đắp cho sự khiếm khuyết trên của phương pháp biến phân là nguyên lý cực đại. Nó phục vụ việc tìm nghiệm $\underline{u}(t)$ của lớp các bài toán tối ưu có ràng buộc U kín hoặc có T không xác định. Ở đây, tên gọi *nguyên lý* (principle) mang hàm ý rằng nó mới chỉ nêu lên được các tính chất cơ bản phải có của tín hiệu điều khiển tối ưu chứ chưa phải hoàn toàn là một phương pháp xác định tín hiệu điều khiển tối ưu đó. Về xuất xứ ban đầu, nguyên lý cực đại được Pontryagin phát biểu vào năm 1956 dưới hình thức như một giả thiết [6], và sau đó đã được chứng minh bởi Boltjanski, Gamkrelidse và nhiều người khác. Chính vì lẽ đó mà nó có tên gọi là *nguyên lý cực đại Pontryagin*.

2.3.1 Điều khiển đối tượng nửa tuyến tính, đã biết trước điểm trạng thái đầu và khoảng thời gian xảy ra quá trình tối ưu

Ta hãy đi từ một bài toán tối ưu đơn giản cho đối tượng nửa tuyến tính:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x}+\underline{h}(\underline{u}) \quad \text{với} \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0 \quad \text{và} \quad \underline{u}\in U & (2.41a) \\ Q(\underline{x},\underline{u})=\displaystyle\int_0^T[\underbrace{\underline{a}^T\underline{x}+r(\underline{u})}_{g(\underline{x},\underline{u})}]dt \;\rightarrow\; \min & (2.41b) \end{cases}$$

trong đó U là một *tập con đóng* của $\mathbb{R}^m$, có điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ và khoảng thời gian T cho trước, còn điểm trạng thái cuối $\underline{x}_T$ là tùy ý (hoặc bị ràng buộc bởi S_T).

Cũng giống như ở phương pháp biến phân, ta định nghĩa:

- Hàm Hamilton: $$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p}) = \underline{p}^T\left[A\underline{x}+\underline{h}(\underline{u})\right]-[\underline{a}^T\underline{x}+r(\underline{u})] \quad (2.42a)$$
- Các biến đồng trạng thái: $$\frac{d\underline{x}}{dt}=\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\right)^T, \quad \frac{d\underline{p}}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T \quad (2.42b)$$

Do U là tập đóng nên ta không thể xác định $\underline{u}(t)$ tối ưu bằng điều kiện $\frac{\partial H}{\partial u}=\underline{0}^T$ và cũng không thể biến phân tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ thành $\underline{\tilde{u}}(t)=\underline{u}(t)+\delta_u$ mà không có điều kiện gì kèm theo cho $\underline{\delta}_u$. Để tránh dùng công thức biến phân, sau đây ta sẽ gọi $\tilde{u}(t)$ và $\underline{u}(t)$ là hai tín hiệu điều khiển nào đó thuộc U, cũng như $\tilde{x}(t)$ và $\underline{x}(t)$ là hai quỹ đạo trạng thái tương ứng cùng đi từ $\underline{x}_0$ do chúng mang lại cho đối tượng (2.41a). Trước hết, với công thức tích phân toàn phần ta có ngay được:

$$\int_0^T\left[\underline{p}^T\left(\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt}-\frac{d\underline{x}}{dt}\right)+\left(\frac{d\underline{p}}{dt}\right)^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})\right]dt-\underline{p}^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})\Big|_0^T=0$$

Nhưng vì có $\underline{\tilde{x}}(0)=\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ nên:

$$\underline{p}^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})\Big|_0^T=\underline{p}^T(T)\left[\underline{\tilde{x}}(T)-\underline{x}(T)\right]$$

Suy ra

$$\int_0^T\left[\underline{p}^T\left(\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt}-\frac{d\underline{x}}{dt}\right)+\left(\frac{d\underline{p}}{dt}\right)^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})\right]dt-\underline{p}^T(T)\left[\underline{\tilde{x}}(T)-\underline{x}(T)\right]=0 \tag{2.43}$$

Thay (2.41a) vào (2.43) được:

$$\int_0^T\left[\underline{p}^T\left[\underline{h}(\underline{\tilde{u}})-\underline{h}(\underline{u})\right]+\left(\frac{d\underline{p}}{dt}+A^T\underline{p}\right)^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})\right]dt-\underline{p}^T(T)\left[\underline{\tilde{x}}(T)-\underline{x}(T)\right]=0 \tag{2.44}$$

Mặt khác, ta lại có sau cùng khoảng thời gian T:

$$Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}})-Q(\underline{x},\underline{u})=\int_0^T\left[\underline{a}^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})+r(\underline{\tilde{u}})-r(\underline{u})\right]dt \tag{2.45}$$

Bởi vậy, sau khi trừ (2.44) cho (2.45) theo từng vế, sẽ đi đến:

$$\begin{aligned}Q(\underline{x},\underline{u})-Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}}) = &\int_0^T\left[\underline{p}^T\left[\underline{h}(\underline{\tilde{u}})-\underline{h}(\underline{u})\right]-r(\underline{\tilde{u}})+r(\underline{u})\right]dt+\\&+\int_0^T\left[\left(\frac{d\underline{p}}{dt}+A^T\underline{p}-\underline{a}\right)^T(\underline{\tilde{x}}-\underline{x})\right]dt-\underline{p}^T(T)\left[\underline{\tilde{x}}(T)-\underline{x}(T)\right]\end{aligned}$$

Tiếp tục, sử dụng quan hệ (2.42) với:

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T=-A^T\underline{p}+\underline{a} \tag{2.46}$$

cũng như chọn nghiệm $\underline{p}$ thỏa mãn điều kiện biên $\underline{p}(T)=\underline{0}$ của nó, ta sẽ được:

$$Q(\underline{x},\underline{u})-Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}})=\int_0^T\left[\underline{p}^T\left[\underline{h}(\underline{\tilde{u}})-\underline{h}(\underline{u})\right]-r(\underline{\tilde{u}})+r(\underline{u})\right]dt=\int_0^T\left[H(\underline{x},\underline{p},\underline{\tilde{u}})-H(\underline{x},\underline{p},\underline{u})\right]dt$$

Như vậy, nếu $\underline{u}(t)$ là tín hiệu điều khiển tối ưu thì do

$$Q(\underline{x},\underline{u})\le Q(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{u}}) \qquad \text{với mọi } \underline{\tilde{u}}(t)\in U$$

ta cũng phải có:

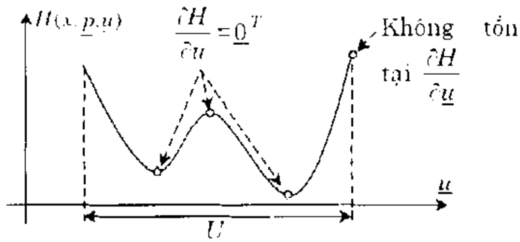
$$H(\underline{x},\underline{p},\underline{\tilde{u}})\le H(\underline{x},\underline{p},\underline{u}) \quad \text{với mọi } \underline{\tilde{u}}(t)\in U$$

Vậy:

Định lý 2.5: Nếu $\underline{u}(t)\in U$ là tín hiệu điều khiển tối ưu của bài toán (2.41) thì với nghiệm $\underline{p}(t)$ của (2.42b) thỏa mãn $\underline{p}(T)=\underline{0}$, ta phải có:

$$H(\underline{x},\underline{p},\underline{u})=\max_{\underline{\tilde{u}}\in U} H(\underline{x},\underline{p},\underline{\tilde{u}}) \tag{2.47}$$

Tính chất (2.47) được gọi là *nguyên lý cực đại*, phát biểu cho lớp bài toán (2.41). Ta có thể thấy, do bị ràng buộc bởi tập U, công thức biến phân $\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}=\underline{0}^T$ đã được thay thế bằng *nguyên lý cực đại* (2.47). Hơn nữa, nguyên lý cực đại (2.47) còn tổng quát hơn công thức biến phân, vì nếu nghiệm tối ưu $\underline{u}(t)$ là điểm trong của U thì từ nguyên lý cực đại (2.47) ta cũng suy ra được công thức biến phân (2.17), nhưng điều ngược lại thì không, chẳng hạn như trường hợp được minh họa ở hình 2.9 với nghiệm nằm trên biên.



Hình 2.9: Nguyên lý cực đại là trường hợp tổng quát của công thức biến phân.

Nguyên lý cực đại (2.47) gợi ý cho ta có thể tìm tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ cho bài toán (2.41) với những bước như sau:

1) Lập hàm Hamilton (2.42a).
2) Xác định quan hệ $\underline{u}(\underline{x},\underline{p})$ phải có của tín hiệu tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ từ nguyên lý cực đại (2.47).

3) Thay quan hệ tìm được vào phương trình Euler–Lagrange (2.42b) và giải các phương trình đó với những điều kiện biên $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$, $\underline{p}(T)=\underline{0}$ để có $\underline{x}(t)$, $\underline{p}(t)$.

4) Thay $\underline{x}(t)$, $\underline{p}(t)$ đã tìm được ở bước 3 vào quan hệ $u(x,p)$ đã có từ bước 2, hoặc vào mô hình (2.41a) của đối tượng để có nghiệm tối ưu $\underline{u}(t)$

Ví dụ 2.6: (Minh họa định lý 2.5)

Cho bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u, & \underline{x}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u|\le 1, \quad T=1 \\ Q(\underline{x},\underline{u})=\displaystyle\int_0^1 2x_1\,dt \;\rightarrow\; \min \end{cases}$$

Trước hết ta lập hàm Hamilton:

$$H(\underline{x},u,\underline{p})=\underline{p}^T\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u\right]-2x_1= p_1x_2+p_2u-2x_1$$

sau đó áp dụng nguyên lý cực đại (2.47) sẽ được:

$$u=\operatorname{sgn}(p_2)$$

trong đó $\underline{p}$ là nghiệm của

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=\begin{pmatrix} 2 \\ -p_1 \end{pmatrix} \quad \text{với điều kiện biên } \underline{p}(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad p_1(t)=2(t-1)\le 0 \quad \text{khi } 0\le t\le T=1, \qquad p_2(t)=-(t-1)^2\le 0$$

Vậy, tín hiệu điều khiển tối ưu của bài toán là:

$$u(t)=-1.$$

□

2.3.2 Điều khiển tối ưu tác động nhanh đối tượng tuyến tính

Trong toàn bộ các mục 2.2 và 2.3.1, khi đưa ra các phương pháp giải bài toán tối ưu động, ta đều phải giả thiết là đã biết khoảng thời gian T xảy ra quá trình tối ưu. Cho dù T hữu hạn hoặc vô hạn, nhưng nó phải được cho trước. Điều này đã hạn chế khả năng ứng dụng của các phương pháp đó cho lớp các bài toán có T cũng là biến tối ưu cần tìm.

Vượt lên trên các phương pháp đó, bao gồm phương pháp biến phân, và như sau này ta còn thấy, kể cả phương pháp quy hoạch động, là nguyên lý cực đại. Nó áp dụng được cho cả những bài toán có T là biến tối ưu, điển hình là bài toán tối ưu tác động nhanh (đối tượng tuyến tính) phát biểu dưới đây.

Cho đối tượng tuyến tính, tham số hằng, mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \tag{2.48a}$$

trong đó:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \tag{2.48b}$$

Hãy xác định tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ đưa đối tượng đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ cho trước, tới điểm trạng thái cuối $\underline{x}_T$ cũng cho trước, một cách nhanh nhất, tức là làm cho chi phí của quá trình chuyển đổi trạng thái đó, tính theo:

$$Q(\underline{x},\underline{u}) = \int_0^T dt \qquad \text{(hàm mục tiêu này có } g(\underline{x},\underline{u}) = 1\text{)} \tag{2.48c}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Mặc dù biến T xuất hiện trong (2.48c) song điều đó không có nghĩa là phải biết trước T. Nó sẽ được xác định từ điều kiện $\underline{x}(T) = \underline{x}_T$, trong đó $\underline{x}(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân (2.48a) thỏa mãn điều kiện đầu $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.

Định lý 2.6: Nếu $\underline{u}(t) \in U$ là tín hiệu điều khiển tối ưu của bài toán tối ưu tác động nhanh đối tượng tuyến tính (2.48) thì nó phải thỏa mãn:

$$H_R(\underline{x},\underline{p},\underline{u}) = \max_{\tilde{u} \in U} H_R(\underline{x},\underline{p},\tilde{\underline{u}}) \tag{2.49}$$

trong đó:

a) $H_R(\underline{x},\underline{p},\underline{u}) = \underline{p}^T (A\underline{x} + B\underline{u})$ là *hàm Hamilton rút gọn*. (2.50a)

b) $\dfrac{d\underline{p}}{dt} = -\left(\dfrac{\partial H_R}{\partial \underline{x}}\right)^T = A^T \underline{p}$ là biến đồng trạng thái. (2.50b)

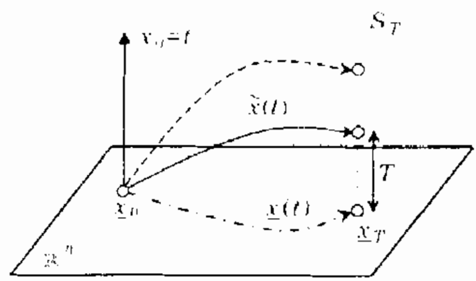
Chứng minh:

Để chứng minh nguyên lý cực đại (2.49) của bài toán (2.48), các tài liệu [1], [39] đã phải bỏ ra hầu một chương với khoảng trên 100 trang sách. Ở đây, chúng ta sẽ không nhắc lại lời chứng minh đồ sộ đó mà chỉ điểm qua những ý tưởng chính đã được sử dụng trong chứng minh của các tài liệu này.

Trước hết, ta ghép chung mô hình đối tượng (2.48a) cùng hàm mục tiêu (2.48c) thành một đối tượng mới, gọi là *đối tượng mở rộng*, bằng cách định nghĩa thêm biến trạng thái mới:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_0}{dt} = g(x,u) = 1 \\[2mm] \dfrac{dx}{dt} = Ax+Bu\end{cases} \qquad \text{với vector trạng thái mở rộng } \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \underline{x}\end{pmatrix} \tag{2.51a}$$

Như vậy đối tượng mở rộng này có không gian trạng thái $n+1$ chiều là $\mathbb{R}^{n+1}$. Không gian trạng thái mở rộng này được tạo từ không gian trạng thái $\mathbb{R}^n$ cũ của đối tượng (2.48a) và một trục mới được thêm vào là trục thời gian $x_0=t$ (hình 2.10).



Hình 2.10: Minh họa đối tượng mở rộng

Nhiệm vụ đặt ra là phải tìm tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ đưa đối tượng mở rộng (2.51a) đi từ điểm đầu $\tilde{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ \underline{x}_0\end{pmatrix}$ tới điểm cuối không cố định $\tilde{x}(\tilde{T})=\begin{pmatrix}\text{tuỳ ý}\\ \underline{x}_T\end{pmatrix}\in S_T$ (là một điểm nào đó trên trục S_T) trong khoảng thời gian $\tilde{T}$, được giả thiết là cố định và cho trước, sao cho tại điểm cuối, khoảng cách của quỹ đạo trạng thái $\tilde{x}(t)$ trên trục S_T tới không gian $\mathbb{R}^n$ là nhỏ nhất (hình 2.10), nói cách khác là tạo ra được:

$$\tilde{Q}(\tilde{\underline{x}},\underline{u}) = \int_0^{T} \dot{x}_0\,dt = \int_0^{\dot{T}} dt \;\to \min. \tag{2.51b}$$

Như vậy, bằng cách sử dụng mô hình đối tượng mở rộng (2.51) thông qua việc thêm biến trạng thái thời gian $x_0=t$, ta đã thực hiện được:

- chuyển bài toán có điểm cuối $\underline{x}_T$ cố định thành bài toán có điểm cuối $\tilde{\underline{x}}(\tilde{T})$ tự do, mà ở đây là thuộc tập S_T (hình 2.10).
- chuyển một cách hình thức bài toán có khoảng thời gian T tự do thành bài toán có khoảng thời gian $\tilde{T}$ cố định,

và do đó tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ của đối tượng mở rộng (2.51) phải thỏa mãn nguyên lý cực đại (2.47) đã phát biểu trong định lý 2.5.

Trước hết ta lập hàm Hamilton cho đối tượng mở rộng (2.51):

$$\tilde{H}(\tilde{\underline{x}},\tilde{\underline{p}},u)=\tilde{\underline{p}}^T\begin{pmatrix}1\\ A\underline{x}+Bu\end{pmatrix}-1 = p_0+\underbrace{\underline{p}^T(A\underline{x}+Bu)}_{H_R(\underline{x},\underline{p},u)}-1$$

trong đó $\tilde{\underline{p}}=\begin{pmatrix}p_0\\ \underline{p}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1}$ là vector biến đồng trạng thái của đối tượng mở rộng (2.51a), $\underline{p}\in\mathbb{R}^n$ là biến đồng trạng thái của đối tượng tuyến tính ban đầu (2.48a) đã cho.

Tiếp theo, ta áp dụng (2.17) cho tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ và để ý rằng $H_R(\underline{x},\underline{p},u)$ là thành phần duy nhất trong $\tilde{H}(\tilde{\underline{x}},\tilde{\underline{p}},u)$ có chứa $u(t)$, sẽ đi đến:

$$\underline{u}(t)=\arg\max_{\tilde{u}\in U}\tilde{H}(\tilde{\underline{x}},\tilde{\underline{p}},\tilde{\underline{u}})=\arg\max_{\tilde{u}\in U}H_R(\underline{x},\underline{p},\tilde{\underline{u}}) \qquad \text{(đ.p.c.m).}$$ ❐

Mặc dù chỉ là điều kiện cần, song định lý 2.6 vẫn thường được sử dụng như một gợi ý ban đầu giúp cho việc xác định tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh $\underline{u}(t)\in U$ của đối tượng tuyến tính (2.48a).

Xét riêng bài toán tối ưu tác động nhanh có giới hạn U dạng siêu diện (hình 2.11):

$$U=\{\ \underline{u}\in\mathbb{R}^m \mid u_i^-\le u_i\le u_i^+,\ i=1,2,\ldots,m\ \} \tag{2.52}$$

trong đó u_i^-,u_i^+, $i=1,2,\ldots,m$ là các hằng số. Khi đó, từ nguyên lý cực đại (2.49) với hàm Hamilton rút gọn (2.50a):

$$\begin{aligned}\underline{u}(t) &= \arg\max_{\tilde{u}\in U}H_R(\underline{x},\underline{p},\tilde{\underline{u}})=\arg\max_{\tilde{u}\in U}\underline{p}^T(A\underline{x}+B\tilde{\underline{u}})\\ &=\arg\max_{\tilde{u}\in U}(\underline{p}^TB\tilde{\underline{u}})\end{aligned}$$

ta đến ngay được tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$:

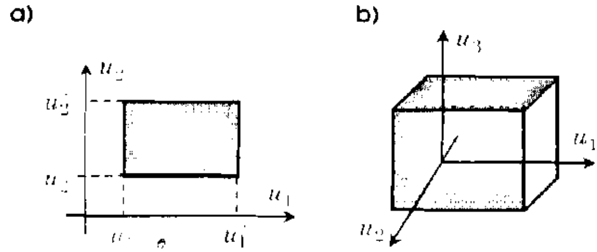
$$u_i(t)=\begin{cases}u_i^- & \text{nếu}\quad \underline{p}^T\underline{b}_i<0\\ u_i^+ & \text{nếu}\quad \underline{p}^T\underline{b}_i\ge 0\end{cases} \tag{2.53}$$

với $\underline{b}_i$ là vector cột thứ i của ma trận B, hay $B=(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ \ldots\ ,\underline{b}_m)$.

Suy ra:

Định lý 2.7: Nếu bài toán tối ưu tác động nhanh đối tượng tuyến tính (2.48) có giới hạn U là siêu diện (2.52) thì tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ sẽ có *dạng hằng số từng đoạn* và các *hằng số đó là những giá trị tại các đỉnh của siêu diện U*.

Tuy rằng định lý 2.7 chưa cung cấp được nhiều và cũng chưa đủ để có thể xác định được cụ thể tín hiệu điều khiển tối ưu, song đó cũng đã là một kết quả gợi ý quan trọng của nguyên lý cực đại giúp ta đi tiếp được các bước sau trong việc xác định tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ và quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ tương ứng cho bài toán tối ưu tác động nhanh đối tượng tuyến tính.



Hình 2.11 Mô tả siêu diện

Xây dựng quỹ đạo trạng thái tối ưu

Như đã nói ở trên, kết luận (2.53) của nguyên lý cực đại tuy rằng chưa đủ để xác định được cụ thể tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$, nhưng nó là một chỉ dẫn quan trọng để từ đó ta có thể xây dựng được quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$. Nhằm minh họa cho kết luận này, ta sẽ xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 2.7: (Điều khiển tối ưu tác động nhanh khâu tích phân bậc hai)

Cho đối tượng là khâu tích phân bậc hai có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

Để tìm tín hiệu điều khiển $u(t)$ thỏa mãn $|u|\le 1$ đưa đối tượng từ một điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ tùy ý, nhưng cho trước, về gốc tọa độ $\underline{x}_T=\underline{0}$ trong khoảng thời gian nhanh nhất, ta sẽ sử dụng định lý 2.6 như một gợi ý.

Bài toán tối ưu có hàm Hamilton (rút gọn) như sau:

$$H_R(\underline{x},\underline{p},u)=p_1x_2+p_2u$$

Do đó, theo nguyên lý cực đại (2.49), tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ chỉ có thể là:

$$u(t)=\operatorname{sgn}(p_2) \qquad (2.54a)$$

Để xác định được $u(t)$ tối ưu một cách cụ thể hơn nữa, ta cần đến $p_2(t)$. Sử dụng phương trình Euler Lagrange (2.50b) được:

$$\frac{dp_1}{dt}=0 \qquad \text{và} \qquad \frac{dp_2}{dt}=-p_1$$

$$\Leftrightarrow \qquad p_1(t)=k_1 \qquad \text{và} \qquad p_2(t)=k_2-k_1t \qquad (2.54b)$$

trong đó k_1, k_2 là hai hằng số. Tuy nhiên, ta chưa thể xác định được ngay ở đây hai hằng số này vì không có điều kiện biên cho vector đồng trạng thái $\underline{p}(t)$.

Thay (2.54b) vào (2.54a) có:

$$u(t)=\operatorname{sgn}(k_2-k_1t)=\begin{cases}1 & \text{nếu} \quad k_2>k_1t\\ -1 & \text{nếu} \quad k_2<k_1t\end{cases} \tag{2.54c}$$

Điều này cho thấy:

a) Tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ chỉ có giá trị hoặc -1 hoặc 1.

b) Tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ chỉ có thể đổi dấu nhiều nhất là một lần.

Sử dụng hai thông tin trên, ta hoàn toàn có thể xây dựng được quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$. Thay (2.54c) vào mô hình đối tượng thì:

- Nếu $u(t)=1$ có:

$$\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{t^2}{2}+c_2t+c_1\\ x_2(t)=t+c_2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{x_2^2}{2}+c \tag{2.55a}$$

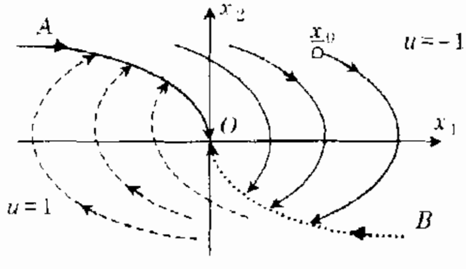
  trong đó c_1, c_2, c là các hằng số và những hằng số này xác định được từ điều kiện đầu cho trước $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$.

- Tương tự, nếu $u(t)=-1$ thì:

$$x_1=-\frac{x_2^2}{2}+c' \tag{2.55b}$$

  và hằng số c' cũng dễ dàng được xác định được từ $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$.

Như vậy quỹ đạo trạng thái tối ưu của đối tượng được mô tả bằng hai họ parabol (2.55a) và (2.55b). Hình 2.12 mô tả các parabol đó cho những giá trị c và c' khác nhau, trong đó những đường nét rời ứng với họ parabol (2.55a) và những đường nét liền ứng với họ parabol (2.55b). Chiều của các họ parabol này được xác định từ điều hiển nhiên là khi $\frac{dx_1}{dt}=x_2>0$ thì x_1 phải có xu hướng tăng và ngược lại khi $\frac{dx_1}{dt}=x_2<0$ thì x_1 phải có xu hướng giảm.



Hình 2.12: Minh họa ví dụ 2.7. Quỹ đạo pha tối ưu.

Mọi đoạn cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu đều phải nằm trên hai nửa đường parabol đi qua gốc và có chiều tiến về gốc tọa độ là AO và OB (hình 2.12). Hai nửa parabol này tạo thành đường cong AOB chia mặt phẳng pha (x_1, x_2) thành hai phần ứng với hai giá trị khác nhau của tín hiệu tối ưu $u(t)=\pm 1$. Đường cong AOB này có phương trình mô tả được lấy từ (2.55a) và (2.55b) khi $e=e'=0$ như sau:

$$2x_1+|x_2|x_2=0$$

Bây giờ ta đã có thể xây dựng quỹ đạo trạng thái tối ưu đi từ điểm đầu tuỳ ý $\underline{x}_0$ nhưng cho trước trong mặt phẳng pha. Chẳng hạn đó là điểm $\underline{x}_0$ như ở hình 2.12. Do điểm $\underline{x}_0$ này nằm ở phần mặt phẳng pha có $u=-1$ nên xuất phát từ $\underline{x}_0$, quỹ đạo trạng thái tối ưu sẽ đi theo đường nét liền. Cho tới khi gặp đường chuyển đổi AOB, tức là khi tín hiệu $u(t)$ tối ưu chuyển đổi giá trị từ -1 sang 1, thì tương ứng, quỹ đạo trạng thái tối ưu cũng chuyển từ đường nét liền sang đường nét rời để đi thẳng về gốc tọa độ.

Từ đây ta suy ra được tín hiệu điều khiển tối ưu (2.54c) như sau:

$$u(t)=\begin{cases}-1 & \text{nếu } \underline{x} \text{ nằm phía bên trên } AOB \text{ hoặc trên } AO\\ 1 & \text{nếu } \underline{x} \text{ nằm phía bên dưới } AOB \text{ hoặc trên } BO\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & \text{nếu } (2x_1+x_2|x_2|)>0 \text{ hoặc nếu } (2x_1+x_2|x_2|)=0 \text{ và } x_1<0\\ 1 & \text{nếu } (2x_1+|x_2|x_2)<0 \text{ hoặc nếu } (2x_1+|x_2|x_2)=0 \text{ và } x_1>0\end{cases}$$

và đó cũng là công thức mô tả bộ điều khiển tối ưu tác động nhanh làm việc theo nguyên lý phản hồi trạng thái của đối tượng đã cho. ❐

Ví dụ 2.8: (Điều khiển tối ưu tác động nhanh)

Hãy tìm tín hiệu điều khiển $u(t)$ thỏa mãn $|u|\le 1$ đưa đối tượng có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

từ một điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ tùy ý, nhưng cho trước, về gốc tọa độ $\underline{x}_T=\underline{0}$ trong khoảng thời gian ngắn nhất.

Trước hết ta lập hàm Hamilton rút gọn theo công thức (2.50a):

$$H_R(\underline{x},\underline{p},u)=p_1x_2+p_2(-x_1+u)$$

sau đó áp dụng nguyên lý cực đại (2.49) sẽ đến được quan hệ giữa tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ với biến đồng trạng thái như sau:

$$u(t)=\operatorname{sgn}(p_2)$$

Để có $p_2(t)$ ta sử dụng phương trình Euler–Lagrange (2.50b):

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=\begin{pmatrix}p_2\\ -p_1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad p_2(t)=k\sin(t-\varphi)$$

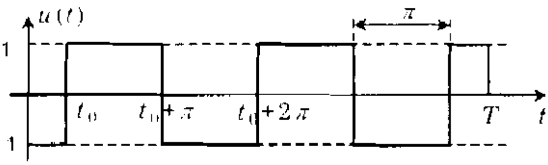
và từ đây suy ra được:

$$u(t) = \mathrm{sgn}(p_2) = \mathrm{sgn}(k\sin(t-\varphi)) \qquad (2.56)$$

trong đó hai hằng số k, φ là chưa thể xác định được ngay vì không có điều kiện biên cho vector đồng trạng thái $p_2(t)$. Tuy vậy, công thức (2.56) cũng cung cấp cho ta hai thông tin quan trọng về $u(t)$ tối ưu như sau:

a) Thứ nhất, tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ chỉ có hai giá trị −1 hoặc 1 và đó cũng là hai điểm biên của siêu diện U (hình 2.13).

b) Thứ hai, khoảng thời gian giữa hai lần chuyển đổi trạng thái (từ −1 sang 1 hoặc ngược lại), không kể lúc bắt đầu và kết thúc quá trình, là đúng bằng π.



Hình 2.13: Dạng tín hiệu điều khiển tối ưu. Minh họa ví dụ 2.8

Sau đây, dựa vào hai thông tin trên, ta sẽ thiết kế quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ của đối tượng.

Trước hết, từ thông tin thứ nhất, ta lần lượt thay hai giá trị ±1 của tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ vào mô hình trạng thái của đối tượng:

– Khi $u(t)=1$ thì:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1+1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1-1)^2 + x_2^2 = k_1^2 \qquad (2.57a)$$

trong đó hằng số k_1 được xác định từ điều kiện đầu cho trước $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$.

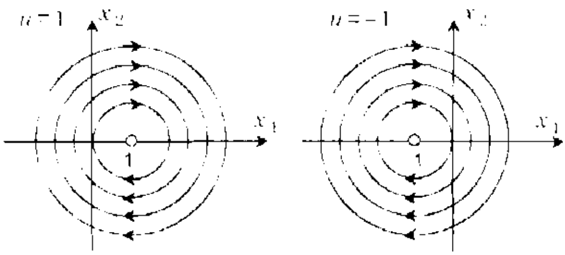
– Tương tự, khi $u(t)=-1$ thì:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1-1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1+1)^2 + x_2^2 = k_2^2 \qquad (2.57b)$$

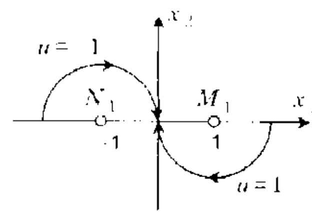
và hằng số k_2 cũng dễ dàng được xác định được từ $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$.

Hình 2.14 mô tả họ các đường tròn (2.57) ứng với những giá trị k_1, k_2 khác nhau, tức là ứng với các điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ khác nhau của đối tượng. Chiều của các đường tròn này được xác định từ quan hệ $\frac{dx_1}{dt}=x_2$ rằng khi $x_2>0$ thì x_1 phải tăng và ngược lại khi $x_2<0$ thì x_1 phải giảm.

Rõ ràng quỹ đạo trạng thái tối ưu chỉ có thể được tạo từ các cung của những đường tròn này.



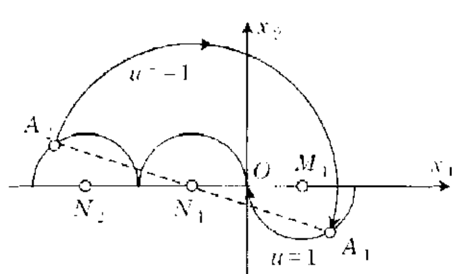
Hình 2.14: Họ các đường tròn tạo ra quỹ đạo trạng thái tối ưu



Hình 2.15: Đoạn cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu.

Bây giờ ta sẽ bắt đầu xây dựng quỹ đạo trạng thái tối ưu. Dễ thấy được rằng đoạn cuối của mọi quỹ đạo trạng thái tối ưu đều phải là một trong hai nửa đường tròn có bán kính bằng 1, tâm N_1 hoặc M_1 và có hướng kết thúc tại gốc tọa độ (hình 2.15).

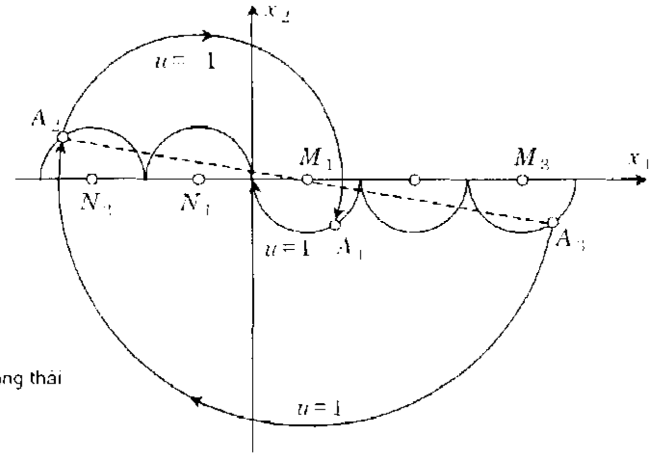
Hình 2.16 minh họa cách thiết kế đoạn tiếp theo của quỹ đạo trạng thái tối ưu nằm ngay trước đoạn cuối. Giả sử đoạn cuối quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ là cung A_1O thuộc nửa đường tròn bán kính bằng 1 có tâm là M_1, tức là từ điểm đối trạng thái cuối cùng là A_1 đối tượng được đưa về gốc tọa độ bởi $u=1$. Khi đó đoạn A_2A_1 nằm ngay trước nó, dưới tác động của $u=-1$ phải thuộc đường tròn có tâm N_1. Theo thông tin thứ hai rút ra từ nguyên lý cực đại (hình 2.13), thì đoạn này được dẫn bởi $u=-1$ trong khoảng thời gian là π nên đoạn A_2A_1 sẽ đúng bằng nửa đường tròn tâm N_1 (hình 2.16). Như vậy điểm A_2 nằm đối xứng với điểm A_1 qua tâm N_1 và do đó nó phải nằm trên đường tròn tâm $N_2=-2$ có bán kính bằng 1.



Hình 2.16: Xây dựng đoạn gần cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu.

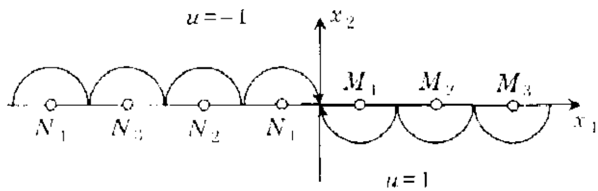
Đoạn A_3A_2 nằm trước đoạn A_2A_1 cũng được xây dựng tương tự (hình 2.17). Do đoạn A_3A_2 này được dẫn bởi giá trị tín hiệu $u=1$ trong khoảng thời gian là π nên nó phải là nửa đường tròn tâm M_1. Suy ra điểm A_3 phải là điểm nằm đối xứng với điểm A_2

qua tâm M_1. Như vậy A_3 sẽ nằm trên đường tròn có tâm $M_3=3$ trên trục hoành và có bán kính bằng 1.



Hình 2.17: Xây dựng quỹ đạo trạng thái tối ưu

Cứ tiếp tục như vậy cho những tình huống khác nhau về đoạn cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu ta sẽ có đường chuyển đổi giá trị +1 của tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$. Nó được tạo bởi vô số các nửa đường tròn phía trên trục hoành có bán kính bằng 1 với tâm là $N_1=-1$, $N_2=-2$, $N_3=-3$, ... và vô số các nửa đường tròn phía dưới trục hoành cũng có bán kính bằng 1 nhưng với tâm là $M_1=1$, $M_2=2$, $M_3=3$, ... (hình 2.18).



Hình 2.18: Đường chuyển đổi giá trị của tín hiệu điều khiển tối ưu.

Đường chuyển đổi chia mặt phẳng pha thành hai nửa. Nửa trên ứng với giá trị $u=-1$ và nửa dưới ứng với $u=1$ của tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$. Với đường chuyển đổi như vậy, ta hoàn toàn xây dựng được hoàn chỉnh một quỹ đạo trạng thái tối ưu đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ tuỳ ý, nhưng cho trước theo quy tắc:

- Phía trên đường chuyển đổi, thì ứng với $u=-1$, quỹ đạo trạng thái sẽ nằm trên một đường tròn có tâm N_1 và có hướng theo chiều kim đồng hồ.
- Phía dưới đường chuyển đổi, thì ứng với $u=1$, quỹ đạo trạng thái sẽ nằm trên một đường tròn có tâm M_1 và cũng có hướng theo chiều kim đồng hồ.

Cuối cùng, ta thấy ở ví dụ 2.8 này, số lần chuyển đổi giá trị của tín hiệu điều khiển tối ưu có thể là rất nhiều, phụ thuộc khoảng cách của điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ so với gốc tọa độ 0, chứ không phải chỉ là một lần như ở ví dụ 2.7. ❐

Định lý Feldbaum về số lần chuyển đổi giá trị và ý nghĩa ứng dụng

Hai ví dụ 2.7 và 2.8 cho thấy số lần chuyển đổi giá trị tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ cho cùng đối tượng bậc hai là không giống nhau. Điều đó đặt ra cho ta câu hỏi về mối liên quan giữa số lần chuyển đổi giá trị của tín hiệu điều khiển tối ưu và mô hình đối tượng. Nếu trả lời được câu hỏi này, ta sẽ có thêm một thông tin nữa phụ giúp cùng nguyên lý cực đại trong việc xác định tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh $\underline{u}(t)$.

Định lý 2.8 (Feldbaum): Xét bài toán tối ưu tác động nhanh đối tượng tuyến tính có n biến trạng thái $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ và m tín hiệu vào $u_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x}+B\underline{u},\qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \underline{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}\subset U \tag{2.58}$$

trong đó ma trận A có tất cả các giá trị riêng s_k *là những số thực* và miền U *là siêu diện* (2.52). Khi đó, vector tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)\in U$ sẽ có *dạng hằng số từng đoạn, các hằng số đó là đỉnh của siêu diện U*, và số lần chuyển đổi giá trị của từng phần tử $u_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$ của $\underline{u}(t)$ sẽ không vượt quá $n-1$ lần. Nói cách khác, số lần chuyển đổi giá trị của bản thân vector tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ sẽ không vượt quá $m(n-1)$ lần.

Chứng minh:

Trước hết, từ công thức (2.53) ta thấy phần tử $u_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$ của vector tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh $\underline{u}(t)$ chỉ có thể chuyển đổi giá trị tại thời điểm t' nếu tại đó có $\underline{p}^T(t')\underline{b}_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$, với $\underline{b}_i$ là vector cột thứ i của ma trận B và $\underline{p}(t)$ là nghiệm của phương trình Euler–Lagrange (2.50b):

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=-A^T\underline{p} \tag{2.59a}$$

Gọi s_k là các giá trị riêng bội r_k, $k=1,2,\ldots,q$ của ma trận A. Như vậy thì:

$$r_1+r_2+\cdots+r_q=n. \tag{2.59b}$$

Theo [35], nghiệm $\underline{p}(t)$ của hệ phương trình vi phân bậc nhất (2.59a) có dạng:

$$\underline{p}(t)=\underline{a}_1(t)\,e^{s_1t}+\underline{a}_2(t)\,e^{s_2t}+\cdots+\underline{a}_q(t)\,e^{s_qt}$$

trong đó $a_k(t)$, $k=1,2,\dots,q$ là các đa thức bậc r_k-1 của t. Suy ra tích vô hướng $\underline{p}^T(t)\underline{b}$ cũng có dạng

$$\underline{p}^T(t)\underline{b}_i = d_1(t)\,e^{s_1 t} + d_2(t)\,e^{s_2 t} + \cdots + d_q(t)\,e^{s_q t} \tag{2.59c}$$

và $d_k(t)$, $k=1,2,\dots,q$ cũng là các đa thức bậc r_k-1 theo t giống như $a_k(t)$. Bởi vậy để chứng minh định lý, ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu như s_k, $k=1,2,\dots,q$ là những số thực khác nhau đôi một thì số nghiệm t' của (2.59c) chỉ có thể nhiều nhất là:

$$(r_1-1)+(r_2-1)+\cdots+(r_q-1)+q-1=n-1.$$

Một cách tổng quát, sau đây ta sẽ chứng minh: Nếu s_k, $k=1,2,\dots,q$ là những số thực khác nhau đôi một và $c_k(t)$, $k=1,2,\dots,q$ là các đa thức bậc l_k của t, thì số nghiệm của:

$$c_1(t)\,e^{s_1 t} + c_2(t)\,e^{s_2 t} + \cdots + c_q(t)\,e^{s_q t} \tag{2.60}$$

không thể nhiều hơn

$$l_1+l_2+\cdots+l_q+q-1 \tag{2.61}$$

Phương pháp chứng minh được áp dụng là phương pháp quy nạp.

Với $q=1$ thì nghiệm của $c_1(t)\,e^{s_1 t}$ cũng là nghiệm của $c_1(t)$ vì s_1 là số thực. Do $c_1(t)$ là đa thức bậc l_1 nên số nghiệm của nó không thể nhiều hơn l_1-1. Vậy công thức (2.60) hiển nhiên đúng.

Nếu (2.61) còn đúng với $q-1$, tức là số nghiệm của:

$$c_1(t)\,e^{s_1 t} + c_2(t)\,e^{s_2 t} + \cdots + c_{q-1}(t)\,e^{s_{q-1} t} \tag{2.62a}$$

không nhiều hơn

$$l_1+l_2+\cdots+l_{q-1}+q-2 \tag{2.62b}$$

thì ta chỉ còn phải chứng minh (2.61) cũng đúng với q.

Giả sử (2.61) sai với q, tức là số nghiệm của (2.60) không ít hơn:

$$l_1+l_2+\cdots+l_q+q \tag{2.63a}$$

Nhân (2.60) với $e^{-s_q t}$:

$$c_1(t)\,e^{(s_1-s_q)t} + c_2(t)\,e^{(s_2-s_q)t} + \cdots + c_{q-1}(t)\,e^{(s_{q-1}-s_q)t} + c_q(t) \tag{2.63b}$$

Do s_q là số thực nên phép nhân này không làm thay đổi nghiệm t' của (2.60), hay t' là nghiệm của (2.60) khi và chỉ khi nó cũng là nghiệm của (2.63b).

Vì (2.63b) là hàm giải tích nên giữa hai nghiệm của nó luôn phải có ít nhất một điểm cực trị. Suy ra số nghiệm của đạo hàm bậc l_q+1 của (2.63b) không thể ít hơn:

$$l_1+l_2+\cdots+l_q+q-(l_q+1)=l_1+l_2+\cdots+l_{q-1}+q-1 \qquad (2.64)$$

Nhưng đạo hàm của bậc l_q+1 của (2.63b) lại có dạng:

$$h_1(t)\,e^{(s_1-s_q)t}+h_2(t)\,e^{(s_2-s_q)t}+\cdots+h_{q-1}(t)\,e^{(s_{q-1}-s_q)t}$$

trong đó $h_k(t)$, $k=1,2,\ldots,q-1$ là các đa thức bậc l_k của t, và s_k-s_q là những số thực khác nhau đôi một, tức là có dạng của (2.62a) cho $q-1$, nên điều giả sử trên đã dẫn đến (2.64) mâu thuẫn với (2.62b). Vậy điều giả sử là sai và đó cũng là đ.p.c.m. ❐

Để tìm hiểu ý nghĩa ứng dụng của định lý 2.8, ta xét riêng trường hợp đối tượng *chỉ có một tín hiệu vào*

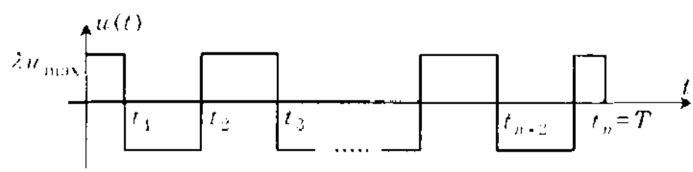
$$\frac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x}+\underline{b}u \quad \text{với} \quad |u|\le u_{\max} \qquad (2.65)$$

trong đó các giá trị riêng của ma trận $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ được giả thiết là những số thực.

Nếu đối tượng (2.65) là điều khiển được (hoàn toàn), tức là khi ma trận:

$$(\underline{b}\,,\,A\underline{b}\,,\,\cdots\,,\,A^{n-1}\underline{b})$$

không suy biến (tiêu chuẩn Kalman, [35]), thì từ mọi điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ ta luôn tìm được một tín hiệu điều khiển đưa nó tới điểm trạng thái cuối $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$ cũng tùy ý, nhưng cho trước. Điều này chứng tỏ *luôn tồn tại* một tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh $u(t)$ cho bài toán có điểm đầu $\underline{x}_0$ và điểm cuối $\underline{x}_T$ cố định, cho trước. Theo nguyên lý cực đại mà cụ thể là định lý 2.7, tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ này chỉ có thể có hai giá trị $-u_{\max}$ và $u_{\max}$ (hình 2.19).



Hình 2.19: Tín hiệu điều khiển tối ưu.

Thêm vào đó, theo định lý 2.8 của Feldbaum, số lần chuyển đổi giá trị của tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ nhiều nhất chỉ có thể là $n-1$. Do đó nếu gọi t_j, $j=1,2,\ldots,n$ với $t_n=T$ là các điểm chuyển đổi giá trị của $u(t)$ cũng như $\lambda u_{\max}$, trong đó $\lambda=\pm1$, là giá trị của $u(t)$ trong khoảng đầu tiên $0\le t<t_1$, thì tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ sẽ có dạng:

$$u(t)=\lambda u_{\max}\sum_{j=1}^{n}\left[1(t-t_{j-1})-1(t-t_j)\right] \qquad (2.66)$$

trong đó $t_0=0$, $\lambda=\mp 1$ và $1(t)$ là ký hiệu chỉ hàm Heaviside. Như vậy, bài toán xác định tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ sẽ tương đương với việc đi tìm $n+1$ ẩn số:

$$\lambda,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n=T$$

và để làm được việc này, ta chỉ cần thay (2.66) vào mô hình đối tượng (2.65) rồi tìm nghiệm $\underline{x}(t)$ của nó thỏa mãn $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$, $\underline{x}(T)=\underline{x}_T$. Khi đó, do đối tượng điều khiển được cũng như sự tồn tại duy nhất của tín hiệu điều khiển tối ưu, nên chỉ có thể xảy ra một trong hai khả năng:

- hoặc phương trình có nghiệm với $\lambda=1$,
- hoặc phương trình có nghiệm với $\lambda=-1$.

Ví dụ 2.9 ([6]): (Minh họa tính ứng dụng của định lý Feldbaum)

Xét lại bài toán đã cho ở ví dụ 2.7:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u \qquad \text{với} \qquad |u|\le u_{\max},\ \ \underline{x}_0=\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\end{pmatrix}\ \text{ và }\ \underline{x}_T=\underline{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Theo nguyên lý cực đại, tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh $u(t)$ chỉ có thể có hai giá trị $-u_{\max}$ và $u_{\max}$. Tiếp theo, từ định lý 2.8 của Feldbaum thì tín hiệu điều khiển tối ưu đó chỉ có thể có nhiều nhất một điểm chuyển đổi giá trị t_1. Suy ra:

$$u(t)=\begin{cases}\lambda\, u_{\max} & \text{khi}\ \ 0\le t<t_1\\ -\lambda\, u_{\max} & \text{khi}\ \ t_1\le t<T\end{cases} \qquad \text{trong đó } \lambda=\pm 1$$

Thay $u(t)$ vào mô hình đối tượng và giải phương trình đó sẽ thu được:

$$\underline{x}(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\end{pmatrix}+\lambda u_{\max}\int_0^{t_1}\begin{pmatrix}1 & t-\tau\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}d\tau-\lambda u_{\max}\int_{t_1}^{t}\begin{pmatrix}1 & t-\tau\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}d\tau$$

Bởi vậy, tại điểm cuối $t=T$ thì

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\end{pmatrix}+\lambda u_{\max}\int_0^{t_1}\begin{pmatrix}1 & T-\tau\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}d\tau-\lambda u_{\max}\int_{t_1}^{T}\begin{pmatrix}1 & T-\tau\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}d\tau$$

Suy ra:

$$\begin{cases}\gamma-\lambda u_{\max}\left(t_1^2-2t_1T+\dfrac{T^2}{2}\right)=0\\ \lambda u_{\max}(2t_1-T)=0\end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai ta có $T=2t_1$. Thay vào phương trình thứ nhất được:

$$t_1^2 = -\frac{\lambda}{u_{max}}\gamma .$$

Vì $t_1^2 \ge 0$ nên có thể thấy ngay:

$$\lambda = -\mathrm{sgn}(\gamma), \quad t_1 = \sqrt{\frac{|\gamma|}{u_{max}}} \quad \text{và} \quad T = 2\sqrt{\frac{|\gamma|}{u_{max}}}$$

Thay kết quả tìm được này vào mô hình đã có của tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh $u(t)$ ta đi đến:

$$u(t) = \begin{cases} -u_{max}\mathrm{sgn}(\gamma) & \text{khi } 0 \le t < \sqrt{\dfrac{|\gamma|}{u_{max}}} \\ u_{max}\mathrm{sgn}(\gamma) & \text{khi } \sqrt{\dfrac{|\gamma|}{u_{max}}} < t < T = 2\sqrt{\dfrac{|\gamma|}{u_{max}}} \end{cases}$$ ❐

2.3.3 Nguyên lý cực đại dạng tổng quát: Điều kiện cần, điều kiện hoành

Trong hai mục trên, mục 2.3.1 và mục 2.3.2, ta đã được làm quen với nguyên lý cực đại thông qua một số bài toán tối ưu đặc trưng có ràng buộc U là tập đóng, như bài toán tối ưu có điểm đầu $\underline{x}_0$ và khoảng thời gian T cố định, cho trước (mục 2.3.1) hoặc bài toán tối ưu tác động nhanh (mục 2.3.2). Tất nhiên, nguyên lý cực đại không chỉ ứng dụng riêng cho lớp các bài toán tối ưu đó, mà nó còn đúng cho nhiều dạng bài toán tối ưu khác nhau. Sau đây ta sẽ tiếp cận đến tính tổng quát này của nó bao gồm điều kiện cần và điều kiện hoành.

Điều kiện cần

Cho đối tượng mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}), \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in U, \quad \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x},\underline{u}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x},\underline{u}) \end{pmatrix} \qquad (2.67a)$$

Nhiệm vụ đặt ra là trong số tất cả các vector tín hiệu điều khiển thuộc tập U đưa đối tượng từ điểm đầu $\underline{x}(0)$ cố định, cho trước tới điểm cuối $\underline{x}(T)$ cũng cố định, cho trước, tìm được một tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ sao cho với nó có:

$$Q(\underline{x},\underline{u}) = \int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min \qquad (2.67b)$$

trong đó khoảng thời gian T là không cố định (cũng là biến tối ưu) và được xác định từ điều kiện cuối $\underline{x}(T)$ với $\underline{x}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tối ưu (nghiệm của phương trình vi phân (2.67a) ứng với $\underline{u}(t)$ tối ưu).

Với hàm Hamilton:

$$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})=\underline{p}^T\underline{f}(\underline{x},\underline{u})-g(\underline{x},\underline{u}) \tag{2.68}$$

thì nguyên lý cực đại được phát biểu như sau:

Định lý 2.9 (Điều kiện cần): Nếu $\underline{u}(t)\in U$ là tín hiệu điều khiển tối ưu đưa đối tượng (2.67a) từ điểm đầu $\underline{x}(0)$ cố định, cho trước tới điểm cuối $\underline{x}(T)$ cũng cố định, cho trước và làm cho hàm mục tiêu (2.67b) đạt giá trị nhỏ nhất thì:

a) Phải tồn tại vector $\underline{p}(t)\in\mathbb{R}^n$ không đồng nhất bằng $\underline{0}$ trong khoảng thời gian $0\le t\le T$ và thỏa mãn:

$$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})=\max_{\underline{\tilde{u}}\in U} H(\underline{x},\underline{\tilde{u}},\underline{p}) \tag{2.69}$$

Rõ ràng $\underline{u}(t)$ xác định theo (2.69) là hàm phụ thuộc theo $\underline{x}$ và $\underline{p}$. Ký hiệu sự phụ thuộc đó là $\underline{u}(\underline{x},\underline{p})$ rồi thay vào (2.68) ta sẽ có với (2.69):

$$M(\underline{x},\underline{p})=H(\underline{x},\underline{u}(\underline{x},\underline{p}),\underline{p})=\max_{\underline{\tilde{u}}\in U} H(\underline{x},\underline{\tilde{u}},\underline{p})\,. \tag{2.70}$$

Tại điểm cuối $t=T$, còn có:

$$M\big(\underline{x}(T),\underline{p}(T)\big)=0 \tag{2.71}$$

b) Nếu vector $\underline{p}\in\mathbb{R}^n$ còn thỏa mãn phương trình Euler–Lagrange (khi đó nó sẽ được gọi là *biến đồng trạng thái*):

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T \tag{2.72}$$

thì $M(\underline{x},\underline{p})$ không phụ thuộc t. Như vậy (2.71) sẽ đúng với mọi $0\le t\le T$ chứ không riêng gì tại điểm cuối $t=T$.

Lời chứng minh định lý 2.9 là khá phức tạp và sử dụng nhiều kiến thức về giải tích hàm. Ta sẽ bỏ qua phần chứng minh đó. Bạn đọc nào quan tâm có thể tìm thấy nó trong các tài liệu [1], [39].

Mặc dù định lý 2.9 chỉ là điều kiện cần, cho thấy tính chất phải có của $u(t)$ tối ưu, song người ta vẫn thường hy vọng với nó có thể xác định được tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ tối ưu và quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ tương ứng bằng cách khoanh vùng nghiệm.

Ví dụ 2.10: (Minh họa nguyên lý cực đại)

Cho bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, & \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}(T) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad U = \mathbb{R}^2 \\ Q(\underline{x}, \underline{u}) = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min \end{cases}$$

Hàm Hamilton của bài toán là:

$$H(x, u, p) = -\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + p_1 u_1 + p_2 u_2 \tag{2.73a}$$

Suy ra:

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \quad \Leftrightarrow \quad p_i(t) = k_i \text{ (hằng số)}, \quad i = 1, 2 \tag{2.73b}$$

Thay (2.73b) vào (2.73a)

$$H(x, u, \underline{p}) = -\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + k_1 u_1 + k_2 u_2$$

Sau đó, áp dụng nguyên lý cực đại (2.69) cho trường hợp $U = \mathbb{R}^2$ được:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0^T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-u_i}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} + k_i = 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.73c}$$

Khi đó (2.73c) trở thành:

$$u_i(t) = k_i \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad i = 1, 2, \quad \Rightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{k_2}{k_1}. \tag{2.74}$$

Ngoài ra, nguyên lý cực đại còn cung cấp thêm:

$$M\big(\underline{x}(t), \underline{p}(t)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,(-1 + k_1^2 + k_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_1^2 + k_2^2 = 1. \tag{2.75}$$

Bởi vậy, nếu kết hợp với mô hình đối tượng:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad i = 1, 2,$$

ta sẽ được:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{k_2}{k_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{k_2}{k_1} x_1 + c \tag{2.76}$$

Từ đây, với các điều kiện biên $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{x}(T) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ thì:

$$\begin{cases} 1-2\dfrac{k_2}{k_1}+c & \text{khi} \quad t=0 \\ 4-6\dfrac{k_2}{k_1}+c & \text{khi} \quad t=T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{3}{4} \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

và do đó, theo (2.75) sẽ có:

$$k_1=\frac{4}{5}, \quad k_2=\frac{3}{5}, \quad \Rightarrow \quad H(x,u,p)=-\sqrt{u_1^2+u_2^2}+\frac{4}{5}u_1+\frac{3}{5}u_2$$

Như vậy quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ là đường thẳng (2.76):

$$x_2=\frac{k_2}{k_1}x_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}x_1-\frac{1}{2}$$

nối điểm đầu $x(0)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ với điểm cuối $x(T)=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ trong mặt phẳng pha và tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ phải thỏa mãn điều kiện (2.74), tức là:

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{k_2}{k_1}=\frac{3}{4}. \qquad \square$$

Điều kiện hoành (điều kiện trực giao)

Xét lại bài toán tối ưu (2.67), nhưng bây giờ điểm cuối $\underline{x}(T)$ không cố định mà thuộc về mặt cong (đa tạp) S_T mô tả bởi m phương trình (hình 2.20a):

$$s_1(\underline{x})=0,\ s_2(\underline{x})=0,\ \cdots,\ s_m(\underline{x})=0 \tag{2.77a}$$

được viết chung lại thành:

$$\underline{s}(\underline{x})=\begin{pmatrix}s_1(\underline{x})\\ \vdots \\ s_m(\underline{x})\end{pmatrix}=\underline{0} \tag{2.77b}$$

Các hàm $s_k(x)$, $k=1,2,\ldots,m$ này đều là khả vi. Giả thiết tiếp S_T không chứa điểm suy biến, tức là tại mọi điểm $\underline{x}\in S_T$ luôn có:

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial s_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial s_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial s_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\neq\Theta \tag{2.77c}$$

trong đó $\dfrac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{x}}$ là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi của vector hàm $\underline{s}(\underline{x})$ và Θ là ma trận có các phần tử bằng 0.

Khi đó điều kiện hoành (còn gọi là điều kiện trực giao) phát biểu như sau:

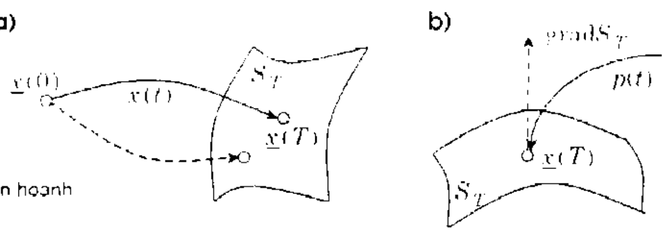
Định lý 2.10 (Điều kiện hoành): Nếu $\underline{u}(t)\in U$ là tín hiệu điều khiển tối ưu đưa đối tượng (2.67a) từ điểm đầu $\underline{x}(0)$ cố định, cho trước tới điểm cuối $\underline{x}(T)\in S_T$ không cố định mà thuộc về đa tạp S_T mô tả bởi (2.77), đồng thời làm cho hàm mục tiêu (2.67b) đạt giá trị nhỏ nhất, thì phải tồn tại vector $\underline{p}\in\mathbb{R}^n$ không đồng nhất bằng 0 trong khoảng thời gian $0\le t\le T$ thỏa mãn:

a) $H(\underline{x},\underline{u},\underline{p})=\max\limits_{\tilde{u}\in U} H(\underline{x},\tilde{u},\underline{p})$

b) Gọi $M(\underline{x},\underline{p})=\max\limits_{\tilde{u}\in U} H(\underline{x},\tilde{u},\underline{p})$ thì $M\big(\underline{x}(T),\underline{p}(T)\big)=0$

c) Vector $\underline{p}(T)$ vuông góc với đa tạp S_T (điều kiện hoành–*transversality*).

d) Nếu $\underline{p}$ còn là nghiệm của phương trình Euler–Lagrange (2.72), hay khi $\underline{p}$ còn là biến đồng trạng thái của đối tượng, thì $M(\underline{x},\underline{p})$ sẽ không phụ thuộc t.



Hình 2.20: Minh họa điều kiện hoành

Ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy, nếu ký hiệu:

$$\operatorname{grad} s_1(\underline{x}),\ \operatorname{grad} s_2(\underline{x}),\ \cdots,\ \operatorname{grad} s_m(\underline{x}) \qquad (2.78a)$$

là các vector gradient của $s_k(\underline{x})$, $k=1,2,\ldots,m$, thì do S_T không chứa điểm suy biến, các vector này sẽ tạo thành một hệ các vector độc lập tuyến tính. Chúng chính là bộ vector cơ sở của không gian trực giao với đa tạp S_T (hình 2.20b). Như vậy, điều kiện hoành trong định lý 2.10 cho thấy tại điểm cuối $t=T$ vector $\underline{p}$ sẽ phải thuộc không gian trực giao này. Nói cách khác, tại điểm cuối $t=T$ vector $\underline{p}$ có dạng tổ hợp tuyến tính của các vector $\operatorname{grad} s_1(\underline{x})$, $\operatorname{grad} s_2(\underline{x})$, $\cdots$, $\operatorname{grad} s_m(\underline{x})$, hay:

$$\underline{p}(T)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k \operatorname{grad} s_k\big(\underline{x}(T)\big) \qquad (2.78b)$$

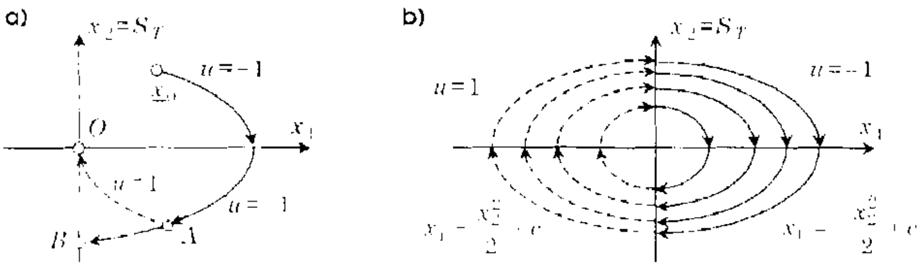
trong đó λ_k, $k=1,2,\ldots,m$ là những hằng số.

Ví dụ 2.11: (Minh họa điều kiện hoành)

Xét lại bài toán tối ưu tác động nhanh ở ví dụ 2.7.

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

có điểm đầu $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ tùy ý nhưng cho trước, với ràng buộc $|u|\le 1$ và điểm cuối $\underline{x}(T)$ không cố định mà thuộc đa tạp S_T là toàn bộ trục x_2 (hình 2.21).



Hình 2.21: Minh họa ví dụ 2.11

Gọi $u(t)$ là tín hiệu điều khiển tối ưu. Vậy thì theo điều kiện hoành, tại thời điểm cuối $t=T$ khi mà quỹ đạo vector $p(T)=\begin{pmatrix}p_1(T)\\ p_2(T)\end{pmatrix}$ vuông góc với trục $\begin{pmatrix}0\\ x_2\end{pmatrix}=S_T$ ta phải có:

$$p_1(T)0+p_2(T)x_2=0$$

Nhưng vì x_2 là tùy ý nên điều này đồng nghĩa với:

$$p_2(T)=0$$

Mặt khác, từ kết quả ví dụ 2.7, cụ thể là công thức (2.54b), ta còn được biết:

$$\begin{cases}p_2(t)=k_2-k_1t\\ u(t)=\operatorname{sgn}(p_2)=\operatorname{sgn}(k_2-k_1t)\end{cases}$$

tức là $p_2(t)$ chỉ bằng 0 duy nhất tại một điểm $T=\frac{k_2}{k_1}$. Do đó trong suốt quá trình tối ưu $0\le t<T$ tín hiệu điều khiển tối ưu không đổi dấu, nó chỉ có thể có một giá trị duy nhất, hoặc 1 hoặc −1. Ví dụ, ở hình 2.21a) thì quỹ đạo trạng thái tối ưu sẽ phải tiếp tục đi theo cung AB để gặp trục x_2 chứ không chuyển sang cung AO như trong ví dụ 2.7.

Với điều nhận xét trên ta dễ dàng có được các quỹ đạo trạng thái tối ưu mô tả ở hình 2.21b). Chúng hoặc sẽ là parabol $x_1=\frac{x_2^2}{2}+c$ hoặc là $x_1=-\frac{x_2^2}{2}+c$ tùy thuộc vào điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ nằm bên trái hoặc bên phải trục x_1. ❐

Ví dụ 2.12: (Minh họa điều kiện hoành)

Xét bài toán điều khiển tối ưu tác động *nhanh* cho đối tượng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \underline{x}_0=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u|\le 1$$

và điểm cuối là một điểm bất kỳ trên đường thẳng $x_1=x_2$.

Phương trình của đa tạp S_T là $s(\underline{x})=x_1-x_2=0$. Do đó có $\operatorname{grad}s(\underline{x})=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Từ đây có được nhờ điều kiện trực giao (2.78b):

$$\begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_1(T)=-p_2(T)=\lambda \text{ (hằng số)}$$

Lập hàm Hamilton mở rộng

$$H(\underline{x},u,\underline{p})=p_0+p_1x_2+p_2u$$

ta sẽ có từ nguyên lý cực đại:

$$u(t)=\operatorname{sgn}(p_2) \quad \text{và} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{cases} p_1(t)=\lambda \\ p_2(t)=-\lambda(t-T+1) \end{cases}$$

Do $p_2(t)$ là hàm tuyến tính theo t nên $u(t)$ sẽ chỉ đổi dấu nhiều nhất là một lần. Điểm thời gian T_u mà $u(t)$ đổi dấu (nếu có) sẽ là:

$T_u=T-1$, trong trường hợp $T>1$.

Thay $u(t)$ tối ưu vào mô hình hệ thống được:

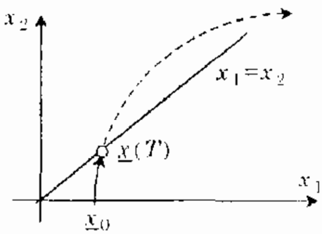
$$\begin{cases} x_1=\frac{\operatorname{sgn}(p_2)}{2}t^2+\frac{1}{2} \\ x_2=\operatorname{sgn}(p_2)\cdot t \end{cases}$$

Nếu ký hiệu $k=\pm 1$ là giá trị của $\operatorname{sgn}(p_2)$ tại thời điểm cuối $t=T$ thì

$$x_1(T) = x_2(T) \quad \Rightarrow \quad kT = \frac{kT^2}{2} + \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad T = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{2}{7k}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{\frac{5}{7}} & \text{khi} \quad k = 1 \\ 1 \pm \sqrt{\frac{9}{7}} & \text{khi} \quad k = -1 \end{cases}$$



Hình 2.22: Minh họa ví dụ 2.12

Nhưng do T phải dương và nhỏ nhất nên:

$$T = 1 - \sqrt{\frac{5}{7}} < 1$$

Vậy tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ không đổi dấu trong toàn bộ khoảng thời gian $0 \le t \le T < 1$. Ngoài ra khi $t = T < 1$ còn có $\mathrm{sgn}(p_2(T)) = 1$, tức là $\lambda = -1$. Suy ra:

$$u(t) = 1.$$ ❐

Bên cạnh định lý 2.10, được gọi là điều kiện hoành cho bài toán có điểm cuối bị ràng buộc bởi đa tạp S_T, ta còn có một điều kiện hoành tương tự khác nhưng phát biểu cho bài toán có cả điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)$ bị ràng buộc bởi đa tạp S_0 và cuối $\underline{x}(T)$ bị ràng buộc bởi đa tạp S_T. Điều kiện này vẫn thường được biết đến dưới cái tên *điều kiện cần và đủ*. Nó có dạng như sau:

Định lý 2.11 (Điều kiện cần và đủ): Cho bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ Q(\underline{x}, \underline{u}) = \displaystyle\int_0^T g(\underline{x}, \underline{u})dt \to \min \end{cases}$$

trong đó $\underline{x}(0) \in S_0$, $\underline{x}(T) \in S_T$ và cả hai đa tạp S_0, S_T đều trơn, không chứa điểm suy biến.

Để $\underline{u}(t)$ là nghiệm của bài toán tối ưu trên thì *cần và đủ* là tồn tại vector $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ không đồng nhất bằng không thỏa mãn:

a) $H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}) = \max\limits_{\underline{\tilde{u}} \in U} H(\underline{x}, \underline{\tilde{u}}, \underline{p})$

b) Gọi $M(\underline{x}, \underline{p}) = \max\limits_{\underline{\tilde{u}} \in U} H(\underline{x}, \underline{\tilde{u}}, \underline{p})$ thì $M\big(\underline{x}(T), \underline{p}(T)\big) = 0$

c) $\underline{p}(0)$ vuông góc với S_0 và $\underline{p}(T)$ vuông góc với S_T.

d) Nếu $\underline{p}$ còn thỏa mãn phương trình Euler–Lagrange (2.72), tức là $\underline{p}$ còn là biến đồng trạng thái của đối tượng, thì:

$$M(\underline{x},\underline{p})=0 \quad \text{với mọi } 0\le t\le T.$$

Bài toán tối ưu có khoảng thời gian cố định và cho trước

Nguyên lý cực đại nêu trong các định lý 2.9, 2.9 và 2.10 đều cần có giả thiết rằng khoảng thời gian xảy ra quá trình tối ưu T cũng là một biến tối ưu cần tìm. Tuy vậy nó cũng vẫn áp dụng được cho bài toán mà ở đó khoảng thời gian T lại cố định và cho trước.

Để minh họa ta xét bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt}=f(\underline{x},\underline{u}), \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0, \quad \underline{x}(T)=\underline{x}_T, \quad \text{và } T \text{ là cố định và cho trước} \\ Q(\underline{x},\underline{u})=\displaystyle\int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min \end{cases}$$

Đặt thêm một biến trạng thái mới:

$$x_{n+1}=t, \quad \text{tức là} \quad \frac{dx_{n+1}}{dt}=1$$

sau đó kết hợp với mô hình đối tượng đã cho để được đối tượng mở rộng:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt}=\underline{\tilde{f}}(\underline{x},\underline{u}), \qquad \underline{\tilde{x}}=\begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1}, \quad \underline{\tilde{f}}(\underline{x},\underline{u})=\begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \\ 1\end{pmatrix}$$

thì bài toán tối ưu trên trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{\tilde{x}}}{dt}=\underline{\tilde{f}}(\underline{x},\underline{u}), \quad \underline{\tilde{x}}_0=\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ 0\end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{x}}_T=\begin{pmatrix} \underline{x}_T \\ T\end{pmatrix} \quad \text{cố định và cho trước} \\ Q(\underline{\tilde{x}},\underline{u})=\displaystyle\int_0^{\tilde{T}} g(\underline{x},\underline{u},x_{n+1})dt \to \min \end{cases}$$

trong đó khoảng thời gian $\tilde{T}$ bây giờ lại trở thành tự do và cũng là biến tối ưu cần tìm. Nói cách khác, bài toán tối ưu mới này đã hoàn toàn thỏa mãn các giả thiết để áp dụng được nguyên lý cực đại nêu trong định lý 2.9.

Bài toán tối ưu có đối tượng không autonom

Bằng phương pháp đặt thêm biến phụ $x_{n+1}=t$ như đã làm với bài toán có khoảng thời gian T cố định, cho trước, ta cũng có thể chuyển bài toán tối ưu có đối tượng không autonom (phụ thuộc explizit theo t) về dạng thỏa mãn các giả thiết của định lý 2.10 (điều kiện hoành) của nguyên lý cực đại. Bài toán tối ưu này có dạng như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t), \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0, \quad \underline{x}(T)=\underline{x}_T & \text{là cố định, cho trước} \\ Q=\int_0^T g(\underline{x},\underline{u},t)dt \rightarrow \min \end{cases}$$

Khi đó, nếu đặt thêm biến trạng thái mới:

$$x_{n+1}=t, \quad \text{tức là} \quad \frac{dx_{n+1}}{dt}=1$$

thì với các ký hiệu

$$\underline{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\tilde{f}}(\underline{\tilde{x}},\underline{u}) = \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x},\underline{u},x_{n+1}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{\tilde{x}},\underline{u}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$g(\underline{x},\underline{u},t)= g(\underline{x},\underline{u},x_{n+1})= g(\underline{\tilde{x}},\underline{u})$$

bài toán trên trở về dạng autonom:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{\tilde{x}},\underline{u}), \quad \underline{\tilde{x}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{x}}_T \in \tilde{S}_T = \begin{pmatrix} \underline{x}_T \\ \text{tùy ý} \end{pmatrix} & \text{cho trước} \\ Q=\int_0^T g(\underline{\tilde{x}},\underline{u})dt \rightarrow \min \end{cases}$$

có điểm đầu $\underline{\tilde{x}}_0$ cố định, còn điểm cuối $\underline{\tilde{x}}_T$ bị ràng buộc bởi đa tạp $\tilde{S}_T$. Để giải bài toán này ta áp dụng được điều kiện hoành đã phát biểu trong định lý 2.11.

2.3.4 Về ý nghĩa vector biến đồng trạng thái

Để hiểu rõ hơn về ý nghĩa biến đồng trạng thái $\underline{p}$ ta hãy xét riêng trường hợp đối tượng là tuyến tính tham số hằng. Khi không bị kích thích sẽ có:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}(t)=e^{At}\underline{x}_0$$

trong đó $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ là điều kiện đầu đã biết.

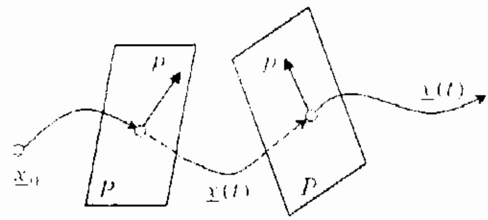
Gọi $\underline{p}$ là biến đồng trạng thái của đối tượng, vậy thì cũng có:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -A^T\underline{p} \quad \Rightarrow \quad \underline{p}(t) = e^{-A^T t}\underline{p}_0$$

Suy ra

$$\underline{p}^T\underline{x} - \underline{p}_0^T\underline{x}_0 = \text{hằng số với mọi } t$$

và điều này chỉ rằng vector biến đồng trạng thái $\underline{p}(t)$ của bài toán tối ưu tuyến tính luôn nằm trong một siêu phẳng P (hyperplane) chuyển dịch dọc theo quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ và kết hợp với quỹ đạo trạng thái một giá trị tích vô hướng $\underline{p}^T\underline{x}$ không đổi (hình 2.23).



Hình 2.23: Ý nghĩa vector biến đồng trạng thái.

Quay lại bài toán tối ưu tổng quát (2.67). Nguyên lý cực đại chỉ rằng nếu $\underline{u}\in U$ là tín hiệu điều khiển tối ưu của đối tượng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}),$$

để nó đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}(0)$ cố định, cho trước tới điểm cuối $\underline{x}(T)$ cũng cố định, cho trước và:

$$Q(\underline{x},\underline{u}) = \int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min$$

với T là khoảng thời gian xảy ra quá trình tối ưu, thì tín hiệu đó phải thỏa mãn:

$$H(\underline{x},\underline{u},\underline{p}) = \max_{\tilde{\underline{u}}\in U} H(\underline{x},\tilde{\underline{u}},\underline{p}) \qquad (2.79)$$

trong đó vector $\underline{p}(t)\in R^n$ không được đồng nhất bằng 0 khi $0\le t\le T$ và

$$H(\underline{x},\tilde{\underline{u}},\underline{p}) = \underline{p}^T\underline{f}(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) - g(\underline{x},\tilde{\underline{u}})$$

là ký hiệu chỉ hàm Hamilton của bài toán tối ưu. **Chú ý rằng** ở đây, vector $\underline{p}(t)$ chưa bắt buộc phải là biến đồng trạng thái của đối tượng.

Như vậy, nguyên lý cực đại (2.79) đã cung cấp cho ta quan hệ phải có $\underline{u}(\underline{x},\underline{p})$ của tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}\in U$. Giả sử tiếp là ta đã có được $\underline{p}(x)$ thì từ $\underline{u}(\underline{x},\underline{p})$ ta sẽ suy ra ngay được phương trình của *bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái*:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}\big(\underline{x},\underline{p}(\underline{x})\big)$$

Vấn đề còn lại là làm thế nào để có được quan hệ $p(x)$ giữa biến vector đồng trạng thái $p(t)$ và quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$.

Cũng sẽ là tự nhiên nếu như ta sử dụng phương trình Euler–Lagrange (2.72) đã được giới thiệu trong nguyên lý cực đại, tức là xem $p(t)$ như biến đồng trạng thái, để tìm quan hệ $p(x)$:

- Giải phương trình Euler Lagrange $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T$ để có $p(t)$. (2.80)
- Xác định quỹ đạo trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ từ $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T$.
- Xác định $p(\underline{x})$ từ $p(t)$ và $\underline{x}(t)$.

Tuy nhiên phương pháp trên có sự bất cập ở chỗ ta chưa có được điều kiện biên cho phương trình vi phân (2.80) và do đó cũng chưa có được nghiệm $\underline{p}(t)$ một cách cụ thể.

Để tránh điều bất cập trên, người ta thường xác định $p(\underline{x})$ thông qua nghiệm $B_t(\underline{x})$ của phương trình vi phân Hamilton–Jacobi. Phương pháp này được tóm tắt như sau.

Gọi $\underline{u}(t)=\underline{u}(\underline{x}(t),t)$ là tín hiệu điều khiển tối ưu đưa đối tượng từ điểm đầu $x_0=\underline{x}(0)$ tới điểm cuối $\underline{x}_T=\underline{x}(T)$ và $\underline{x}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tối ưu tương ứng. Đặt:

$$B_t(\underline{x}) = \int_T^t g(x(\tau),u(\tau))d\tau = \int_T^t g(\underline{x}(\tau),\underline{u}(\underline{x}(\tau),\tau))d\tau$$

Vậy thì tại điểm cuối phải có:

$$B_T(\underline{x}_T)=0$$

và:

$$g(\underline{x},\underline{u}) = \frac{dB_t(\underline{x})}{dt} = \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial x}\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}f(\underline{x},\underline{u})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial x}\underline{f}(\underline{x},\underline{u}) - g(\underline{x},\underline{u})=0$$

Điều này chỉ rằng $\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$ đã giữ vai trò của p^T trong hàm Hamilton, hay:

$$\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + H\left[\underline{x},\underline{u},\left(\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T\right]=0$$

Gợi ý trên đưa đến:

Định lý 2.12: Xét bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}), \quad \text{với } \underline{x}_T = \underline{x}(T) \text{ cố định và cho trước} & (2.81a) \\ Q(\underline{x},\underline{u}) = \int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min & (2.81b) \end{cases}$$

Gọi $\underline{u}(\underline{x},\underline{p})$ là nghiệm của:

$$\underline{u}(\underline{x},\underline{p}) = \arg\max_{\tilde{u}\in U} H(\underline{x},\underline{\tilde{u}},\underline{p}) \qquad (2.82a)$$

và $B_t(\underline{x})$ là nghiệm của *phương trình Hamilton Jacobi*:

$$\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + H\left[\underline{x},\underline{u}\left(\underline{x},\left(\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T\right),\left(\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T\right] = 0 \qquad (2.82b)$$

thỏa mãn điều kiện biên $B_T(\underline{x}_T)=0$. Khi đó, nếu như tín hiệu:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}\left(\underline{x},\left(\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T\right) \qquad (2.83)$$

đưa đối tượng (2.81a) tới được $\underline{x}_T = \underline{x}(T)$, thì:

a) Tín hiệu $\underline{u}(\underline{x})$ xác định theo (2.83) là *mô hình bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái* của bài toán đã cho (*điều kiện đủ*).

b) $\underline{p}(\underline{x}) = \left(\dfrac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T$

Ta sẽ bỏ qua phần chứng minh định lý. Những bạn đọc nào thực sự quan tâm tới lời chứng minh có thể tìm thấy nó trong tài liệu [1], [45], hoặc tham khảo mục 2.1.4 của quyển sách này. Tuy nhiên để minh họa, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.13: (Minh họa ý nghĩa phương trình Hamilton Jacobi)

Xét bài toán điều khiển tối ưu tác động nhanh cho đối tượng:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{với } |u|\le 1, \text{ điểm cuối } x_T=0.$$

Theo nguyên lý cực đại thì tín hiệu điều khiển tối ưu $u(t)$ phải thỏa mãn:

$$H(x,u,p) = up - 1 \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{sgn}(p)$$

trong đó

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = k \text{ (hằng số)}$$

Như vậy, trong toàn bộ khoảng thời gian xảy ra quá trình tối ưu $0\le t<T$ tín hiệu điều khiển tối ưu phải là hằng số hoặc 1, hoặc −1 và điều này phụ thuộc vào điểm trạng thái xuất phát $x_0=x(0)$ tuỳ ý.

1) Nếu $u=1$ thì do

$$\frac{dx}{dt}=1 \quad\Rightarrow\quad x(t)=t+x_0 \quad \text{và} \quad x_T=x(T)=0 \quad \text{với} \quad T=-x_0>0$$

nên phải có $x_0<0$.

2) Tương tự nếu $u=-1$ thì do

$$\frac{dx}{dt}=-1 \quad\Rightarrow\quad x(t)=-t+x_0 \quad \text{và} \quad x_T=x(T)=0 \quad \text{với} \quad T=x_0>0$$

nên phải có $x_0>0$.

Suy ra bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái $u(x)$ với x tuỳ ý là (hình 2.24):

$$u(x)=-\mathrm{sgn}(x)$$

Ta cũng sẽ thu được kết quả trên nhờ định lý 2.12 mà cụ thể là từ phương trình vi phân Hamilton-Jacobi:

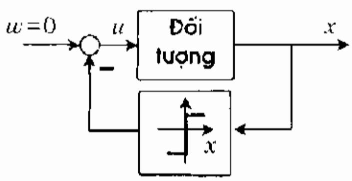
$$0=\frac{\partial B_t(x)}{\partial t}+\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}-1=\frac{\partial B_t(x)}{\partial t}+\left|\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}\right|-1$$

với điều kiện biên $B_t(x_T)=0$. Có thể thấy một trong các nghiệm đó là:

$$B_t(x)=\pm x$$

Song để nghiệm $u=\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}\right)=\pm 1$ đưa được đối tượng từ $x\neq 0$ tuỳ ý tới điểm cuối $x_T=0$ thì phải có:

$$u=\begin{cases}1 & \text{nếu} \quad x<0\\ -1 & \text{nếu} \quad x>0\end{cases}$$



Hình 2.24: Minh hoạ ví dụ 2.13

Vậy:

$$u(x)=-\mathrm{sgn}(x).$$ □

Chú ý: Về phương trình đạo hàm riêng Hamilton–Jacobi (2.82b) ta nên lưu ý:

1) Trong nhiều tài liệu, phương trình này còn được gọi là Hamilton–Jacobi–Bellman để ghi nhận công lao của Richard Bellman (1920–1984), người đi đầu trong việc phát hiện ý nghĩa ứng dụng của phương trình Hamilton–Jacobi quen biết của cơ học cổ điển đối với lĩnh vực điều khiển tối ưu động hiện đại (xem thêm mục 2.4.4).

2) Cho đến nay chưa có được một kết luận nào đảm bảo cho sự tồn tại nghiệm $B_t(\underline{x})$ của phương trình vi phân đạo hàm riêng Hamilton–Jacobi. Hơn nữa, cho dù tồn tại nghiệm $B_t(\underline{x})$ thì lại chưa đảm bảo được rằng vector $p(t)=\left(\frac{\partial B_t(x)}{\partial \underline{x}}\right)^T$ sẽ là biến đồng trạng thái của đối tượng (thỏa mãn phương trình Euler–Lagrange).

3) Định lý 2.12 chỉ là điều kiện đủ. Tức là nếu phương trình Hamilton–Jacobi không có nghiệm thì không có nghĩa bài toán điều khiển tối ưu (2.81) là vô nghiệm, vì rất có thể tồn tại vector $p(t)$ không đồng nhất bằng 0 thỏa mãn nguyên lý cực đại, song không phải là nghiệm $\frac{\partial B_t(x)}{\partial \underline{x}}$ của phương trình Hamilton–Jacobi.

2.4 Phương pháp quy hoạch động

Trong khi hai phương pháp vừa được trình bày, phương pháp biến phân (mục 2.2) và nguyên lý cực đại (mục 2.3), được bắt nguồn từ bài toán tối ưu liên tục thì phương pháp quy hoạch động của Bellman lại có xuất xứ từ bài toán tối ưu không liên tục với mô hình đối tượng dạng (xem lại công thức (2.5), mục 2.1.1):

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \tag{2.84a}$$

trong đó $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ là vector giá trị trạng thái, $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$ là vector giá trị tín hiệu điều khiển tại thời điểm $t=kT_a$ được giữ lại trong khoảng thời gian $kT_a \le t<(k+1)T_a$ giữa hai lần trích mẫu:

$$\underline{x}_k=\begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_k=\begin{pmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_m^k \end{pmatrix}, \quad \underline{f}=\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \end{pmatrix} \tag{2.84b}$$

Nhiệm vụ của bài toán điều khiển tối ưu là xác định dãy vector gồm N các giá trị tín hiệu điều khiển tối ưu:

$$\{\underline{u}_0,\ \underline{u}_1,\ \cdots,\ \underline{u}_{N-1}\}$$

sao cho với nó, đối tượng đi được từ trạng thái đầu $\underline{x}_0$ cho trước tới được điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N$ cũng cho trước sau đúng N bước điều khiển, đồng thời hàm mục tiêu:

$$Q=\sum_{k=0}^{N-1} g(\underline{x}_k,\underline{u}_k) \tag{2.84c}$$

đạt giá trị nhỏ nhất (xem lại định nghĩa 2.2, mục 2.1.1).

Rõ ràng bài toán tối ưu vừa phát biểu trên thuộc lớp *các bài toán tối ưu không liên tục, có điểm trạng thái đầu, điểm trạng thái cuối, khoảng thời gian điều khiển là xác định hữu hạn và cho trước*. Về mặt nguyên tắc, bài toán tối ưu động này có thể chuyển được về dạng bài toán tối ưu tĩnh bằng cách biểu diễn lặp N+1 điểm trạng thái $\underline{x}_k$, $k=0,1,\ldots,N$ theo $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \cdots, \underline{u}_{N-1}$ như sau:

$$g(\underline{x}_1,\underline{u}_1)=g\big(\underline{f}(\underline{x}_0,\underline{u}_0),\underline{u}_1\big)$$

$$g(\underline{x}_2,\underline{u}_2)=g\big(\underline{f}(\underline{x}_1,\underline{u}_1),\underline{u}_2\big)=g\big(\underline{f}(\underline{f}(\underline{x}_0,\underline{u}_0),\underline{u}_1),\underline{u}_2\big)$$

$$g(\underline{x}_3,\underline{u}_3)=g\big(\underline{f}(\underline{x}_2,\underline{u}_2),\underline{u}_3\big)=g\big(\underline{f}(\underline{f}(\underline{f}(\underline{x}_1,\underline{u}_1),\underline{u}_2),\underline{u}_2),\underline{u}_3\big)$$

$$\vdots$$

rồi thay chúng vào hàm mục tiêu (2.84c) để có hàm mục tiêu mới với mN tham số. Song do số lượng tham số là mN sẽ quá lớn nên việc chuyển bài toán tối ưu động về dạng bài toán tối ưu tĩnh như vậy không phải là một phương pháp tốt.

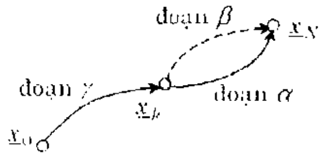
Phương pháp hữu hiệu để giải trực tiếp bài toán tối ưu động không liên tục trên là phương pháp quy hoạch động của Bellman (*dynamic programing*). Nó có dạng của một thuật toán truy hồi, chia bài toán tối ưu tĩnh với mN tham số thành dãy luật quyết định tối ưu gồm N luật $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \cdots, \underline{u}_{N-1}$ với mỗi luật gồm m phần tử và toàn bộ phép chia được thực hiện theo nguyên lý tối ưu của Bellman được trình bày dưới đây.

2.4.1 Nội dung phương pháp

Nguyên lý tối ưu của Bellman

Nguyên lý tối ưu của Bellman có nội dung như sau: "*Mỗi đoạn cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu cũng sẽ là một quỹ đạo trạng thái tối ưu*".

Có thể kiểm chứng được ngay tính đúng đắn của nguyên lý Bellman nhờ hình minh họa 2.25. Giả sử quỹ đạo liền nét đi từ điểm $\underline{x}_0$ qua $\underline{x}_k$ đến $\underline{x}_N$ là tối ưu (gồm hai đoạn $\gamma\alpha$) trong đó phần quỹ đạo α từ $\underline{x}_k$ đến $\underline{x}_N$ lại không phải tối ưu. Vậy thì phải tồn tại đoạn tối ưu từ $\underline{x}_k$ đến $\underline{x}_N$ (đoạn β). Như vậy hàm mục tiêu Q từ $\underline{x}_k$ đến $\underline{x}_N$ theo đoạn β phải có giá trị nhỏ hơn là theo đoạn α và do đó dọc theo hai đoạn $\gamma\beta$ hàm Q có giá trị nhỏ hơn là theo đoạn $\gamma\alpha$. Điều này trái với giả thiết rằng đoạn $\gamma\alpha$ là tối ưu.



Hình 2.25: Mô tả nguyên lý tối ưu Bellman

Tất nhiên rằng phát biểu trên của nguyên lý tối ưu cũng đúng với một đoạn bất kỳ của quỹ đạo trạng thái tối ưu chứ không chỉ riêng đoạn cuối, song ở phương pháp quy hoạch động ta chỉ cần sử dụng đoạn cuối.

Dựa vào nguyên lý tối ưu, ta sẽ xác định được quan hệ $\underline{u}_k(\underline{x}_k)$, $k=0,1,\ldots,N-1$ cần phải có giữa tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}_k$ và trạng thái tối ưu $\underline{x}_k$ bằng cách lập công thức biểu diễn giá trị hàm mục tiêu (2.84c) cho từng đoạn cuối như sau (gọi là *hàm Bellman*):

$$B_k = \sum_{i=k}^{N-1} g(\underline{x}_i, \underline{u}_i), \quad k=0,1,\ldots,N. \tag{2.85}$$

Các hàm Bellman B_k, $k=N,N-1,\ldots,1,0$ phải có giá trị nhỏ nhất dọc theo quỹ đạo trạng thái tối ưu. Bởi vậy, khi đã có giá trị hàm B_{k+1} của đoạn cuối tối ưu tính từ điểm trạng thái $\underline{x}_{k+1}$ ta cũng sẽ xác định được quan hệ $\underline{u}_k(\underline{x}_k)$ phải có của tín hiệu điều khiển tối ưu ứng với điểm trạng thái $\underline{x}_k$ theo quy tắc:

$$B_k \underset{u_k}{\rightarrow} \min \quad \Leftrightarrow \quad g(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + B_{k+1} \underset{\underline{u}_k}{\rightarrow} \min \tag{2.86a}$$

hay

$$\min_{u_k,\ldots,u_{N-1}} B_k = \min_{u_k} \left(g(\underline{x}_k, u_k) + \min_{\underline{u}_{k+1},\ldots,\underline{u}_{N-1}} B_{k+1} \right) \tag{2.86b}$$

trong đó các giá trị biên B_0, B_N được xác định từ (2.85) như sau:

$$B_N = 0 \quad \text{và} \quad B_0 = Q_{\min} \tag{2.87}$$

Hai vòng tính của phương pháp: Vòng ngược (kỹ thuật nhúng) và vòng xuôi

Công thức (2.86) với điểm xuất phát (2.87) là công cụ giúp ta xây dựng được các bước xác định quan hệ $\underline{u}_k(\underline{x}_k)$ phải có giữa tín hiệu điều khiển và trạng thái tối ưu. Ta sẽ gọi các bước tính này là *vòng ngược* vì nó có thứ tự thực hiện đi ngược từ $k=N$ (ứng với điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N$) đến $k=0$ (ứng với điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$). Vòng tính ngược này còn được Bellman gọi là kỹ thuật nhúng (*imbedding technique*).

Nội dung của *vòng ngược* như sau:

- Bắt đầu từ $k=N$ ta có $B_N = 0$.

  Với $k=N-1$ thì từ:

  $$\underline{x}_N = \underline{f}(\underline{x}_{N-1}, \underline{u}_{N-1})$$

  và do $\underline{x}_N$ là đã cho trước nên ta có được ngay quan hệ tối ưu:

  $$\underline{u}_{N-1}(\underline{x}_{N-1}) \tag{2.88a}$$

Thay quan hệ (2.88a) tìm được vào:

$$B_{N-1} = g(\underline{x}_{N-1}, \underline{u}_{N-1}) = B_{N-1}(x_{N-1}) \qquad (2.88b)$$

sẽ được hàm B_{N-1} tối ưu chỉ còn phụ thuộc theo $\underline{x}_{N-1}$.

Với $N-2 \geq k \geq 0$ thì do hàm B_{k+1} chỉ phụ thuộc theo $\underline{x}_{k+1}$, tức là $B_{k+1}(\underline{x}_{k+1})$, nên:

$$\begin{aligned} B_k &= g(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + B_{k+1}(\underline{x}_{k+1}) \\ &= g(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + B_{k+1}\left(f(\underline{x}_k, u_k)\right) \underset{u_k}{\rightarrow} \min \end{aligned} \qquad (2.89a)$$

Giải bài toán tối ưu (tĩnh) trên ta có quan hệ tối ưu:

$$\underline{u}_k(x_k) . \qquad (2.89b)$$

Thay quan hệ (2.89b) vừa tìm được vào (2.89) để được hàm Bellman tối ưu:

$$B_k = B_k(\underline{x}_k) \qquad (2.89c)$$

Bằng N bước tính ngược từ $k=N-1$ đến $k=0$ như trên ta có được N công thức mô tả quan hệ $\underline{u}_k = \underline{u}_k(\underline{x}_k)$ phải có giữa tín hiệu điều khiển và trạng thái tối ưu. Sau khi đã có các quan hệ này thì từng giá trị cụ thể của $\underline{u}_k$ sẽ được tính nhờ mô hình (2.84a) mô tả đối tượng. Ta gọi các bước tính này là *vòng xuôi* vì nó được thực hiện lần lượt từ $k=0$ tới $k=N-1$.

Nội dung của *vòng xuôi* như sau:

- Với $k=0$ có:

$$\underline{u}_0 = \underline{u}_0(\underline{x}_0) \quad \text{vì đã có } \underline{x}_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}_1 = \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{u}_0)$$

- Với $1 \leq k \leq N-1$ cũng có:

$$\underline{u}_k = \underline{u}_k(\underline{x}_k)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k, u_k)$$

Ví dụ 2.14: (Minh họa phương pháp quy hoạch động)

Xét đối tượng là khâu quán tính bậc nhất có mô hình trạng thái

$$x_{k+1} = \frac{x_k + u_k}{2} .$$

Đối tượng cần được điều khiển qua 4 bước ($N=4$) từ $x_0=4$ đến $x_4=0$ sao cho

$$Q = \sum_{k=0}^{3}(x_k^2 + u_k^2) \rightarrow \min.$$

Phương trình Bellman của ví dụ này có dạng.

$$B_k(x_k) = (x_k^2 + u_k^2) + B_{k+1}$$

Với vòng ngược ta có:

$k=3$: Từ điều kiện $\frac{1}{2}(x_3 + u_3) = x_4 = 0$ có ngay được $u_3 = -x_3$.

Suy ra hàm Bellman tối ưu $B_3 = x_3^2 + u_3^2 = 2x_3^2$.

$k=2$: Ta phải tìm quan hệ $u_2(x_2)$ tối ưu để được:

$$B_2 = (x_2^2 + u_2^2) + B_3 = (x_2^2 + u_2^2) + 2\left(\frac{x_2 + u_2}{2}\right)^2 \underset{u_2}{\rightarrow} \min$$

Do đây là bài toán tối ưu không bị ràng buộc nên để tìm $u_2(x_2)$ ta có thể sử dụng điều kiện cần $\frac{\partial B_2}{\partial u_2} = 0$. Khi đó sẽ có $u_2 = -\frac{x_2}{3}$. Vậy:

$$B_2 = x_2^2 + \left(-\frac{x_2}{3}\right)^2 + 2\left[\frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{x_2}{3}\right)\right]^2 = \frac{4x_2^2}{3}.$$

$k=1$: Tương tự, ta phải tìm quan hệ tối ưu $u_1(x_1)$ để có:

$$B_1 = (x_1^2 + u_1^2) + B_2 = (x_1^2 + u_1^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{x_1 + u_1}{2}\right)^2 \underset{u_1}{\rightarrow} \min$$

Từ điều kiện cần $\frac{\partial B_1}{\partial u_1} = 0$ được $u_1 = -\frac{x_1}{4}$. Suy ra

$$B_1 = x_1^2 + \left(-\frac{x_1}{4}\right)^2 + \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{x_1}{4}\right)\right]^2 = \frac{5x_1^2}{4}.$$

$k=0$: Để tìm quan hệ tối ưu $u_0(x_0)$ từ

$$B_0 = (x_0^2 + u_0^2) + B_1 = (x_0^2 + u_0^2) + \frac{5}{4}\left(\frac{x_0 + u_0}{2}\right)^2 \underset{u_0}{\rightarrow} \min$$

ta sử dụng điều kiện cần $\frac{\partial B_0}{\partial u_0} = 0$ và được $u_0 = -\frac{5x_0}{21}$. Suy ra:

$$B_0 = x_0^2 + \left(-\frac{5x_0}{21}\right)^2 + \frac{5}{4}\left[\frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{5x_0}{21}\right)\right]^2 = \frac{26x_0^2}{21}.$$

Vòng xuôi thì:

$k=0$: $\quad x_0=4 \quad \Rightarrow \quad u_0 = -\dfrac{5x_0}{21} = -\dfrac{20}{21}$ và $\quad Q_{\min} = B_0 = \dfrac{416}{21}$.

$k=1$: $\quad x_1 = \dfrac{x_0+u_0}{2} = \dfrac{32}{21} \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\dfrac{x_1}{4} = -\dfrac{8}{21}$

$k=2$: $\quad x_2 = \dfrac{x_1+u_1}{2} = \dfrac{12}{21} \quad \Rightarrow \quad u_2 = -\dfrac{x_2}{3} = -\dfrac{4}{21}$

$k=3$: $\quad x_3 = \dfrac{x_2+u_2}{2} = \dfrac{4}{21} \quad \Rightarrow \quad u_3 = -x_3 = -\dfrac{4}{21}$

Đáp số: $\quad \{u_k\} = \{-\dfrac{20}{21}, -\dfrac{8}{21}, -\dfrac{4}{21}, -\dfrac{4}{21}\}$. ❐

Ví dụ 2.15: (Minh họa phương pháp quy hoạch động)

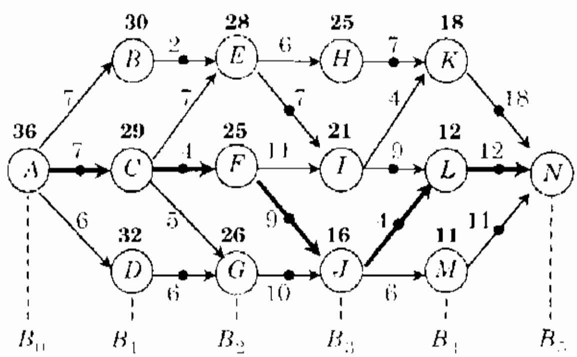
Để minh họa tiếp phương pháp quy hoạch động Bellman ta xét bài toán tối ưu không liên tục được mô tả trực quan ở hình 2.26. Trong hình này các điểm trạng thái được đánh dấu bằng những ký tự A, B, ..., N. Các con số trên từng đoạn nối các điểm trạng thái chỉ thị giá trị hàm mục tiêu Q có được với đoạn đó, tức là chi phí cho riêng quá trình chuyển đổi trạng thái đó.

Bài toán đặt ra ở đây là xác định đường nối tối ưu từ điểm trạng thái đầu là A tới điểm trạng thái cuối là N sao cho tổng chi phí dọc theo các đường nối đó là nhỏ nhất.

1) *Trước hết ta tiến hành vòng ngược* (kỹ thuật nhúng):

Nhiệm vụ của vòng ngược này trong quá trình đi ngược từ điểm cuối N đến điểm đầu A là phải xác định được tất cả các đoạn nối có thể thuộc về quỹ đạo tối ưu, tức là xác định các quan hệ tối ưu $u_k(x_k)$ phản có.

Trong mỗi bước đi ngược, theo nguyên lý tối ưu ta xác định đoạn nối sao cho ứng với nó B_k nhận giá trị nhỏ nhất. Chú ý rằng giá trị B_k nhỏ nhất này phụ thuộc vào từng điểm trạng thái x_k. Ứng với x_k khác nhau ta có giá trị B_k nhỏ nhất khác nhau.



Hình 2.26: Xác định quỹ đạo tối ưu theo Bellman.

Giá trị B_k nhỏ nhất ứng với từng điểm trạng thái x_k

tìm thấy, sẽ được ghi đậm lên phía trên điểm trạng thái x_j. So với ví dụ 2.14, việc làm này chính là xác định quan hệ $u_k(x_k)$ từ điều kiện $B_k \to \min$ của vòng ngược. Bằng cách ghi giá trị nhỏ nhất tìm được phía trên điểm trạng thái thì khi xác định giá trị B_k, ta không cần phải tính giá trị của B_k từ điểm trạng thái đó tới tận điểm cuối N mà chỉ cần cộng số có trên đoạn nối với giá trị B_{k+1} của điểm trạng thái nó đi tới là đủ.

$k=4$: Xuất phát ngược từ N có 3 đường dẫn từ 3 điểm trạng thái khác nhau là K, L và M. Do đó tại mỗi điểm trạng thái này không có sự lựa chọn nào khác. Ta đánh dấu chúng bằng ký hiệu •. Đây chính là quan hệ $u_4(x_4)$ cần tìm. Giá trị B_4 tương ứng cần thiết để đến được N là các số ta in đậm phía trên từng điểm trạng thái K, L, M.

$k=3$: Tiếp theo ta đi ngược từ các điểm trạng thái K, L, M về H, I, J và xác định những đường dẫn mà với nó B_3 có giá trị nhỏ nhất.

Chẳng hạn từ I ta có hai đường dẫn chỉ quan hệ $u_3(x_3)$, một dẫn tới K và một dẫn tới L. Cộng 4 với B_4=18 được 22 và 9 với B_4=12 được 21. Vì 21<22 nên B_3=21. Ta ghi lại B_3=21 lên trên điểm I và đó chính là giá trị B_3 nhỏ nhất ứng với điểm trạng thái I. Đường nối từ I mà theo đó có B_3=21 là đường dẫn tới L. Nó biểu diễn mối quan hệ tối ưu $u_3(x_3)$ phải có cho điểm trạng thái I và được đánh dấu bằng •

Tương tự như vậy nhưng đi từ điểm trạng thái J ta cũng xác định được đoạn nối thứ hai của quan hệ tối ưu $u_3(x_3)$. Đó là đường nối từ J tới L có giá trị B_3 nhỏ nhất là B_3=16. Nó cũng được đánh dấu bằng • trong hình 2.26 . . .

Từ điểm trạng thái H có một đường nối duy nhất là tới điểm trạng thái K. Do đó nó phải thuộc về đoạn nối tối ưu và cũng được đánh dấu bởi •. Giá trị B_3 nhỏ nhất tương ứng là B_3=25.

⋮

Cứ tiếp tục theo đúng trình tự các bước như vậy cho tới điểm trạng thái A là ta đã hoàn thành vòng ngược.

2) *Tiếp theo ta thực hiện vòng xuôi:*

Sau khi thực hiện xong vòng ngược thì các quan hệ tối ưu $u_k(x_k)$ là những đường nối đã được đánh dấu •. Trong vòng xuôi, ta chỉ cần xác định quỹ đạo tối ưu bằng cách từ A theo các đường nối đã được đánh dấu •. Trong hình 2.26 thì quỹ đạo tối ưu tìm được là đường đậm nét. Giá trị Q nhỏ nhất chính là B_0=36. □

2.4.2 Mở rộng cho trường hợp hàm mục tiêu không ở dạng tổng

Có thể thấy phương pháp quy hoạch động được xây dựng trên cơ sở các tính chất sau đây của hàm mục tiêu Q, cụ thể là của các hàm Bellman (2.85):

Các hàm Bellman $B_0, B_1, \ldots, B_N$ tạo thành dãy không giảm.

Mỗi một hàm B_k luôn viết tách được thành

$$B_k = g(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + B_{k+1}$$

trong đó hàm

$$B_{k+1} = \sum_{j=k+1}^{N-1} g(\underline{x}_j, \underline{u}_j)$$

chỉ chứa các giá trị $\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_{k+2}, \ldots, \underline{x}_{N-1}$ và $\underline{u}_{k+1}, \underline{u}_{k+2}, \ldots, \underline{u}_{N-1}$.

Từ đây, người ta đã mở rộng phương pháp quy hoạch động cho cả những lớp bài toán tối ưu có hàm mục tiêu không ở dạng tổng. Một cách tổng quát thì phương pháp quy hoạch động cũng áp dụng được cho cả những bài toán có hàm mục tiêu dạng:

$$Q = B_0(\underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_{N-1}, \underline{u}_0, \ldots, \underline{u}_{N-1})$$

thỏa mãn:

1) Tách được, tức là luôn biểu diễn được thành:

$$B_k = B_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k, B_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.90}$$

trong đó B_{k+1} là hàm chỉ chứa các biến $\underline{x}_{k+1}, \ldots, \underline{x}_{N-1}$ và $\underline{u}_{k+1}, \ldots, \underline{u}_{N-1}$.

Ví dụ: Hàm $Q = (x_0^2 + u_0^2) + (x_1^2 + u_1^2)(x_2^2 + u_2^2)$ là tách được với

$$B_2 = (x_2^2 + u_2^2), \quad B_1 = (x_1^2 + u_1^2)B_2 \quad \text{và} \quad B_0 = Q = (x_0^2 + u_0^2) + B_1$$

Nhưng hàm $Q = (x_1^2 + u_1^2) + (x_2^2 + u_2^2)(x_0^2 + u_0^2)$ thì không tách được.

2) Khi $\underline{x}_k, \underline{u}_k$ được xem là hằng thì hàm B_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ trong công thức (2.90) không nghịch biến với đối số B_{k+1}.

Ví dụ: Hàm $Q = (x_0^2 + u_0^2) + (x_1^2 + u_1^2)(x_2^2 + u_2^2)$ có

$$B_2 = (x_2^2 + u_2^2), \quad B_1 = (x_1^2 + u_1^2)B_2 \quad \text{và} \quad B_0 = Q = (x_0^2 + u_0^2) + B_1$$

trong đó B_1 không nghịch biến với B_2 vì $(x_1^2 + u_1^2) \geq 0$ và B_0 cũng không nghịch biến với B_1.

Một bài toán tối ưu không liên tục có hàm mục tiêu với hai tính chất như trên thì đương nhiên cũng sẽ thỏa mãn nguyên lý tối ưu của Bellman dạng tổng quát như sau:

$$\min_{u_k,\ldots,u_{N-1}} B_k(\underline{x}_k,\underline{u}_k,B_{k+1}) = \min_{u_k} B_k\left[x_k, u_k, \min_{u_{k+1},\ldots,u_{N-1}} B_{k+1}\right] \qquad (2.91)$$

và do đó nghiệm của nó cũng được tìm theo trình tự các bước của thuật toán đã nêu ở mục 2.4.1 bao gồm vòng ngược (kỹ thuật nhúng) và vòng xuôi.

Ví dụ 2.16: (Bài toán tối ưu không liên tục có hàm mục tiêu không ở dạng tổng)

Tìm dãy tín hiệu tối ưu u_0, u_1, u_2 để đối tượng có mô hình trạng thái

$$x_{k+1} = \frac{x_k + u_k}{2},$$

đưa được từ từ $x_0 = 3$ đến $x_3 = 0$ ($N = 3$) và

$$Q = (3x_0 + u_0)^2 + (x_1^2 + u_1^2)(x_2^2 + u_2^2) \to \min.$$

Hàm mục tiêu trên trên tách được thành:

$$B_2 = (x_2^2 + u_2^2), \quad B_1 = (x_1^2 + u_1^2)B_2 \quad \text{và} \quad B_0 = Q = (3x_0 + u_0)^2 + B_1$$

đồng thời B_1 không nghịch biến với B_2 và B_0 cũng không nghịch biến với B_1. Vậy ta áp dụng được phương pháp quy hoạch động để tìm nghiệm của nó.

1) *Thực hiện vòng ngược* (kỹ thuật nhúng) *được:*

$k=2$: Từ điều kiện $\frac{x_2 + u_2}{2} = x_3 = 0$ có được ngay $u_2 = -x_2$. Suy ra:

$$B_2 = (x_2^2 + u_2^2) = 2x_2^2$$

$k=1$: $B_1 = (x_1^2 + u_1^2)2x_2^2 = (x_1^2 + u_1^2)\frac{1}{2}(x_1 + u_1)^2 \to \min$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial u_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -x_1 \ \text{ và } \ B_1 = 0.$$

$k=0$: $B_0 = (3x_0 + u_0)^2 + B_1 = (3x_0 + u_0)^2 \to \min$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_0}{\partial u_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = -3x_0.$$

2) *Thực hiện vòng xuôi ta được:*

$k=0$: $x_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad u_0 = -3x_0 = -9.$

$k=1$: $x_1 = \frac{x_0 + u_0}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -x_1 = 3.$

$k=2$: $x_2=\frac{x_1+u_1}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad u_2=-x_2=0$. □

2.4.3 Mở rộng cho trường hợp điểm cuối không cố định

Có thể thấy nguyên lý tối ưu của Bellman không sử dụng giả thiết điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N$ là cố định. Điều này dựa đến kết luận rằng thuật toán xác định dãy tín hiệu điều khiển tối ưu bao gồm hai vòng tính (vòng ngược, vòng xuôi) trình bày ở trên cũng áp dụng được cho cả lớp các bài toán tối ưu không liên tục có điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N$ không cố định (bị ràng buộc bởi điều kiện S_T hoặc tự do). Khi đó ta chỉ cần thay bước đầu tiên của vòng ngược là:

Tìm quan hệ $\underline{u}_{N-1}(\underline{x}_{N-1})$ từ điều kiện $\underline{x}_N=\underline{f}(\underline{x}_{N-1},\underline{u}_{N-1})$

bằng:

Tìm quan hệ $\underline{u}_{N-1}(\underline{x}_{N-1})$ từ điều kiện $\min\limits_{u_{N-1}} B_{N-1}$ trong đó nếu $\underline{x}_N$ bị ràng buộc bởi S_T thì còn có thêm điều kiện biên $f(\underline{x}_{N-1},\underline{u}_{N-1})\in S_T$.

Ví dụ **2.17** ([12]): (Trường hợp điểm cuối tự do)

Cho bài toán tối ưu không liên tục:

$$\begin{cases} x_{k+1}=ax_k+bu_k, & a,\ b \text{ là hai hằng số, } x_0 \text{ cho trước, } x_N \text{ là tùy ý} \\ Q=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(x_k^2+u_k^2) & N \text{ là cho trước} \end{cases}$$

1) *Trước hết, thực hiện vòng ngược* ta có:

$k=N-1$: Từ điều kiện: $B_{N-1}=\frac{1}{2}(x_{N-1}^2+u_{N-1}^2)\to\min$

có được ngay: $u_{N-1}=0$. Suy ra: $B_{N-1}=h_0x_{N-1}^2$ trong đó $h_0=\frac{1}{2}$.

$k=N-2$: Từ
$$\begin{cases} B_{N-2}=\frac{1}{2}(x_{N-2}^2+u_{N-2}^2)+h_0x_{N-1}^2\to\min \\ x_{N-1}=ax_{N-2}+bu_{N-2} \end{cases}$$

được: $u_{N-2}=\frac{-2abh_0}{1+2b^2h_0}x_{N-2}$ và $B_{N-2}=h_1x_{N-2}^2$

với $h_1=(\frac{1}{2}+h_0a^2)-(\frac{1}{2}+h_0b^2)\frac{4a^2b^2h_0^2}{(1+2b^2h_0)^2}$

$\vdots$

$k=N-j$: Từ: $\begin{cases} B_{N-j} = \frac{1}{2}(x_{N-j}^2 + u_{N-j}^2) + h_{j-2}\, x_{N-j+1}^2 \to \min \\ x_{N-j+1} = a x_{N-j} + b u_{N-j} \end{cases}$

được:

$$u_{N-j} = \frac{-2abh_{j-2}}{1+2b^2 h_{j-2}}\, x_{N-j} \quad \text{và} \quad B_{N-j} = h_{j-1}\, x_{N-j}^2$$

$$\text{với } \; h_{j-1} = (\frac{1}{2} + h_{j-2}a^2) - (\frac{1}{2} + h_{j-2}b^2)\, \frac{4a^2b^2h_{j-2}^2}{(1+2b^2 h_{j-2})^2}$$

$\vdots$

2) *Thực hiện vòng xuôi có:*

$$u_k = \frac{-2abh_{N-k-2}}{1+2b^2 h_{N-k-2}}\, x_k \quad \text{và} \quad x_{k+1} = \frac{a}{1+2b^2 h_{N-k-1}}\, x_k$$

với $k=0,1,\cdots,N-1$ ❑

2.4.4 Mở rộng cho hệ liên tục và phương trình Hamilton–Jacobi–Bellman

Có thể thấy nguyên lý tối ưu của Bellman, phát biểu tại mục 2.4.1, không giới hạn chỉ riêng cho hệ không liên tục. Bởi vậy phương pháp quy hoạch động được xây dựng trên đó cũng sẽ áp dụng được cho cả hệ liên tục.

Bài toán liên tục đặt ra là: "Hãy xác định tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ để:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) & (2.92a) \\ Q = \int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min & (2.92b) \end{cases}$$

trong đó điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ là *cho trước*, điểm trạng thái cuối $\underline{x}_T=\underline{x}(T)$ *có thể tùy ý hoặc cho trước*, và khoảng thời gian T xảy ra quá trình tối ưu là *cho trước*".

Trước hết ta xây dựng hàm Bellman (2.85) cho trường hợp hệ liên tục:

$$J_t(\underline{x},\underline{u}) = \int_t^T g(\underline{x},\underline{u})dt \tag{2.93}$$

Khi đó, một cách hoàn toàn tương ứng, nguyên lý tối ưu của Bellman trở thành:

$$\min_{\underline{u}} J_t(\underline{x},\underline{u}) = \min_{\underline{u}} \Big\{ \int_t^{\tau} g(\underline{x},\underline{u})dt + \min_{\underline{\tilde{u}}} J_\tau(\underline{x},\underline{\tilde{u}}) \Big\} \quad \text{với} \quad 0\le t<\tau<T \qquad (2.94a)$$

Từ nguyên lý tối ưu này ta xác định được quan hệ phải có $\underline{u}=\underline{u}(\underline{x},t)$ giữa tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)$ và trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ tại một điểm thời gian $0\le t\le T$ bất kỳ. Thay ngược quan hệ $\underline{u}(\underline{x},t)$ đó vào J_t ta được *hàm Bellman tối ưu* chỉ còn phụ thuộc thời gian t và biến trạng thái tối ưu $\underline{x}(t)$ như sau:

$$J_t(\underline{x},\underline{u}(\underline{x},t)) = B_t(\underline{x}) \qquad (2.94b)$$

Hiển nhiên rằng tại điểm cuối $\underline{x}_T=\underline{x}(T)$ luôn có:

$$B_T(\underline{x}_T) = 0$$

Và ta đi đến:

Định lý 2.13 (Phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman): Nếu $\underline{u}(t),\underline{x}(t)$ là nghiệm bài toán tối ưu (2.92) và $B_t(\underline{x})$ là *hàm Bellman tối ưu* tương ứng, thì sẽ có:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + \dfrac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + g(\underline{x},\underline{u}) = 0 \quad \text{với mọi} \quad 0<t\le T & (2.95a) \\ B_T(\underline{x}_T)=0 & (2.95b) \end{cases}$$

b) $$\underline{u} = \arg\min_{\underline{\tilde{u}}} \Big\{ g(\underline{x},\underline{\tilde{u}}) + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{\tilde{u}}) \Big\} \qquad (2.96)$$

Chứng minh (xem thêm mục 2.3.4 để so sánh):

a) Ký hiệu $\underline{x}(t)=\underline{x}$ và $\underline{x}(t+\varepsilon)=\underline{x}_\varepsilon$, khi đó sẽ có:

$$B_{t+\varepsilon}(\underline{x}_\varepsilon) - B_t(\underline{x}) = \big[B_{t+\varepsilon}(\underline{x}_\varepsilon)-B_{t+\varepsilon}(\underline{x})\big] + \big[B_{t+\varepsilon}(\underline{x})-B_t(\underline{x})\big]$$
$$= \varepsilon \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial x}\frac{d\underline{x}}{dt} + \varepsilon \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + \varepsilon \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t}$$

Mặt khác:

$$B_{t+\varepsilon}(\underline{x}_\varepsilon) - B_t(\underline{x}) = -\int_t^{t+\varepsilon} g(\underline{x},\underline{u})dt = -\varepsilon\, g(\underline{x},\underline{u})$$

Vậy:

$$\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial t} + g(\underline{x},\underline{u}) = 0$$

và đó chính là (2.95a). Đẳng thức (2.95b) được suy ra ngay từ điều hiển nhiên (2.93) và (2.94b).

b) Đi từ (2.94a) và (2.94b) thì:

$$B_t(x) = \min_{\tilde{u}} \{ \int_t^{t+\varepsilon} g(x,\tilde{u})dt + B_{t+\varepsilon}(\underline{x}_\varepsilon) \} \quad \text{trong đó} \quad \underline{x}_\varepsilon = \underline{x}(t+\varepsilon)$$

$$= \min_{\tilde{u}} \{ \varepsilon\, g(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) + B_{t+\varepsilon}(\underline{x}_\varepsilon) \}$$

$$= \min_{\tilde{u}} \{ \varepsilon\, g(x,\tilde{u}) + B_t(\underline{x}) + \varepsilon \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\tilde{u}) + \varepsilon \frac{\partial B_t(x)}{\partial t} \}$$

Suy ra

$$-\frac{\partial B_t(x)}{\partial t} = \min_{\tilde{u}} \{ g(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) + \frac{\partial B_t(x)}{\partial \underline{x}} f(\underline{x},\tilde{u}) \}$$

Kết hợp cùng với (2.95a) được:

$$g(\underline{x},\underline{u}) + \frac{\partial B_t(x)}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) = \min_{\tilde{u}} \{ g(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) + \frac{\partial B_t(x)}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) \}$$

và đó chính là công thức (2.96) phải chứng minh. ❐

Phương trình (2.95) được gọi là *phương trình Hamilton–Jacobi–Bellman*. So sánh với định lý 2.12 thì nó và định lý 2.13 là một cầu nối giữa nguyên lý cực đại Pontryagin và phương pháp quy hoạch động của Bellman. Sự khác nhau nhỏ ở đây chỉ là:

- Dấu của hàm $g(\underline{x},\underline{u})$ trong (2.82) của định lý 2.12 là dấu trừ (–) trong khi ở (2.95a) của định lý 2.13 là cộng (+).
- Cũng như vậy là trong khi nguyên lý cực đại xác định $\underline{u}$ tối ưu theo:

$$\underline{u} = \arg\max_{\tilde{\underline{u}}} \{ -g(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial x} \underline{f}(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) \} \tag{2.97}$$

thì phương pháp quy hoạch động lại xác định theo (2.96), tức là:

$$\underline{u} = \arg\min_{\tilde{\underline{u}}} \{ g(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) + \frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}} f(\underline{x},\tilde{\underline{u}}) \}$$

Tuy nhiên, nếu như ở phương pháp quy hoạch động, ta chỉ cần thay mục đích bài toán:

$$Q = \int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \min$$

thành:

$$-Q = -\int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt \to \max$$

thì (2.96) sẽ trở thành (2.97).

Mặc dù định lý 2.13 chỉ là một điều kiện cần, song trong thực tế người ta vẫn hướng sử dụng nó để xác định tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(t)=\underline{u}(\underline{x}(t),t)$ với các bước như sau.

1) Từ điều kiện b), tức là từ công thức (2.96) ta xác định quan hệ phải có của tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}$ với $\underline{x}$ và $\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$, nói cách khác là xác định:

$$\underline{u}=\underline{u}(\underline{x},\frac{\partial B_t(\underline{x})}{\partial x}) \tag{2.98}$$

2) Thay quan hệ (2.98) vào phương trình vi phân đạo hàm riêng Hamilton-Jacobi-Bellman (2.95) và tìm nghiệm $B_t(\underline{x})$ của nó.

3) Thay nghiệm $B_t(\underline{x})$ tìm được vào (2.98) để có tín hiệu điều khiển tối ưu $\underline{u}(\underline{x},t)$.

Ví dụ 2.18 ([12]): (Minh họa phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman)

Cho bài toán tối ưu liên tục:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}= x+u, \quad x_0=x(0)=1, \quad T=1 \quad \text{và } \underline{x}_T=\underline{x}(T) \text{ là tùy ý} \\ Q=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+u^2)dt \to \min \end{cases}$$

Trước hết, từ (2.96) với:

$$g(x,\tilde{u})+\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}f(x,\tilde{u})=\frac{1}{2}(x^2+\tilde{u}^2)+\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}(x+\tilde{u}) \to \min$$

ta được điều kiện phải có của tín hiệu điều khiển tối ưu u:

$$u=-\frac{\partial B_t(x)}{\partial x}$$

Thay ngược vào phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman (2.95a):

$$0=\frac{\partial B_t}{\partial t}+\frac{\partial B_t}{\partial x}(x-\frac{\partial B_t}{\partial x})+\frac{1}{2}\left(x^2+\left(\frac{\partial B_t}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$=\frac{\partial B_t}{\partial t}+x\frac{\partial B_t}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_t}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}x^2$$

Có thể thấy do phương trình vi phân trên có thành phần độc lập x^2 nên ta có thể thay nghiệm $B_t(x)$ của nó bằng một hàm tách biến như sau:

$$B_t(x)=\lambda(t)x^2. \tag{2.99}$$

Suy ra:

$$\frac{d\lambda}{dt}=2\lambda^2-2\lambda-\frac{1}{2}\quad \text{với điều kiện biên } \lambda(1)=0.$$

Phương trình vi phân trên là phương trình Riccati. Giải ra ta có nghiệm:

$$\lambda(t)=-\frac{1}{2}\;\frac{e^{-\sqrt{2}(1-t)}-e^{\sqrt{2}(1-t)}}{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}(1-t)}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}(1-t)}}$$

Vậy:

$$B_t(x)=-\frac{x^2}{2}\;\frac{e^{-\sqrt{2}(1-t)}-e^{\sqrt{2}(1-t)}}{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}(1-t)}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}(1-t)}}$$

và:

$$u=x\,\frac{e^{-\sqrt{2}(1-t)}-e^{\sqrt{2}(1-t)}}{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}(1-t)}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}(1-t)}}\;.$$ ❐

Câu hỏi ôn tập và bài tập

1) Hãy xác định nghiệm $u(t)$ tối ưu của bài toán:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+u \quad \text{với}\quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0=1 \quad \text{và } T \text{ là cho trước (điểm cuối tự do)}\\ Q(\underline{x},\underline{u})=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T\left[\lambda x^2+(1-\lambda)u^2\right]dt \;\to\; \min \quad \text{với}\quad 0\le\lambda\le 1\end{cases}$$

2) Cho đối tượng với một tín hiệu vào u mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u\quad \text{trong đó}\quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Hãy xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái hoàn toàn (có biện luận) để ổn định đối tượng theo quan điểm tối ưu năng lượng, tức là với bộ điều khiển đó, khi có một nhiễu tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi điểm cân bằng 0 thì sau đó hệ có khả năng tự quay về điểm cân bằng 0 và năng lượng cần thiết cho quá trình tự quay về là nhỏ nhất:

$$Q(\underline{x},u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\underline{x}^T\begin{pmatrix}4&2\\6&10\end{pmatrix}x+\frac{1}{2}u^2\right)dt\to\min.$$

3) Xét bài toán xác định bộ điều khiển $R(t)$ tối ưu phản hồi (dương) trạng thái cho đối tượng không dừng, có điểm đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ và khoảng thời gian T cố định, cho trước:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=A(t)\underline{x}+B(t)\underline{u}\\ Q=\displaystyle\int_0^T[\underline{x}^TC(t)\underline{x}+\underline{u}^TD(t)\underline{u}]dt\;\to\;\min\end{cases}$$

trong đó khi $0 \le t < T$ thì $C(t)$ là ma trận xác định bán dương và $D(t)$ là ma trận xác định dương. Chứng minh rằng

$$R(t) = D^{-1}(t)B^T(t)K(t).$$

với $K(t)$ là nghiệm xác định bán âm của phương trình vi phân Riccati

$$\frac{dK(t)}{dt} = C(t) - A^T(t)K(t) - K(t)A(t) - K(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

thỏa mãn điều kiện biên $K(0) = \Theta$ (ma trận không).

4) Cho bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{h}(\underline{u}) \quad \text{với} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad \text{và} \quad \underline{u} \in U \\ Q(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{b}^T \underline{x}_T + \displaystyle\int_0^T [\underline{a}^T \underline{x} + r(\underline{u})] dt \to \min \end{cases}$$

trong đó điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$ và khoảng thời gian T là cho trước, còn điểm trạng thái cuối $\underline{x}_T = \underline{x}(T)$ là tùy ý.

a) Chứng minh rằng nếu $\underline{u}(t) \in U$ là nghiệm của bài toán thì

$$H(\underline{x}, \underline{p}, \underline{u}) = \max_{\tilde{\underline{u}} \in U} H(\underline{x}, \underline{p}, \tilde{\underline{u}}) \quad \text{với} \quad H(x, u, p) = \underline{p}^T [A\underline{x} + \underline{h}(\underline{u})] - [\underline{a}^T \underline{x} + r(\underline{u})]$$

và $\underline{p}(t)$ là nghiệm của $\dfrac{d\underline{p}}{dt} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T$ thỏa mãn $\underline{p}(T) = \underline{b}$.

b) Áp dụng cho trường hợp cụ thể:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + u, \quad x_0 = 0, \quad |u| \le 5, \quad T = 1 \\ Q(\underline{x}, \underline{u}) = x_T + \displaystyle\int_0^1 (2x - u^2) dt \to \min \end{cases}$$

5) Tìm nghiệm $u(t)$ của bài toán tối ưu sau. Biện luận theo λ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + u, \quad x(0) = 1, \; T = 1, \; |u| \le 1, \quad \text{điểm cuối } x(T) \text{ là tùy ý} \\ Q(\underline{x}, \underline{u}) = x(T) + \displaystyle\int_0^T \lambda u^2 dt \to \min \quad (\lambda > 0) \end{cases}$$

6) Giải bài toán tối ưu tác động nhanh:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{với ràng buộc } |u| \le 1.$$

7) Hãy xây dựng trong mặt phẳng pha đường chuyển đổi giá trị của tín hiệu điều khiển tối ưu tác động nhanh cho đối tượng có mô hình trạng thái sau:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ -x_1 + u_2 \end{pmatrix} \quad \text{với } |u_i| \le 1,\ i = 1, 2$$

8) Cho hệ không liên tục mô tả bởi

$$x_{k+1} = 2x_k - u_k$$

Hãy xác định dãy tín hiệu điều khiển tối ưu

$$\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$$

để sau 4 bước điều khiển hệ đi được từ $x_0=6$ về gốc tọa độ $x_4 = 0$ và năng lượng tiêu thụ tính theo

$$Q = \sum_{k=0}^{3}\left(x_k^2 + 2u_k\right)$$

là nhỏ nhất.

9) Cho hệ không liên tục mô tả bởi

$$x_{k+1} = \frac{x_k + u_k}{2}.$$

Hãy xác định dãy $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ để sau 4 bước điều khiển hệ đi từ $x_0=3$ tới một điểm x_4 tùy ý trong không gian trạng thái và năng lượng tiêu thụ tính theo:

$$Q = \sum_{k=0}^{3}(x_k^2 + u_k^2) + x_4^2$$

là nhỏ nhất.

3 ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU NGẪU NHIÊN

3.1 Một số khái niệm nhập môn

3.1.1 Quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa và mô tả chung

Khác với loại tín hiệu tiền định là với những điều kiện đo như nhau các phép đo sẽ cho ra cùng một kết quả giống nhau thì ở tín hiệu ngẫu nhiên $x(t)$, mặc dù các phép đo đều được thực hiện trong cùng một điều kiện, song các kết quả đo sẽ rất khác nhau. Điều này gây không ít khó khăn cho việc mô tả và xử lý chúng.

Tuy nhiên, nếu biết được thêm rằng các kết quả đo nhận được này có cùng một tính chất E nào đó đặc trưng cho tín hiệu $x(t)$ thì việc mô tả tín hiệu $x(t)$ có thể được thay bằng việc mô tả tập hợp $\boldsymbol{x}(t)$ của tất cả các hàm thời gian có cùng tính chất E trên. Tập $\boldsymbol{x}(t)$ được gọi là một *quá trình ngẫu nhiên*, trong đó tín hiệu $x(t)$ nhận được chỉ là một phần tử.

Một quá trình ngẫu nhiên $\boldsymbol{x}(t)$ được mô tả một cách đầy đủ bởi:

1) Hàm phân bố bậc một:

$$F(x,t)=P(\boldsymbol{x}(t)\leq x)$$

xác định xác suất xuất hiện hàm thời gian mà tại thời điểm t có giá trị không lớn hơn giá trị x cho trước.

2) Hàm phân bố bậc cao:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)=P(\boldsymbol{x}(t_1)\leq x_1,\boldsymbol{x}(t_2)\leq x_2,\ldots,\boldsymbol{x}(t_n)\leq x_n)$$

xác định xác suất xuất hiện hàm thời gian mà tại thời điểm t_k có giá trị không lớn hơn giá trị x_k, $k=1,2,\ldots,n$ cho trước.

3) Đạo hàm của hàm phân bố bậc một:

$$f(x,t)=\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$$

được gọi là *mật độ phân bố*. Từ một giá trị $\Delta x > 0$ cho trước, tích $f(x,t)\Delta x$ sẽ cho biết xác suất xuất hiện hàm thời gian nhận được trong khi đo tín hiệu mà tại thời điểm t có giá trị nằm trong khoảng $[x, x+\Delta x]$.

4) Đạo hàm của hàm phân bố bậc cao:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

5) Cho hai quá trình ngẫu nhiên $\boldsymbol{x}(t)$ và $\boldsymbol{y}(t)$. Cũng tương tự như với một quá trình, hàm phân bố cho hai quá trình ngẫu nhiên

$$F(x, y, t_1, t_2) = P(\boldsymbol{x}(t_1) \leq x, \boldsymbol{y}(t_2) \leq y)$$

được hiểu là xác suất xuất hiện hàm thời gian của $\boldsymbol{x}(t)$ mà tại thời điểm t_1 có giá trị không lớn hơn giá trị x và của $\boldsymbol{y}(t)$ mà tại thời điểm t_2 có giá trị không lớn hơn giá trị y.

Mặc dù các hàm phân bố đã có thể mô tả được đầy đủ tập $\boldsymbol{x}(t)$, song nó vẫn còn quá phức tạp. Do đó, thay vì phải xác định cụ thể các hàm phân bố người ta thường hay xác định các tham số ngẫu nhiên đặc trưng của nó. Với một lớp các hàm phân bố đặc biệt (ví dụ hàm Gauss) hoàn toàn có thể từ các tham số này xác định được chính xác các hàm phân bố.

Những tham số ngẫu nhiên của hàm phân bố bao gồm:

1) Giá trị trung bình (kỳ vọng):

$$m_x(t) = M[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,t)dx .$$

2) Hàm tự tương quan:

$$r_x(t_1, t_2) = M[\boldsymbol{x}(t_1)\boldsymbol{x}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2)]dx_1 dx_2 .$$

Hàm tự tương quan chính là giá trị trung bình của mối tương quan giữa $\boldsymbol{x}(t)$ tại thời điểm t_1 với $\boldsymbol{x}(t)$ tại thời điểm t_2.

3) Hàm phương sai:

$$\begin{aligned} c_x(t_1, t_2) &= M[(\boldsymbol{x}(t_1) - m_x(t_1))(\boldsymbol{x}(t_2) - m_x(t_2))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(x_1 - m_x(t_1)) \cdot (x_2 - m_x(t_2)) \cdot f(x_1, x_2, t_1, t_2)]dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

4) Giá trị tản mát:

$$\sigma_x^2(t) = r_x(t, t).$$

5) Hàm hỗ tương quan:

$$r_{xy}(t_1,t_2) = M[\boldsymbol{x}(t_1)\boldsymbol{y}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[xy\cdot f(x,y,t_1,t_2)]dxdy$$

6) Hàm hiệp phương sai:

$$c_{xy}(t_1,t_2) = M[(\boldsymbol{x}(t_1) - m_x(t_1))(\boldsymbol{y}(t_2) - m_y(t_2))]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(x - m_x(t_1))\cdot(y - m_y(t_1))\cdot f(x,y,t_1,t_2)]dxdy$$

Có thể kiểm chứng được ngay rằng

$$c_x(t_1,t_2) = r_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)\cdot m_x(t_2)$$

$$c_{xy}(t_1,t_2) = r_{xy}(t_1,t_2) - m_x(t_1)\cdot m_{xy}(t_2)$$

Hai quá trình ngẫu nhiên $\boldsymbol{x}(t)$ và $\boldsymbol{y}(t)$ được gọi là *không tương quan*, nếu

$c_{xy}(t_1,t_2) = 0$, tức là $r_{xy}(t_1,t_2) = m_x(t_1)\cdot m_y(t_2)$.

Quá trình ngẫu nhiên dừng

Một quá trình ngẫu nhiên $\boldsymbol{x}(t)$, nếu có các tham số ngẫu nhiên không phụ thuộc vào điểm gốc thời gian, tức là không thay đổi giá trị khi trục thời gian được tịnh tiến một khoảng τ bất kỳ, thì quá trình đó được gọi là *quá trình ngẫu nhiên dừng*.

Một quá trình ngẫu nhiên dừng $\boldsymbol{x}(t)$ có các tính chất sau:

- $f(x,t) = f(x,\ t+\tau)$ với mọi $\tau\in\mathbb{R}$.
- $m_x(t) =$ hằng số $=: m_x$, trong đó ký hiệu $=:$ chỉ phép gán.
- $r_x(t_1,t_2) = r_x(0,\ t_2-t_1) =: r_x(\tau)$.
- $c_x(t_1,t_2) =: c_x(\tau) = r_x(\tau) - m_x^2$.
- $\sigma_x^2(t) = r_x(0) - m_x^2 =$ hằng số $=: \sigma_x^2$.

Hai quá trình ngẫu nhiên $\boldsymbol{x}(t)$ và $\boldsymbol{y}(t)$ được gọi là *cùng nhau dừng*, nếu chúng là những quá trình dừng và hàm hỗ tương quan $r_{xy}(t_1,t_2)$ không thay đổi giá trị khi tịnh tiến trục thời gian một khoảng τ bất kỳ, tức là

$$r_{xy}(t_1,t_2) = r_{xy}(0,\ t_2-t_1) =: r_{xy}(\tau) = M[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}(t+\tau)]$$

Có thể thấy ngay được rằng, với hai quá trình cùng nhau dừng $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ có:

$$c_{xy}(t_1,t_2) =: c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - m_x m_y .$$

Quá trình ngẫu nhiên egodic

Một quá trình ngẫu nhiên $\boldsymbol{x}(t)$, nếu các tham số ngẫu nhiên thay vì phải xác định từ toàn bộ tập hợp $\boldsymbol{x}(t)$ có thể được xác định chỉ với một phần tử đại diện $x(t)$ bất kỳ của tập, được gọi là *quá trình ngẫu nhiên egodic*. Những quá trình ngẫu nhiên egodic phải là các quá trình dừng (điều ngược lại không đúng) và có các tính chất sau:

- $m_x = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x(t)dt$.

  $r_x(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$.

- $r_x(\tau)$ là hàm chẵn và $r_x(0) \ge |r_x(\tau)|$.

- $\lim\limits_{\tau\to\infty} r_x(\tau) = m_x^2$.

- $r_{xy}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt$.

- $r_{xy}(-\tau) = -r_{yx}(\tau)$.

- $|r_{xy}(\tau)| \le \dfrac{1}{2}\left[r_x(0)+r_y(0)\right]$.

- $\lim\limits_{\tau\to\infty} r_{xy}(\tau) = m_x m_y$, nếu $x(t)$ và $y(t+\tau)$ khi $\tau\to\infty$ là không tương quan.

Các quá trình ngẫu nhiên được xét trong kỹ thuật thường được giả thiết là các quá trình egodic và từ nay về sau, mọi quá trình ngẫu nhiên trong quyển sách này, nếu không nói một cách chi tiết sẽ được hiểu là quá trình egodic.

Hàm mật độ phổ và ảnh Laplace của quá trình ngẫu nhiên egodic

Ảnh Fourier $S_x(j\omega)$ của hàm tự tương quan $r_x(\tau)$ của quá trình ngẫu nhiên egodic $\boldsymbol{x}(t)$ được gọi là *mật độ phổ hợp của tín hiệu*. Do $r_x(\tau)$ là một hàm chẵn nên $S_x(j\omega)$ là một hàm thực. Bởi vậy thay vì $S_x(j\omega)$ người ta thường chỉ viết $S_x(\omega)$.

Ảnh Fourier $S_{xy}(j\omega)$ của hàm hỗ tương quan $r_{xy}(\tau)$ giữa hai quá trình ngẫu nhiên egodic $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ được gọi là *mật độ phổ chéo của tín hiệu*. Chú ý rằng khác với mật độ phổ hợp $S_x(\omega)$, mật độ phổ chéo $S_{xy}(j\omega)$ nói chung là một số phức.

Một quá trình ngẫu nhiên egodic $\boldsymbol{x}(t)$ có hàm tự tương quan dạng "hàm" dirac:

$r_x(\tau) = k\delta(\tau)$,

nói cách khác nó có mật độ phổ hợp là một hằng số

$$S_x(j\omega) = k .$$

thì quá trình ngẫu nhiên đó được gọi là *quá trình ồn trắng*. Mỗi phần tử của một quá trình ồn trắng có tên là *tín hiệu ồn trắng*.

Các hàm:

$$S_x(s) = S_x(j\omega)\big|_{j\omega = s} \qquad \text{và} \qquad S_{xy}(s) = S_{xy}(j\omega)\big|_{j\omega = s}$$

được gọi là ảnh Laplace (hai chiều) của các quá trình ngẫu nhiên egodic $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$.

3.1.2 Hệ ngẫu nhiên và mô hình mô tả trong miền phức

Hệ ngẫu nhiên được hiểu là hệ có các tín hiệu vào/ra là những tín hiệu ngẫu nhiên. Để mô tả hệ ngẫu nhiên trong miền phức ta phải sử dụng hàm mật độ phổ $S_x(j\omega), S_{xy}(j\omega)$ của các tín hiệu ngẫu nhiên $x(t)$, $y(t)$. Chúng được định nghĩa là ảnh Fourier của các hàm tương quan $r_x(\tau)$, $r_{xy}(\tau)$ của các quá trình ngẫu nhiên egodic $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$ mô tả $x(t)$, $y(t)$. Bởi vậy, sẽ là hữu ích nếu chúng ta ôn nhanh lại ở đây một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier.

Phép biến đổi Fourier

Xét tín hiệu liên tục $x(t)$ thỏa mãn:

Nếu $x(t)$ *không tuần hoàn* thì phải có: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

Trong một khoảng giới nội bất kỳ liên tục từng khúc chỉ có hữu hạn các điểm cực trị.

Tại điểm không liên tục t_0 có:

$$x(t_0) = \frac{1}{2}\,[x(t_0-0) + x(t_0+0)]$$

Khi đó $x(t)$ có ảnh Fourier $X(j\omega)$ xác định bởi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3.1a}$$

và ngược lại $x(t)$ cũng được suy ra từ $X(j\omega)$ theo:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \tag{3.1b}$$

Phép biến đổi Fourier (3.1) có những tính chất cơ bản sau:

1) Phép biến đổi Fourier là một đẳng cấu (*isomorphism*), tức là vừa tuyến tính vừa song ánh.

2) Nếu $x(t)$ là hàm chẵn thì ảnh Fourier $X(j\omega)$ là hàm thực (phần ảo của nó bằng 0). Còn nếu $x(t)$ là hàm lẻ thì $X(j\omega)$ là hàm thuần ảo (phần thực của nó bằng 0).

3) Nếu $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ là ảnh Fourier của $x(t)$, $y(t)$ và tích chập,

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \,,$$

có ảnh Fourier thì ảnh đó sẽ là $X(j\omega)Y(j\omega)$.

4) Tích $z(t)=x(t)y(t)$ có ảnh Fourier là:

$$Z(j\omega) = X(j\omega)*Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\xi)Y[j(\omega-\xi)]d\xi \,,$$

trong đó $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ là ảnh Fourier của $x(t)$, $y(t)$.

5) Nếu $x(t)$ có:

$$\mathrm{supp}\, x(t)=\{\, t\in\mathbb{R} \mid x(t)\neq 0 \,\} \quad \text{hữu hạn}$$

thì ảnh Fourier $X(j\omega)$ của nó sẽ có

$$\mathrm{supp}\, X(j\omega)=\{\, \omega\in\mathbb{R} \mid |X(j\omega)|\neq 0 \,\} \quad \text{vô hạn}$$

6) Nếu:

a) $S_{xy}(j\omega)$ là *mật độ phổ chéo* giữa hai quá trình ngẫu nhiên egodic $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$

b) $x(t)$ là một phần tử bất kỳ của $\boldsymbol{x}(t)$ và $X(j\omega)$ là ảnh Fourier của $x(t)$.

c) $y(t)$ là một phần tử bất kỳ của $\boldsymbol{y}(t)$ và $Y(j\omega)$ là ảnh Fourier của $y(t)$,

thì

$$S_{xy}(j\omega) = \overline{X(j\omega)}\,Y(j\omega) = X(-j\omega)Y(j\omega) \tag{3.2}$$

trong đó $\overline{c}$ là giá trị phức liên hợp của số phức c.

Xác định mô hình hàm truyền đạt

Cho một hệ SISO (một vào, một ra) tuyến tính, tham số hằng với tín hiệu vào là $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$. Trong lý thuyết điều khiển tuyến tính ta đã được biết khi cả hai tín hiệu vào, ra là *những tín hiệu tiền định* thì hệ trên sẽ được mô tả bằng hàm truyền đạt $G(s)$, được định nghĩa là tỷ số giữa ảnh Laplace $Y(s)$ của tín hiệu ra $y(t)$ và ảnh Laplace $U(s)$ của tín hiệu vào $u(t)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{3.3a}$$

Khi đó:

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \tag{3.3b}$$

được gọi là hàm đặc tính tần (biên–pha) của hệ.

Do cấu trúc mô hình mô tả hệ thống là phải bất biến với kiểu tín hiệu vào-ra nên khi các tín hiệu vào ra $u(t)$, $y(t)$ là *những tín hiệu ngẫu nhiên*, hai công thức (3.3a), (3.3b) xác định mô hình như trên của hệ thống sẽ không còn phù hợp vì bản thân chúng cũng lại là những hàm ngẫu nhiên phụ thuộc tín hiệu vào ra. Để loại bỏ được tính ngẫu nhiên của tín hiệu vào ra $u(t)$, $y(t)$ trong mô hình (3.3), ta sẽ sử dụng hàm mật độ phổ $S_u(j\omega)$, $S_{uy}(j\omega)$ thay vì ảnh Fourier của chúng. Khi đó sẽ có:

$$G(j\omega)=\frac{S_{uy}(j\omega)}{S_u(j\omega)} \tag{3.4a}$$

và

$$G(s)=G(j\omega)\Big|_{j\omega=s} \tag{3.4b}$$

Rõ ràng (3.4) không mâu thuẫn với (3.3) vì trong trường hợp các tín hiệu vào ra là tiền định ta sẽ lại có với tính chất (3.2) của hàm mật độ phổ sự đồng nhất giữa chúng như sau:

$$G(j\omega)=\frac{S_{uy}(j\omega)}{S_u(j\omega)}=\frac{\overline{U(j\omega)}Y(j\omega)}{\overline{U(j\omega)}U(j\omega)}=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}\,.$$

3.1.3 Bài toán điều khiển tối ưu ngẫu nhiên

Khi giải quyết một bài toán điều khiển, nhiều khi ta cần phải quan tâm tới sự ảnh hưởng của nhiễu không mong muốn vào hệ thống cũng như có lẫn trong các tín hiệu vào ra. Ở bài toán điều khiển tối ưu, sự tác động này của nhiễu ảnh hưởng trực tiếp đến hàm đo chất lượng, tức là bản thân hàm mục tiêu như ta định nghĩa từ trước tới nay sẽ bị phụ thuộc vào nhiễu cũng như vào sai lệch mô hình hệ thống. Chẳng hạn hệ thống với phương án điều khiển $\underline{p}$ được mô tả bởi hàm truyền đạt $G(s)$ xác định theo (3.3a). Do có nhiễu tác động hay trong bản thân mô hình $G(s)$ có sai lệch bất định nên giữa mô hình $G(s)$ và hệ thực tồn tại một sai lệch ngẫu nhiên ΔG, kéo theo giữa hàm đo chất lượng theo phương án điều khiển $Q(\underline{p})$ và chất lượng thực của hệ cũng có một sai số ngẫu nhiên. Vì vậy nghiệm tối ưu $\underline{p}$ tìm được theo

$$Q(\underline{p}) \xrightarrow[\underline{p}\in P]{} \min$$

cũng mang tính phụ thuộc ngẫu nhiên theo ΔG nên không thể là phương án điều khiển tối ưu theo chất lượng thực của hệ thống.

Để loại bỏ tính ngẫu nhiên của hàm đo chỉ tiêu chất lượng trong bài toán điều khiển tối ưu, ta sẽ thay một hàm $Q(\underline{p})$ cụ thể bằng tập tất cả các hàm $Q(\underline{p},\Delta Q)$ bao gồm cả sai lệch ngẫu nhiên ΔQ. Khi đó tập $\boldsymbol{Q}(\underline{p}, \Delta Q)$ được xem như là đại diện chung cho chất lượng hệ thống và phương án điều khiển $\underline{p}$ nào đó sẽ được gọi là tối ưu nếu như nó mang lại kỳ vọng chất lượng $M[\boldsymbol{Q}(\underline{p}, \Delta Q)]$ tốt nhất.

Định nghĩa 3.1 (Tối ưu ngẫu nhiên tĩnh): Một phương án điều khiển $\underline{p}$ được gọi là tối ưu nếu nó thỏa mãn

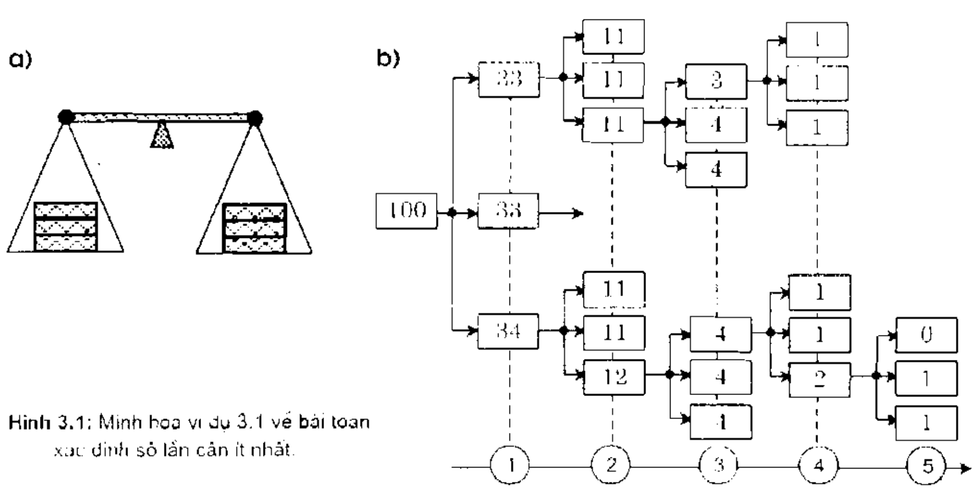
$$M[\boldsymbol{Q}(\underline{p}, \Delta Q)] \underset{\underline{p}\in P}{\rightarrow} \min$$

trong đó $\boldsymbol{Q}(\underline{p}, \Delta Q)$ là tập các hàm ngẫu nhiên đo chất lượng hệ thống và $M[\cdot]$ là ký hiệu chỉ phép tính lấy kỳ vọng của quá trình ngẫu nhiên (mục 3.1.1).

Ví dụ 3.1: (Xác định đồng tiền nhẹ với số lần cân ít nhất)

Chắc có nhiều bạn đọc đã biết đến bài toán xác định số lần cân ít nhất với một chiếc cân bàn (hình 3.1a) để phát hiện đồng tiền có khối lượng nhẹ hơn 99 đồng tiền khác có khối lượng bằng nhau trong tổng số 100 đồng tiền đã cho. Đáp số của nó là 5 lần cân với lời giải được minh họa trong hình 3.1b).

Tính ngẫu nhiên ở bài toán là sự xuất hiện đồng tiền nhẹ trong số các đồng tiền được lấy để đặt lên bàn cân. Đáp số 5 lần cân không phải thực sự là ít nhất trong tất cả các phương án cân (kể đến tính ngẫu nhiên). Chẳng hạn nếu như ngẫu nhiên có đồng tiền nhẹ trong số hai đồng tiền được lấy ra ở lần đầu tiên để đặt lên bàn cân thì rõ ràng nó sẽ được phát hiện chỉ sau đúng một lần cân. Tuy nhiên, đáp số 5 lần cân được tính cho trường hợp xấu nhất, nói cách khác, nó là *giá trị tối ưu* theo nghĩa không phụ thuộc vào sự xuất hiện ngẫu nhiên của đồng tiền nhẹ trong số các đồng tiền được đặt lên bàn cân và do đó là lời giải của bài toán tối ưu ngẫu nhiên đã cho. ❒



Hình 3.1: Minh họa ví dụ 3.1 về bài toán xác định số lần cân ít nhất.

Tương tự như bài toán tối ưu ngẫu nhiên tĩnh nêu trong định nghĩa 3.1 ta cũng có bài toán tối ưu ngẫu nhiên động như sau:

Định nghĩa 3.2 (Tối ưu ngẫu nhiên động): Xét hệ MIMO (nhiều vào/ra) có vector tín hiệu đầu vào $\underline{u}(t)$ là ngẫu nhiên, được mô tả bởi mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u}),\qquad \underline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \ \underline{u}\in\mathbb{R}^m \tag{3.5a}$$

Một tín hiệu điều khiển ngẫu nhiên $\underline{u}(t)$ nào đó sẽ được gọi là tối ưu nếu nó đưa hệ (3.5a) đi được từ $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ tới $\underline{x}_T=\underline{x}(T)$ trong khoảng thời gian T và làm cho:

$$M[\,Q(\underline{x},\underline{u})\,]=M\left[\int_0^T g(\underline{x},\underline{u})dt\right]\to\min \tag{3.5b}$$

trong đó $\underline{x}(t)$ là nghiệm của (3.5a) ứng với $\underline{u}(t)$ tối ưu và $M[\cdot]$ là ký hiệu chỉ phép tính lấy kỳ vọng của một quá trình ngẫu nhiên.

Chú ý: Giống như bài toán điều khiển tối ưu động đã xét ở chương 2, bài toán tối ưu ngẫu nhiên phát biểu trong định nghĩa 3.2 cũng còn được chia nhỏ thành nhiều bài toán cụ thể hơn nữa, phụ thuộc theo các giá trị $\underline{x}_0$, $\underline{x}_T$ là cho trước cố định, hoặc cho trước nhưng không cố định mà bị ràng buộc vào các đa tạp S_0, S_T cũng như phụ thuộc vào khoảng thời gian T xảy ra quá trình tối ưu là biết trước hay lại là một biến tối ưu cần phải xác định (xem lại mục 2.1.2).

3.2 Điều khiển tối ưu ngẫu nhiên tĩnh

3.2.1 Nhận dạng trực tuyến tham số mô hình không liên tục

Nhận dạng trực tuyến (on–line) được hiểu là nhận dạng mô hình đối tượng trên cơ sở phải quan sát (đo) cả tín hiệu vào và tín hiệu ra của nó.

Trong mục 1.6.2 ta đã xét bài toán xác định trực tuyến tham số cho đối tượng SISO không liên tục, *tiền định* mô tả bởi:

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}} \tag{3.6}$$

Sau đây ta sẽ xét bài toán tương tự, nhưng cho *đối tượng ngẫu nhiên*, tức là đối tượng có cả tín hiệu (không liên tục) vào/ra:

$$u_k=u(kT),\qquad y_k=y(kT),\qquad k=0,1,\ldots,N$$

là những tín hiệu ngẫu nhiên.

Trước hết ta thấy, nếu mô hình (3.6) mô tả chính xác đối tượng thì phải có:

$$\sum_{i=0}^{m} b_i u_{k-i} = y_k + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{k-i} \tag{3.7}$$

Khi đó, nếu nhân cả hai vế của (3.7) với u_{k-q} về phía trái:

$$\sum_{i=0}^{m} b_i u_{k-q} u_{k-i} = u_{k-q} y_k + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{k-q} y_{k-i}$$

rồi lập phép tính lấy kỳ vọng, sẽ được:

$$\sum_{i=0}^{m} b_i M\left[u_{k-q} u_{k-i}\right] = M\left[u_{k-q} y_k\right] + \sum_{i=1}^{n} a_i M\left[u_{k-q} y_{k-i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{m} b_i r_u((q-i)T) = r_{uy}(qT) + \sum_{i=1}^{n} a_i r_{uy}((q-i)T) \tag{3.8}$$

Tuy nhiên, do các tham số của mô hình là còn cần phải được xác định, hay mô hình (3.6) chưa mô tả chính xác đối tượng, nên giữa hai vế của (3.8) tồn tại một sai lệch. Gọi sai lệch đó là e_q, $q=-M, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M$, trong đó M là chỉ số cắt bớt, được chọn khoảng bằng 10% của N nhằm làm giảm sai số rò rỉ [36], ta sẽ có:

$$e_q = r_{uy}(qT) + \sum_{i=1}^{n} a_i r_{uy}((q-i)T) - \sum_{i=0}^{m} b_i r_u((q-i)T) \tag{3.9a}$$

Sử dụng ký hiệu vector và ma trận:

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ -b_0 \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_q = \begin{pmatrix} r_{uy}((q-1)T) \\ \vdots \\ r_{uy}((q-n)T) \\ r_u(qT) \\ \vdots \\ r_u((q-m)T) \end{pmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} e_{-M} \\ \vdots \\ e_0 \\ \vdots \\ e_M \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \underline{f}_{-M}^T \\ \vdots \\ \underline{f}_0^T \\ \vdots \\ \underline{f}_M^T \end{pmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} r_{uy}(-MT) \\ \vdots \\ r_{uy}(0) \\ \vdots \\ r_{uy}(MT) \end{pmatrix}$$

thì công thức (3.9a), viết chung cho tất cả $q=-M, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M$, sẽ là:

$$e_q = r_{uy}(qT) - \underline{f}_q^T \underline{p}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underline{e} = \underline{h} - F\underline{p} \tag{3.9b}$$

Lập hàm mục tiêu

$$Q(\underline{p}) = \underline{e}^T \underline{e} = (\underline{h} - F\underline{p})^T (\underline{h} - F\underline{p})$$

$$= \underline{p}^T \underbrace{(F^T F)}_{A} \underline{p} + \underbrace{(-2\underline{h}^T F)}_{\underline{b}^T} \underline{p} + \underbrace{\underline{h}^T \underline{h}}_{c} = \underline{p}^T A \underline{p} + \underline{b}^T \underline{p} + c$$

sau đó xác định vector tham số tối ưu:

$$p^* = \arg\min Q(p)$$

thì do $Q(p)$ là hàm toàn phương, lồi, nên theo định lý 1.4 ta có ngay được $\underline{p}^*$ là nghiệm của:

$$2A\,\underline{p}^* + \underline{b} = \underline{0} \tag{3.10}$$

Từ đây ta đi đến thuật toán xác định tham số tối ưu cho mô hình (3.6) của đối tượng ngẫu nhiên như sau:

1) Đo các giá trị tín hiệu ngẫu nhiên u_k, y_k, $k=0,1,\ldots,N-1$ của đối tượng.

2) Chọn một chỉ số Lag $M\approx\dfrac{N}{10}$ để làm giảm sai số rò rỉ (leakage) rồi tính giá trị $r_u(qT)$, $r_{uy}(qT)$, $q=M,\ldots,-1,0,1,\ldots,M$ bằng công thức sau:

$$r_u(qT)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-q-1}u_ku_{k+q} & \text{khi} \quad q\ge 0\\ r_u(-qT) & \text{khi} \quad q<0\end{cases}$$

$$r_{uy}(qT)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-q-1}u_ky_{k+q} & \text{khi} \quad q\ge 0\\ r_{yu}(-qT) & \text{khi} \quad q<0\end{cases}$$

3) Tính vector $\underline{b}$ và ma trận A từ $r_u(qT)$, $r_{uy}(qT)$, $q=-M,\ldots,-1,0,1,\ldots,M$ rồi xác định $\underline{p}^*$ theo (3.10).

3.2.2 Nhận dạng trực tuyến mô hình tuyến tính liên tục

Nhận dạng trực tuyến mô hình không tham số

Ta xét bài toán nhận dạng như sau: Giả sử ta đã biết từ thông tin ban đầu về đối tượng ngẫu nhiên (thông tin A–priori) rằng đối tượng là SISO, tuyến tính, ổn định, *hợp thức chặt* và bị nhiễu $n(t)$ tác động ở đầu ra. Vậy thì nó sẽ được mô tả một cách đầy đủ bởi hàm trọng lượng $g(t)$. Bài toán đặt ra ở đây là trên cơ sở các kết quả đo tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ ta phải xác định hàm trọng lượng $g(t)$ sao cho sai lệch giữa tín hiệu đầu ra $y(t)$ của đối tượng và $\widetilde{y}(t)$ của mô hình hợp thức chặt (có $\widetilde{y}(0)=0$):

$$\widetilde{y}(t)=\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{3.11}$$

là nhỏ nhất.

Giả sử việc đo các tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ của đối tượng được thực hiện bằng cách trích mẫu với thời gian trích mẫu là T. Khi đó kết quả đo trong khoảng thời gian $0\le t<nT$ sẽ là các giá trị của $u(t)$, $y(t)$ tại $t=kT$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Nói cách ta sẽ thu được dãy các giá trị $\{u_k\}$, $\{y_k\}$ với:

$$u_k=u(kT),\quad y_k=y(kT),\quad k=0,1,\ldots,N-1$$

Giá trị tín hiệu đầu ra $\tilde{y}_k=\tilde{y}(kT)$ của mô hình tại thời điểm $t=kT$ cũng được suy ra một cách tương tự từ (3.11) như sau:

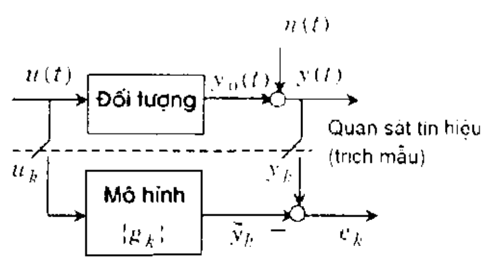
$$\tilde{y}_k=\sum_{n=0}^{N-1}g_n u_{k-n}\qquad \text{trong đó } g_k=g(kT)$$

Nhiệm vụ nhận dạng bây giờ là phải xác định dãy các giá trị g_n, $n=0,1,\ldots$ của hàm trọng lượng $g(t)$ sao cho tổng bình phương của sai lệch

$$e_k=y_k-\tilde{y}_k=y_k-\sum_{n=0}^{N-1}g_n u_{k-n}$$

là nhỏ nhất. Nói cách khác là phải làm cho:

$$Q=\sum_{k=0}^{N-1}e_k^2=\sum_{k=0}^{N-1}\left(y_k-\sum_{n=0}^{N-1}g_n u_{k-n}\right)^2\to\min$$



Hình 3.2: Bài toán nhận dạng trực tuyến mô hình không tham số.

Đây là hàm nhiều biến theo g_n, $n=0,1,\ldots$. Hàm có dạng toàn phương, lồi với giá trị không âm và bằng 0 khi và chỉ khi $\tilde{y}_k$ là chính xác, tức là tín hiệu đầu ra y_k của đối tượng đúng bằng tín hiệu đầu ra $\tilde{y}_k$ của mô hình. Bởi vậy để Q có giá trị nhỏ nhất thì cần và đủ là:

$$\frac{\partial Q}{\partial g_m}=0\qquad \text{với mọi}\quad m=0,1,\ldots$$

Điều này dẫn đến:

$$0=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(y_k-\sum_{n=0}^{N-1}g_n u_{k-n}\right)u_{k-m} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}u_{k-m}y_k=\sum_{n=0}^{N-1}g_n\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_{k-n}u_{k-m}\right).$$

Thay $k-m$ bằng q trong tổng thứ nhất và $k-n$ bằng p trong tổng thứ hai

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}u_q y_{q+m}=\sum_{n=0}^{N-1}g_n\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty}u_p u_{p+n-m}\right)$$

sau đó lấy giá trị trung bình của hai vế để có được kỳ vọng, thì:

$$\frac{1}{N}\sum_{q=-\infty}^{\infty}u_q y_{q+m}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(g_n\left[\frac{1}{N}\sum_{p=-\infty}^{\infty}u_p u_{p+n-m}\right]\right)$$

$$\Rightarrow \qquad r_{uy}(mT)=\sum_{n=0}^{N-1}g_n r_u((n-m)T)=g_m * r_u(mT). \tag{3.12}$$

với * là ký hiệu chỉ phép tích chập và $r_{uy}(\tau)$ là hàm hỗ tương quan, $r_u(\tau)$ là hàm tự tương quan của hai tín hiệu (ngẫu nhiên) vào, ra.

Tiếp theo, ta chuyển hai vế (3.12) sang miền phức bằng toán tử Fourier, sẽ có:

$$S_{uy}(jn\Omega)=G(jn\Omega)S_u(n\Omega), \qquad n=0,1,\ldots$$

trong đó $\Omega=\dfrac{2\pi}{(2N-1)T}$ là chu kỳ trích mẫu tương ứng trong miền phức [36]. Vậy:

$$G(jn\Omega)=\frac{S_{uy}(jn\Omega)}{S_u(n\Omega)} \tag{3.13}$$

là các giá trị nhận dạng được của hàm truyền đạt $G(s)$ cần tìm của đối tượng, tức là ảnh Fourier của hàm trọng lượng $g(t)$.

Công thức (3.13) chỉ rằng hàm trọng lượng $g(t)$ của đối tượng tuyến tính, nhận dạng theo phương pháp cực tiểu hóa sai lệch đầu ra, có các giá trị ảnh Fourier $G(jn\Omega)$ là tỷ số giữa giá trị mật độ phổ chéo và giá trị mật độ phổ hợp tín hiệu vào/ra. Kết quả của phương pháp nhận dạng này sẽ không bị ảnh hưởng bởi nhiễu đầu ra $n(t)$ nếu nhiễu đó có kỳ vọng bằng 0 và không tương quan với tín hiệu vào $u(t)$, vì:

$$S_{uy}(j\omega)=S_{uy_0}(j\omega)+\underbrace{S_{un}(j\omega)}_{=0}=S_{uy_0}(j\omega).$$

Cũng từ công thức trên ta đi đến thuật toán xác định ảnh Fourier $G(jn\Omega)$ của dãy hàm trọng lượng g_n, $n=0,1,\ldots$ từ các giá trị tín hiệu u_k, y_k, $k=0,1,\ldots,N-1$ gồm các bước như sau (xem thêm mục 6.2, hoặc tài liệu [36]):

1) Tính giá trị $r_u(mT)$, $r_{uy}(mT)$, $m=-N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1$ của các hàm tương quan bằng công thức *bias* sau:

$$r_u(mT)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-m-1}u_k u_{k+m} & \text{khi} \quad m=0,1,\cdots,N-1\\ r_u(-mT) & \text{khi} \quad m=-N+1,\cdots,-1.\end{cases}$$

$$r_{uy}(mT)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-m-1}u_k y_{k+m} & \text{khi} \quad m=0,1,\cdots,N-1\\ r_{yu}(-mT) & \text{khi} \quad m=-N+1,\cdots,-1.\end{cases}$$

2) Chọn một chỉ số Lag $M\approx\dfrac{N}{10}$ rồi gán $r_u(mT)=r_{uy}(mT)=0$ khi $|m|>M$ để làm giảm sai số rò rỉ (leakage).

3) Tính (có thể dùng thuật toán FFT để tăng tốc độ tính toán)

$$S_u(n\Omega)=T\sum_{m=-N+1}^{N-1}r_u(mT)e^{-jmn\frac{2\pi}{2N-1}}, \qquad n=0,1,\ldots,2M$$

$$S_{uy}(jn\Omega)=T\sum_{m=-N+1}^{N-1}r_{uy}(mT)e^{-jmn\frac{2\pi}{2N-1}}, \qquad n=0,1,\ldots,2M$$

trong đó $\Omega=\dfrac{2\pi}{(2N-1)T}$ và gọi là chu kỳ trích mẫu tương ứng trong miền phức.

4) Tính:

$$G(jn\Omega)=\frac{S_{uy}(jn\Omega)}{S_u(n\Omega)}, \qquad n=0,1,\ldots,2M$$

Nhận dạng trực tuyến tham số mô hình đối tượng không có thành phần vi phân

Sau đây ta sẽ xét bài toán nhận dạng tham số mô hình đối tượng SISO tuyến tính có tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ ngẫu nhiên, được mô tả bởi hàm truyền đạt:

$$G(s)=\frac{S_{uy}(s)}{S_u(s)}=\frac{1+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}, \qquad (n>m) \tag{3.14}$$

trong đó $S_u(s)$, $S_{uy}(s)$ là các hàm mật độ phổ của tín hiệu vào $u(t)$, ra $y(t)$ và $b_1, \ldots, b_m, a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những tham số cần xác định.

Sử dụng ngay thuật toán giải bài toán tương tự với các tín hiệu vào ra $u(t)$, $y(t)$ tiền định đã được trình bày ở mục 1.6.2, nhưng thay chỗ cho $U(jk\Omega)$, $Y(jk\Omega)$ là các giá trị mật độ phổ $S_u(n\Omega)$, $S_{uy}(jn\Omega)$, ta sẽ đi đến các bước nhận dạng tham số mô hình (3.14) của đối tượng ngẫu nhiên như sau:

1) Xác định (xem thêm mục 6.2):

$$S_u(n\Omega),\ S_{uy}(jn\Omega),\ n=0,1,\ \dots\ ,2M$$

từ

$$u_k=u(kT),\quad y_k=y(kT),\quad k=0,1,\ \dots\ ,N-1,$$

bằng thuật toán nhận dạng mật độ phổ vừa trình bày, trong đó:

$$M\approx\frac{N}{10}\quad \text{và}\quad \Omega=\frac{2\pi}{(2N-1)T}$$

2) Lập các vector $\underline{p}$, $\underline{f}_k$, $\underline{h}$ và ma trận F như sau:

$$\underline{p}=\begin{pmatrix}-b_1\\ \vdots\\ -b_m\\ a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\qquad \underline{f}_k=\begin{pmatrix}(jk\Omega)S_u(k\Omega)\\ \vdots\\ (jk\Omega)^m S_u(k\Omega)\\ S_{uy}(jk\Omega)\\ (jk\Omega)S_{uy}(jk\Omega)\\ \vdots\\ (jk\Omega)^n S_{uy}(jk\Omega)\end{pmatrix},\qquad \underline{h}=\begin{pmatrix}S_u(0)\\ \vdots\\ S_u(2M\Omega)\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}\underline{f}_0^T\\ \vdots\\ \underline{f}_{2M}^T\end{pmatrix}.$$

3) Tính $\underline{p}^*$ tối ưu từ:

$$2A\,\underline{p}^*-\underline{b}=\underline{0}\qquad \text{trong đó}\quad A=F^HF\quad \text{và}\quad \underline{b}^T=2\,\mathrm{Re}(\underline{h}^HF)$$

và chỉ số H ở vị trí lũy thừa là ký hiệu của phép tính chuyển vị, lấy liên hợp.

Nhận dạng trực tuyến tham số mô hình đối tượng không có thành phần tích phân

Giống như đã làm ở mục 1.6.2 cho đối tượng tiền định, thuật toán vừa trình bày cũng áp dụng một cách tương tự cho đối tượng SISO tuyến tính với tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ ngẫu nhiên không có thành phần tích phân và được mô tả bởi:

$$G(s)=\frac{S_{uy}(s)}{S_u(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{1+a_1s+\cdots+a_ns^n},\qquad (n\ge m)\tag{3.15}$$

trong đó ta chỉ cần thay $\underline{p}$, $\underline{f}_k$, $\underline{h}$, F bằng các vector, ma trận mới như sau:

$$\underline{p}=\begin{pmatrix}-a_1\\ \vdots\\ -a_n\\ b_0\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\qquad \underline{f}_k=\begin{pmatrix}S_{uy}(jk\Omega)\\ (jk\Omega)S_{uy}(jk\Omega)\\ \vdots\\ (jk\Omega)^n S_{uy}(jk\Omega)\\ (jk\Omega)S_u(k\Omega)\\ \vdots\\ (jk\Omega)^m S_u(k\Omega)\end{pmatrix},\qquad \underline{h}=\begin{pmatrix}S_{uy}(0)\\ \vdots\\ S_{uy}(2M\Omega)\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}\underline{f}_0^T\\ \vdots\\ \underline{f}_{2M}^T\end{pmatrix}.$$

Khi đó bộ tham số tối ưu $\underline{p}^*$ cho mô hình (3.15) sẽ là nghiệm của:

$$2A\,\underline{p}^* - \underline{b} = \underline{0}$$

với

$$A = F^H F \qquad \text{và} \qquad \underline{b}^T = 2\mathrm{Re}(\underline{h}^H F)$$

và chỉ số H ở vị trí lũy thừa là ký hiệu của phép tính chuyển vị, lấy liên hợp.

3.3 Điều khiển tối ưu ngẫu nhiên động

3.3.1 Bộ lọc Wiener

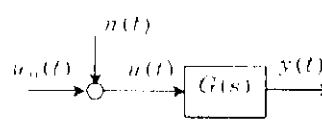
Mục đích của bộ lọc

Một trong những vấn đề thường gặp trong bài toán điều khiển là khử nhiễu. Có nhiều bộ khử nhiễu như bộ lọc tần thấp (loại bỏ các nhiễu có tần số thấp), bộ lọc tần số cao, bộ lọc Wiener, bộ lọc Kalman ..

Bộ lọc Wiener là một khâu *tuyến tính, ổn định*. Nguyên lý làm việc của nó được mô tả ở hình 3.3. Tín hiệu đầu vào của bộ lọc là $u(t)$ bị lẫn nhiễu $n(t)$, tức là:

$$u(t) = u_0(t) + n(t)$$

trong đó $u_0(t)$ là tín hiệu thực không bị lẫn nhiễu. Đầu ra của bộ lọc là $y(t)$. Nhiệm vụ đặt ra cho bộ lọc $G(s)$ là loại bỏ được thành phần nhiễu $n(t)$ có lẫn trong $u(t)$, tức là phải tạo ra được tín hiệu đầu ra $y(t)$ thỏa mãn:



Hình 3.3: Bộ lọc Wiener

$$y(t) \approx u_0(t).$$

Do tín hiệu nhiễu $n(t)$ không có cùng nguồn phát như $u_0(t)$ nên ở đây ta có thể xem chúng là không tương quan với nhau. Nếu có thêm giả thiết nhiễu $n(t)$ có giá trị trung bình (kỳ vọng) bằng 0, thì khi đó sẽ có:

$$r_{u_0 n}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_u(j\omega) = S_{u_0}(j\omega) + S_n(j\omega) \\ S_{u_0}(j\omega) = S_{uu_0}(j\omega) \end{cases} \tag{3.16}$$

Nhiệm vụ của bộ lọc là tạo ra tín hiệu $y(t)$ ở đầu ra giống như tín hiệu không bị lẫn nhiễu $u_0(t)$ ở đầu vào. Đánh giá cho sự sai khác giữa $y(t)$ và $u_0(t)$ là hàm sai lệch:

$$e(t) = y(t) - u_0(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau - u_0(t)$$

trong đó $g(t)$ là hàm trọng lượng của bộ lọc, tức là hàm có ảnh Laplace là $G(s)$.

Nếu ta đơn thuần chỉ lập hàm đo chất lượng của bộ lọc theo

$$\tilde{Q} = \int_0^t e^2(t)dt \tag{3.17}$$

thì rõ ràng $\tilde{Q}$ không những phụ thuộc vào $g(t)$ cần phải xác định mà còn phụ thuộc cả vào tín hiệu nhiễu $n(t)$ có lẫn trong $u(t)$, tức là $\tilde{Q} = \tilde{Q}(g,n)$. Vì vậy không thể hy vọng rằng thông qua việc xác định:

$$\tilde{Q}(g,n) \to \min$$

lại có thể nhận được một hàm $g(t)$ bất biến với nhiễu $n(t)$.

Để có thể tránh được sự xuất hiện $n(t)$ trong hàm đo chất lượng bộ lọc, người ta đã không sử dụng (3.17) mà thay vào đó là kỳ vọng của nó:

$$Q = M[e^2(t)] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^2(t)dt \tag{3.18}$$

và như vậy bài toán thiết kế bộ lọc Wiener trở thành một bài toán tối ưu ngẫu nhiên.

Do $n(t)$ không tương quan với $u_0(t)$ nên Q được lập theo (3.18) cũng sẽ không phụ thuộc vào $n(t)$, tức là:

$$Q = Q(g)$$

và ta đi đến dạng chuẩn của bài toán tối ưu tìm hàm trọng lượng $g(t)$ mô tả bài toán thiết kế bộ lọc Wiener như sau:

$$Q(g) \underset{g \in P}{\to} \min \tag{3.19}$$

trong đó P là tập hàm trọng lượng của các khâu tuyến tính và ổn định.

Các bước thiết kế

Để tìm được nghiệm tối ưu $g(t)$ của bài toán (3.19), trước hết ta cần đến *nguyên lý trực giao* (orthogonal principle) phát biểu như sau:

Định lý 3.1 (Nguyên lý trực giao): Nghiệm của bài toán tối ưu:

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ u(t) = u_0(t) + n(t) \\ \tilde{Q} = (y - u_0)^2 \to \min \end{cases}$$

phải thỏa mãn:

$$[y(t) - u_0(t)]u(t-\tau) = 0 \quad \text{với mọi } \tau \geq 0$$

Chứng minh:

Trước hết ta trích mẫu thời gian τ với chu kỳ trích mẫu T_a thành $\tau = kT_a$, $k = 0, 1, \ldots$. Khi đó tiêu chuẩn tối ưu (3.19) sẽ có dạng:

$$\tilde{Q} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} g_k u(t - kT_a) T_a - u_0(t) \right]^2$$

với $g_k = g(kT_a)$. Nếu dãy $\{g_k\}$ là nghiệm tối ưu của bài toán thì tại đó phải có:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial g_l} = 0 \quad \text{với } l = 0, 1, \ldots$$

Suy ra

$$2\left[\sum_{k=0}^{\infty} g_k u(t - kT_a) T_a - u_0(t) \right] u(t - lT_a) T_a = 0, \qquad \forall l$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left[\sum_{k=0}^{\infty} g_k u(t - kT_a) T_a - u_0(t) \right] u(t - lT_a) = 0, \qquad \forall l$$

Như vậy, nếu cho $T_a \to 0$ ta sẽ được điều phải chứng minh:

$$\left[\int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau - u_0(t) \right] u(t - \tau) = 0. \qquad \square$$

Dựa theo nguyên lý trực giao trên thì để tìm nghiệm tối ưu của bài toán (3.19) ta sẽ khoanh vùng nghiệm bằng cách xác định các hàm trọng lượng $g(t)$ mà với nó có được:

$$M\{[y(t) - u_0(t)]u(t - \tau)\} = 0 \quad \text{với mọi } \tau \ge 0$$

Từ đây, và khi kết hợp với công thức định nghĩa hàm tương quan (mục 3.1.1), ta sẽ đi đến *phương trình tích phân Wiener–Hopf* cho việc xác định tính chất cần phải có của nghiệm $g(t)$ tối ưu như sau:

$$\int_0^{\infty} g(\sigma) r_u(\tau - \sigma) d\sigma - r_{uu_0}(\tau) = 0 \quad \text{với mọi } \tau \ge 0 \qquad (3.20)$$

Để tìm nghiệm $g(t)$ từ phương trình tích phân Wiener–Hopf (3.20), người ta đặt:

$$h(\tau) = \int_0^{\infty} g(\sigma) r_u(\tau - \sigma) d\sigma - r_{uu_0}(\tau)$$

Khi đó, do có:

$$g(t) = 0 \quad \text{với } t < 0 \qquad \text{và} \qquad h(\tau) = 0 \quad \text{với } \tau \ge 0$$

nên cũng có với ảnh Lapace hai chiều của chúng:

$$H(s) = G(s)S_u(s) - S_{uu_0}(s) \tag{3.21}$$

Để ý thêm phương trình (3.21) có những đặc điểm:

- ảnh Laplace $G(s)$ của $g(t)$ có tất cả các điểm cực nằm bên trái trục ảo.
- ảnh Laplace $H(s)$ của $h(\tau)$ có tất cả các điểm cực nằm bên phải trục ảo.
- Khi s là số thực thì $S_u(s)$ là hàm thực, vì $r_u(\tau)$ là hàm chẵn.

Ta sẽ đến được thuật toán xác định nghiệm của (3.21) gồm các bước như sau [57]:

1) Tính mật độ phổ $S_u(s)$ của $u(t)$, tức là tính ảnh Laplace của hàm tự tương quan $r_u(\tau)$ của tín hiệu $u(t)$. Trong nhiều trường hợp, khi mà chỉ biết trước mật độ phổ $S_{u_0}(s)$ của $u_0(t)$ và $S_n(s)$ của nhiễu $n(t)$, thì do $u_0(t)$, $n(t)$ không tương quan, ta cũng có được

   $$S_u(s) = S_{u_0}(s) + S_n(s)$$

2) Viết lại $S_u(s)$ thành:

   $$S_u(s) = A^-(s)A^+(s)$$

   trong đó $A^-(s)$ là hàm thực–hữu tỷ có các điểm không và điểm cực đều nằm bên trái trục ảo (pha cực tiểu) và $A^+(s)$ là hàm thực–hữu tỷ có các điểm không và điểm cực nằm bên phải trục ảo.

3) Tính tỷ số:

   $$R(s) = \frac{S_{uu_0}(s)}{A^+(s)}.$$

   trong đó $S_{uu_0}(s)$ là ảnh Laplace của hàm hỗ tương quan $r_{uu_0}(\tau)$ giữa $u(t)$ và $u_0(t)$. Nếu thay vì $S_{uu_0}(s)$ ta chỉ có $S_{u_0}(s)$ của $u_0(t)$ thì do tính không tương quan giữa $u_0(t)$, $n(t)$ ta cũng sẽ có $S_{uu_0}(s) = S_{u_0}(s)$.

4) Tách $R(s)$ thành:

   $$R(s) = B^-(s) + B^+(s)$$

   trong đó $B^-(s)$ là hàm bền (giải tích trong nửa mặt phẳng phức bên phải) và $B^+(s)$ là hàm giải tích trong nửa mặt phẳng phức bên trái (các điểm cực nằm bên phải trục ảo).

5) Xác định $G(s) = \dfrac{B^-(s)}{A^-(s)}$ và $H(s) = A^+(s)B^+(s)$ cho bộ lọc.

Ví dụ 3.2 ([57]): Thiết kế bộ lọc Wiener

Hãy thiết kế bộ lọc Wiener, biết rằng tín hiệu hữu ích $u_0(t)$ và nhiễu $n(t)$ có:

$$S_{u_0}(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}\,,\qquad S_n(\omega)=1\qquad \text{và}\qquad S_{u_0 n}(\omega)=0$$

Với những thông số đã cho thì:

$$S_u(\omega)=S_{u_0}(\omega)+S_n(\omega)=\frac{3+\omega^2}{1+\omega^2}$$

và

$$S_{uu_0}(\omega)=S_{u_0}(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}\,.$$

Suy ra:

$$S_u(s)=\frac{3-s^2}{1-s^2}=\underbrace{\frac{s+\sqrt{3}}{s+1}}_{A}\;\underbrace{\frac{s-\sqrt{3}}{s-1}}_{A^-}\qquad \text{và}\qquad S_{uu_0}(s)=\frac{2}{1-s^2}$$

Từ đây ta được:

$$R(s)=\frac{S_{uu_0}}{A^-}=\frac{2}{(s+1)(s-\sqrt{3})}\approx\underbrace{\frac{0.73}{s+1}}_{B^+}+\underbrace{\frac{0.73}{s-\sqrt{3}}}_{B^-}$$

Vậy hàm truyền đạt của bộ lọc là:

$$G(s)=\frac{B}{A}=\frac{0.73}{s+\sqrt{3}}\,.$$ ❒

3.3.2 Bộ quan sát trạng thái Kalman (lọc Kalman)

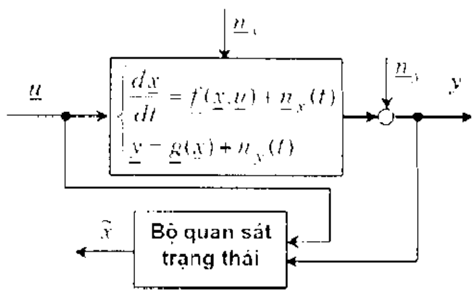
Mục đích của bộ quan sát

Trong các phương pháp điều khiển phản hồi trạng thái người ta thường giả thiết vector tín hiệu trạng thái $\underline{x}$ là *đo được* (nhờ các bộ cảm biến) để phản hồi ngược về cho bộ điều khiển. Điều này trong thực tế thường không thực hiện được, đơn giản chỉ là vì có khá nhiều biến trạng thái không thể đo được trực tiếp mà chỉ có thể xác định được một cách gián tiếp thông qua những tín hiệu đo được khác. Chẳng hạn như ở động cơ xoay chiều ba pha thì biến trạng thái dòng từ thông của động cơ là không đo được trực tiếp, nó chỉ có thể xác định được thông qua những đại lượng tín hiệu đo được trực tiếp khác là giá trị dòng điện stator và giá trị tốc độ vòng quay động cơ. Cũng như vậy ở hệ cơ thì động năng của một vật đang chuyển động chỉ có thể xác định được thông qua vận tốc và khối lượng của vật đó ...

Trong một hệ thống điều khiển, các vector tín hiệu vào $\underline{u}(t)$, ra $\underline{y}(t)$ bao giờ cũng là những tín hiệu đo được trực tiếp (*measurable*). Giả sử nhờ các bộ cảm biến (sensors) ta đo được giá trị $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian hữu hạn $t_0<t<T$. Khi đó, một cơ cấu có nhiệm vụ xác định giá trị trạng thái $\underline{x}(t_0)$ của hệ thống tại thời điểm t_0 từ những giá trị $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ đã đo được trong khoảng thời gian hữu hạn $t_0 \le t<T$, sẽ được gọi là *bộ quan sát trạng thái* (state observer). Nói cách khác, bộ quan sát trạng thái là một cơ cấu có nhiệm vụ thực hiện phép biến đổi [38]:

$$\underline{x}(t_0) = q\big(\underline{u}(t), \underline{y}(t)\big) \quad \text{với} \quad t_0 \le t < T \quad \text{trong đó } T \text{ là hữu hạn.} \tag{3.22}$$

Tất nhiên rằng không phải ở mọi hệ thống ta đều có thể quan sát được tín hiệu trạng thái mà chỉ với những hệ quan sát được (*observable*), tức là hệ mà ở đó tồn tại toán tử $q(\bullet,\bullet)$ và một hằng số T hữu hạn thỏa mãn (3.22). Nếu hằng số hữu hạn T còn được chọn tùy ý, miễn rằng $T>t_0$ thì hệ được gọi là *quan sát được hoàn toàn*.



Hình 3.4: Nhiệm vụ của bài toán thiết kế bộ quan sát trạng thái

Xét hệ thống có mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + \underline{n}_x(t) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}) + \underline{n}_y(t) \end{cases}$$

trong đó $\underline{n}_x(t)$ là vector các tín hiệu nhiễu tác động vào hệ thống và $\underline{n}_y(t)$ là vector các tín hiệu nhiễu tác động ở đầu ra. Nhiệm vụ đặt ra ở đây là phải xây dựng được bộ quan sát trạng thái để với nó có được $\underline{\tilde{x}}(t_0)$ thỏa mãn $\underline{\tilde{x}}(t_0) \approx \underline{x}(t_0)$ trên cơ sở đo các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian hữu hạn $t_0<t<T$ (hình 3.4). Vì cấu trúc bộ quan sát trạng thái không được phụ thuộc nhiễu $\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$ nên mô hình trạng thái của nó phải có dạng:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{\tilde{x}},\underline{u},\underline{y})$$

Mặt khác, nếu có $\underline{\tilde{x}} = \underline{x}$ thì cũng phải có $\underline{\tilde{f}}(\underline{x},\underline{u},\underline{y}) = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$. Suy ra:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = f(\underline{\tilde{x}},\underline{u}) + l(\underline{\tilde{x}},\underline{y}) \quad \text{với} \quad \lim_{\underline{\tilde{x}}\to \underline{x}} l(\underline{\tilde{x}},\underline{y}) = \underline{0} \tag{3.23}$$

và bài toán đặt ra ở đây là phải xác định $l(\underline{\tilde{x}},\underline{y})$ thỏa mãn:

$$\lim_{\underline{\tilde{x}}\to \underline{x}} l(\underline{\tilde{x}},\underline{y}) = \underline{0} \quad \text{và} \quad \underline{\tilde{x}}(t) \approx \underline{x}(t) \tag{3.24}$$

Thiết kế bộ quan sát trạng thái cho đối tượng tuyến tính

Cho đối tượng tuyến tính, bị tác động bởi nhiễu hệ thống $\underline{n}_x(t)$ và nhiễu đầu ra $\underline{n}_y(t)$, mô tả bởi mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{n}_x & (3.25a) \\ \underline{y} = C\underline{x} + \underline{n}_y & (3.25b) \end{cases}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{s\times n}$ là các ma trận hằng, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ là vector biến trạng thái, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ là vector tín hiệu vào (tín hiệu điều khiển), $\underline{y} \in \mathbb{R}^s$ là vector các tín hiệu ra, $\underline{n}_x \in \mathbb{R}^n$ là vector các tín hiệu nhiễu tác động vào hệ thống và $\underline{n}_y \in \mathbb{R}^s$ là vector các tín hiệu nhiễu tác động ở đầu ra.

Ở đây ta giả thiết:

$\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$ là những (vector) tín hiệu nhiễu ồn trắng có kỳ vọng bằng 0, tức là:

$$m_{n_x} = M[\underline{n}_x(t)] = \underline{0} \quad \text{và} \quad m_{n_y} = M[\underline{n}_y(t)] = \underline{0}$$

Khi đó thì

$$r_{\underline{n}_x}(\tau) = \begin{cases} N_x \text{ (ma trận hằng)} & \text{khi } \tau = 0 \\ \Theta \text{ (ma trận có các phần tử bằng 0)} & \text{khi } \tau \neq 0 \end{cases} \tag{3.26a}$$

$$r_{\underline{n}_y}(\tau) = \begin{cases} N_y \text{ (ma trận hằng)} & \text{khi } \tau = 0 \\ \Theta \text{ (ma trận có các phần tử bằng 0)} & \text{khi } \tau \neq 0 \end{cases} \tag{3.26b}$$

$\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$ không tương quan với nhau, $\underline{n}_y(t)$ không tương quan với $\underline{x}(t)$ và $\underline{n}_x(t)$ không tương quan với $\underline{x}(\tau)$ ở thời điểm trước đó ($\tau < t$), tức là

$$M[\underline{n}_x \underline{n}_y^T] = M[\underline{n}_y \underline{x}^T] = M[\underline{n}_x \underline{x}^T(\tau)] = \Theta. \tag{3.27}$$

Theo (3.23) thì bộ quan sát trạng thái cho đối tượng tuyến tính (3.25) sẽ là:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = A\underline{\tilde{x}} + B\underline{u} + L(\underline{y} - C\underline{\tilde{x}}) = (A - LC)\underline{\tilde{x}} + (B \quad L)\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

và nhiệm vụ thiết kế chỉ còn lại là xác định ma trận $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ sao cho có được:

$$\tilde{\underline{x}}(t) \approx \underline{x}(t)$$

Lập hàm mô tả sai lệch:

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)$$

ta sẽ được:

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = \frac{d(\underline{x} - \tilde{\underline{x}})}{dt} = A(\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) + \underline{n}_x - L(\underline{y} - C\tilde{\underline{x}}) = A\underline{e} + \underline{n}_x - L(C\underline{x} + \underline{n}_y - C\tilde{\underline{x}})$$

$$= (A - LC)\underline{e} + \underline{n}_x - L\underline{n}_y = \underbrace{(A - LC)}_{\tilde{A}}\underline{e} + \underbrace{(I \quad -L)}_{\tilde{B}}\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{n}_x \\ \underline{n}_y \end{pmatrix}}_{\underline{n}}$$

$$= \tilde{A}\underline{e} + \tilde{B}\underline{n}$$

trong đó I là ký hiệu chỉ ma trận đơn vị. Từ đây suy ra [35]:

$$\underline{e}(t) = e^{\tilde{A}t}\underline{e}_0 + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}\underline{n}(\tau)d\tau \qquad \text{với} \quad \underline{e}_0 = \underline{e}(0) \tag{3.29}$$

Để có được điều mong muốn $\tilde{\underline{x}}(t) \approx \underline{x}(t)$, tức là $\underline{e}(t) \approx 0$, ta phải tìm L sao cho:

$$Q = M[\underline{e}^T\underline{e}] = \sum_{i=1}^{n} M[e_i^2] \rightarrow \min \tag{3.30}$$

Thay (3.29) vào (3.30) có để ý đến các giả thiết về $\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$ như (3.26), (3.27), sau đó tìm L để Q có giá trị nhỏ nhất bằng cách xác định nghiệm của $\frac{\partial Q}{\partial L} = \Theta$, với $\frac{\partial Q}{\partial L}$ là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi của Q, ta sẽ nhận được:

$$L = PC^T N_y^{-1} \tag{3.31}$$

với P là nghiệm xác định bán dương của phương trình Riccati:

$$PC^T N_y^{-1} CP - PA^T - AP = N_x \tag{3.32}$$

Nhớ lại bài toán bài toán điều khiển tối ưu động đã được trình bày ở mục 2.2.3 thì rõ ràng việc xác định ma trận L cho bộ quan sát trạng thái (3.28) bằng hai công thức (3.31) và (3.32) nêu trên chính là bài toán thiết kế bộ điều khiển tối ưu $R = L^T$ phản hồi *âm* trạng thái cho đối tượng đối ngẫu của (3.25).

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A^T\underline{x} + C^T\underline{u} & (3.33a) \\[2ex] Q_K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty (\underline{x}^T N_x \underline{x} + \underline{u}^T N_y \underline{u})dt \rightarrow \min & (3.33b) \end{cases}$$

Từ đây ta đến được hai bước xác định bộ quan sát trạng thái tối ưu của Kalman như sau:

1) Giải bài toán tối ưu (3.33) để có được ma trận $R=L^T$ là bộ điều khiển tối ưu phản hồi *âm* trạng thái cho đối tượng (3.33a) theo tiêu chuẩn tối ưu (3.33b). Các ma trận N_x, N_y được xác định từ nhiễu $\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$ theo công thức (3.26), trong đó N_x phải là ma trận xác định bán dương và N_y phải xác định dương. Ở nhiều bài toán ứng dụng thực tế, khi mà thông tin ban đầu về nhiễu $\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$ quá ít để có thể xác định được cụ thể N_x, N_y người ta thường hay chọn chúng là những ma trận đơn vị có số chiều phù hợp với số chiều của $\underline{x}$ và $\underline{u}$ [20], [35].
2) Gán L tìm được vào công thức (3.28) để có hoàn chỉnh mô hình bộ quan sát trạng thái cho đối tượng (3.25).

Ví dụ 3.3: (Thiết kế bộ quan sát trạng thái Kalman)

Cho đối tượng SISO mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}}_{A}\underline{x}+\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{B}u+\underline{n}_x \qquad \text{và} \qquad y=\underbrace{(0\quad 1)}_{C}\underline{x}+n_y$$

Hãy thiết kế bộ quan sát trạng thái cho đối tượng, biết rằng $n_x(t)$, $n_y(t)$ là các tín hiệu nhiễu ồn trắng với:

$$N_x=\begin{pmatrix}8&6\\6&9\end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad N_y=1$$

Trước hết, ta giải bài toán tối ưu:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=A^T\underline{x}+C^T\underline{u}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u\\[2ex] Q_K=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty\left[\underline{x}^T\begin{pmatrix}8&6\\6&9\end{pmatrix}\underline{x}+u^2\right]dt\to\min\end{cases}$$

Áp dụng thuật toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi âm trạng thái $R=L^T$ đã trình bày ở mục 2.2.3, công thức (2.32) và (2.33), ta được

$$R=1^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^T L_*$$

trong đó

$$L_*=\begin{pmatrix}l_1&l_3\\l_3&l_2\end{pmatrix}$$

là nghiệm xác định bán dương của phương trình Riccati

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \quad 1)\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} l_3^2-2l_3 & l_2l_3-2l_1-l_2 \\ l_2l_3-2l_1-l_2 & l_2^2-4l_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l_3^2-2l_3=8 \\ l_2l_3-2l_1-l_2=6 \\ l_2^2-4l_3=9 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên và chỉ lấy nghiệm xác định bán dương ta có:

$$L_r=\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$R=L^T=(0 \quad 1)\begin{pmatrix} 4.5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=(4 \quad 5) \qquad \Leftrightarrow \qquad L=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vậy bộ quan sát trạng thái tối ưu của đối tượng đã cho là:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt}=(A-LC)\,\tilde{\underline{x}}+(B \quad L)\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\tilde{\underline{x}}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

❒

3.3.3 Bộ điều khiển LQG (Linear Quadratic Gaussian)

Nội dung bộ điều khiển LQG

Bài toán thiết kế bộ điều khiển LQG, mà trong nhiều tài liệu, ví dụ như [30], [35], [43], [45], còn gọi là *điều khiển đối tượng tuyến tính bền vững với nhiễu*, được phát biểu như sau: *Cho đối tượng tuyến tính tham số hằng bị tác động bởi nhiễu ồn trắng $\underline{n}_x(t)$ vào hệ thống và $\underline{n}_y(t)$ ở đầu ra, mô tả bởi mô hình trạng thái:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x}+B\underline{u}+\underline{n}_x \\ \underline{y}=C\underline{x}+\underline{n}_y \end{cases}$$

Hãy thiết kế bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra sao cho hệ được ổn định tối ưu theo nghĩa khi bị một tác động không mong muốn đánh bật ra khỏi điểm cân bằng (điểm làm việc), bộ điều khiển đó sẽ đưa được hệ quay trở về điểm cân bằng cũ (điểm làm việc cũ) và chi phí cho quá trình quay về đó tính theo:

$$Q=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\underline{x}^T E\underline{x}+\underline{u}^T F\underline{u}\right)dt$$

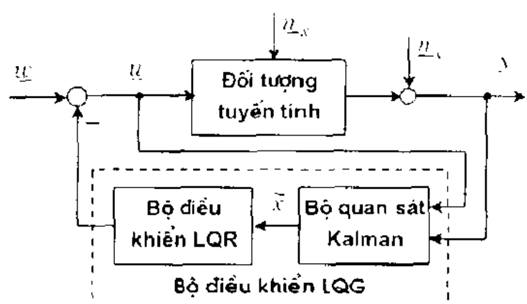
đạt giá trị nhỏ nhất.

Thoạt mới nhìn, bài toán trên có nét giống như bài toán thiết kế bộ điều khiển tối ưu động LQR đã được giải quyết bằng phương pháp biến phân ở mục 2.2.3 thuộc chương 2. Tuy nhiên nó lại có hai điểm khác rất cơ bản. Đó là:

- Bộ điều khiển là phản hồi tín hiệu ra, chứ không phải phản hồi trạng thái.
- Đối tượng có nhiễu tác động cả vào hệ thống lẫn đầu ra.

Mặc dù có hai điểm khác biệt cơ bản như vậy, song nhờ tính thỏa mãn *nguyên lý tách được* (ta sẽ xét dưới đây) của hệ tuyến tính mà bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra LQG sẽ chuyển được về bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái LQR. Nói cách khác, bộ điều khiển LQG sẽ được thiết kế gồm một bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái LQR và một bộ quan sát trạng thái Kalman mắc nối tiếp nhau như mô tả ở hình 3.5.

Hình 3.5: Nguyên tắc thiết kế bộ điều khiển LQG.



Từ đây, ta đi đến thuật toán thiết kế bộ điều khiển LQG với các bước sau:

1) Thiết kế bộ điều khiển tối ưu R_{LQR} phản hồi (âm) trạng thái $\underline{x}(t)$, tức là bộ điều khiển LQR, cho bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}+B\underline{u} \\ Q=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\underline{x}^T E\underline{x}+\underline{u}^T F\underline{u}\right)dt \to \min \end{cases}$$

bằng thuật toán đã trình bày tại mục 2.2.3. Nói cách khác là phải tính:

$$R_{LQR} = F^{-1}B^T L_x$$

trong đó L_x là nghiệm xác định bán dương của phương trình đại số Riccati:

$$L_x B F^{-1} B^T L_x - A^T L_x - L_x A = E$$

Điều kiện để bài toán này có nghiệm là E xác định bán dương và F xác định dương.

2) Thiết kế bộ quan sát trạng thái Kalman để có được trạng thái xấp xỉ gần đúng $\tilde{\underline{x}}(t)$ từ các tín hiệu đo được $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ làm tín hiệu đầu vào cho bộ điều khiển R_{LQR}. Ở đây, lại một lần nữa ta áp dụng thuật toán đã trình bày trong mục 2.2.3, nhưng cho đối tượng đối ngẫu, tức là lại tìm bộ điều khiển tối ưu phản hồi *âm* trạng thái L^T (bộ điều khiển LQR) cho bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A^T\underline{x}+C^T\underline{u} \\ Q_K = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty (\underline{x}^T N_x \underline{x} + \underline{u}^T N_y \underline{u})dt \to \min \end{cases}$$

trong đó N_x, N_y là các ma trận hàm tương quan của nhiễu ồn trắng $\underline{n}_x(t)$, $\underline{n}_y(t)$. Cuối cùng, thay L vào công thức (3.23) để được mô hình động của bộ quan sát:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = (A - LC)\,\tilde{\underline{x}} + (B \quad L)\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 3.4: (Thiết kế bộ điều khiển LQG)

Cho đối tượng SISO mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}u + \underline{n}_x \quad \text{và} \quad y = \underbrace{(1 \quad 1)}_{C}\underline{x} + n_y$$

Hãy thiết kế bộ điều khiển LQG với:

$$Q = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (\underline{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}\underline{x} + u^T F u)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \to \min \quad (\text{tức là có } F=1)$$

Trước hết ta giải bài toán tìm R_{LQR} là nghiệm của:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u \\ Q = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty (x_1^2 + x_1^2 + u^2)dt \to \min \end{cases}$$

Áp dụng các bước thuật toán tìm bộ điều khiển tối ưu phản hồi âm trạng thái đã trình bày ở mục 2.2.3 (hoặc lệnh `lqr()` của MatLab)) ta đến được:

$$R_{LQR} = (2{,}73 \quad 4{,}24).$$

Tiếp theo, ta lại tìm L^T là bộ điều khiển tối ưu của bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A^T\underline{x}+C^T u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ Q=\dfrac{1}{2}\int_0^{t}(x^T N_x x + u^T N_y u)dt \to \min \end{cases}$$

với N_x, N_y được chọn là các ma trận đơn vị có số chiều phù hợp ($N_x = I$ và $N_y = 1$).

Lại áp dụng thuật toán ở mục 2.2.3 ta có:

$$L^T = (3.27 \quad 7.72) \quad \Leftrightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 3.27 \\ 7.72 \end{pmatrix}$$

Vậy bộ điều khiển LQG sẽ gồm bộ quan sát trạng thái Kalman

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = (A-LC)\,\underline{\tilde{x}} + (B \quad L)\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.27 & -1.27 \\ 4.72 & -3.72 \end{pmatrix}\underline{\tilde{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 3.27 \\ 2 & 7.72 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

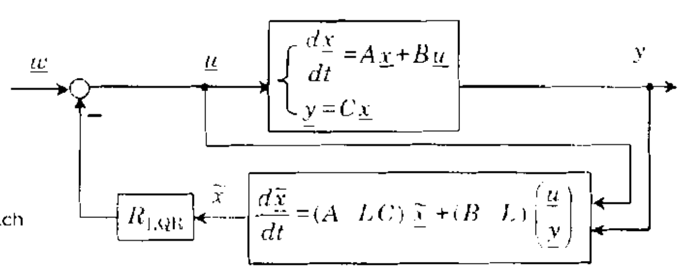
mắc nối tiếp với bộ điều khiển tĩnh (hình 3.5):

$$R_{LQR} = (2.73 \quad 4.24).$$ ❐

Nguyên lý tách (separation principle)

Có lẽ khi xem thuật toán thiết kế bộ điều khiển LQG vừa trình bày sẽ không ít bạn đọc đưa ra câu hỏi liệu thực sự bộ điều khiển đó có đem lại cho hệ thống chất lượng như đã đặt ra. Câu hỏi đó là hoàn toàn có lý vì chất lượng đặt ra chỉ thực sự đạt được nếu như tín hiệu đầu vào của khâu R_{LQR} trong bộ điều khiển LQG đúng là tín hiệu trạng thái $\underline{x}(t)$, song ở bộ điều khiển LQG thì đầu vào của R_{LQR} lại chỉ là $\underline{\tilde{x}}(t) \approx \underline{x}(t)$ và sai số $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \underline{\tilde{x}}(t)$ chỉ tiến đến 0 khi t tiến đến ∞.

Sau đây ta sẽ giải đáp thắc mắc trên thông qua việc xét vị trí điểm cực của hệ thống, vì phần lớn chỉ tiêu chất lượng hệ thống được thể hiện qua vị trí các điểm cực của nó.



Hình 3.6: Giải thích nguyên lý tách

Bỏ qua sự ảnh hưởng của nhiễu $\underline{n}_x$ và $\underline{n}_y$ đã được lọc nhờ bộ quan sát Kalman, cấu trúc hệ thống cho ở hình 3.5 nay được biến đổi thành hình 3.6. Khi đó ta sẽ có:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} - BR_{LQR}\,\tilde{\underline{x}} + B\underline{w}$$

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = LC\underline{x} + (A - LC - BR_{LQR})\,\tilde{\underline{x}} + B\underline{w}$$

và nếu viết chung lại sẽ được:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \tilde{\underline{x}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR_{LQR} \\ LC & A - LC - BR_{LQR}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \tilde{\underline{x}}\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}\underline{w}\\ \underline{w}\end{pmatrix}$$

Vậy điểm cực của hệ kín là nghiệm của:

$$\det\begin{pmatrix} sI - A & BR_{LQR} \\ -LC & sI - A + LC + BR_{LQR}\end{pmatrix} = 0$$

Nhưng vì định thức của ma trận không bị thay đổi khi ta thay một cột (hàng) bằng tổng của nó với một cột (hay hàng) bất kỳ khác, nên điểm cực hệ kín cũng sẽ là nghiệm của:

$$\det\begin{pmatrix} sI - A + BR_{LQR} & BR_{LQR} \\ sI - A + BR_{LQR} & sI - A + LC + BR_{LQR}\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \det\begin{pmatrix} sI - A + BR_{LQR} & BR_{LQR} \\ \Theta & sI - A + LC\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \det(sI - A + BR_{LQR})\,\det(sI - A + LC) = 0$$

Điều này chứng tỏ rằng bộ quan sát trạng thái Kalman đã không làm thay đổi vị trí các điểm cực mà bộ điều khiển R_{LQR} phản hồi âm trạng thái đã mang đến cho hệ thống. Đó là nghiệm của:

$$\det(sI - A + BR_{LQR}) = 0$$

Nó chỉ đưa thêm vào hệ thống các điểm cực mới là nghiệm của:

$$\det(sI - A + LC) = 0$$

Định lý 3.2: Hệ LQG có các điểm cực gồm tất cả các điểm cực của hệ tối ưu không có bộ quan sát Kalman và các điểm cực mới được đưa thêm vào thông qua bộ quan sát. Các điểm cực được đưa thêm vào là nghiệm của $\det(sI - A + LC) = 0$.

Mở rộng ra, định lý 3.2 cũng đúng cho mọi bộ điều khiển phản hồi trạng thái bất kỳ chứ không chỉ riêng cho bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu R_{LQR}. Cũng nhờ có định lý 3.2 mà mọi bài toán *thiết kế bộ điều khiển phản hồi đầu ra* đều chuyển được về dạng bài toán đơn giản hơn là *thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái*.

Chú ý rằng định lý 3.2 *chỉ đúng cho hệ tuyến tính*. Ở hệ phi tuyến, bằng một số ví dụ cụ thể, người ta đã chỉ ra được là mặc dù bộ điều khiển phản hồi trạng thái đã làm cho hệ kín ổn định, song khi ghép chung với một bộ quan sát trạng thái nhất định để có bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra, hệ kín sẽ không còn ổn định nữa.

Câu hỏi ôn tập và bài tập

1) Hãy xây dựng thuật toán nhận dạng trực tuyến tham số mô hình không liên tục cho đối tượng SISO ngẫu nhiên mô tả bởi:

$$G(z)=\frac{1+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

2) Chứng minh rằng bộ lọc Wiener sẽ tạo ra được:

a) $M[y^2]=M[u_0y]$

b) $Q_{\min}=r_{u_0}(0)-\int\limits_0^{\infty}g(\sigma)r_{uu_0}(\sigma)d\sigma$

3) Hãy thiết kế bộ quan sát trạng thái Kalman cho đối tượng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u+\underline{n}_x \quad \text{và} \quad y=(1\quad 1)\underline{x}+n_y$$

trong đó $\underline{n}_x(t)$, $n_y(t)$, là các tín hiệu nhiễu ồn trắng có kỳ vọng toán học bằng 0.

4 ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU RH$_\infty$ (Điều khiển bền vững)

4.1 Không gian chuẩn Hardy

4.1.1 Không gian chuẩn L_2 và H_2 (RH_2)

Không gian L_2

Không gian $L_2(\mathbb{R})$ là không gian Hilbert của các hàm thực $x(t)$ có chuẩn bậc hai:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt} \tag{4.1a}$$

Tích vô hướng giữa hai phần tử $x_1(t)$, $x_2(t)$ của $L_2(\mathbb{R})$ được định nghĩa là:

$$<x_1, x_2> = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)y_2(t)dt \tag{4.1b}$$

Chia $L_2(\mathbb{R})$ thành hai không gian con là $L_2(\mathbb{R}^+)$ gồm các hàm thực $x(t)$ đồng nhất bằng không khi $t<0$ và $L_2(\mathbb{R}^-)$ gồm các hàm thực $y(t)$ đồng nhất bằng không khi $t>0$. Do theo công thức tích vô hướng (4.1b) có

$$<x, y> = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0 \qquad \text{với} \qquad x(t) \in L_2(\mathbb{R}^+) \text{ và } y(t) \in L_2(\mathbb{R}^-)$$

nên $L_2(\mathbb{R}^-)$ chính là không gian trực giao của $L_2(\mathbb{R}^+)$, tức là:

$$L_2(\mathbb{R}^-) = L_2^\perp(\mathbb{R}^+)$$

$$\Rightarrow \qquad L_2(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R}^+) \oplus L_2(\mathbb{R}^-)$$

Bên cạnh $L_2(\mathbb{R})$ ta định nghĩa tiếp $L_2(j\mathbb{R})$ là không gian Hilbert của các hàm phức $X(j\omega)$ có chuẩn bậc hai:

$$\|X\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \tag{4.2}$$

Vì giữa $L_2(\mathbb{R})$ và $L_2(j\mathbb{R})$ tồn tại phép biến đổi Fourier

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

là song ánh, tuyến tính, bảo toàn chuẩn (định lý Parseval):

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \|x\|_2=\|X\|_2$$

nên để khảo sát $L_2(j\mathbb{R})$ ta chỉ cần khảo sát $L_2(\mathbb{R})$. Những kết luận có được về $L_2(\mathbb{R})$ cũng sẽ được suy ra cho $L_2(j\mathbb{R})$ thông qua phép biến đổi Fourier. Nói cách khác, người ta vẫn xem hai không gian đó là tương đương với nhau:

$$L_2(\mathbb{R})\cong L_2(j\mathbb{R}) \tag{4.3a}$$

$$\Rightarrow \qquad L_2(j\mathbb{R})\cong L_2(\mathbb{R}^+)\oplus L_2(\mathbb{R}^-) \tag{4.3b}$$

Không gian H_2 và RH_2

Không gian vector chuẩn bậc hai, ký hiệu bằng H_2, là không gian các hàm phức $X(s)$ của biến phức $s\in\mathbb{C}$ mà trong nửa hở mặt phẳng phức bên phải (miền có phần thực của biến s được ký hiệu với $Re(s)$ lớn hơn 0) thỏa mãn:

a) là hàm *giải tích*, tức là khả vi phức (xem thêm phần phụ lục).

b) tích phân

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(c+j\omega)|^2d\omega \tag{4.4a}$$

bị chặn với số thực dương c.

Số thực nhỏ nhất trong tất cả các số thực chặn trên của tích phân (4.4a) được gọi là bình phương chuẩn bậc hai của $X(s)$ và được ký hiệu bởi:

$$\|X\|_2=\sup_{c>0}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(c+j\omega)|^2d\omega} \quad (\sup - \textit{giá trị chặn trên nhỏ nhất}) \tag{4.4b}$$

Dựa theo nội dung nguyên lý cực đại modulus: "*Nếu một hàm biến phức xác định và liên tục trong một miền kín $\mathcal{S}$, giải tích bên trong miền đó thì nó chỉ có thể có giá trị cực đại trên biên của $\mathcal{S}$*", chuẩn $\|X\|_2$ trong H_2 sẽ được tính một cách đơn giản hơn so với công thức (4.4b) như sau (xem thêm mục 6.2.3):

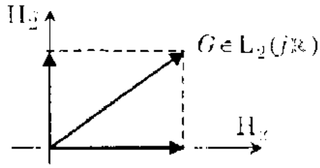
$$\|X\|_2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega} \tag{4.4c}$$

vì theo giả thiết $X(s)$ là hàm giải tích trong toàn bộ nửa hở mặt phẳng phức bên phải, nên tích phân (4.1a) chỉ có thể có giá trị cực đại trên biên của miền đó là trục ảo.

Bên cạnh H_2 ta định nghĩa thêm $H_2^\perp$ là không gian các hàm phức $X(s)$ của biến phức $s\in\mathbb{C}$ mà trong nửa hở mặt phẳng phức bên trái (miền có phần thực của biến s nhỏ hơn 0) là hàm *giải tích*, tức là khả vi phức, và tích phân

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(c+j\omega)|^2 d\omega \qquad \text{với} \qquad c<0$$

bị chặn.



Hình 4.1: Giải thích ý nghĩa công thức (4.5b).

Do giữa $L_2(\mathbb{R}^+)$ và H_2 có phép biến đổi Laplace:

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

cũng như giữa $L_2(\mathbb{R}^-)$ và $H_2^\perp$ có phép biến đổi Laplace hai chiều:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

đều là song ánh, tuyến tính, bảo toàn chuẩn nên tương tự như quan hệ (4.3), ở đây ta cũng có:

$$L_2(\mathbb{R}^+)\cong H_2 \qquad \text{và} \qquad L_2(\mathbb{R}^-)\cong H_2^\perp \tag{4.5a}$$

$$\Rightarrow \qquad L_2(j\mathbb{R})\cong H_2\oplus H_2^\perp \tag{4.5b}$$

Đây là một quan hệ rất đẹp cho phép ta khảo sát được một phần tử $G(j\omega)\in L_2(j\mathbb{R})$ thông qua hai hình chiếu của nó lên H_2 và $H_2^\perp$, tức là có thể xem H_2 và $H_2^\perp$ như hai trục tọa độ của mặt phẳng $L_2(j\mathbb{R})$ (hình 4.1).

Đối với bài toán điều khiển, không gian con của H_2, ký hiệu là RH_2, gồm các hàm phức $G(s)$ dạng thực–hữu tỷ (các hệ số là số thực)

$$G(s)=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}, \qquad \text{trong đó } a_i\,,\, b_j\in\mathbb{R}$$

được quan tâm đặc biệt. Ta có thể thấy từ công thức tính chuẩn (4.4e) rằng, cần và đủ để một ma trận thực–hữu tỷ thuộc RH_2 là:

hợp thức chặt, tức là $m<n$ hay $\lim\limits_{s\to\infty} G(s)=0$.

bền, tức là tất cả các điểm cực của $G(s)$ đều nằm bên trái trục ảo.

Như vậy RH_2 là không gian các hàm truyền đạt của tất cả các hệ causal, tuyến tính, ổn định và có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số.

Không gian con của H_2 chỉ chứa các hàm $G(s)$ dạng thực–hữu tỷ, được ký hiệu là RH_2. Tương tự, ta ký hiệu *không gian con* (theo nghĩa tương đương) của $L_2(j\mathbb{R})$ chỉ chứa các hàm $G(s)$ dạng thực–hữu tỷ là RL_2. Như vậy thì:

- RH_2 là không gian các hàm thực–hữu tỷ, hợp thức chặt và bền.
- $RH_2^{\perp}$ là không gian các hàm thực–hữu tỷ, hợp thức chặt và có tất cả điểm cực nằm bên phải trục ảo.
- RL_2 là không gian các hàm thực–hữu tỷ, hợp thức chặt và không có điểm cực nằm trên trục ảo.

Mở rộng cho ma trận hàm phức (hệ MIMO)

Khái niệm về không gian RH_2 hoàn toàn được mở rộng cho cả tập hợp các ma trận phức $G(s)$ là ma trận truyền đạt của hệ MIMO hợp thức và ổn định. Nói cách khác không gian chuẩn RH_2 nhiều chiều là tập hợp của các ma trận hàm phức $G(s)$ có các phần tử là những hàm thực–hữu tỷ, bền và chuẩn xác định bởi:

$$\| G \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{trace}\left[G^H(j\omega)G(j\omega)\right] d\omega} \tag{4.6}$$

trong đó trace(·) là phép tính vết của ma trận và $G^H = \overline{G}^T$ (chuyển vị và lấy giá trị liên hợp các phần tử).

Cách tính chuẩn bậc hai

Cho hàm phức $G(s)$, thực–hữu tỷ, hợp thức chặt và bền, hay $G(s) \in RH_2$. Chuẩn bậc hai (4.4c) của nó sẽ được viết lại thành nhờ phép gán $s = j\omega$ như sau:

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} G(-s)G(s)ds$$

Nhưng vì $G(s)$ hợp thức chặt, tức là $\lim_{s \to \infty} G(s) = 0$ nên ta có thể thay cận tích phân trên bằng đường lấy tích phân C là nửa vòng tròn chứa trục ảo, có bán kính bằng ∞ và có chiều ngược kim đồng hồ. Như vậy đường lấy tích phân này bao toàn bộ nửa mặt phẳng phức bên trái nên cũng bao tất cả các điểm cực s_i, $i = 1, 2, \ldots$ của $G(s)$, vì $G(s)$ là hàm bền.

Từ đây suy ra:

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_C G(-s)G(s)ds = \sum_i \underset{s_i}{\mathrm{Res}}\left[G(-s)G(s)\right] \qquad (4.7)$$

Ví dụ 4.1: (Xác định chuẩn bậc hai)

Cho hàm thực hữu tỷ

$$G(s) = \frac{2a}{s+a}, \qquad a>0$$

Vì $G(s)$ hợp thức chặt và bền nên nó có chuẩn bậc hai. Áp dụng công thức tính (4.7) với

$$G(-s)G(s) = \frac{4a^2}{(-s+a)(s+a)} = \frac{2a}{s+a} + \frac{2a}{-s+a}$$

và $s_1 = -a$ ta được:

$$\|G\|_2^2 = \underset{s_1}{\mathrm{Res}}\left[G(-s)G(s)\right] = 2a \qquad \Rightarrow \qquad \|G\|_2 = \sqrt{2a}\,. \qquad \square$$

Công thức tính chuẩn (4.7) chỉ tiện ích khi $G(s)$ là hàm phức (không phải là ma trận). Trường hợp $G(s)$ là ma trận người ta thường tìm cách chuyển nó về dạng ma trận hằng để sử dụng được các phép tính của đại số ma trận và một trong những cách chuyển đó là biểu diễn ma trận truyền đạt $G(s)$ hợp thức chặt thành dạng mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ y = C\underline{x} \end{cases} \qquad (4.8a)$$

tức là

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B \qquad (4.8b)$$

Do $G(s)$ là bền nên tất cả các giá trị riêng của A phải nằm bên trái trục ảo.

Định lý 4.1: Nếu A, B, C là ba ma trận hằng có quan hệ với $G(s)$ thực–hữu tỷ, hợp thức chặt và bền theo các công thức (4.8) thì

$$\|G\|_2^2 = \mathrm{trace}(B^T L_o B) = \mathrm{trace}(C L_c C^T) \qquad (4.9)$$

trong đó L_o là ma trận quan sát, là L_c ma trận điều khiển, được xác định từ phương trình Lyapunov sau:

$$A L_c + L_c A^T + B B^T = \Theta \qquad (4.10)$$

$$A^T L_o + L_o A + C^T C = \Theta \qquad (4.11)$$

và Θ là ký hiệu chỉ ma trận có các phần tử đều bằng 0.

Chứng minh:

Gọi $g(t)$ là ma trận hàm có ảnh Laplace là $G(s)$. Vậy thì:

$$g(t) = \begin{cases} Ce^{At}B & \text{khi } t \ge 0 \\ \Theta & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\|G\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \operatorname{trace}\int_0^\infty g^T(t)g(t)dt = \operatorname{trace}\int_0^\infty g(t)g^T(t)dt$$

$$= \operatorname{trace} B^T \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt\right)}_{L_o} B = \operatorname{trace} C \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt\right)}_{L_c} C^T$$

Rõ ràng:

$$L_o = \int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt \quad \text{và} \quad L_c = \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt$$

là nghiệm của các phương trình Lyapunov (4.10) và (4.11). ❐

4.1.2 Không gian chuẩn H_∞ và RH_∞

Khái niệm không gian H_∞ và RH_∞

Không gian vector chuẩn vô cùng, được ký hiệu bằng H_∞, là không gian các hàm phức, hay ma trận phức $G(s)$ của biến phức $s \in \mathbb{C}$ mà trong nửa hở mặt phẳng phức bên phải (miền có phần thực của biến s –được ký hiệu với $Re(s)$ – lớn hơn 0) thỏa mãn:

- là hàm *giải tích* (khả vi phức).
- bị chặn.

Giá trị nhỏ nhất trong số tất cả những giá trị chặn trên của $G(s)$ được gọi là *chuẩn vô cùng* của $G(s)$ và ký hiệu bởi

$$\|G\|_\infty = \begin{cases} \sup\limits_{Re(s)>0} |G(s)| & \text{nếu } G(s) \text{ là hàm} \\ \sup\limits_{Re(s)>0} \overline{\sigma}\big(G(s)\big) & \text{nếu } G(s) \text{ là ma trận} \end{cases} \tag{4.12}$$

trong đó $\overline{\sigma}(A)$ là ký hiệu chỉ giá trị suy biến lớn nhất của ma trận A, tức là giá trị riêng lớn nhất của ma trận tích xác định dương A^HA.

Lại dựa theo nguyên lý cực đại modulus, chuẩn $\|G\|_\infty$ trong H_∞ sẽ được tính một cách đơn giản hơn so với công thức (4.12) như sau:

$$\|G\|_\infty = \begin{cases} \sup\limits_{\omega} |G(j\omega)| & \text{nếu } G(s) \text{ là hàm} \\ \sup\limits_{\omega} \bar{\sigma}\big(G(j\omega)\big) & \text{nếu } G(s) \text{ là ma trận} \end{cases} \qquad (4.13)$$

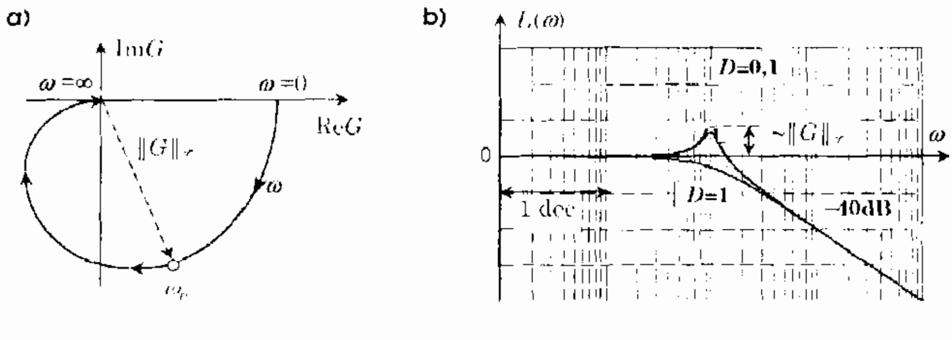
vì theo định nghĩa, hàm $G(s)$ giải tích trong nửa hở mặt phẳng phức bên phải là miền có biên là trục ảo.

Đối với bài toán điều khiển, không gian con của H_∞, ký hiệu là RH_∞, gồm các hàm dạng thực–hữu tỷ được quan tâm đặc biệt. Một ma trận hàm phức $G(s)$ có các phần tử là hàm thực–hữu tỷ có tên gọi là ma trận thực–hữu tỷ. Ta có thể thấy từ công thức tính chuẩn (4.13) rằng, cần và đủ để một ma trận thực–hữu tỷ thuộc RH_∞ là:

- *hợp thức*, tức là *mẫu* hay $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) < \infty$,
- *bền*, hay tất cả các điểm cực của các phần tử trong $G(s)$ đều nằm bên trái trục ảo.

Tính chuẩn vô cùng

Mọi hàm (ma trận) truyền đạt của hệ causal và ổn định đều là phần tử của RH_∞. Ở hệ SISO ổn định, chuẩn $\|G\|_\infty$ của hàm truyền đạt của hệ là khoảng cách lớn nhất từ một điểm trên đường đặc tính tần biên pha $G(j\omega)$ tới gốc tọa độ (hình 4.2a), hoặc là biên độ lớn nhất của đường đặc tính tần logarith $L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$ của hệ (hình 4.2b). Đó cũng là phương pháp hình học thường dùng để xác định $\|G\|_\infty$ cho những trường hợp $G(s)$ có cấu trúc không phức tạp.



Hình 4.2: Cách xác định chuẩn vô cùng từ đường đồ thị đặc tính tần.

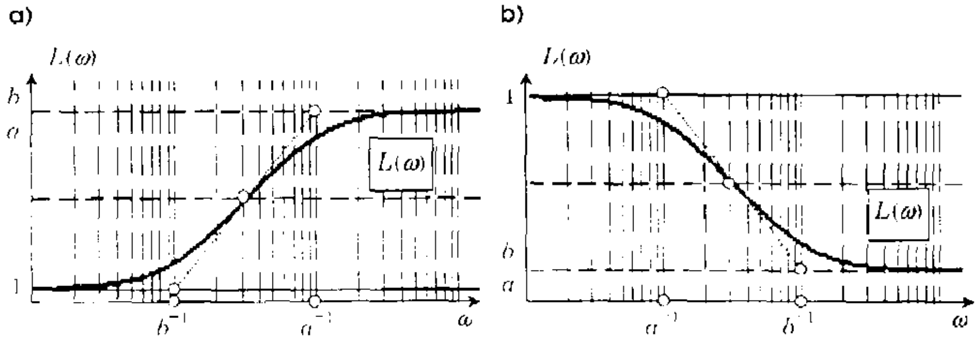
Ví dụ 4.2: (Xác định chuẩn vô cùng)

Cho hàm thực-hữu tỷ

$$G(s) = \frac{1+bs}{1+as}$$

Khi đó nó sẽ có đường đồ thị Bode $L(\omega)$ cho ở hình 4.3. Từ đường đồ thị đó ta đọc ra được:

$$\|G\|_\infty = \begin{cases} \dfrac{b}{a} & \text{nếu} \quad b \geq a \\ 1 & \text{nếu} \quad b < a \end{cases}$$ □



Hình 4.3: Minh họa ví dụ 4.2

Bên cạnh phương pháp hình học minh họa bởi hình 4.6 và ví dụ 4.1, chuẩn $\|G\|_\infty$ của hàm phức $G(s)$ còn hay được xác định bằng phương pháp giải tích thông qua điểm ω_c mà tại đó đạo hàm của $|G(j\omega)|$ bị triệt tiêu. Sau đó xác định $|G(j\omega_c)|$. Tức là:

$$\frac{d\,G(j\omega)}{d\omega}=0 \quad \rightarrow \quad \omega=\omega_c \quad \Rightarrow \quad \|G\|_\infty=|G(j\omega_c)| \tag{4.14}$$

Ví dụ 4.3: (Xác định chuẩn vô cùng)

Cho hàm thực–hữu tỷ

$$G(s)=\frac{1}{1+Ts}$$

Khi đó,

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+jT\omega} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d|G(j\omega)|}{d\omega}=\frac{2T\omega}{\left[1+(T\omega)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0 \quad \Rightarrow \quad \omega_c=0$$

Suy ra:

$$\|G\|_\infty=|G(0)|=1.$$ □

Hai phương pháp xác định chuẩn $\|G\|_\infty$ nêu trên đều có chung đặc điểm là được hình thành từ góc độ nhìn $G(s)$ như một hàm phức (ma trận phức) thuần túy. Mở rộng ra, nếu xem $G(s)$ như một ánh xạ tuyến tính biến đổi vector tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ thành vector tín hiệu ra $\underline{y}(t)$, tức là:

$$G:\ \underline{u}(t) \mapsto \underline{y}(t)$$

thì theo [18], [30], [35] ta còn có một công thức tính khác, được xây dựng dựa trên định nghĩa về chuẩn của một ánh xạ tuyến tính, như sau:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\underline{u}} \frac{\|\underline{y}\|_2}{\|\underline{u}\|_2} = \sup_{\|\underline{u}\|_2=1} \|\underline{y}\|_2 \qquad (4.15a)$$

$$\Rightarrow \qquad \|\underline{y}\|_2 \le \|G\|_\infty \|\underline{u}\|_2 \qquad (4.15b)$$

Tuy nhiên công thức (4.15a) này có ý nghĩa về mặt lý thuyết nhiều hơn là ứng dụng.

Bên cạnh (4.15), giữa các loại chuẩn của $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$, $G(s)$ còn có những quan hệ khác cũng đáng được lưu tâm, bao gồm ([11], [35]):

1) $\|G_1G_2\|_\infty \le \|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty$ (4.16)

2) $\|G\|_2 = \sup_{\underline{u}} \dfrac{\|\underline{y}\|_\infty}{\|\underline{u}\|_2} = \sup_{\|\underline{u}\|_2=1} \|\underline{y}\|_\infty$ (4.17)

3) $\|g\|_1 = \sup_{\underline{u}} \dfrac{\|\underline{y}\|_\infty}{\|\underline{u}\|_\infty} = \sup_{\|\underline{u}\|_\infty=1} \|\underline{y}\|_\infty$ (4.18)

trong đó $g(t)$ là hàm (hay ma trận hàm) có ảnh Laplace trong miền phức là $G(s)$.

Tiếp tục, ở đây ta sẽ xét mối quan hệ giữa H_∞ với $L_\infty(j\mathbb{R})$ là không gian của các hàm (ma trận) phức $G(j\omega)$ có chuẩn:

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \begin{cases} \sup\limits_{\omega} |G(j\omega)| & \text{nếu } G(j\omega) \text{ là hàm} \\ \sup\limits_{\omega} \overline{\sigma}\big(G(j\omega)\big) & \text{nếu } G(j\omega) \text{ là ma trận} \end{cases}$$

Định nghĩa ánh xạ $f:\ H_\infty \to L_\infty(j\mathbb{R})$ với $f(G(s)) = G(s)\big|_{s=j\omega}$ ta thấy nó là một song ánh, tuyến tính (gọi là *đẳng cấu*) và bảo toàn chuẩn. Bởi vậy để khảo sát H_∞ ta chỉ cần khảo sát $L_\infty(j\mathbb{R})$. Những kết luận có được về $L_\infty(j\mathbb{R})$ cũng sẽ được suy ra cho H_∞ thông qua đẳng cấu f này.

Không gian con của $L_\infty(j\mathbb{R})$ chỉ chứa các hàm $G(s)$ dạng thực–hữu tỷ, được ký hiệu là RL_∞. Tương tự, RH_∞ là không gian con của H_∞ gồm các hàm $G(s)$ thực–hữu tỷ. Như vậy thì:

- RH_∞ là không gian các hàm thực–hữu tỷ, *hợp thức* và bền.
- RL_∞ là không gian các hàm thực–hữu tỷ, *hợp thức* và không có điểm cực nằm trên trục ảo.

4.2 Tham số hóa bộ điều khiển

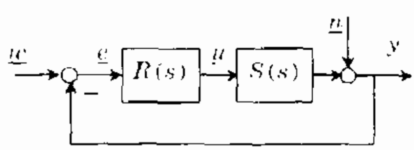
Thực chất, phương pháp tham số hóa (xuất phát điểm từ Youla) không phải là bài toán tối ưu. Song vì nó là công cụ chuyển bài toán điều khiển bền vững RH_∞ thành bài toán tối ưu (bài toán cân bằng mô hình) nên nó được xem như là công việc phải giải quyết trước khi thực hiện bài toán điều khiển bền vững RH_∞.

Cho hệ thống bị nhiễu tác động ở đầu ra, có sơ đồ cấu trúc mô tả ở hình 4.4. Bài toán đặt ra của điều khiển là tìm bộ điều khiển $R(s)$ để hệ có được chất lượng như mong muốn. Tất nhiên rằng một trong những chất lượng yêu cầu cần có đầu tiên là phải làm ổn định hệ thống, kể cả với tín hiệu nhiễu $\underline{n}(t)$, nên $R(s)$ cần tìm phải là phần tử của tập hợp O gồm tất cả các bộ điều khiển làm hệ thống ổn định (bền vững với nhiễu). Nhưng làm thế nào để xác định được tập hợp O. Đó cũng chính là nội dung nghiên cứu của *phương pháp tham số hóa Youla*.

4.2.1 Hệ có các khâu SISO

Trường hợp đối tượng là ổn định

Xét hệ có các khâu SISO với cấu trúc cho ở hình 4.4, nhưng được giả thiết thêm đối tượng $S(s)$ là ổn định, hay $S(s)\in RH_\infty$. Bài toán đặt ra là xác định tập hợp O gồm tất cả các bộ điều khiển làm ổn định hệ thống



Hình 4.4: Nhiệm vụ bài toán tham số hóa

Gọi

$$Q(s)=\frac{R}{1+SR}$$

sẽ có

$$R(s)=\frac{Q}{1-QS} \tag{4.19}$$

Với bộ điều khiển trên, hàm truyền đạt $G_w^y(s)$ của hệ kín, tức là hàm truyền đạt giữa tín hiệu vào $w(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ ứng với $n(t)=0$, là

$$G_w^y(s)=\frac{SR}{1+SR}=SQ$$

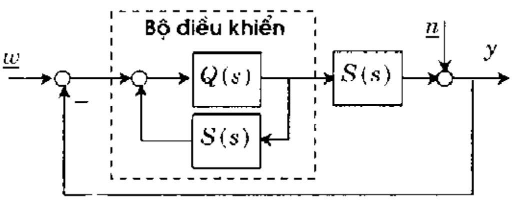
và hàm truyền đạt $G_n^y(s)$ biểu diễn quan hệ giữa tín hiệu nhiễu $n(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ (ứng với $w(t)=0$) là:

$$G_n^y(s)=\frac{1}{1+SR}=1-SQ$$

Như vậy nếu $Q(s)$ là hàm bền ($Q\in RH_\infty$) thì $G_w^y(s)$ và $G_n^y(s)$ cũng là hàm bền, tức là hệ kín ổn định bền vững với nhiễu đầu ra. Ta đi đến khẳng định:

Định lý 4.2: Nếu hệ kín có đối tượng ổn định ($S\subset RH_\infty$) thì mọi bộ điều khiển $R(s)$ xác định theo công thức (4.19), trong đó $Q\in RH_\infty$ sẽ làm cho hệ kín ổn định bền vững với nhiễu. Nói cách khác, tập hợp O gồm tất cả các bộ điều khiển làm ổn định hệ thống có dạng phụ thuộc tham số Q như sau (hình 4.5):

$$O=\left\{R=\frac{Q}{1-QS}\ \middle|\ Q\in RH_\infty\right\} \tag{4.20}$$



Hình 4.5: Cấu trúc bộ điều khiển ổn định bền vững.

Ví dụ 4.4: (Xác định tập O khi đối tượng ổn định)

Cho đối tượng là khâu quán tính bậc một với:

$$S(s)=\frac{1}{1+Ts}.$$

Khi đó mọi bộ điều khiển $R(s)$ làm hệ ổn định bền vững với nhiễu đầu ra sẽ có cấu trúc:

$$R(s)=\frac{Q}{1-QS}=\frac{(1+Ts)Q}{1+Ts-Q}\qquad \text{với}\quad Q\in RH_\infty$$

Chẳng hạn nếu ta chọn $Q=1\in RH_\infty$ thì:

$$R(s)=\frac{1+Ts}{Ts}=1+\frac{1}{Ts}\qquad \text{(đó là bộ điều khiển PI)}$$

và cả hai hàm truyền:

$$G_w^y(s)=SQ=\frac{1}{1+Ts}\quad,\qquad G_n^y(s)=1-SQ=\frac{Ts}{1+Ts}$$

đều là những hàm bền. ❐

Trường hợp đối tượng không ổn định

Khi hệ có đối tượng

$$S(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}\qquad(n\ge m)\tag{4.21}$$

không ổn định, tức là $S\notin RH_\infty$, hay $A(s)$ không phải là đa thức Hurwitz, ta luôn chuyển được về trường hợp đã xét ở trên bằng cách biến đổi:

$$S(s)=\frac{N(s)}{M(s)}\quad\text{với}\quad N,M\in RH_\infty\ .\tag{4.22}$$

tức là cả hàm thực-hữu tỷ ở tử số $N(s)$ và ở mẫu số $M(s)$ là những hàm bền. Việc có được (4.22) từ (4.21) là hiển nhiên, vì chẳng hạn ta chỉ cần chia cả đa thức $B(s)$ và $A(s)$ của (4.21) cho một đa thức Hurwitz $C(s)$ nào đó:

$$C(s)=c_0+c_1s+\cdots+c_ls^l\qquad(l\ge n)$$

ta sẽ thu được hai hàm bền:

$$N(s)=\frac{B(s)}{C(s)}\quad\text{và}\quad M(s)=\frac{A(s)}{C(s)}\ .$$

Giả sử bộ điều khiển $R(s)$ có cấu trúc tương tự:

$$R(s)=\frac{U(s)}{V(s)}\quad\text{với}\quad U,V\in RH_\infty\tag{4.23a}$$

thì hàm truyền đạt $G_w^y(s)$ của hệ kín, mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào $w(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ ứng với $n(t)=0$, sẽ có dạng:

$$G_w^y(s)=\frac{SR}{1+SR}=\frac{NU}{NU+MV}$$

và hàm truyền đạt $G_n^y(s)$, mô tả quan hệ giữa tín hiệu nhiễu $n(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ ứng với $w(t)=0$, sẽ là:

$$G_n^y(s)=\frac{1}{1+SR}=\frac{MV}{NU+MV}\ .$$

Rõ ràng, nếu như có được quan hệ:

$$NU+MV=1 \qquad \text{(tính đồng dạng Bezout)} \tag{4.23b}$$

thì cả hai hàm truyền đạt $G_{u}^{v}(s)$, $G_{n}^{y}(s)$ là những hàm bền và do đó hệ ổn định bền vững với nhiễu đầu ra.

Như vậy vấn đề xác định bộ điều khiển (4.23a) làm hệ ổn định (cả với nhiễu đầu ra) chỉ còn là tìm $U,V\in RH_\infty$ thỏa mãn (4.23b). Song phương trình Bezout (4.23b) lại có vô số nghiệm, vì chẳng hạn khi đã có một nghiệm là:

$$NX+MY=1 \quad \text{với} \quad X,Y\in RH_\infty \tag{4.24}$$

thì tất cả các hàm

$$U=X+MQ\ , \qquad V=Y-NQ\ ,$$

với mọi tham số $Q\in RH_\infty$, cũng sẽ là nghiệm của nó. Bởi vậy, một cách tổng quát thì:

Định lý 4.3: Nếu đối tượng có hàm truyền đạt dạng

$$S=\frac{N(s)}{M(s)} \qquad \text{trong đó} \qquad N,M\in RH_\infty\ ,$$

thì tập hợp O gồm tất cả các bộ điều khiển làm hệ kín có cấu trúc cho ở hình 4.4, ổn định bền vững sẽ là:

$$O=\left\{R=\frac{X+MQ}{Y-NQ}\ \middle|\ X,Y,Q\in RH_\infty \ \text{ và } \ NX+MY=1\right\} \tag{4.25}$$

Ví dụ 4.5: (Xác định tập O khi đối tượng không ổn định)

Cho đối tượng không ổn định với hàm truyền đạt:

$$S(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}\ .$$

Chọn đa thức Hurwitz bậc hai

$$C(s)=(s+1)^2$$

ta có

$$S(s)=\frac{N(s)}{M(s)}$$

trong đó

$$N(s)=\frac{1}{C(s)}=\frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{và} \quad M(s)=\frac{s^2-3s+2}{C(s)}=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)^2}\ .$$

Có thể thấy với (xem thêm ví dụ 4.8):

$$X(s)=\frac{19s-11}{s+1}\quad,\quad Y(s)=\frac{s+6}{s+1}$$

thì

$$NX+MY=1$$

và hai hàm X,Y này đều thuộc RH_∞. Thuật toán xác định $X,Y,N,M\in\mathrm{RH}_\infty$ từ hàm truyền đạt $S(s)$ của đối tượng và từ điều kiện đồng dạng Bezout sẽ được trình bày sau.

Từ đây suy ra mọi bộ điều khiển có hàm truyền đạt:

$$R(s)=\frac{X+MQ}{Y-NQ}=\frac{(19s^2+8s-11)+(s^2-3s+2)Q}{(s^2+7s+6)-Q}\qquad\text{với}\quad Q\in\mathrm{RH}_\infty$$

sẽ làm hệ kín ổn định bền vững với nhiễu. Chẳng hạn, với $Q=0\in\mathrm{RH}_\infty$ sẽ có:

$$R(s)=\frac{19s-11}{s+6}\,.$$ □

Thuật toán tìm nghiệm phương trình Bezout

Trong chương trình phổ thông ta đã được biết tới thuật toán Euclid nhằm xác định ước số chung lớn nhất của hai số nguyên n và m, ký hiệu là USCLN(n,m). Đặc biệt thuật toán vừa là lời chứng minh, vừa là công cụ để xác định thêm hai số nguyên x,y khác thỏa mãn:

$$nx+my=\mathrm{USCLN}(n,m)=h \tag{4.26a}$$

Thuật toán Euclid thực hiện công thức (4.26a) với hai số nguyên n,m cho trước bao gồm các bước sau đây:

1) Đặt $r_0=n$ và $r_1=m$.

2) Đặt $x_0=1$, $x_1=0$ và $y_0=0$, $y_1=1$.

3) Chia r_0 cho r_1 được thương q_1 và số dư r_2 tức là: $r_0=r_1q_1+r_2$

4) Thực hiện lần lượt các bước sau với $k=2,3,\ldots$

   a) Nếu $r_k=0$ thì dừng với đáp số $x=x_{k-1}$, $y=y_{k-1}$ và USCLN$(n,m)=r_{k-1}$.

   b) Chia r_{k-1} cho r_k được thương q_k và số dư r_{k+1} tức là: $r_{k-1}=r_kq_k+r_{k+1}$

   c) Tính: $x_k=x_{k-2}-x_{k-1}q_{k-1}$

   d) Tính: $y_k=y_{k-2}-y_{k-1}q_{k-1}$

Ví dụ 4.6: (Thuật toán Euclid)

Cho $n=68$ và $m=30$. Vậy thì bằng thuật toán trên ta có được bảng sau:

k	0	1	2	3	4	5
r_k	68	30	8	6	2	0
q_k		2	3	1	3	
x_k	1	0	1	−3	4	
y_k	0	1	−2	7	−9	

Từ bảng trên ta đọc ra được:

$x=4,\ y=-9$ và USCLN$(68,30)=h=2$

$68\times 4+30\times(-9)=2$. ❐

Thuật toán Euclid còn được *mở rộng* để không những tìm USCLN$(n,m)=h$ và hai số nguyên x,y của hai số nguyên n,m thỏa mãn (4.26a) mà còn xác định tiếp hai số nguyên u,v khác thỏa mãn (xác định bội số chung nhỏ nhất của n,m):

$$n\,u+m\,v=0 \tag{4.26b}$$

Khi đó, tương tự như các bước tìm x, y và USCLN$(n,m)=h$ đã trình bày, và cũng để tiện cho việc tính toán, người ta đã sắp xếp các số nguyên n,m,x,y,h,u,v thỏa mãn hai điều kiện (4.26a), (4.26b) dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M}=\begin{pmatrix} h & x & y \\ 0 & u & v \end{pmatrix}$$

hoặc

$$\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M}=\begin{pmatrix} 0 & u & v \\ h & x & y \end{pmatrix}$$

rồi đi đến:

1) Bắt đầu với ma trận M, ta tính:

$$q_1=n \text{ div } m,$$

trong đó div là ký hiệu chỉ phép tính chia lấy phần nguyên. Như vậy:

$$r_2=n-q_1 m = n \bmod m$$

là phần dư của phép chia đó (mod là ký hiệu phép tính lấy phần dư của phép chia). Tiếp theo ta thay hàng thứ nhất của M bằng hiệu của nó và tích của hàng thứ hai với q_1. Khi đó M trở thành:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} r_2 & 1 & -q_1 \\ \hline m & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2) Thực hiện lại bước trên, nhưng hoán đổi vai trò của hai hàng cho nhau, tức là tính $q_2 = m$ div r_2, sau đó thay hàng thứ hai bằng hiệu của nó với tích của hàng thứ nhất và q_2:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} r_2 & 1 & -q_1 \\ \hline r_3 & -q_2 & 1+q_1q_2 \end{array}\right) \qquad \text{trong đó} \qquad r_3 = m - q_2r_2 = m \bmod r_2$$

3) Cứ thực hiện lần lượt hai bước trên cho tới khi có một phần tử của cột đầu tiên bằng 0. Khi đó ta sẽ nhận được kết quả:

$$\begin{pmatrix} h & x & y \\ 0 & u & v \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ h & x & y \end{pmatrix}$$

Nếu $h=1$ thì hai số nguyên n, m là nguyên tố cùng nhau.

Tất nhiên thuật toán Euclid mở rộng trên hoàn toàn áp dụng được cho trường hợp $n(\lambda)$ và $m(\lambda)$ là đa thức. Nếu hai đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ nguyên tố cùng nhau (không cùng chia hết cho bất cứ một đa thức nào khác có bậc lớn hơn 0) thì thuật toán sẽ xác định được các cặp đa thức tương ứng $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ cũng như $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ để có:

$$n(\lambda)x(\lambda)+m(\lambda)y(\lambda)=1 \quad \text{với mọi } \lambda \tag{4.27a}$$

$$n(\lambda)u(\lambda)+m(\lambda)v(\lambda)=0 \quad \text{với mọi } \lambda \tag{4.27b}$$

Ta có thể thấy $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ phải nguyên tố cùng nhau giống như $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, vì chẳng hạn nếu chúng không nguyên tố cùng nhau thì sẽ tồn tại một giá trị λ_0 làm cho chúng cùng bị triệt tiêu và đó là điều phi lý.

Thuật toán Euclid mở rộng giúp tìm hai cặp đa thức $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ và $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ thỏa mãn (4.27) ứng với hai đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ cũng nguyên tố cùng nhau cho trước, bao gồm các bước như sau:

1) Bắt đầu với ma trận:

$$M = \begin{pmatrix} n(\lambda) & 1 & 0 \\ m(\lambda) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ta thay hàng thứ nhất của M bằng hiệu giữa nó và tích của hàng thứ hai với:

$q_1(\lambda) = n(\lambda)$ div $n(\lambda)$.

Khi đó M trở thành:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} r_2(\lambda) & 1 & -q_1(\lambda) \\ \hline m(\lambda) & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{trong đó } r_2(\lambda)=n(\lambda) \bmod n(\lambda)$$

2) Thực hiện lại bước trên, nhưng hoán đổi vai trò của hai hàng cho nhau, ta được

$$\begin{pmatrix} r_2(\lambda) & 1 & -q_1(\lambda) \\ r_3(\lambda) & -q_2 & 1+q_1(\lambda)q_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

với

$$q_2(\lambda)=m(\lambda) \text{ div } r_2(\lambda)$$

$$r_3(\lambda)=m(\lambda) \bmod r_2(\lambda)$$

3) Cứ thực hiện lần lượt hai bước trên cho tới khi thu được ma trận có một phần tử của cột đầu tiên bằng 0:

$$\begin{pmatrix} h(\lambda) & \tilde{x}(\lambda) & \tilde{y}(\lambda) \\ 0 & u(\lambda) & v(\lambda) \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} 0 & u(\lambda) & v(\lambda) \\ h(\lambda) & \tilde{x}(\lambda) & \tilde{y}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Đa thức $h(\lambda)$ là USCLN của $n(\lambda)$, $m(\lambda)$. Nếu $h(\lambda)=k$ là hằng số khác không thì $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ nguyên tố cùng nhau và kết quả sẽ là:

$$x(\lambda)=\frac{\tilde{x}(\lambda)}{k}, \qquad y(\lambda)=\frac{\tilde{y}(\lambda)}{k}.$$

Ví dụ 4.7: (Thuật toán Euclid mở rộng)

Cho hai đa thức

$$n(\lambda)=\lambda^2 \text{ và } m(\lambda)=6\lambda^2-5\lambda+1.$$

Khi đó thuật toán trên sẽ cho ra các ma trận sau:

$$M=\left(\begin{array}{c|c|c} \lambda^2 & 1 & 0 \\ \hline 6\lambda^2-5\lambda+1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{5}{6}\lambda-\frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \hline 6\lambda^2-5\lambda+1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{5}{6}\lambda-\frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \hline \frac{6}{25} & -\frac{36}{5}\lambda+\frac{114}{25} & \frac{6}{5}\lambda+\frac{6}{25} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 25\lambda^2-\frac{125}{6}\lambda+\frac{25}{6} & -\frac{25}{6}\lambda^2 \\ \hline \frac{6}{25} & -\frac{36}{5}\lambda+\frac{114}{25} & \frac{6}{5}\lambda+\frac{6}{25} \end{array}\right)$$

và từ đó ta đọc ra được:

$$h(\lambda)=k=\frac{6}{25}$$

$$\tilde{x}(\lambda)=-\frac{36}{5}\lambda+\frac{114}{25}, \qquad \tilde{y}(\lambda)=\frac{6}{5}\lambda+\frac{6}{25}$$

$$u(\lambda)= 25\lambda^2-\frac{125}{6}\lambda+\frac{25}{6}, \qquad v(\lambda)= -\frac{25}{6}\lambda^2$$

Suy ra:

$$x(\lambda)=\frac{\widetilde{x}(\lambda)}{k}= -30\lambda+19, \qquad y(\lambda)=\frac{\widetilde{y}(\lambda)}{k}= 5\lambda+1. \qquad \square$$

Như vậy là ta đã có thuật toán Euclid mở rộng để thực hiện bài toán (4.27) với hai đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ nguyên tố cùng nhau cho trước, nhằm xác định cặp đa thức $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ cũng nguyên tố cùng nhau. Song ở bài toán (4.24) của chúng ta thì thay vào vai trò của bốn đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ lại là bốn hàm thực–hữu tỷ, bền $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, tức là phải tìm $X(s)\in \mathrm{RH}_\infty$, $Y(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ thỏa mãn:

$$N(s)X(s)+M(s)Y(s) =1 \tag{4.28}$$

trong đó $N(s)\in \mathrm{RH}_\infty$, $M(s)\in \mathrm{RH}_\infty$, nguyên tố cùng nhau (không có cùng điểm không) là cho trước.

Một suy nghĩ rất tự nhiên để đi đến lời giải của bài toán (4.28) là tìm cách chuyển nó về thành bài toán (4.27) quen biết bằng một ánh xạ $s\mapsto\lambda$ sao cho:

- tồn tại ánh xạ ngược,
- đảm bảo tính tương đương giữa (4.27) cho bốn đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ và (4.28) cho bốn hàm thực- hữu tỷ, bền $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$.

Có thể thấy một trong những ánh xạ đó là ([30]):

$$\lambda= \frac{1}{s-a} \tag{4.29a}$$

với $a<0$ *không phải là điểm cực cũng như điểm không* của $S(s)$. Khi đó ta có ánh xạ ngược:

$$s= \frac{1+a\lambda}{\lambda} \tag{4.29b}$$

Cùng với ánh xạ (4.29) trên ta đi đến thuật toán giải bài toán (4.28) từ hàm truyền đạt $S(s)$ của đối tượng, như sau:

1) Sử dụng ánh xạ (4.29b) để biến đổi $S(s)$ đã cho thành:

$$S(s)= S\left(\frac{1+a\lambda}{\lambda}\right)= \widetilde{S}(\lambda)= \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

   trong đó hằng số $a<0$ được chọn tùy ý, miễn rằng không phải là điểm cực cũng như điểm không của $S(s)$. Ta có $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ là hai đa thức của λ.

2) Sử dụng thuật toán Euclid mở rộng để với hai đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ có được $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ thỏa mãn (4.27).

3) Chuyển ngược $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ thành các hàm $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ thuộc RH_∞ bằng ánh xạ (4.29a), tức là:

$$N(s)=n\left(\frac{1}{s-a}\right)\quad,\quad M(s)=m\left(\frac{1}{s-a}\right)$$

$$X(s)=x\left(\frac{1}{s-a}\right)\quad,\quad Y(s)=y\left(\frac{1}{s-a}\right)$$

Ví dụ 4.8: (Xác định X,Y,N,M từ hàm truyền đạt của đối tượng)

Cho đối tượng không ổn định với hàm truyền đạt:

$$S(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}\,.$$

Sử dụng ánh xạ (4.29b) với $a=-1$ vì -1 không phải là điểm cực của $S(s)$, được:

$$\widetilde{S}(\lambda)=\frac{\lambda^2}{6\lambda^2-5\lambda+1}=\frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

tức là:

$$n(\lambda)=\lambda^2\quad\text{và}\quad m(\lambda)=6\lambda^2-5\lambda+1\,.$$

Áp dụng thuật toán Euclid mở rộng và với kết quả của ví dụ 4.7, ta được:

$$x(\lambda)=-30\lambda+19\qquad\text{và}\qquad y(\lambda)=5\lambda+1$$

Cuối cùng thông qua phép biến đổi ngược với ánh xạ (4.29a) cho $a=-1$ ta đi đến:

$$N(s)=n\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{(s+1)^2}\quad,\qquad M(s)=m\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)^2}$$

$$X(s)=x\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{19s-11}{s+1}\quad,\qquad Y(s)=y\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{s+6}{s+1}$$

và đó cũng là kết quả đã được sử dụng trong ví dụ 4.5. ❐

Tổng kết: Thuật toán xác định tập các bộ điều khiển ổn định

Tổng kết lại các thuật toán vừa trình bày cho từng trường hợp riêng, ta đi đến thuật toán chung cho việc xác định tập hợp O gồm các bộ điều khiển làm hệ ổn định bền vững với nhiễu, như sau:

1) Nếu $S(s)$ là hàm bền (đối tượng ổn định) thì gán:

$$X=0\,,\ M=Y=1\ \text{ và }\ N=S$$

rồi chuyển sang bước 5).

2) Biến đổi $S(s)$ thành:

$$S(s)=\ S(\frac{1+a\lambda}{\lambda})=\tilde{S}(\lambda)=\frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

với $a<0$ được chọn tùy ý, miễn rằng không phải là điểm cực cũng như điểm không của $S(s)$.

3) Tìm $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ từ $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ bằng thuật toán Euclid mở rộng.

4) Chuyển ngược:

$$N(s)=\ n(\frac{1}{s-a})\quad ,\quad M(s)=\ m(\frac{1}{s-a})$$

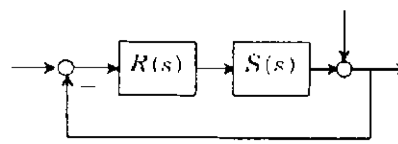
$$X(s)=\ x(\frac{1}{s-a})\quad ,\quad Y(s)=\ y(\frac{1}{s-a})$$

5) Đáp số: $O=\left\{R=\dfrac{X+MQ}{Y-NQ}\ \middle|\ Q\in RH_\infty\right\}$

Ví dụ 4.9: (Xác định tập O)

Cho đối tượng với hàm truyền đạt:

$$S(s)=\frac{s-1}{s(s-2)}.$$



Hình 4.6: Minh họa ví dụ 4.8.

Sử dụng ánh xạ (4.29b) với $a=-1$ được

$$\tilde{S}(\lambda)=S(\frac{1-\lambda}{\lambda})=\frac{-2\lambda^2+\lambda}{3\lambda^2-4\lambda+1}=\frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

Suy ra

$$n(\lambda)=-2\lambda^2+\lambda\quad \text{và}\quad m(\lambda)=3\lambda^2-4\lambda+1.$$

Áp dụng thuật toán Euclid mở rộng, ta đi đến:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} -\frac{5}{3}\lambda+\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \hline 3\lambda^2-4\lambda+1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} -\frac{5}{3}\lambda+\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \hline -\frac{3}{25} & \frac{9}{5}\lambda-\frac{42}{25} & \frac{18}{15}\lambda-\frac{3}{25} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 75\lambda^2+\frac{76}{3}\lambda-\frac{25}{3} & \frac{50}{3}\lambda^2+\frac{25}{3}\lambda \\ \hline -\frac{3}{25} & \frac{9}{5}\lambda-\frac{42}{25} & \frac{18}{15}\lambda-\frac{3}{25} \end{array}\right).$$

và với nó có:

$$h(\lambda)=k=-\frac{3}{25}$$

$$\tilde{x}(\lambda)=\frac{9}{5}\lambda-\frac{42}{25},\qquad \tilde{y}(\lambda)=\frac{18}{15}\lambda-\frac{3}{25}$$

Suy ra:

$$x(\lambda)=\frac{\tilde{x}(\lambda)}{k}=-15\lambda+14\ ,\qquad y(\lambda)=\frac{\tilde{y}(\lambda)}{k}=-10\lambda+1$$

Chuyển ngược sang miền s với ánh xạ (4.29a) cho $a=-1$ thì:

$$N(s)=n\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{s-1}{(s+1)^2}\ ,\qquad M(s)=m\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{s(s-2)}{(s+1)^2}$$

$$X(s)=x\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{14s-1}{s+1}\ ,\qquad Y(s)=y\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{s-9}{s+1}$$

Do đó tập các bộ điều khiển làm hệ kín cho ở hình 4.6 ổn định bền vững với nhiễu là:

$$O=\left\{R=\frac{X+MQ}{Y-NQ}=\frac{(14s-1)(s+1)+s(s-2)Q}{(s-9)(s+1)-(s-1)Q}\ \middle|\ Q\in RH_\infty\right\}$$ □

4.2.2 Hệ có các khâu MIMO

Bây giờ ta sẽ xét bài toán tổng quát hơn. Đó là việc tham số hóa bộ điều khiển hệ kín (hình 4.4), mà ở đó cả đối tượng $S(s)$ và bộ điều khiển $R(s)$ đều là những khâu MIMO (nhiều vào/ra), tức là $S(s)$ và $R(s)$ là những ma trận hàm phức.

Khái niệm hai ma trận nguyên tố cùng nhau

Trước hết ta làm quen với khái niệm hai ma trận hàm phức nguyên tố cùng nhau:

1) Hai ma trận hàm phức $N(s)$, $M(s)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau bên phải (*right-coprime*) nếu ma trận ước số chung bên phải lớn nhất $P(s)$ của nó:

   $$N(s)=N_r(s)P(s)\quad \text{và}\quad M(s)=M_r(s)P(s)$$

   có định thức là một số thực khác 0 (gọi là *ma trận unimodular*), tức là:

   $$\det P(s)=\text{hằng số}\neq 0.$$

2) Tương tự, hai ma trận hàm phức $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau bên trái (*left-coprime*) nếu ma trận ước số chung bên trái lớn nhất $T(s)$ của nó

   $$\tilde{N}(s)=T(s)N_l(s)\quad \text{và}\quad \tilde{M}(s)=T(s)M_l(s)$$

   là một ma trận *unimodular*.

Tương tự như các công thức (4.26) phát biểu cho cho hai số nguyên n, m và (4.27) phát biểu cho hai đa thức $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ nguyên tố cùng nhau, đối với các cặp ma trận hàm phức $N(s)$, $M(s)$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$ nguyên tố cùng nhau bên trái, ta cũng có một số kết luận sau [18], [60]:

1) Hai ma trận $N(s), M(s)$ nguyên tố cùng nhau bên phải khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận $\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s)$ có số chiều thích hợp thỏa mãn:

$$\tilde{X}(s)N(s)+\tilde{Y}(s)M(s)=I \qquad (I \text{ là ma trận đơn vị}) \tag{4.30}$$

2) Hai ma trận $\tilde{N}(s), \tilde{M}(s)$ nguyên tố cùng nhau bên trái khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận $X(s), Y(s)$ có số chiều thích hợp thỏa mãn:

$$\tilde{N}(s)X(s)+\tilde{M}(s)Y(s)=I \tag{4.31}$$

3) Phương trình (4.30) với hai ma trận $N(s), M(s)$ nguyên tố cùng nhau bên phải cho trước và $\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s)$ là các ẩn số cần tìm được gọi là *phương trình Bezout*. Hiển nhiên rằng nghiệm $\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s)$ của phương trình Bezout (4.30) sẽ là hai ma trận nguyên tố cùng nhau bên trái.

Cũng như vậy, nghiệm $X(s), Y(s)$ của phương trình Bezout (4.31) khi biết trước hai ma trận $\tilde{N}(s), \tilde{M}(s)$ nguyên tố cùng nhau bên trái, sẽ tạo thành cặp hai ma trận nguyên tố cùng nhau bên phải.

4) Hai ma trận $N(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ và $M(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận $U(s)\in \mathrm{RH}_\infty$, $V(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ để có:

$$\begin{pmatrix} M & U \\ N & V \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{RH}_\infty \tag{4.32}$$

Mở rộng ra, nếu ký hiệu:

$$\begin{pmatrix} H & K \\ L & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & U \\ N & V \end{pmatrix}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} H & K \\ L & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & U \\ N & V \end{pmatrix} = I$$

sẽ thấy $H, K\in \mathrm{RH}_\infty$ là hai ma trận nguyên tố cùng nhau bên trái, nên $U, V\in \mathrm{RH}_\infty$ phải là hai ma trận nguyên tố cùng nhau bên phải.

5) Hai ma trận $\tilde{N}(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ và $\tilde{M}(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận $\tilde{U}(s)\in \mathrm{RH}_\infty$, $\tilde{V}(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ để có:

$$\begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \\ \tilde{U} & \tilde{V} \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{RH}_\infty \tag{4.33}$$

Từ đây, và với nhận xét thêm:

$$\begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \\ \tilde{U} & \tilde{V} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{H} & \tilde{L} \\ \tilde{K} & \tilde{T} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \\ \tilde{U} & \tilde{V} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{H} & \tilde{L} \\ \tilde{K} & \tilde{T} \end{pmatrix} = I$$

rõ ràng $\tilde{H}(s)\in RH_\infty$ và $\tilde{K}(s)\in RH_\infty$ là hai ma trận nguyên tố cùng nhau bên phải, hay $\tilde{U}(s)\in RH_\infty$ và $\tilde{V}(s)\in RH_\infty$ phải là hai ma trận nguyên tố cùng nhau bên trái giống như $\tilde{N}(s)\in RH_\infty$, $\tilde{M}(s)\in RH_\infty$.

Phân tích ma trận truyền đạt thành cặp các ma trận nguyên tố cùng nhau

Giống như với hệ có các khâu SISO mà ở đó hàm truyền đạt $S(s)$ đã được biến đổi thành thương số (4.22) của hai hàm $N, M\in RH_\infty$, đối với hệ MIMO ta cũng có:

Định lý 4.4: Mọi ma trận $S(s)$ thực-hữu tỷ và hợp thức, luôn phân tích được thành:

a) $S=NM^{-1}$, trong đó $N, M\in RH_\infty$ và nguyên tố cùng nhau bên phải.

b) $S=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$, trong đó $\tilde{N}, \tilde{M}\in RH_\infty$ và nguyên tố cùng nhau bên trái.

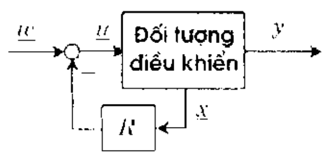
Chứng minh:

Xét đối tượng có ma trận truyền đạt thực-hữu tỷ và hợp thức $S(s)$, được mô tả bởi mô hình trạng thái:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=A\underline{x}+B\underline{u}\\ \underline{y}=C\underline{x}+D\underline{u}\end{cases} \tag{4.34}$$

trong đó $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{u}\in\mathbb{R}^m$ và $\underline{y}\in\mathbb{R}^r$. Khi đó sẽ có:

$$\underline{Y}(s)=S(s)\underline{U}(s) \qquad \text{và} \qquad S(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \tag{4.35}$$



Hình 4.7: Minh họa phần chứng minh định lý 4.3

Giả sử đối tượng được điều khiển bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái (âm) R sao cho hệ kín ổn định (hình 4.7), tức là ma trận $A-BR$ có tất cả các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo (ma trận bền), hay đa thức $\det(sI-A+BR)$ là đa thức Hurwitz. Khi đó hệ kín được mô tả bởi:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=(A-BR)\underline{x}+B\underline{w}\\ \underline{y}=(C-DR)\underline{x}+D\underline{w}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}s\underline{X}(s)=(A-BR)\underline{X}(s)+B\underline{W}(s)\\ \underline{Y}(s)=(C-DR)\underline{X}(s)+D\underline{W}(s)\end{cases}$$

$$\rightarrow \qquad \begin{cases} \underline{X}(s) = (sI - A + BR)^{-1} B\underline{W}(s) \\ \underline{Y}(s) = (C - DR)\underline{X}(s) + D\underline{W}(s) \end{cases} \tag{4.36}$$

trong đó các ký hiệu chữ to là chỉ ảnh Laplace của tín hiệu tương ứng.

Từ (4.36) ta rút ra được:

1) Quan hệ giữa tín hiệu vào $\underline{w}(t)$ và tín hiệu ra $\underline{y}(t)$ bằng cách thay $\underline{X}(s)$ ở phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai:

$$\underline{Y}(s) = [(C-DR)(sI-A+BR)^{-1}B+D]\underline{W}$$

2) Quan hệ giữa tín hiệu vào $\underline{w}(t)$ và tín hiệu sai lệch $\underline{u}(t)$ bằng cách nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất với R về bên trái rồi thay $R\underline{X}(s)$ bởi $\underline{W}(s)-\underline{U}(s)$:

$$\underline{U}(s) = [-R(sI-A+BR)^{-1}B+I]\underline{W}$$

So sánh với (4.35) thì rõ ràng có:

$$\underline{Y}(p) = NM^{-1}\underline{U}(p).$$

trong đó

$$N = [(C-DR)(sI-A+BR)^{-1}B+D] \in \mathrm{RH}_\infty$$

và

$$M = [-R(sI-A+BR)^{-1}B+I] \in \mathrm{RH}_\infty$$

Như vậy, thông qua ma trận R dưới dạng bộ điều khiển phản hồi (âm) trạng thái, ma trận truyền đạt $S(s)$ của đối tượng đã được tách thành tích NM^{-1} của hai ma trận hàm $N, M \in \mathrm{RH}_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải.

Hoàn toàn tương tự, nhưng với bộ phản hồi trạng thái P cho đối tượng đối ngẫu:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A^T\underline{x} + C^T\underline{u} \\ \underline{y} = B^T\underline{x} + D^T\underline{u} \end{cases}$$

để hệ kín được ổn định (các giá trị riêng của ma trận $A-PC$ nằm bên trái trục ảo) ta cũng đi đến:

$$\underline{Y}(p) = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}\,\underline{U}(p),$$

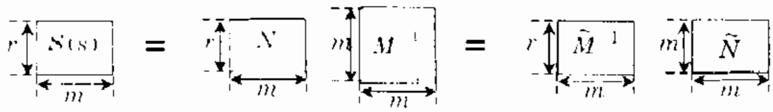
với

$$\tilde{M} = [-C(sI-A+PC)^{-1}P+I] \in \mathrm{RH}_\infty$$

và

$$\tilde{N} = [C(sI-A+PC)^{-1}(B-PD)+D] \in \mathrm{RH}_\infty$$

Như vậy, thông qua P, ma trận truyền đạt $S(s)$ của đối tượng cũng đã được tách thành tích $\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$ của hai ma trận hàm $\widetilde{N}$, $\widetilde{M}\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái. ❐



Hình 4.8: Phân tích $S(s)$ thành cặp ma trận nguyên tố cùng nhau (theo [43]).

Cũng cần nói thêm rằng bên cạnh lời chứng minh trên (lấy từ tài liệu [18]) còn có nhiều những lời chứng minh khác cho định lý 4.4, thậm chí còn gọn gàng hơn, ví dụ như của [13]. Song điểm đặc biệt của chứng minh trên là nó đưa ra được phương pháp xác định các cặp ma trận nguyên tố cùng nhau $N,M\in RH_\infty$ và $\widetilde{N}$, $\widetilde{M}\in RH_\infty$.

Để cho tiện cho việc trình bày, ta sử dụng ký hiệu:

$$S(s)=\left[A,B,C,D\right]=C(sI-A)^{-1}B+D.$$

Khi đó thuật toán xác định N,M, $\widetilde{N}$, $\widetilde{M}\in RH_\infty$ sẽ gồm các bước:

1) Viết lại $S(s)=\left[A,B,C,D\right]$. Có thể tìm thấy trong tài liệu [19] những phương pháp xác định bốn ma trận A,B,C,D từ ma trận truyền đạt $S(s)$.
2) Xác định ma trận R sao cho $A_R=A-BR$ là ma trận bền. Có thể sử dụng các phương pháp thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực [35] để tìm R.
3) Tính $M(s)=\left[A_R,B,-R,I\right]$, $N(s)=\left[A_R,B,C_R,D\right]$, trong đó $C_R=C-DR$.
4) Xác định ma trận P sao cho $A_P=A-PC$ là ma trận bền. Có thể sử dụng phương pháp thiết kế bộ quan sát trạng thái Luenberger [35] để tìm P.
5) Tính $\widetilde{M}(s)=\left[A_P,-P,C,I\right]$, $\widetilde{N}(s)=\left[A_P,B_P,C,D\right]$, trong đó $B_P=B-PD$.

Ví dụ 4.10: (Xác định cặp các ma trận nguyên tố cùng nhau)

Cho đối tượng có 2 tín hiệu vào/ra với ma trận truyền đạt:

$$S(s)=\frac{1}{s(s-2)}\begin{pmatrix} s-2 & 2 \\ s-2 & 2+2s \end{pmatrix}$$

Mô hình trạng thái tương ứng của nó là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underline{x}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{B}\underline{u}\quad,\qquad \underline{y}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\underline{x}\quad,\qquad (D=\Theta)$$

trong đó ký hiệu Θ là chỉ ma trận có tất cả các phần tử bằng 0

Ta thấy ma trận A của đối tượng có hai giá trị riêng $s_1=0$, $s_2=2$, không nằm bên trái trục ảo nên $S(s)\notin RH_\infty$. Sử dụng phương pháp modal [35] để thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái R sao cho hệ kín với ma trận hệ thống là $A_R=A-BR$ có hai điểm cực $\lambda_1=\lambda_2=-1$ được:

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1{,}5\end{pmatrix},\quad A_R=A-BR=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad \text{và}\quad C_R=C-DR=C.$$

Suy ra

$$M(s)=[A_R,B,-R,I]=-R(sI-A_R)^{-1}B+I=\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix}s & -2\\ 0 & s-2\end{pmatrix}\in RH_\infty$$

$$N(s)=[A_R,B,C_R,D]=C_R(sI-A_R)^{-1}B+D=\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\in RH_\infty$$

Thử lại ta thấy rõ ràng có:

$$NM^{-1}=\frac{1}{s(s-2)}\begin{pmatrix}s-2 & 2\\ s-2 & 2+2s\end{pmatrix}=S(s).$$

Tương tự, dùng phương pháp modal để thiết kế P cho đối tượng đối ngẫu sao cho hệ kín với ma trận hệ thống là $A_P=A-PC$ có hai điểm cực $\lambda_1=\lambda_2=-2$ ta được:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix},\quad A_P=A-PC=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\quad \text{và}\quad B_P=B-PD=B.$$

$$\tilde{M}(s)=[A_P,-P,C,I]=-C(sI-A_P)^{-1}P+I=\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s-3\end{pmatrix}\in RH_\infty$$

$$\tilde{N}(s)=[A_P,B_P,C,D]=C(sI-A_P)^{-1}B_P+D=\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\in RH_\infty$$

và thử lại ta cũng thấy có:

$$\tilde{M}^{-1}\tilde{N}=\frac{1}{s(s-2)}\begin{pmatrix}s-2 & 2\\ s-2 & 2+2s\end{pmatrix}=S(s)$$ ❐

Xác định tập các bộ điều khiển làm ổn định hệ thống

Sau khi đã phân tích ma trận truyền đạt của đối tượng thành tích các cặp ma trận nguyên tố cùng nhau thì tương tự như ở hệ có các khâu SISO đã trình bày tại mục 4.2.1, đối với bài toán MIMO ta cũng có định lý sau về tập *O* của các bộ điều khiển làm ổn định bền vững hệ thống có cấu trúc cho ở hình 4.4:

Định lý 4.5: Cho đối tượng có ma trận truyền đạt $S=NM^{-1}=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ với $N,M\in \mathrm{RH}_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $\tilde{N}$, $\tilde{M}\in \mathrm{RH}_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái. Nếu $X,Y,\tilde{X},\tilde{Y}\in \mathrm{RH}_\infty$ là bốn ma trận tương ứng thỏa mãn *hệ phương trình Bezout* (hay còn gọi phương trình Bezout mở rộng):

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & X \\ N & Y \end{pmatrix}=I. \tag{4.37}$$

thì tập hợp *O* gồm tất cả các bộ điều khiển $R(s)$ làm hệ kín (hình 4.4) ổn định bền vững với nhiễu đầu ra $\underline{n}(t)$ sẽ có dạng:

$$O=\{R=(X+MQ)(Y-NQ)^{-1}\ \big|\ Q\in \mathrm{RH}_\infty\} \tag{4.38a}$$

$$=\{R=(\tilde{Y}-Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{X}+Q\tilde{M})\ \big|\ Q\in \mathrm{RH}_\infty\} \tag{4.38b}$$

Chứng minh:

Trước hết ta thấy từ (4.37):

$$\begin{pmatrix} I & -Q \\ \Theta & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \\ \tilde{N} & -\tilde{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & X \\ N & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & Q \\ \Theta & I \end{pmatrix}=I$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{Y}-Q\tilde{N} & \tilde{X}+Q\tilde{M} \\ \tilde{N} & -\tilde{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & X+MQ \\ N & -(Y-NQ) \end{pmatrix}=I \tag{4.39}$$

nên

$$(\tilde{Y}-Q\tilde{N})(X+MQ)=(\tilde{X}+Q\tilde{M})(Y-NQ).$$

Điều này chứng tỏ rằng hai đẳng thức (4.38a) và (4.38b) là tương đương.

Tiếp theo, do tất cả các ma trận $N,M,\tilde{N},\tilde{M},X,Y,\tilde{X},\tilde{Y}$ đều là những phần tử của RH_∞ nên ta có với (4.39)

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}-Q\tilde{N} & \tilde{X}+Q\tilde{M} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix}\in \mathrm{RH}_\infty \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} M & X+MQ \\ N & -(Y-NQ) \end{pmatrix}^{-1}\in \mathrm{RH}_\infty$$

Đặt

$$U=X+MQ \qquad \text{và} \qquad V=Y-NQ$$

thì từ công thức nghịch đảo ma trận khối của Frobenius [35] ta được:

$$\begin{pmatrix} M & X+MQ \\ N & -(Y-NQ) \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} M & U \\ N & -V \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} F^{-1} & F^{-1}UV^{-1} \\ V^{-1}NF^{-1} & -V^{-1}+V^{-1}NF^{-1}UV^{-1} \end{pmatrix}\in \mathrm{RH}_\infty \tag{4.40}$$

trong đó:

$$F=-V-NM^{-1}U.$$

Mặt khác, do $R=UV^{-1}$ và $S=NM^{-1}$ cũng như:

$$(I+SR)^{-1}=(VV^{-1}+NM^{-1}UV^{-1})^{-1}=V(V+NM^{-1}U)^{-1}=-VF^{-1}$$

nên từ (4.40), mà cụ thể là $F^{-1}\in RH_\infty$ và $V\in RH_\infty$ sẽ có:

$$(I+SR)^{-1}\in RH_\infty \tag{4.41}$$

hay ma trận truyền đạt $G_n^y(s)$ giữa vector tín hiệu nhiễu $\underline{n}(t)$ và vector tín hiệu ra $y(t)$, ứng với $\underline{w}(t)=\underline{0}$ (hình 4.4):

$$G_n^y(s)=(I+SR)^{-1}$$

là ma trận bền (hệ ổn định bền vững với nhiễu).

Cũng như vậy, từ (4.41) và với quan hệ:

$$(I+SR)^{-1}=(I+SR)^{-1}[(I+SR)-SR]=(I+SR)(I+SR)^{-1}-(I+SR)^{-1}SR$$

$$=I-(I+SR)^{-1}SR$$

ta có:

$$(I+SR)^{-1}SR\in RH_\infty$$

hay ma trận truyền đạt $G_w^y(s)$ giữa $\underline{w}(t)$ và $y(t)$ ứng với $\underline{n}(t)=\underline{0}$ (hình 4.4):

$$G_w^y(s)=(I+SR)^{-1}SR$$

là ma trận bền (hệ kín ổn định). □

Thuật toán tìm nghiệm hệ phương trình Bezout

Sau khi đã phân tích ma trận truyền đạt của đối tượng $S(s)$ thành tích các ma trận nguyên tố cùng nhau, thì với định lý 4.4, để có được tập O gồm tất cả các bộ điều khiển $R(s)$ làm hệ kín ổn định bền vững, ta còn cần phải xác định cặp ma trận nguyên tố cùng nhau $X,Y\in RH_\infty$ hoặc $\tilde{X},\tilde{Y}\in RH_\infty$ thỏa mãn (4.37).

Trước hết ta gọi:

$$S(s)=[A,B,C,D].$$

Sau đó tìm R là bộ điều khiển phản hồi trạng thái (âm) của đối tượng sao cho hệ kín ổn định, hay $A_R=A-BR$ là ma trận bền và P là bộ điều khiển phản hồi trạng thái (âm) của đối tượng đối ngẫu làm ổn định hệ kín, tức là làm cho ma trận $A_P=A-PC$ có tất cả các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo. Ghép chung hai ma trận đó lại với nhau ta sẽ được một bộ điều khiển bao gồm bộ quan sát Luenberger [35]:

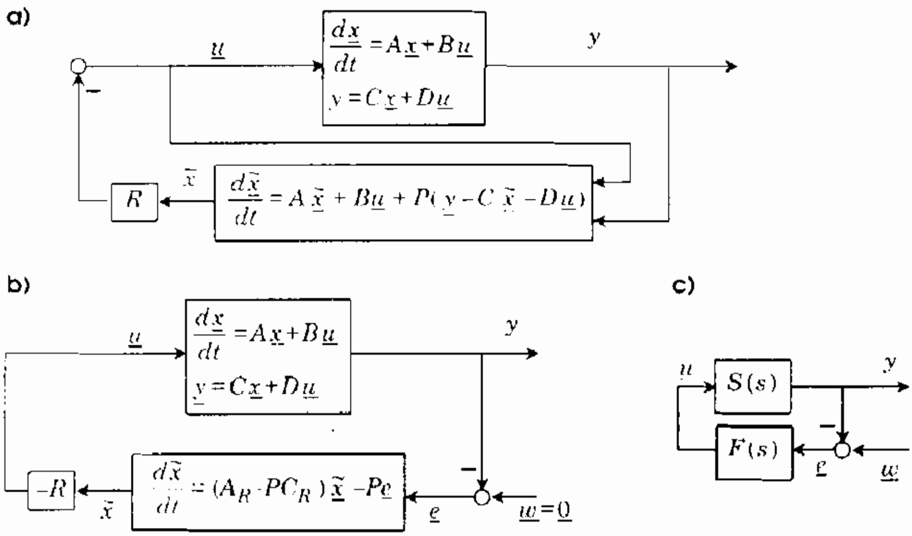
$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\,\tilde{\underline{x}} + B\underline{u} + P(\underline{y} - \underbrace{C\tilde{\underline{x}} - D\underline{u}}_{-\tilde{\underline{y}}})$$

và bộ phản hồi âm trạng thái:

$$\underline{u} = R\,\tilde{\underline{x}}$$

tức là bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = [\,\underbrace{(A - BR)}_{A_R} - P\underbrace{(C - DR)}_{C_R}\,]\,\tilde{\underline{x}} + P\,\underline{y}\,, \qquad \underline{u} = -R\,\tilde{\underline{x}} \tag{4.42}$$



Hình 4.9: Hệ thống điều khiển kín có sự tham gia của bộ quan sát trạng thái Luenberger. Minh họa việc xác định X, Y và $\tilde{X}, \tilde{Y}$.

Theo hình 4.9a) minh họa thì bộ điều khiển (4.42) nằm trong mạch hồi tiếp, chứ không phải ở tuyến thẳng giống như hình 4.4 là cấu trúc hệ thống đang được xét. Song điều đó không quan trọng, vì ta có thể dễ dàng biến đổi nó về dạng thích hợp như mô tả ở hình 4.9b và 4.14c. Khi đó bộ điều khiển (4.42) trở thành:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A_R - PC_R)\,\tilde{\underline{x}} + (-P)\underline{e}, \qquad \underline{u} = (-R)\,\tilde{\underline{x}} \tag{4.43}$$

Sử dụng ký hiệu

$$\tilde{A} = A_R - PC_R, \qquad \tilde{B} = -P, \qquad \tilde{C} = -R \tag{4.44a}$$

thì mô hình trạng thái trên của bộ điều khiển trở thành dạng quen biết như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \tilde{A}\underline{\tilde{x}} + \tilde{B}\underline{e} \\ u = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases} \tag{4.44b}$$

Do đó nếu gọi $F(s)$ là ma trận truyền đạt của bộ điều khiển (4.44b), tức là:

$$F(s) = [\ \tilde{A}\ ,\ \tilde{B}\ ,\ \tilde{C}\ ,\Theta\ ]$$

rồi biểu diễn nó thành tích các cặp ma trận nguyên tố cùng nhau

$$F(s) = XY^{-1} = \tilde{Y}^{-1}\tilde{X}$$

sẽ đi đến được nhờ thuật toán phân tích cặp ma trận nguyên tố cùng nhau vừa trình bày trên đây với $\tilde{R}$ là ma trận làm cho $\tilde{A}_R = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{R}$ là ma trận bền cũng như $\tilde{P}$ là ma trận làm cho $\tilde{A}_P = \tilde{A} - \tilde{P}\tilde{C}$ là ma trận bền:

$$X(s) = [\ \tilde{A}_R\ ,\ \tilde{B}\ ,\ \tilde{C}\ ,\Theta\ ], \qquad Y(s) = [\ \tilde{A}_R\ ,\ \tilde{B}\ ,\ -\tilde{R}\ ,I\ ] \tag{4.45a}$$

$$\tilde{X}(s) = [\ \tilde{A}_P\ ,\ \tilde{B}\ ,\ \tilde{C}\ ,\Theta\ ]\ , \qquad \tilde{Y}(s) = [\ \tilde{A}_P\ ,\ -\tilde{P}\ ,\ \tilde{C}\ ,I\ ] \tag{4.45b}$$

Ở đây, để đơn giản, ta có thể chọn $\tilde{R} = C_R$, vì khi đó:

$$\tilde{A}_R = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{R} = A_R - PC_R + PC_R = A_R$$

đã là một ma trận bền. Cũng như vậy ta có thể chọn $\tilde{P} = B_P = B - PD$, vì:

$$\tilde{A}_P = \tilde{A} - \tilde{P}\tilde{C} = A_R - PC_R - \tilde{P}\tilde{C} = A - PC = A_P$$

Bằng cách chọn như trên thì nhờ có (4.44a), các công thức (4.45) trở thành:

$$X(s) = [A_R, -P, -R, \Theta] = [A_R, P, R, \Theta] \tag{4.46a}$$

$$Y(s) = [A_R, -P, -C_R, I] = [A_R, P, C_R, I] \tag{4.46b}$$

$$\tilde{X}(s) = [A_P, -P, -R, \Theta] = [A_P, P, R, \Theta] \tag{4.46c}$$

$$\tilde{Y}(s) = [A_P, -B_P, -R, I] = [A_P, B_P, R, I] \tag{4.46d}$$

Từ đây, ta đi đến được thuật toán xác định ma trận $X, Y \in \mathrm{RH}_\infty$ và $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \mathrm{RH}_\infty$ thỏa mãn (4.37), gồm những bước như sau:

1) Viết lại mô hình đối tượng $S(s)=[A,B,C,D]$. Sau đó xác định hai ma trận R,P để $A_R=A-BR$ và $A_P=A-PC$ là những trận bền.

2) Tính $X(s)=[A_R,P,R,\Theta]$, $Y(s)=[A_R,P,C_R,I]$, trong đó $C_R=C-DR$.

3) Tính $\tilde{X}(s)=[A_P,P,R,\Theta]$, $\tilde{Y}(s)=[A_P,B_P,R,I]$, trong đó $B_P=B-PD$.

Ví dụ 4.11: Xác định cặp ma trận nguyên tố cùng nhau

Xét đối tượng đã cho ở ví dụ 4.10

$$S(s)=\frac{1}{s(s-2)}\begin{pmatrix} s-2 & 2 \\ s-2 & 2+2s \end{pmatrix}$$

với các kết quả thu được:

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix},\quad A_R=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C_R=C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},\quad A_P=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad B_P=B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M(s)=\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix} s & -2 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix},\qquad N(s)=\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}(s)=\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s-3 \end{pmatrix},\quad \tilde{N}(s)=\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ta có theo thuật toán trên:

$$X(s)=[A_R,P,R,\Theta]=R(sI-A_R)^{-1}P=\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y(s)=[A_R,P,C_R,I]=C_R(sI-A_R)^{-1}P+I=\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s+6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{X}(s)=[A_P,P,R,\Theta]=R(sI-A_P)^{-1}P=\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}(s)=[A_P,B_P,R,I]=R(sI-A_P)^{-1}B_P+I=\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ 0 & s+5 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng chúng thỏa mãn phương trình Bezout (4.37):

$$\tilde{X}N+\tilde{Y}M=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left[\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ 0 & s+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -2 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}\right]=I$$

$$\tilde{N}X+\tilde{M}Y=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s+6 \end{pmatrix}\right]=I$$

$$\tilde{Y}X - \tilde{X}Y = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left[\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ 0 & s+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s+6 \end{pmatrix}\right] = \Theta$$

$$\tilde{N}M - \tilde{M}N = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -2 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \Theta. \qquad \square$$

Cuối cùng, trước khi kết thúc mục nhỏ này ta còn có hai điều bàn thêm. Đó là:

- Thuật toán vừa trình bày để xác định nghiệm $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathrm{RH}_\infty$ của phương trình Bezout từ $N, M, \tilde{N}, \tilde{M} \in \mathrm{RH}_\infty$ không phải là duy nhất, chẳng hạn như còn có thuật toán Euclid mở rộng dạng cải biên cho ma trận hàm phức [43]. Song, theo ý kiến riêng của tác giả, do được chuyển về không gian trạng thái với các ma trận hằng, nên thuật toán trên có ưu điểm là nó sử dụng được tất cả các công cụ mềm đã được phổ biến rộng rãi của đại số tuyến tính, chẳng hạn như MatLab.
- Bên cạnh nghiệm tìm được theo thuật toán trên, phương trình Bezout (4.37) còn có nhiều nghiệm khác. Thực chất nó có vô số nghiệm, vì giả sử $X_0, Y_0, \tilde{X}_0, \tilde{Y}_0$ là một nghiệm đã có, thì theo công thức (4.39), mọi ma trận:

  $X = X_0 + MQ$, $Y = Y_0 - NQ$, $\tilde{X} = \tilde{X}_0 + Q\tilde{M}$, $\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 - Q\tilde{N}$,

  với $Q \in \mathrm{RH}_\infty$ tùy ý, cũng sẽ là nghiệm của (4.37).

Tổng kết: Thuật toán tham số hóa bộ điều khiển ổn định

Để xác định tập O, như ta thấy, phải xác định $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathrm{RH}_\infty$ của phương trình Bezout. Trong trường hợp đặc biệt, khi mà bản thân ma trận truyền đạt $S(s)$ của đối tượng đã là phần tử của RH_∞ (*đối tượng đã ổn định*), thì ma trận A (thu được từ bước 1a của thuật toán) là ma trận bền. Bởi vậy có thể chọn $R = P = \Theta$. Điều này dẫn đến:

$A_R = A_P = A$, $C_R = C$ và $B_P = B$.

Suy ra:

$N(s) = \tilde{N}(s) = S(s)$, $M(s) = Y(s) = I$.

$\tilde{M}(s) = \tilde{Y}(s) = I$, $X(s) = \tilde{X}(s) = \Theta$.

Tổng kết lại, ta có được thuật toán xác định tập hợp O của tất cả các bộ điều khiển $R(s)$ làm hệ kín với cấu trúc cho ở hình 4.4 được ổn định bền vững, bao gồm những bước như sau:

1) Nếu ma trận truyền đạt $S(s)$ của đối tượng là phần tử của RH_∞, tức là đối tượng đã ổn định thì gán $N = \tilde{N} = S$, $M = Y = \tilde{M} = \tilde{Y} = I$ và $X = \tilde{X} = \Theta$ rồi chuyển sang bước 5).

2) Phân tích S thành $S=NM^{-1}=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$, trong đó $N,M\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $\tilde{N}$, $\tilde{M}\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái, bằng cách thực hiện:

a) Xác định bốn ma trận hằng A,B,C,D để có $S(s)=[A,B,C,D]$.

b) Xác định R,P để $A_R=A-BR$ và $A_P=A-PC$ là những ma trận bền.

c) Tính $M(s)=[A_R,B,-R,I]$, $N(s)=[A_R,B,C_R,D]$, trong đó $C_R=C-DR$.

d) Tính $\tilde{M}(s)=[A_P,-P,C,I]$, $\tilde{N}(s)=[A_P,B_P,C,D]$, trong đó $B_P=B-PD$.

3) Tính $X(s)=[A_R,P,R,\Theta]$ và $Y(s)=[A_R,P,C_R,I]$.

4) Tính $\tilde{X}(s)=[A_P,P,R,\Theta]$ và $\tilde{Y}(s)=[A_P,B_P,R,I]$.

5) Xác định $\mathcal{O}=\{R=(X-MQ)(Y-NQ)^{-1}\mid Q\in RH_\infty\}$

$$=\{R=(\tilde{Y}-Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{X}-Q\tilde{M})\mid Q\in RH_\infty\}.$$

Thuật toán trên được xây dựng tổng quát cho hệ MIMO nên đương nhiên nó cũng áp dụng được cho hệ SISO.

Ví dụ 4.12: (Xác định tập $\mathcal{O}$)

Xét đối tượng SISO có hàm truyền đạt không bền

$$S(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}.$$

Nó cũng còn được mô tả bởi mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}}_{A}\underline{x}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{B}u,\qquad y=\underbrace{(1\quad 1)}_{C}\underline{x}\qquad (\text{có } D=0).$$

Ma trận A có hai giá trị riêng là $s_1=3$, $s_2=-1$. Bằng phương pháp modal [35] để chuyển điểm $s_1=3$ từ bên phải trục ảo thành $s_1=-3$ nằm bên trái trục ảo ta tìm được:

$$R=(2\quad 6)\qquad \text{và}\qquad P=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

tức là với chúng, hai ma trận

$$A_R=A-BR=\begin{pmatrix}0&3\\1&-4\end{pmatrix}\qquad \text{và}\qquad A_P=A-PC=\begin{pmatrix}-3&0\\-2&-1\end{pmatrix}$$

đều là các ma trận bền (có hai giá trị riêng là $s_1=-3$, $s_2=-1$).

Từ đây suy ra:

$$M(s)=[A_R,B,-R,I]=1-(2\quad 6)\begin{pmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{s-3}{s+3}$$

$$N(s)=[A_R,B,C_R,D]=(1\quad 1)\begin{pmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

$$\widetilde{M}(s)=[A_P,-P,C,I]=1-(1\quad 1)\begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{s-3}{s+3}$$

$$\widetilde{N}(s)=[A_P,B_P,C,D]=(1\quad 1)\begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

$$X(s)=[A_R,P,R,\Theta]=(2\quad 6)\begin{pmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{24}{s+3}$$

$$Y(s)=[A_R,P,C_R,I]=1+(1\quad 1)\begin{pmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{s+7}{s+1}$$

$$\widetilde{X}(s)=[A_P,P,R,\Theta]=(2\quad 6)\begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{24}{s+3}$$

$$\widetilde{Y}(s)=[A_P,B_P,R,I]=1+(2\quad 6)\begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{s+7}{s+1}\,. \qquad \square$$

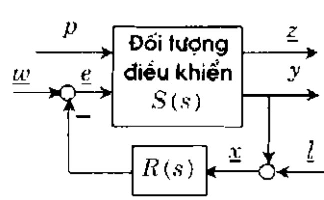
4.2.3 Ứng dụng trong điều khiển ổn định nội

Khái niệm ổn định nội

Cho hệ thống có sơ đồ cấu trúc mô tả ở hình 4.10, trong đó

$$\begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{Y} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}}_{S(s)}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{E} \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

hay $S(s)$ là ma trận truyền đạt của đối tượng (những ký hiệu chữ to trong công thức (4.47) là ảnh Laplace của các tín hiệu tương ứng). $\underline{w}(t)$ là vector tín hiệu chủ đạo, $\underline{p}(t)$ là vector tín hiệu vào ngoại sinh (*exogenous inputs*), $\underline{z}(t)$ là vector tín hiệu ra không mong muốn (không kiểm soát được), $\underline{y}(t)$ là vector tín hiệu ra đo được và $\underline{l}(t)$ là vector tín hiệu nhiễu tác động ở đầu ra.



Hình 4.10: Bài toán ổn định nội.

Nhiệm vụ của bài toán ổn định nội (*internal stable*) là phải thiết kế bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra $R(s)$ sao cho mọi hàm truyền đạt trong hệ kín là những hàm bền, tức là $R(s)$ phải làm cho 9 ma trận truyền đạt từ các vector tín hiệu $\underline{p}(t)$, $\underline{w}(t)$, $\underline{l}(t)$ tới $\underline{z}(t)$, $\underline{e}(t)$, $\underline{x}(t)$ là những phần tử của RH_∞. Với một bộ điều khiển như vậy, mọi tín hiệu có bên trong hệ cũng sẽ tắt dần sau một tác động nhiễu tức thời.

Viết lại ma trận truyền đạt của hệ kín thành:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{X}-\underline{L} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} S_{11}\underline{P}+S_{12}\underline{E}=\underline{Z} \\ \underline{E}=\underline{W}-R\underline{X} \\ S_{21}\underline{P}+S_{22}\underline{E}=\underline{X}-\underline{L} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{E} \\ \underline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \Theta & \Theta \\ \Theta & I & \Theta \\ S_{21} & \Theta & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{W} \\ \underline{L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta & S_{12} & \Theta \\ \Theta & \Theta & -R \\ \Theta & S_{22} & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{E} \\ \underline{X} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{E} \\ \underline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -S_{12} & \Theta \\ \Theta & I & R \\ \Theta & -S_{22} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S_{11} & \Theta & \Theta \\ \Theta & I & \Theta \\ S_{21} & \Theta & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{W} \\ \underline{L} \end{pmatrix}$$

sau đó áp dụng công thức nghịch đảo ma trận khối của Frobenius, ta sẽ đến được:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{E} \\ \underline{X} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}}_{G(s)}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{W} \\ \underline{L} \end{pmatrix} \qquad (4.48)$$

trong đó:

$$G_{11} = S_{11}-S_{12}R(I+S_{22}R)^{-1}S_{21} \qquad (4.49a)$$

$$G_{12} = S_{12}-S_{12}R(I+S_{22}R)^{-1}S_{22} \qquad (4.49b)$$

$$G_{13} = -S_{12}R(I+S_{22}R)^{-1} \qquad (4.49c)$$

$$G_{21} = -R(I+S_{22}R)^{-1}S_{21} \qquad (4.49d)$$

$$G_{22} = I-R(I+S_{22}R)^{-1}S_{22} \qquad (4.49e)$$

$$G_{23} = -R(I+S_{22}R)^{-1} \qquad (4.49f)$$

$$G_{31} = (I+S_{22}R)^{-1}S_{21} \qquad (4.49g)$$

$$G_{32} = (I+S_{22}R)^{-1}S_{22} \qquad (4.49h)$$

$$G_{33} = (I+S_{22}R)^{-1} \qquad (4.49i)$$

Có thể thấy điều kiện ổn định nội là tổng quát hơn, chặt chẽ hơn điều kiện hệ ổn định bền vững với nhiễu đầu ra đã được xét ở mục 4.2.1. Một hệ có thể ổn định (quan hệ giữa tín hiệu chủ đạo $\underline{w}$ và tín hiệu ra $\underline{y}$ là quan hệ bền), song lại không ổn định nội. Ví dụ sau minh họa cho điều đó.

Ví dụ 4.13: Hệ ổn định nhưng không ổn định nội

Hệ kín cho ở hình 4.11 với các khâu SISO

$$S(s)=\frac{s-1}{s+1} \qquad \text{và} \qquad R(s)=\frac{s+3}{s-1}$$

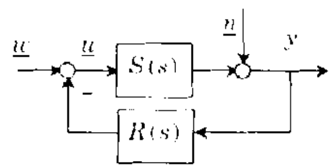
là ổn định vì có hàm truyền đạt

$$G_w^y(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{S}{1+RS}=\frac{s-1}{2s+4}$$

là hàm bền. Song quan hệ giữa $n(t)$ và $u(t)$

$$G_n^u(s)=\frac{U(s)}{N(s)}=\frac{R}{1+SR}=\frac{(s+1)(s+3)}{(s-1)(2s+4)}$$

lại không ổn định. □



Hình 4.11: Minh họa ví dụ 4.13.

Tính ổn định nội được (internal stabilizable)

Quay lại vấn đề chính của bài toán là xác định bộ điều khiển $R(s)$ để tất cả 9 ma trận truyền đạt $G_{ij}(s)$, $i,j=1,2,3$ cho trong công thức (4.49) là những phần tử thuộc RH_∞. Nhưng trước khi đi tìm $R(s)$ cần phải biết được thực sự có tồn tại một bộ điều khiển như vậy hay không. Nghi ngờ đó là hoàn toàn có lý vì không phải mọi đối tượng đều có thể ổn định nội được bằng một bộ điều khiển $R(s)$.

Ví dụ 4.14: Đối tượng không có khả năng ổn định nội

Đối tượng (4.47) có $S_{12}=\Theta$ và S_{11} hoặc S_{12} là một ma trận không bền, *không thể ổn định nội được*. Thật vậy, từ

$$G_{11}=S_{11}-S_{12}R(I+S_{22}R)^{-1}S_{21}=S_{11}$$

ta thấy rõ ràng $R(s)$ không thể thay đổi được $G_{11}(s)$.

Cũng như vậy, vì có

$$G_{12}=S_{12}-S_{12}R(I+S_{22}R)^{-1}S_{22}=S_{12}$$

nên $R(s)$ không thay đổi được $G_{12}(s)$. □

Ví dụ 4.14 cho thấy điều kiện cần để đối tượng (4.37) có thể ổn định nội được là khi $S_{12}=\Theta$, cả hai ma trận S_{11} và S_{12} phải là những ma trận bền.

Công cụ giúp kiểm tra một cách tổng quát tính ổn định nội được (*internal stabilizable*) của đối tượng (4.47) là định lý sau.

Định lý 4.6: Cho đối tượng (4.47) với

$$S(s)=NM^{-1}=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}\,,$$

trong đó $N,M\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $\tilde{N},\tilde{M}\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái.

Giả thiết rằng $S_{22}(s)$ hợp thức chặt, tức là các phần tử của $S_{22}(s)$ đều có bậc đa thức tử số nhỏ hơn bậc đa thức mẫu số, hay

$$\lim_{s\to\infty} S_{22}(s)=\Theta\,.$$

Khi đó, các phát biểu sau sẽ là tương đương:

a) Đối tượng là *ổn định nội được* (*internal stabilizable*)

b) $M,(\Theta\quad I)N$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $M,\begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}$ nguyên tố cùng nhau bên trái.

c) $\tilde{M},\tilde{N}\begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}$ nguyên tố cùng nhau bên trái và $\tilde{M},(\Theta\quad I)$ nguyên tố cùng nhau bên phải.

Chứng minh:

Nếu gọi $S=NM^{-1}$ và $R=UV^{-1}$ trong đó $N,M\in RH_\infty$, $U,V\in RH_\infty$ là những cặp ma trận nguyên tố cùng nhau bên trái, thì hệ kín cho ở hình 4.10 biến đổi được thành dạng cho trong hình 4.12. Từ đó ta đọc ra được:

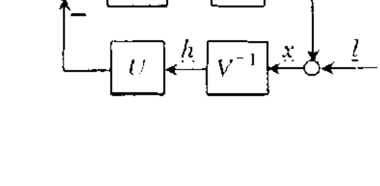
$$M^{-1}\begin{pmatrix}\underline{P}\\ \underline{E}\end{pmatrix}=\underline{F}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\underline{P}\\ W\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Theta\\ U\underline{H}\end{pmatrix}=M\underline{F}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\underline{P}\\ W\end{pmatrix}=M\underline{F}+\begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U\underline{H}$$

và

$$\begin{pmatrix}\underline{Z}\\ \underline{Y}\end{pmatrix}=N\underline{F}\quad\Leftrightarrow\quad\underline{Y}=(\Theta\quad I)N\underline{F}$$

trong đó những ký hiệu chữ to là ảnh Laplace của các tín hiệu tương ứng, chẳng hạn $\underline{E}$ là ký hiệu chỉ ảnh Laplace của $\underline{e}(t)$, $\underline{L}$ là ký hiệu chỉ ảnh Laplace của $\underline{l}(t)$.

Hình 4.12: Minh họa phần chứng minh định lý 4.5



Ghép chung hai đẳng thức trên lại với nhau và để ý tiếp

$$V^{-1}\underline{X}=\underline{H} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{L}+\underline{Y}=V\underline{H}$$

ta sẽ đi đến

$$\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U \\ -(\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{F}\\ \underline{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{P}\\ \underline{W}\end{pmatrix}\\ \underline{L}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{P}\\ \underline{W}\\ \underline{L}\end{pmatrix} \tag{4.50}$$

So sánh (4.48) với (4.50) thì rõ ràng để hệ ổn định nội, tức là cả 9 ma trận truyền đạt $G_{ij}(s)$, $i,j=1,2,3$ cho trong công thức (4.49) mô tả quan hệ từ $\underline{p}(t)$, $\underline{w}(t)$, $\underline{l}(t)$ tới $\underline{z}(t)$, $\underline{e}(t)$, $\underline{x}(t)$ thuộc RH_∞, thì cần và đủ là 6 ma trận truyền đạt mô tả quan hệ từ $\underline{p}(t)$, $\underline{w}(t)$, $\underline{l}(t)$ tới $\underline{f}(t)$, $\underline{h}(t)$ phải là những phần tử của RH_∞.

Mặt khác

$$\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U \\ -(\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}R \\ -(\Theta \quad I)S & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & \Theta \\ \Theta & V\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} I & \Theta & \Theta \\ \Theta & I & R \\ -S_{21} & -S_{22} & I\end{pmatrix}}_{S_R(s)}\begin{pmatrix} M & \Theta \\ \Theta & V\end{pmatrix}$$

và cả hai ma trận bên vế phải đều không suy biến, vì M,V không suy biến còn S_{22} hợp thức chặt nên khi $s\to\infty$ thì $\det S_R(s)\to 1$, tức là $S_R(s)$ cũng không suy biến. Do đó ma trận vế trái là nghịch đảo được. Vậy từ (4.50) sẽ có:

$$\begin{pmatrix}\underline{F}\\ \underline{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U \\ -(\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\underline{P}\\ \underline{W}\\ \underline{L}\end{pmatrix}$$

Điều này chứng tỏ rằng hệ ổn định nội khi và chỉ khi

$$\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U \\ -(\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}^{-1}\in RH_\infty \tag{4.51}$$

Tiếp tục, ta sử dụng ký hiệu

$$\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U \\ -(\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}U \\ -(\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}=I$$

sẽ có

$$AM - (\Theta\quad I)N = I$$

và như vậy hai ma trận M, $(\Theta\quad I)N$ là nguyên tố cùng nhau bên phải.

Chứng minh tương tự ta cũng có những kết luận còn lại của định lý. □

Bộ điều khiển ổn định nội

Về nguyên tắc thiết kế bộ điều khiển ổn định nội, ta có định lý sau:

Định lý 4.7: Cho đối tượng (4.47) ổn định nội được. Vậy thì bộ điều khiển $R(s)$ sẽ làm ổn định nội hệ kín trong hình 4.10 với đối tượng đã cho (cả 9 ma trận truyền đạt (4.49) của $G(s)$ là phần tử của RH_∞), khi và chỉ khi nó ổn định được hệ cho ở hình 4.4 với đối tượng $S_{22}(s)$.

Chứng minh:

Điều kiện cần là hiển nhiên nên chỉ còn phải chứng minh điều kiện đủ. Giả sử rằng $R(s)$ đã làm ổn định $S_{22}(s)$. Theo phần chứng minh định lý 4.5 trên đây ta thấy $R(s)$ sẽ làm ổn định nội $S(s)$ nếu nó làm cho 6 ma trận truyền đạt $\underline{p}(t)$, $\underline{w}(t)$, $\underline{l}(t)$ tới $\underline{f}(t)$, $\underline{h}(t)$ là những phần tử của RH_∞. Một cách trực quan từ hình 4.12, điều đó là tương đương với việc hai ma trận truyền đạt từ $\underline{p}(t)$ tới $\underline{f}(t)$ và $\underline{h}(t)$ thuộc RH_∞.

Khi $\underline{w}(t)=0$ và $\underline{l}(t)=0$ ta có:

$$M\underline{F} = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}\underline{P} + \begin{pmatrix} \Theta \\ I \end{pmatrix} U\underline{H} \tag{4.52a}$$

$$V\underline{H} = (\Theta\quad I)N\underline{F} \tag{4.52b}$$

Do $M, \begin{pmatrix} \Theta \\ I \end{pmatrix}$ nguyên tố cùng nhau bên trái (định lý 4.5), nên tồn tại hai ma trận $X, Y \in RH_\infty$ để có

$$MX + \begin{pmatrix} \Theta \\ I \end{pmatrix} Y = I \quad \Leftrightarrow \quad MX\begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}\underline{P} + \begin{pmatrix} \Theta \\ -I \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}\underline{P} = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}\underline{P} \tag{4.53}$$

Bởi vậy khi trừ (4.52a) cho (4.53) theo từng vế sẽ được:

$$M\underbrace{\left[\underline{F} - X\begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}\underline{P}\right]}_{\underline{F}_1} = \begin{pmatrix} \Theta \\ -I \end{pmatrix}(\underbrace{Y\begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}\underline{P}}_{\underline{P}_1} + U\underline{H})$$

$$\Leftrightarrow \qquad M\underline{F}_1 = \begin{pmatrix}\Theta \\ -I\end{pmatrix}(\underline{P}_1 + U\underline{H}) \tag{4.54a}$$

cũng như với (4.52b) còn có thêm:

$$V\underline{H} = (\Theta \quad I)N\underline{F}_1 + \underbrace{(\Theta \quad I)NX\begin{pmatrix}I \\ \Theta\end{pmatrix}\underline{P}}_{\underline{P}_2} = (\Theta \quad I)N\underline{F}_1 + \underline{P}_2 \tag{4.54b}$$

Hai công thức (4.54) xác nhận điều phải chứng minh. ❐

4.3 Điều khiển tối ưu RH$_\infty$

4.3.1 Những bài toán điều khiển RH$_\infty$ điển hình

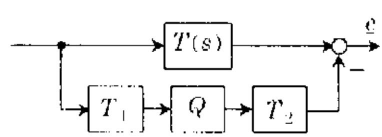
Bài toán cân bằng mô hình

Cho đối tượng MIMO tuyến tính mô tả bởi ma trận truyền đạt $T(s)$. Nhiệm vụ đặt ra cho bài toán cân bằng mô hình (*modell matching*) là xác định mô hình $Q(s)$ sao cho khi kết hợp với những thiết bị chấp hành cho trước $T_1(s)$, $T_2(s)$, sai lệch giữa nó với đối tượng là nhỏ nhất (hình 4.13).

Hiển nhiên, theo như nhiệm vụ đặt ra như vậy thì bài toán cân bằng mô hình là một bài toán tối ưu. Vấn đề đặt ra ở đây là xác định phiếm hàm mô tả sai lệch giữa hai ma trận hàm T và T_1QT_2 như thế nào. Trong điều khiển tối ưu RH$_\infty$ người ta sử dụng phiếm hàm sai lệch

$$\| T - T_1QT_2 \|_\infty$$

Nội dung của chương mục này là trình bày các phương pháp tìm nghiệm tối ưu Q^* cho trường hợp cụ thể là cả bốn ma trận phức T, T_1, T_2, Q và đều là những phần tử của RH$_\infty$, tức là:



Hình 4.13: Cân bằng mô hình

$$Q^* = \arg \min_{Q \in \mathrm{RH}_\infty} \| T - T_1QT_2 \|_\infty \qquad \text{với} \qquad T, T_1, T_2 \in \mathrm{RH}_\infty \tag{4.55}$$

Bài toán cực tiểu độ nhạy với sai lệch mô hình

Để tiện cho việc giải thích khái niệm độ nhạy, ta bắt đầu với hệ SISO cho ở hình 4.14. Hệ gồm bộ điều khiển $R(s)$, đối tượng $S(s)$. Khi đó hệ kín sẽ có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{SR}{1+SR}$$

Giả sử rằng mô hình $S(s)$ của đối tượng là không chính xác, tức là giữa $S(s)$ và đối tượng thực có một sai lệch ΔS. Gọi ΔG là sự thay đổi trong $G(s)$ ứng với sai lệch ΔS của đối tượng thì độ nhạy cảm được định nghĩa là tỷ số sai lệch tương đối $\frac{\Delta G}{G}$ trong $G(s)$ của cả hệ kín với sai lệch tương đối $\frac{\Delta S}{S}$ trong riêng đối tượng $S(s)$. Khi đó hàm phức:

$$K(s)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{\Delta S}{S}}=\frac{dG}{dS}\cdot\frac{S}{G}=\frac{R(1+SR)-SR^2}{(1+SR)^2}\cdot\frac{S(1+SR)}{SR}=\frac{1}{1+SR}$$

có tên gọi là hàm nhạy (*sensitivity function*) của hệ.

Mở rộng khái niệm này cho hệ nhiều chiều ta cũng có *ma trận hàm nhạy*

$$K(s)=(I+SR)^{-1}. \tag{4.56a}$$

đo sự nhạy cảm của chất lượng hệ thống đối với sai lệch mô hình đối tượng ΔS.

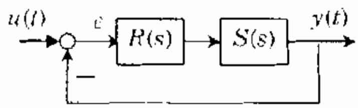
Mục tiêu điều khiển ở đây là tìm bộ điều khiển $R(s)$ có khả năng làm giảm tối thiểu độ nhạy này, tức là phải tìm nghiệm tối ưu $R^*(s)$ thuộc tập O gồm các bộ điều khiển làm hệ kín ổn định (định lý 4.5, công thức (4.38)), sao cho:

$$R^*=\arg\min_{R\in O}\|K(s)\|_\infty=\arg\min_{R\in O}\|(I+SR)^{-1}\|_\infty \tag{4.56b}$$

Thay ma trận truyền đạt của bộ điều khiển và đối tượng:

$$R=(X+MQ)(Y-NQ)^{-1}$$

$$S=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$



Hình 4.14: Hệ hồi tiếp không có nhiễu.

vào công thức (4.56a) của hàm nhạy, có để ý tới điều kiện đồng dạng Bezout:

$$\begin{pmatrix}\tilde{Y} & \tilde{X}\\ \tilde{N} & -\tilde{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M & X\\ N & -Y\end{pmatrix}=I$$

ta sẽ được:

$$\begin{aligned}K(s)&=(I+SR)^{-1}\\&=[I+\tilde{M}^{-1}\tilde{N}(X+MQ)(Y-NQ)^{-1}]^{-1}\\&=[\tilde{M}^{-1}\tilde{M}(Y-NQ)(Y-NQ)^{-1}+\tilde{M}^{-1}\tilde{N}(X+MQ)(Y-NQ)^{-1}]^{-1}\\&=(Y-NQ)[\tilde{M}(Y-NQ)+\tilde{N}(X+MQ)]^{-1}\tilde{M}\\&=(Y-NQ)\tilde{M}\end{aligned}$$

Như vậy, bài toán tối ưu cực tiểu độ nhạy cảm của hệ (4.56b) nay đã trở thành bài toán *cân bằng mô hình*:

$$Q^* = \arg \min_{Q \in RH_\infty} \| T - T_1 Q T_2 \|_\infty \tag{4.57a}$$

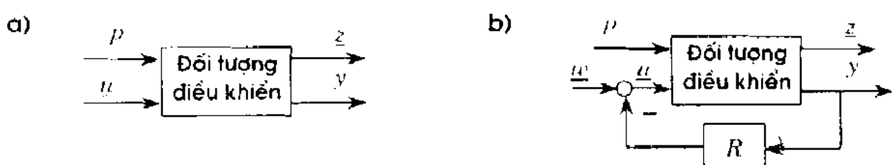
trong đó

$$T = Y\tilde{M}\,, \qquad T_1 = N \quad \text{và} \quad T_2 = \tilde{M}\,. \tag{4.57b}$$

Bài toán tối ưu RH_∞ mẫu (standard)

Xét đối tượng với sơ đồ khối cho ở hình 4.15a). Các tín hiệu vào ra của đối tượng được phân loại thành hai lớp, mỗi lớp có thể có nhiều tín hiệu. Các lớp tín hiệu đó là:

- $\underline{p}$, gồm tất cả những tín hiệu đầu vào không mong muốn (không tích cực được) của đối tượng, chẳng hạn như nhiễu hay tín hiệu ngoại sinh (*exogenous*) đầu vào.
- $\underline{u}$, gồm tất cả những tín hiệu điều khiển tích cực đối tượng và chỉ có thông qua lớp tín hiệu này ta mới có thể can thiệp được vào đối tượng.
- $\underline{z}$, gồm tất cả những tín hiệu đầu ra không kiểm soát được của đối tượng (đầu ra không mong muốn, không điều khiển được).
- $\underline{y}$, gồm tất cả những tín hiệu đầu ra đo được của đối tượng (đầu ra thực).



Hình 4.15: Bài toán điều khiển tối ưu RH_∞.

Với cách chia thành bốn lớp các tín hiệu như vậy, đối tượng sẽ được mô tả chung bằng ma trận truyền đạt:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}(s) \\ \underline{Y}(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) \end{pmatrix}}_{S(s)} \begin{pmatrix} \underline{P}(s) \\ \underline{U}(s) \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

trong đó $\underline{P}(s)$, $\underline{U}(s)$, $\underline{Z}(s)$, $\underline{Y}(s)$ lần lượt là ảnh Laplace của $\underline{p}(t)$, $\underline{u}(t)$, $\underline{z}(t)$ và $\underline{y}(t)$.

Gọi $R(s)$ là ma trận truyền đạt mô tả bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra của đối tượng. Do bộ điều khiển chỉ có thể phản hồi được lớp tín hiệu $\underline{y}$ cũng như chỉ can thiệp được vào đối tượng thông qua $\underline{u}(t)$ nên ở đây ta phải có (hình 4.15b):

$$\underline{U}(s) = \underline{W}(s) - R(s)\,Y(s)$$

trong đó $\underline{w}(t)$ là lớp các tín hiệu chủ đạo và $\underline{W}(s)$ là ảnh Lapace của nó. Vậy thì:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ W - RY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ W \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Theta & S_{12}R \\ \Theta & S_{22}R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ \underline{Y} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} I & S_{12}R \\ \Theta & I + S_{22}R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{W} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} Z \\ \underline{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & S_{12}R \\ \Theta & I + S_{22}R \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{W} \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức nghịch đảo ma trận khối của Frobenius [35]

$$\begin{pmatrix} I & S_{12}R \\ \Theta & I + S_{22}R \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -S_{12}R(I + S_{22}R)^{-1} \\ \Theta & (I + S_{22}R)^{-1} \end{pmatrix}$$

ta có

$$\begin{pmatrix} \underline{Z} \\ \underline{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -S_{12}R(I + S_{22}R)^{-1} \\ \Theta & (I + S_{22}R)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ W \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{11} - S_{12}R(I + S_{22}R)^{-1}S_{21} & S_{12} - S_{12}R(I + S_{22}R)^{-1}S_{22} \\ (I + S_{22}R)^{-1}S_{21} & (I + S_{22}R)^{-1}S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{W} \end{pmatrix} \tag{4.59a}$$

Từ (4.59a), dễ dàng đọc được ra quan hệ $G_{11}(s)$ giữa lớp tín hiệu vào không mong muốn $\underline{p}(t)$ và lớp tín hiệu ra không kiểm soát được $\underline{z}(t)$ của hệ kín như sau:

$$G_{11}(s) = S_{11} - S_{12}R(I + S_{22}R)^{-1}S_{21} \tag{4.59b}$$

Độ lớn của $G_{11}(s)$ là thước đo sự ảnh hưởng của $p(t)$ vào hệ thống mà bộ điều khiển không đo được trực tiếp thông qua $\underline{z}(t)$. Nhiệm vụ điều khiển đặt ra ở đây là phải thiết kế bộ điều khiển $R(s)$ thuộc tập O gồm các bộ điều khiển làm hệ kín ổn định (định lý 4.5, công thức (4.38)), sao cho nó làm giảm được tối thiểu sự ảnh hưởng đó, tức là phải tìm:

$$\begin{aligned} R^* &= \arg\min_{R\in O} \| G_{11} \|_\infty \\ &= \arg\min_{R\in O} \| S_{11} - S_{12}R(I + S_{22}R)^{-1}S_{21} \|_\infty \end{aligned} \tag{4.60}$$

Rõ ràng (4.60) là một bài toán tối ưu RH_∞. Bài toán tối ưu RH_∞ (4.60) còn được gọi là *bài toán mẫu* (*standard*) vì phần lớn những bài toán tối ưu RH_∞ (theo chuẩn vô cùng) khác đều có thể đưa được về dạng (4.60) này.

Ví dụ 4.15: Chuyển bài toán cực tiểu độ nhạy thành bài toán tối ưu RH_∞ mẫu

Biến đổi chút ít hàm nhạy (4.56a) thành:

$$K(s)=(I+SR)^{-1}=(I+SR-SR)(I+SR)^{-1}=I-SR(I+SR)^{-1}$$

thì rõ ràng bài toán cực tiểu độ nhạy lại chính là bài toán tối ưu RH_∞ mẫu (4.60) với đối tượng (4.58) có cấu trúc

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & S(s) \\ I & S(s) \end{pmatrix}$$

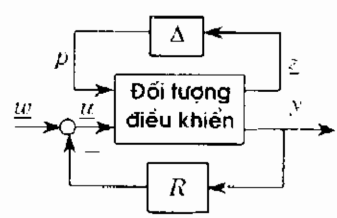
Mở rộng ra, ma trận hàm nhạy (4.56a) còn thường được tổng quát hóa thành

$$\tilde{K}(s)=W_1(I+SR)^{-1}W_2$$

với $W_1(s)$ và $W_2(s)$ hai ma trận trọng số cho trước. Khi đó, bài toán giảm độ nhạy cũng được chuyển về bài toán tối ưu RH_∞ mẫu tương ứng với mô hình đối tượng

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W_1(s)W_2(s) & W_1(s)S(s) \\ W_2(s) & S(s) \end{pmatrix}$$ ❒

Một lý do khác nữa mà bài toán tối ưu RH_∞ (4.60) được gọi là mẫu, vì, như sau này ta sẽ thấy, nó còn có ý nghĩa đối với việc thiết kế *bộ điều khiển ổn định bền vững* cho đối tượng có quan hệ phản hồi ngoại sinh (*exogenous*) không kiểm soát được (hình 4.16), chẳng hạn như phản hồi Δ không điều khiển được giữa $\underline{z}(t)$ và $\underline{p}(t)$. Khi đó bộ điều khiển $R(s)$ sẽ làm cho hệ ổn định với mọi quan hệ ngoại sinh Δ thỏa mãn:



Hình 4.16: Bài toán điều khiển tối ưu H_∞ cho đối tượng có quan hệ ngoại sinh không điều khiển được.

$$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{a}$$

trong đó a là một giá trị chặn trên nào đó của $\|G_{11}(s)\|_\infty$, tức là:

$$\|G_{11}(s)\|_\infty \le a.$$

Quay lại bài toán tối ưu RH_∞ mẫu (4.60). Nếu phân tích S_{22} thành tích các ma trận nguyên tố cùng nhau

$$S_{22} = NM^{-1}=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

trong đó $N,M\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $\tilde{N}$, $\tilde{M}\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái, thì theo định lý 4.5 và 4.7, bộ điều khiển:

$$R = (X+MQ)(Y-NQ)^{-1} = (\tilde{Y}-Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{X}+Q\tilde{M})$$

sẽ làm hệ ổn định (bền vững với nhiễu), trong đó $X, Y \in RH_\infty$ cũng nguyên tố cùng nhau bên phải giống như N, M và $\tilde{X}, \tilde{Y} \in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái như $\tilde{N}, \tilde{M}$. Giữa chúng có quan hệ:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \\ \tilde{N} & -\tilde{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & X \\ N & -Y \end{pmatrix} = I$$

Xuất phát từ $\tilde{N}X + \tilde{M}Y = I$ ta có:

$$I = \tilde{M}^{-1}(\tilde{N}X + \tilde{M}Y)\tilde{M} = (S_{22}X+Y)\tilde{M}$$

$$= (S_{22}X+NQ+Y-NQ)\tilde{M} = S_{22}(X+MQ)\tilde{M}+(Y-NQ)\tilde{M}$$

$$= [S_{22}(X+MQ)(Y-NQ)^{-1}+I](Y-NQ)\tilde{M}$$

$$= (I+S_{22}R)(Y-NQ)\tilde{M}$$

Suy ra

$$(I+S_{22}R)^{-1} = (Y-NQ)\tilde{M}.$$

$$\Leftrightarrow \quad R(I+S_{22}R)^{-1} = R(Y-NQ)\tilde{M} = (X+MQ)\tilde{M} \tag{4.61}$$

Thay (4.61) vào công thức (4.59a) của ma trận truyền đạt G_{11} hệ kín:

$$G_{11} = S_{11}-S_{12}R(I+S_{22}R)^{-1}S_{21} = S_{11}-S_{12}(X+MQ)\tilde{M}S_{21}$$

thì bài toán tối ưu (4.60) sẽ trở thành bài toán *cân bằng mô hình*:

$$Q^* = \arg\min_{Q\in RH_\infty} \| T - T_1QT_2 \|_\infty \tag{4.62a}$$

trong đó

$$T = S_{11}-S_{12}X\tilde{M}S_{21}, \quad T_1 = S_{12}M \quad \text{và} \quad T_2 = \tilde{M}S_{21} \tag{4.62b}$$

đều là những phần tử của RH_∞.

Bài toán ổn định bền vững với sai lệch mô hình

Xét hệ kín phản hồi dương có cấu trúc cho ở hình 4.17a). Đối tượng được giả thiết là có mô hình không chính xác $S(s)$, tức là giữa mô hình $S(s)$ với đối tượng thực tồn tại một sai lệch $\Delta S(s)$ kiểu bù cộng.

Sai lệch mô hình $\Delta S(s)$, hay còn gọi là *tạp nhiễu (disturbance)*, là đại lượng đặc trưng cho thành phần động không xác định được trong khâu đối tượng $S(s)$. Việc thực hiện bài toán điều khiển có để ý đến sai lệch mô hình đối tượng là nhiệm vụ của *điều* *khiển bền vững (robust control)*. Về những phương pháp giải quyết tổng quát một bài toán bền vững ta không đề cập ở đây mà chỉ nhắc qua nhằm giới thiệu mối liên quan giữa bài toán điều khiển tối ưu RH_∞ và bài toán điều khiển bền vững.

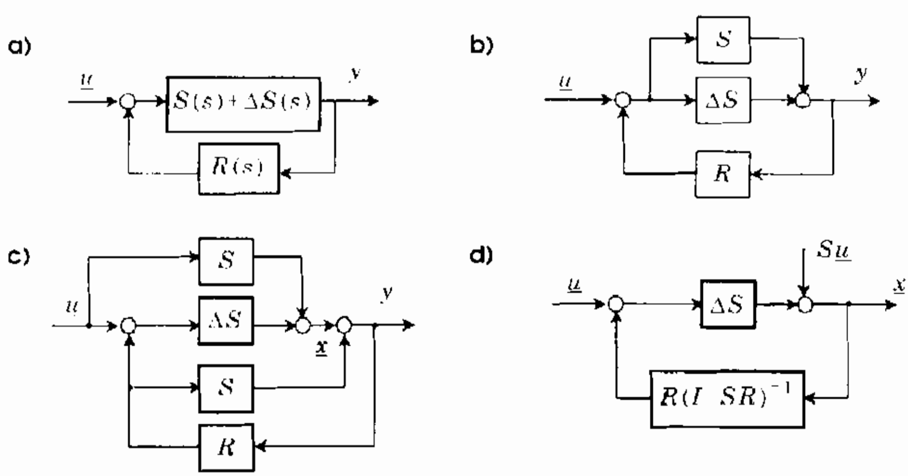
Nhiệm vụ thiết kế bộ điều khiển của bài toán là phải xác định ma trận hàm $R(s)$ cho bộ điều khiển sao cho hệ kín ổn định với mọi sai lệch mô hình đối tượng $\Delta S(s)$ thỏa mãn:

$$\|\Delta S(s)\|_\infty < \|K(s)\|_\infty \tag{4.63a}$$

trong đó $K(s)$ được gọi là *ma trận hàm giới hạn của sai lệch*.

Sử dụng các phép biến đổi của đại số sơ đồ khối như các hình 4.17b, 4.17c, và 4.17d mô tả ta có được sơ đồ khối tương đương ở hình 4.17d cho hệ kín 4.17a. Từ sơ đồ khối tương đương này ta đọc ra được ma trận truyền đạt của hệ hở là

$$G_h(s) = \Delta S\, R(I - SR)^{-1} \tag{4.63b}$$



Hình 4.17: Biến đổi sơ đồ khối tương đương cho bài toán ổn định bền vững.

Giả sử hệ đang xét là SISO. Vậy thì $G_h(j\omega)$ sẽ là đường đặc tính tần biên pha của hệ hở. Nếu $G_h(s)$ là hàm bền (hệ hở ổn định) thì theo tiêu chuẩn Nyquist, hệ kín cũng sẽ ổn định khi đường đồ thị của $G_h(j\omega)$ ứng với $0\le\omega<\infty$ không đi qua và không bao điểm -1. Hiển nhiên rằng $G_h(j\omega), 0\le\omega<\infty$ không thể đi qua cũng như bao điểm -1 nếu có $|G_h(s)|<1$ với mọi s. Do đó, đủ để hệ kín ổn định là $G_h(s)$ phải là hàm bền và $|G_h(s)|<1$ với mọi s.

Điều tương tự cũng xảy ra với hệ MIMO. Hệ kín chắc chắn sẽ ổn định nếu có:

c) $G_h(s)$ là ma trận bền (các phần tử của nó là những hàm bền). (4.63c)

d) $\|G_h(s)\|_\infty < 1$. (4.63d)

Rõ ràng sẽ có (4.63d) nếu có

$$\| KR(I-SR)^{-1} \|_\infty < 1 \tag{4.63e}$$

trong đó $K(s)$ là ma trận hàm thỏa mãn (4.63a).

Tiếp tục, ta lại thấy bài toán (4.63e) chỉ có thể có nghiệm khi mà:

$$\min_R \| KR(I-SR)^{-1} \|_\infty \le 1 \tag{4.63f}$$

Bởi vậy, trước khi giải quyết bài toán thiết kế bộ điều khiển ổn định bền vững, ta sẽ tìm nghiệm bài toán tối ưu RH_∞

$$R^*(s) = \arg\min_R \| KR(I-SR)^{-1} \|_\infty \tag{4.64}$$

Nghiệm $R^*(s)$ của bài toán tối ưu RH_∞ cũng sẽ là nghiệm của bài toán điều khiển ổn định bền vững nếu như nó thỏa mãn thêm hai điều kiện (4.63e) và (4.63f).

Bài toán tối ưu RH_∞ (4.64) cũng đưa được về dạng mẫu (4.60) bằng cách sử dụng đối tượng có mô hình:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & K(s) \\ I & S(s) \end{pmatrix}$$

và từ bài toán tối ưu RH_∞ mẫu đó nó lại đưa được về bài toán cân bằng mô hình (4.62) theo trình tự các bước đã nêu.

4.3.2 Trình tự thực hiện bài toán tối ưu RH_∞

Bước 1: Chuyển thành bài toán cân bằng mô hình

Ta đã thấy, các bài toán tối ưu RH_∞ khác nhau đều đưa được về dạng chung là bài toán cân bằng mô hình nhờ phương pháp tham số hóa bộ điều khiển. Phương pháp này giúp ta xác định được tất cả những bộ điều khiển $R(s)$ dưới dạng phụ thuộc tham số $Q(s) \in RH_\infty$, làm cho hệ kín ổn định, tức là làm cho ma trận truyền đạt của hệ kín là ma trận bền. Ứng với những tham số $Q \in RH_\infty$ khác nhau ta sẽ có các bộ điều khiển $R(s)$ khác nhau. Đó cũng là bước đầu tiên phải thực hiện:

Xác định tất cả các bộ điều khiển có thể có $R(s)$ để cùng với nó ta cũng sẽ có được một hệ kín ổn định nhờ phương pháp tham số hóa Youla.

Bước 2: Tìm nghiệm bài toán cân bằng mô hình

Sau khi đã tham số hóa được bộ điều khiển $R(s)$ làm hệ kín ổn định, các bài toán tối ưu RH_∞ sẽ được chuyển về dạng chung là bài toán cân bằng mô hình:

$$Q^* = \arg\min_{Q\in RH_\infty} \| T - T_1 Q T_2 \|_\infty \quad \text{trong đó} \quad T, T_1, T_2 \in RH_\infty \tag{4.65}$$

Lúc này, bước tiếp theo chỉ còn là:

Tìm nghiệm $Q^*(s)\in RH_\infty$ của bài toán cân bằng mô hình (4.65), *trong đó các ma trận $T_1(s)$, $T_2(s)$, $T_3(s)$ là đã biết và đều là phần tử của* RH_∞.

4.3.3 Khả năng tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng mô hình

Tất nhiên rằng khi có $T_1^{-1}\in RH_\infty$ và $T_2^{-1}\in RH_\infty$ thì bài toán cân bằng mô hình (4.65) sẽ có nghiệm $Q^* = T_1^{-1}\,T\,T_2^{-1}$ và ta đi đến:

Định lý 4.8: Nếu T_1^{-1}, $T_2^{-1}\in RH_\infty$ thì bài toán (4.65) có nghiệm:

$$Q^* = T_1^{-1}\,T\,T_2^{-1} \tag{4.66}$$

Để bàn về các khả năng khác tìm nghiệm bài toán cân bằng mô hình (4.65), trước hết ta xét trường hợp đặc biệt $T, T_1, T_2\in RH_\infty$ là những hàm biến phức (ma trận một hàng, một cột). Khi đó, do có

$$T_1 Q T_2 = T_1 T_2 Q = UQ$$

với $U = T_1 T_2$, nên bài toán (4.65) được viết gọn lại thành

$$Q^* = \arg\min_{Q\in RH_\infty} \| T - UQ \|_\infty, \quad \text{trong đó} \quad T, U\in RH_\infty \tag{4.67}$$

Định lý 4.9: Nếu $T, U\in RH_\infty$ là những hàm phức (ma trận một hàng, một cột), hàm U chỉ có một điểm không s_0 duy nhất nằm bên phải trục ảo và hàm:

$$Q^* = \frac{T(s) - T(s_0)}{U(s)} \tag{4.68}$$

hợp thức, thì Q^* là nghiệm của (4.67).

Chứng minh:

Trước hết, từ định nghĩa về chuẩn vô cùng ta thấy được:

$$\| T - UQ \|_\infty = \sup_{Re(s)>0} | T - UQ | \ge | T(s_0) - U(s_0)Q(s_0) | = | T(s_0) | .$$

Mặt khác, với Q^* xác định theo (4.68) thì:

$$\| T-UQ^* \|_\infty = | T(s_0) | .$$

Hàm phức hợp thức Q^* xác định theo (4.68) có các điểm cực bao gồm tất cả các điểm cực của T và các điểm không còn lại (trừ điểm s_0) của U. Bởi vậy nó là hàm bền, hay $Q^* \in RH_\infty$ ❒

Ví dụ 4.16: Nghiệm của bài toán cân bằng mô hình

Cho bài toán cân bằng mô hình (4.67) với

$$T = \frac{1}{s+1}, \qquad U = \frac{s-3}{s+3}.$$

Do U chỉ có một điểm không $s_0=3$ duy nhất nằm bên phải trục ảo, cũng như:

$$Q^* = \frac{T(s)-T(s_0)}{U(s)} = -\frac{s+3}{s+1}.$$

là hàm hợp thức nên nó là nghiệm của bài toán. ❒

Định lý 4.10: Nếu $T, U \in RH_\infty$ là những hàm phức (ma trận một hàng, một cột), hàm U là hợp thức chặt, pha cực tiểu (tất cả các điểm không và điểm cực đều nằm bên trái trục ảo) và hàm phức:

$$Q^* = \frac{T(s)-T(\infty)}{U(s)}, \tag{4.69}$$

hợp thức, thì Q^* là nghiệm của (4.67).

Chứng minh:

Tương tự như phần chứng minh định lý 4.9, từ

$$\| T-UQ \|_\infty = \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} | T-UQ | \geq | T(\infty)-U(\infty)Q(\infty) | = | T(\infty) | .$$

và với Q^* xác định theo (4.69)

$$\| T-UQ^* \|_\infty = | T(\infty) |$$

cũng như $Q^* \in RH_\infty$ vì nó hợp thức, ta có được đ.p.c.m. ❒

Ví dụ 4.17: Nghiệm của bài toán cân bằng mô hình

Cho bài toán cân bằng mô hình (4.67) với

$$T = \frac{1}{s+1}, \qquad U = \frac{1}{s+3}.$$

Do U hợp thức chặt, cũng như:

$$Q^* = \frac{T(s) - T(\infty)}{U(s)} = \frac{s+3}{s+1}.$$

là hàm hợp thức nên nó là nghiệm của bài toán. ❐

Có thể thấy miền ứng dụng của ba định lý trên là khá hẹp, ngay cả khi chỉ được áp dụng cho những hệ SISO. Lý do nằm ở giả thiết ràng buộc của nó. Phần lớn những bài toán tối ưu H_∞, khi được chuyển về bài toán cân bằng mô hình lại không thỏa mãn các giả thiết này. Thậm chí bài toán cân bằng mô hình (4.67) lại có thể không có nghiệm $Q^* \in RH_\infty$. Trường hợp này xảy ra khi hàm $\| T-UQ \|_\infty$ không có giá trị nhỏ nhất mà chỉ có giá trị q chặn dưới lớn nhất (*infimum*):

$$q = \inf_{Q \in RH_\infty} \| T-UQ \|_\infty$$

Ví dụ 4.18 ([18]): Bài toán cân bằng mô hình vô nghiệm

Cho bài toán cân bằng mô hình (4.67) với

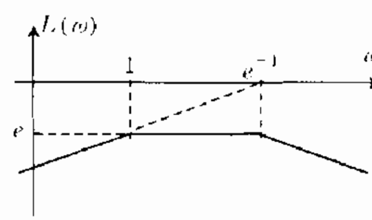
$$T = \frac{1}{s+1}, \qquad U = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Xét hàm $Q \in RH_\infty$ được định nghĩa bởi:

$$Q = \frac{s+1}{es+1}, \qquad 1 > e > 0$$

Khi đó

$$T-UQ = \frac{es}{(es+1)(s+1)}$$



Hình 4.18: Minh họa ví dụ 4.18.

và từ biểu đồ Bode của nó (hình 4.18) ta thấy:

$$\| T-UQ \|_\infty \le e$$

Do chuẩn (vô cùng) là một số không âm nên

$$q = \inf_{Q \in RH_\infty} \| T-UQ \|_\infty = 0$$

Song $\| T-UQ \|_\infty$ lại không có giá trị nhỏ nhất với mọi $Q \in RH_\infty$, vì hàm giới hạn:

$$Q^* = \lim_{e \to 0} Q = \lim_{e \to 0} \frac{s+1}{es+1} = s+1$$

làm cho $\| T-UQ^* \|_\infty = 0$ lại không thuộc RH_∞ nên không thể là nghiệm tối ưu của bài toán đã cho. ❐

Một lý giải cho việc bài toán (4.67) ở ví dụ 4.18 vừa nêu không có nghiệm $Q^* \in RH_\infty$ có thể là vì $U(0)=0$, tức là trong hàm $U(s)$ có thành phần vi phân.

Định lý 4.11: Nếu $T, U \in RH_\infty$ là những hàm phức (ma trận một hàng, một cột), và hàm U thỏa mãn $U(j\omega)\neq 0$ với mọi $0\leq\omega\leq\infty$ thì bài toán cân bằng mô hình (4.65) có nghiệm tối ưu $Q^* \in RH_\infty$.

Tất nhiên rằng định lý trên chỉ là điều kiện đủ. Nội dung hai định lý 4.9, 4.10 cũng như kết quả ở ví dụ 4.17 cho thấy mặc dù điều kiện $U(j\omega)\neq 0$ với mọi $0\leq\omega\leq\infty$ không được thỏa mãn (tại ví dụ 4.17 là khi $\omega=\infty$), song bài toán (4.66) lại vẫn có nghiệm tối ưu $Q^* \in RH_\infty$.

Ngoài ra để có được $U(j\omega)\neq 0$ với mọi $0\leq\omega\leq\infty$ thì ít nhất hàm $U(s)$ phải hợp thức không chặt và không chứa thành phần vi phân (xem lại ví dụ 4.17).

Tương tự như định lý 4.11, với bài toán cân bằng mô hình hệ MIMO (4.65) ta cũng có điều kiện đủ sau:

Định lý 4.12: Nếu hai ma trận $T_1(j\omega)$, $T_2(j\omega)$ có hạng là hằng số với mọi $0\leq\omega\leq\infty$ thì bài toán cân bằng mô hình

$$Q^* = \arg\min_{Q\in RH_\infty} \| T - T_1 Q T_2 \|_\infty \qquad \text{trong đó } T, T_1, T_2 \in RH_\infty$$

sẽ có nghiệm $Q^* \in RH_\infty$.

4.3.4 Phương pháp 1: Tìm nghiệm bài toán cân bằng mô hình nhờ toán tử Hankel và định lý Nehari

Trong chương mục này ta sẽ làm quen với một phương pháp tìm nghiệm bài toán tối ưu (4.67) khi nó thỏa mãn điều kiện đủ nêu trong định lý 4.11, tức là $U(j\omega)\neq 0$ với mọi $0\leq\omega\leq\infty$, hay $U \in RH_\infty$ là hàm hợp thức không chặt (có bậc đa thức tử số bằng bậc đa thức mẫu số).

Phân tích hàm trong và hàm ngoài

Một hàm phức $U_T(s) \in RH_\infty$ được gọi là *hàm trong* (*inner*) khi

$$U_T(-s)U_T(s) = 1 \qquad (4.70)$$

Hàm trong $U_T(s)$ có những tính chất sau:

- Các điểm cực và điểm không nằm đối xứng qua trục ảo, nói cách khác nếu s_0 là một điểm cực của $U_T(s)$ thì $-\bar{s}_0$ sẽ là điểm không của nó.
- Tất cả các điểm không của $U_T(s)$ đều phải nằm bên phải trục ảo (có phần thực dương).
- $|U_T(j\omega)| = 1$.

Tên gọi *hàm trong* là chỉ vị trí điểm không của nó nằm trong nửa hở mặt phẳng phức bên phải. Hàm trong là *hàm truyền đạt của khâu thông tần* (all–pass).

Ví dụ 4.19: (Hàm trong)

Các hàm phức sau đây với $a>0$

$$\frac{s-a}{s+a}\,,\quad \frac{s^2-as+1}{s^2+as+1}\,,\quad \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

đều là hàm trong. □

Ngược lại, một hàm phức $U_N(s)$ được gọi là *hàm ngoài (outer)*, nếu tất cả các điểm không của nó có phần thực không dương (không nằm trong nửa hở mặt phẳng phức bên phải). Hàm ngoài $U_N(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ là *hàm truyền đạt của khâu pha cực tiểu* (minimum phase).

Xét bài toán tối ưu (4.67) có $U(s)\in\mathrm{RH}_\infty$ hợp thức không chặt với bậc của đa thức tử số và đa thức mẫu số cùng bằng n. Gọi điểm không của $U(s)$ là $k_1,k_2,\ \ldots\ ,k_n$.

Không mất tính tổng quát nếu cho rằng $m\le n$ điểm không $k_1,k_2,\ \ldots\ ,k_m$ của $U(s)$ có phần thực dương, tức là $\mathrm{Re}(k_i)>0$, $i=1,2,\ \ldots\ ,m$. Lập hàm

$$U_T(s)=\prod_{i=1}^{m}\frac{s-k_i}{s+k_i}\,. \tag{4.71a}$$

Vậy theo định nghĩa, $U_T(s)$ là một hàm trong và

$$U_N(s)=\frac{U(s)}{U_T(s)} \tag{4.71b}$$

cũng là phần tử của RH_∞ và là hàm ngoài.

Hơn nữa, $U(j\omega)\neq 0$ với mọi $0\le\omega\le\infty$, hay $U\in\mathrm{RH}_\infty$ là hàm hợp thức không chặt (có bậc đa thức tử số bằng bậc đa thức mẫu số), nên $U_N^{-1}(s)$ cũng hợp thức (không chặt). Với kết quả này ta có được định lý sau:

Định lý 4.13: Mọi hàm phức $U(s)\in\mathrm{RH}_\infty$ luôn phân tích được thành tích của một hàm trong với một hàm ngoài:

$$U(s)=U_T(s)U_N(s) \tag{4.72}$$

Nếu $U(j\omega)\neq 0$ với mọi $0\le\omega\le\infty$, thì còn có $U_N^{-1}(s)\in\mathrm{RH}_\infty$. Ngoài ra, nếu không để ý đến dấu thì phép phân tích trên với U_T, U_N xác định theo (4.71) là duy nhất.

Quay lại bài toán cân bằng mô hình (4.67). Thay công thức phân tích (4.72) vào phương trình cân bằng mô hình ta có:

$$\| T-UQ \|_{\infty} = \| T- U_T U_X Q \|_{\infty} = \| U_T (U_T^{-1} T-U_X Q) \|_{\infty}$$

$$= \| U_T^{-1} T-U_X Q \|_{\infty} = \| G-V \|_{\infty} \qquad \text{(vì } | U_T | = 1 \text{)}.$$

trong đó

$G = U_T^{-1} T \in \mathrm{RL}_{\infty}$ (hợp thức và không có điểm cực nào nằm trên trục ảo)

cũng như

$V = U_X Q \in \mathrm{RH}_{\infty}$ (hợp thức và mọi điểm cực đều nằm bên trái trục ảo).

Như vậy, bài toán (4.67) nay trở thành

$$V^* = \min_{V \in \mathrm{RH}_{\infty}} \| G-V \|_{\infty} \quad \text{với} \quad G \in \mathrm{RL}_{\infty} \qquad (4.73)$$

và công cụ giúp tìm nghiệm (4.73) là toán tử Hankel và định lý Nehari.

Toán tử Hankel

Trước hết ta xét trường hợp $G \in \mathrm{RL}_2$, hay $G(s)$ là *hợp thức chặt* và *không có điểm cực nào nằm trên trục ảo*. Xem $G(s)$ như hàm truyền đạt của một hệ tuyến tính có tín hiệu vào là $v(t)$ với ảnh Laplace $V(s) \in \mathrm{RH}_2$ và tín hiệu ra $y(t)$. Vậy thì ảnh Laplace $Y(s)$ của tín hiệu ra sẽ thỏa mãn:

$$Y(s) = GV \in \mathrm{RL}_2 .$$

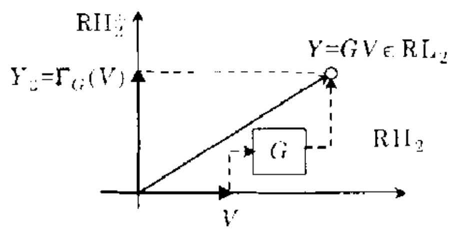
Nhưng vì (xem lại mục 4.1.1. và công thức 4.5)):

$$\mathrm{RL}_2 = \mathrm{RH}_2 \oplus \mathrm{RH}_2^{\perp}$$

nên ta có thể phân tích $Y \in \mathrm{RL}_2$ thành hai phần (hình 4.19)

$$Y(s) = Y_1 \oplus Y_2 = Y_1 \oplus \Gamma_G(V) \qquad \text{trong đó} \quad Y_2 = \Gamma_G(V)$$

bằng cách chiếu $Y(s)$ lên hai trục tọa độ RH_2 và $\mathrm{RH}_2^{\perp}$.



Hình 4.19: Giải thích toán tử Hankel

Phép biến đổi $V \in RH_2$ thành $Y_2 = \Gamma_G(V) \in RH_2^\perp$ được gọi là toán tử Hankel:

$$\Gamma_G: RH_2 \to RH_2^\perp \tag{4.74}$$

Toán tử Hankel (4.74) có những tính chất sau:

1) Là một ánh xạ tuyến tính.

2) Ảnh của nó là một hàm phức hợp thức chặt và có các điểm cực nằm bên phải trục ảo, gọi là hàm *phản bền* (*antistable*).

3) Nếu $G \in RH_2$, thì $\Gamma_G(V)=0$ với mọi $V \in RH_2$. Điều này chỉ rằng nếu phân tích $G \in RL_2$ thành

$$G = G_1 + G_2 \quad \text{trong đó} \quad G_1 \in RH_2^\perp \quad \text{và} \quad G_2 \in RH_2,$$

thì

$$\Gamma_G(V) = \Gamma_{G_1}(V) \tag{4.75}$$

Định lý 4.14 : Nếu $G \in RH_2^\perp$ thì chuẩn $\|\Gamma_G\|$ của toán tử Hankel được xác định như sau:

a) Viết lại $G=[A,B,C,\Theta]$, trong đó các giá trị riêng của A phải nằm bên phải trục ảo (có phần thực dương).

b) Xác định hai ma trận L_c và L_o theo

$$L_c = \int_0^\infty e^{-At} BB^T e^{-A^T t} dt \quad \text{và} \quad L_o = \int_0^\infty e^{-A^T t} C^T C e^{-At} dt,$$

tức là nghiệm của các phương trình Lyapunov

$$AL_c + L_c A^T = BB^T \tag{4.76a}$$

$$A^T L_o + L_o A = C^T C \tag{4.76b}$$

c) Tính

$$\|\Gamma_G\| = \sqrt{\lambda_{\max}(L_c L_o)} \tag{4.76c}$$

trong đó $\lambda_{\max}$ là ký hiệu chỉ giá trị riêng lớn nhất của ma trận.

Chứng minh:

Ký hiệu λ là một giá trị riêng của ma trận tích $L_c L_o$, và $\underline{r}$ là vector riêng bên phải tương ứng. Vậy thì

$$(L_c L_o)\underline{r} = \lambda \underline{r} \;\Rightarrow\; L_c \underbrace{\frac{L_o \underline{r}}{\sqrt{\lambda}}}_{\underline{s}} = \sqrt{\lambda}\, \underline{r}$$

hay

$$L_c\underline{s} = \sqrt{\lambda}\,\underline{r} \qquad \text{và} \qquad L_o\underline{r} = \sqrt{\lambda}\,\underline{s}$$

Với chúng, từ phương trình Lyapunov thứ nhất (4.76a) ta sẽ được:

$$-(sI-A)L_c + L_c(sI+A^T) = BB^T$$

$$\Leftrightarrow \quad C(sI-A)^{-1}[-(sI-A)L_c + L_c(sI+A^T)] = C(sI-A)^{-1}BB^T$$

$$\Leftrightarrow \quad -CL_c + C(sI-A)^{-1}L_c(sI+A^T) = C(sI-A)^{-1}BB^T$$

$$\Leftrightarrow \quad [-CL_c + C(sI-A)^{-1}L_c(sI+A^T)](sI+A^T)^{-1}\underline{s} = C(sI-A)^{-1}BB^T(sI+A^T)^{-1}\underline{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad -CL_c(sI+A^T)^{-1}\underline{s} + C(sI-A)^{-1}L_c\underline{s} = C(sI-A)^{-1}BB^T(sI+A^T)^{-1}\underline{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad -CL_c(sI+A^T)^{-1}\underline{s} + \sqrt{\lambda}\,F(s) = G(s)K(s) \tag{4.77}$$

trong đó

$$F(s) = C(sI-A)^{-1}\underline{r} \qquad \text{và} \qquad K(s) = B^T(sI+A^T)^{-1}\underline{s} \tag{4.78}$$

Do ma trận A là *phản bền* (*antistable* – các giá trị riêng nằm bên phải trục ảo) nên:

$$F(s) \in \mathrm{RH}_2^{\perp}, \quad K(s) \in \mathrm{RH}_2 \quad \text{và} \quad -CL_c(sI+A^T)^{-1}\underline{s} \in \mathrm{RH}_2$$

Bởi vậy nếu lấy hình chiếu lên trục $\mathrm{RH}_2^{\perp}$ của cả hai vế (4.77) sẽ có

$$\sqrt{\lambda}\,F = \Gamma_G(K) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\lambda}\,\frac{\|F\|_2}{\|K\|_2} = \frac{\|\Gamma_G(K)\|_2}{\|K\|_2} \le \|\Gamma_G\| \tag{4.79a}$$

Một cách hoàn toàn tương tự, nhưng đi từ phương trình Lyapunov thứ hai (4.76b) ta cũng thu được

$$\sqrt{\lambda}\,\frac{\|K\|_2}{\|F\|_2} = \frac{\|\Gamma_G(F)\|_2}{\|F\|_2} \le \|\Gamma_G\| \tag{4.79b}$$

So sánh (4.79a) với (4.79b) thì phải có:

$$\|F\|_2 = \|K\|_2$$

và

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\|\Gamma_G(F)\|_2}{\|F\|_2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\lambda_{\max}} = \sup_F \frac{\|\Gamma_G(F)\|_2}{\|F\|_2} = \|\Gamma_G\|\,. \qquad \square$$

Định lý Nehari và nghiệm của bài toán (4.73)

Trở lại bài toán (4.73) mà ở đó $G(s)$ là phần tử của RL_∞ (hợp thức) chứ chưa phải là của $RH_2^\perp$. Tuy nhiên nhờ có tính chất (4.75a) của toán tử Hankel và định lý Nehari phát biểu sau đây, nó sẽ được chuyển về bài toán xác định chuẩn toán tử Hankel.

Định lý 4.15 (Nehari): Nếu phân tích $G\in RL_\infty$ thành tổng:

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s) \quad \text{trong đó} \quad G_1\in RH_2^\perp \quad \text{và} \quad G_2\in RH_\infty$$

thì sẽ có

$$\inf_{V\in RH_\infty} \| G-V\|_\infty = \| \Gamma_{G_1} \| \tag{4.80a}$$

Nói cách khác, bài toán (4.73) có nghiệm

$$V^* = G(s)-\frac{\sqrt{\lambda_{\max}}F(s)}{K(s)} \tag{4.80b}$$

trong đó $\sqrt{\lambda_{\max}} = \| \Gamma_{G_1} \|$ và $F(s)$, $K(s)$ là hai hàm phức được xác định theo công thức (4.78) ứng với giá trị riêng lớn nhất $\lambda_{\max}$ của L_cL_o.

Chứng minh:

Trước hết ta thấy giá trị $\inf_{V\in RH_\infty} \|G-V\|_\infty$ với $G\in RL_\infty$ chính là khoảng cách từ phần tử $G\in RL_\infty$ tới không gian RH_∞. Bởi vậy không mất tính tổng quát nếu ta chỉ chứng minh định lý cho trường hợp $G\in RL_2$ và $V\in RH_2$.

Với sự trợ giúp của (4.79a) ta dễ dàng xác nhận được là với V^* theo 4.80b) thì

$$\|G-V^*\|_\infty = \|\Gamma_G\|$$

cũng như với các vector $V\in RH_2$ khác luôn có $\|G-V\|_\infty \geq \|\Gamma_G\|$. Bởi vậy vấn đề còn lại phải chứng minh là $V^*\in RH_2$. Đặt:

$$E = V^*K = GK - \sqrt{\lambda_{\max}}\, F$$

sẽ có:

$$\Gamma_G(E) = \Gamma_G(K) - \sqrt{\lambda_{\max}}\, \Gamma_G(F)$$

Nhưng vì $F\in RH_2^\perp$, tức là $\Gamma_G(F)=F$ nên kết hợp với quan hệ (4.79a) ta đi đến:

$$\Gamma_G(E) = 0$$

Điều này chỉ rằng $E\in RH_2$, hay $V^*\in RH_2$. ❐

Thuật toán xác định nghiệm bài toán cân bằng mô hình

Tổng kết lại nội dung các định lý 4.13, 4.14 và 4.15, ta có thuật toán tìm nghiệm tối ưu Q^* của bài toán cân bằng mô hình (4.67):

$$Q^* = \arg\min_{Q\in RH_\infty} \| T-UQ \|_\infty \,, \quad \text{trong đó} \quad T,U\in RH_\infty$$

gồm những bước như sau:

1) Phân tích $U(s)$ hợp thức không chặt, có các điểm cực nằm bên trái trục ảo, thành tích của hàm trong (all–pass, hay thông tần) $U_T(s)$ với hàm ngoài (pha cực tiểu) $U_N(s)$, tức là $U(s)=U_T(s)U_N(s)$, bằng cách thực hiện:

   a) Xác định các điểm không $k_1,k_2, \ldots ,k_n$ của $U(s)$ trong đó n là bậc đa thức tử số (bậc đa thức mẫu số).

   b) Chọn $m\le n$ điểm không $k_1,k_2, \ldots ,k_m$ của $U(s)$ có phần thực dương, tức là $\mathrm{Re}(k_i)>0$, $i=1,2, \ldots , m$. Sau đó lập hai hàm trong và ngoài:

$$U_T(s) = \prod_{i=1}^{m} \frac{s-k_i}{s+k_i} \quad \text{và} \quad U_N(s)=\frac{U(s)}{U_T(s)} \,. \tag{4.81a}$$

2) Tính $G=U_T^{-1}T$ rồi phân tích $G\in RL_\infty$ thành tổng $G=G_1+G_2$ trong đó $G_1\in RH_\infty^\perp$ (hợp thức chặt, có các điểm cực nằm bên phải trục ảo) và $G_2\in RH_\infty$ (hợp thức, có các điểm cực nằm bên trái trục ảo).

3) Viết lại $G_1=[A,B,C,\Theta]$. Khi đó ma trận A sẽ có các giá trị riêng nằm bên phải trục ảo (có phần thực dương).

4) Xác định hai ma trận L_c và L_o là nghiệm các phương trình Lyapunov:

$$AL_c+L_cA^T=BB^T \tag{4.81b}$$

$$A^TL_o+L_oA=C^TC \tag{4.81c}$$

5) Tính λ_{max} là giá trị riêng lớn nhất của ma trận L_cL_o và $\underline{r}$ là vector riêng bên phải tương ứng.

6) Tính $\underline{s}=\dfrac{L_o r}{\sqrt{\lambda_{max}}}$, $\quad F=[A,r,C,\Theta]$ và $K=[-A^T,\underline{s},B^T,\Theta]$. $\tag{4.81d}$

7) Đáp số: $Q^*=\dfrac{V^*}{U_N}=\dfrac{1}{U_N}\left(G-\sqrt{\lambda_{max}}\dfrac{F}{K}\right)$. $\tag{4.81e}$

Ví dụ 4.20 ([18]): (Xác định Q^*)

Cho bài toán tối ưu (4.67) với

$$T = \frac{s+1}{10s+1}, \qquad U = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+2)^2}.$$

Vậy thì

$$U_T = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+1)(s+5)}, \quad U_N = \frac{(s+1)(s+5)}{(s+2)^2}$$

và

$$G = U_T^{-1}T = \frac{(s+1)^2(s+5)}{(10s+1)(s-1)(s-5)} = \underbrace{\frac{1,22s+0,96}{(s-1)(s-5)}}_{G_1} + \underbrace{\frac{1,34}{10s+1} + \frac{1}{10}}_{G_2}$$

Từ đây ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -0,55 \\ 1,77 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

và với các ma trận này, hai phương trình Lyapunov (4.81b), (4.81c) có các nghiệm: (tìm nhờ lệnh **lyap(A,Q)** của MatLab):

$$L_c = \begin{pmatrix} 0,15 & -0,16 \\ -0,16 & 0,31 \end{pmatrix}, \qquad L_o = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,17 \\ -0,17 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\sqrt{\lambda_{\max}} = 0,2, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,78 \end{pmatrix}, \quad \underline{s} = \begin{pmatrix} 3,63 \\ -1,24 \end{pmatrix}$$

và

$$F = \frac{0,22s-4,22}{(s-1)(s-5)}, \quad K = \frac{(s+1)(s+5)}{(10s+1)(s+19)}.$$

Vậy

$$Q^* = \frac{1}{U_N}\left(G - \sqrt{\lambda_{\max}}\,\frac{F}{K}\right) = \frac{3(s+2)^2}{(10s+1)(s+19)}.$$ □

4.3.5 Phương pháp 2: Tìm nghiệm bài toán cân bằng mô hình nhờ phép nội suy Nevannlinna–Pick

Gọi:

$$H(s) = \frac{T-UQ}{q} \qquad \text{trong đó} \qquad q = \inf_{Q\in RH_\infty} \| T-UQ \|_\infty \tag{4.82}$$

Rõ ràng khi đó một hàm $Q^*(s)$ thỏa mã n

$$Q^* = \frac{T - qH}{U} \qquad \text{với} \qquad \|H\|_\infty = 1 \tag{4.83}$$

sẽ làm cho $\|T - UQ^*\|_\infty = q$. Bởi vậy nó cũng sẽ là nghiệm của bài toán (4.67) nếu như còn có thêm:

$$Q^* \in \mathrm{RH}_\infty$$

Nói cách khác, $Q^*(s)$ sẽ là nghiệm của (4.67) nếu ta tìm được một hàm $H(s)$ theo cấu trúc (4.82) sao cho với nó hàm $Q^*(s)$ tính theo (4.82) là phần tử của RH_∞.

Có thể thấy, để $Q^* \in \mathrm{RH}_\infty$ thì cần và đủ là:

- $Q^*(s)$ phải hợp thức. Như vậy bậc tương đối của $U(s)$ không được lớn hơn bậc tương đối của $T(s)$ hoặc của $H(s)$.
- $Q^*(s)$ phải bền. Điều này sẽ được thỏa mãn nếu $H(s)$ là cũng hàm bền và khi k_i, $i=1,2,\ldots,m$ là điểm không có phần thực dương của $U(s)$ thì nó cũng phải là điểm không của $T-qH$, hay phải có $H(k_i)=\dfrac{T(k_i)}{q}$, $i=1,2,\ldots,m$.

Công cụ tìm hàm $H(s)$ hợp thức, bền, thỏa mãn $\|H\|_\infty=1$ và $H(k_i)=\dfrac{T(k_i)}{q}$, $i=1,2,\ldots,m$ là phép nội suy Nevannlinna–Pick.

Nội suy Nevannlinna–Pick

Bài toán nội suy Nevannlinna–Pick tổng quát được phát biểu như sau: Cho trước m cặp giá trị (phức) k_i, t_i, $i=1,2,\ldots,m$. Hãy xác định hàm $H(s)$ hợp thức, bền, tức là $H \in \mathrm{RH}_\infty$, thỏa mãn $\|H\|_\infty \le 1$ và $H(k_i)=t_i$.

Tất nhiên rằng để có $\|H\|_\infty \le 1$ thì phải có $|t_i| \le 1$. Ngoài ra, để phục vụ bài toán cân bằng mô hình (4.67) như đã nói ở trên thì trong bài toán nội suy Nevannlinna–Pick cho trường hợp hẹp sau này, ta chỉ quan tâm tới những điểm phức k_i có $\mathrm{Re}(k_i)>0$ (nằm bên phải trục ảo).

Nhằm kiểm tra điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán nội suy Nevannlinna–Pick nêu trên, người ta lập ma trận Pick có kiểu $m \times m$:

$$P=(p_{ij}) \qquad \text{với} \qquad p_{ij} = \frac{1 - t_i \bar{t}_j}{k_i + \bar{k}_j} \tag{4.84}$$

Hiển nhiên rằng P là ma trận Hermite, tức là $P^H = P$. Từ lý thuyết đại số ma trận thì một ma trận Hermite luôn có các giá trị riêng $\lambda_i(P)$ là những số thực. Khi đã có ma trận

Pick (4.84), sự tồn tại nghiệm của bài toán nội suy Nevanlinna–Pick được kiểm tra nhờ phát biểu sau:

Định lý 4.16 (Pick): Bài toán nội suy Nevanlinna–Pick có nghiệm khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng $\lambda_i(P)$ của ma trận Pick (4.84) *là những số dương*, nói cách khác khi và chỉ khi ma trận P *xác định dương*.

Thuật toán tìm nghiệm $H\in \mathrm{RH}_\infty$ được thực hiện truy hồi, tức là bài toán với m cặp giá trị (phức) k_i, t_i, $i=1,2,\ldots,m$ được chuyển về bài toán cho $m-1$ cặp giá trị .... Bởi vậy nội dung thuật toán cũng được chia thành hai phần:

- Phần thuật toán ứng với một cặp giá trị k_1, t_1.
- Phần thuật toán chuyển bài toán có m cặp giá trị thành bài toán chỉ có $m-1$ cặp giá trị.

1) *Trường hợp bài toán có một cặp giá trị k_1, t_1.*

a) Nếu $|t_1|=1$ thì bài toán chỉ có một nghiệm duy nhất là $H(s)=t_1$ với mọi s.

b) Nếu $|t_1|<1$ thì bài toán có vô số nghiệm. Các nghiệm này đều có chung một cấu trúc:

$$H(s)=\left\{\, M_{-t_1}\big(F(s)A_{k_1}(s)\big) \;\middle|\; F(s)\in \mathrm{RH}_\infty \text{ và } \|F\|_\infty<1\right\}$$

trong đó

$$M_{t_1}(z)=\frac{z-t_1}{1-\bar{t}_1 z} \qquad \text{(phép biến đổi Möbius)}$$

$$A_{k_1}(s)=\frac{s-k_1}{s+\bar{k}_1} \qquad \text{(khâu thông tần, all-pass)}$$

Nói cách khác, khi $|t_1|<1$ thì bài toán có các nghiệm

$$H=\frac{t_1(s+\bar{k}_1)+(s-k_1)F}{(s+\bar{k}_1)+\bar{t}_1(s-k_1)F} \quad \text{với mọi } F\in \mathrm{RH}_\infty \text{ và } \|F\|_\infty\le 1 \tag{4.85}$$

Có thể thấy nghiệm $H(s)$ cũng là hàm truyền đạt của một khâu thông tần giống như $A_{k_1}(s)$. Tức là nghiệm $H(s)$ thỏa mãn:

$$|H(j\omega)|=1,\ \forall\omega \quad\Rightarrow\quad \|H\|_\infty=1$$

2) *Trường hợp bài toán có m cặp giá trị k_i, t_i, $i=1,2,\ldots,m$.*

Không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng $t_1\ge t_2\ge\cdots\ge t_m$. Khi đó thì:

a) Nếu $|t_m|=1$ thì theo định lý 4.16 cũng như nguyên lý cực đại Modulus (mục 6.2.3) bài toán chỉ có nghiệm khi $t_1=t_2=\cdots=t_m$. Lúc đó, nghiệm duy nhất của bài toán là $H(s)=t_m$ với mọi s.

b) Nếu $|t_m|<1$ thì bài toán có nghiệm

$$H(s)=M_{-t_m}\left(H_{m-1}(s)A_{k_m}(s)\right)=\frac{H_{m-1}A_{k_m}+t_m}{1+\bar{t}_m H_{m-1}A_{k_m}} \tag{4.86}$$

trong đó $H_{m-1}(s)$ là nghiệm của bài toán nội suy Nevannlinna–Pick có số cặp giá trị chỉ còn là $m-1$ như sau:

$$k_1\,,\ k_2\,,\ \cdots\,,\ k_{m-1}$$

$$t_1'=\frac{M_{t_m}(t_1)}{A_{k_m}(k_1)}\,,\ t_2'=\frac{M_{t_m}(t_2)}{A_{k_m}(k_2)}\,,\ \cdots\,,\ t'_{m-1}=\frac{M_{t_m}(t_{m-1})}{A_{k_m}(k_{m-1})}$$

Có thể thấy từ $H_1(k_i)=t_i'=\dfrac{M_{t_m}(t_i)}{A_{k_m}(k_i)}$ đã có cũng sẽ có $H(k_i)=t_i$ vì phép biến đổi Möbius $M_{t_m}(z)$ thỏa mãn $M_{t_m}(z)=M^{-1}_{t_m}(z)=\dfrac{z-t_m}{1-\bar{t}_m z}$.

Ví dụ 4.21: Nội suy Nevannlinna–Pick

Cho hai cặp giá trị $(m=2)$

$$(k_1,t_1)=(2,\frac{1}{3})\qquad \text{và}\qquad (k_2,t_2)=(1,\frac{1}{2})$$

Hãy xác định hàm $H(s)\in RH_\infty$ thỏa mãn $\|H\|_\infty\le 1$ và $H(k_i)=t_i$, $i=1,2$.

Trước hết ta kiểm tra điều kiện Pick (định lý 4.16) về sự tồn tại nghiệm $H(s)$. Theo công thức (4.84) thì

$$P=\begin{pmatrix}0{,}22 & 0{,}28\\ 0{,}28 & 0{,}38\end{pmatrix}$$

và do ma trận này xác định dương (có các giá trị riêng là những số thực dương, hoặc kiểm tra nhờ định lý Sylvester) nên bài toán nội suy trên có nghiệm.

Để tìm nghiệm $H(s)$, ta chuyển bài toán có hai cặp giá trị thành bài toán chỉ có một cặp giá trị được phát biểu như sau: Tìm $H_1(s)$ thỏa mãn $\|H_1\|_\infty\le 1$ và $H_1(k_1)=t_1'$ trong đó:

$$k_1 = 2 \quad \text{và} \quad t_1' = \frac{M_{t_2}(t_1)}{A_{k_2}(k_1)} = \underbrace{\frac{t_1 - t_2}{1 - \bar{t}_2 t_1}}_{M_{t_2}(t_1)} \; \underbrace{\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}}_{A_{k_2}^{-1}(k_1)} = -0.6 .$$

Tiếp theo, chọn $F = 1$ với $\|F\|_\infty = 1$ (hiển nhiên nó thỏa mãn $F \in RH_\infty$ và $\|F\|_\infty \le 1$). Khi đó, từ công thức (4.85) ta được:

$$H_1(s) = \frac{t_1'(s + k_1) + (s - k_1)}{(s + k_1) + \bar{t}_1'(s - k_1)} = \frac{s-8}{s+8} .$$

Thay hàm $H_1(s)$ vừa tìm được vào (4.86) để có nghiệm của bài toán đã cho:

$$H(s) = M_{-t_2}\big(H_1(s)A_{k_2}(s)\big) = \frac{H_1 A_{k_2} + t_2}{1 + \bar{t}_2 H_1 A_{k_2}} = \frac{s^2 - 3s + 8}{s^2 + 3s + 8}$$

Dễ dàng kiểm tra được $H(s)$ thỏa mãn các yêu cầu của đầu bài:

$$\|H\|_\infty = 1 \ , \quad H(2) = \frac{1}{3} \quad \text{và} \quad H(1) = \frac{1}{2} . \qquad \square$$

Tìm giá trị chặn dưới lớn nhất

Theo công thức tìm Q^* (4.83) từ hàm nội suy Nevanlinna-Pick $H(s)$ thì ta còn cần tới giá trị:

$$q = \inf_{Q \in RH_\infty} \|T - UQ\|_\infty .$$

Song, công việc này đã được giải quyết trọn vẹn tại mục trước (mục 4.3.4) nhờ toán tử Hankel và định lý Nehari. Cụ thể là ở đó ta đã có được thuật toán xác định:

$$q = \sqrt{\lambda_{\max}} = \|\Gamma_{G_1}\|$$

với $G = U_T^{-1} T = G_1 + G_2$ trong đó $G_1 \in RH_2^-$, $G_2 \in RH_\infty$ và $U_T(s)$ là hàm trong (all pass, hay thông tần) của $U(s)$.

Tuy nhiên, một dạng khác của thuật toán đó mà ở đó không cần phải chuyển sang miền thời gian với các ma trận hàng $G_1 = [A, B, C, \Theta]$ sẽ được trình bày ở đây. Đặc biệt, dạng cải biên này của thuật toán rất phù hợp với phương pháp sử dụng phép nội suy Nevanlinna-Pick, vì nó hoàn toàn được thực hiện trong miền phức. Thuật toán bao gồm các bước:

1) Từ k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ là m điểm không có phần thực dương của $U(s)$ và $T(k_i)$ ta xây dựng hai ma trận kiểu $m \times m$

$$A = (a_{ij}) \qquad \text{với} \qquad a_{ij} = \frac{1}{k_i + k_j}$$

$$B = (b_{ij}) \qquad \text{với} \qquad b_{ij} = \frac{T(k_i)T(k_j)}{k_i + k_j}$$

Có thể thấy nếu $t_i = T(k_i)$ thì ma trận Pick (4.84) chính là hiệu $P = A - B$.

2) Xác định ma trận V thỏa mãn $V^2 = A$ (người ta vẫn thường ký hiệu V là $\sqrt{A}$). Điều này luôn thực hiện được vì A là ma trận xác định dương, tức là các giá trị riêng λ_i của A là những số dương. Chẳng hạn nếu phân tích A thành dạng modal [35]:

$$A = M\Lambda M^{-1}$$

trong đó

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i), \quad M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_m)$$

và $\underline{a}_i$ là vector riêng bên phải của A ứng với giá trị riêng λ_i. Khi đó thì:

$$A = M\Lambda M^{-1} = \underbrace{M\tilde{\Lambda}M^{-1}}_{V} \underbrace{M\tilde{\Lambda}M^{-1}}_{V} \qquad \text{với} \qquad \tilde{\Lambda} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i}).$$

3) Đáp số: q là căn bậc hai giá trị riêng lớn nhất $\lambda_{\max}$ của ma trận $V^{-1}BV^{-1}$, tức là:

$$q = \sqrt{\lambda_{\max}(V^{-1}BV^{-1})} \tag{4.87}$$

Xuất phát điểm của thuật toán trên nằm ở tính chất của ma trận $\tilde{P} = A - \dfrac{B}{q^2}$. Khi $q = \infty$ thì $\tilde{P} = A$. Do A là ma trận Hermite nên khi $q = \infty$, các giá trị riêng của $\tilde{P}$ nằm bên phải trục ảo (xác định dương). Cho q giảm dần về 0 thì các giá trị riêng của $\tilde{P}$ cũng bị dịch chuyển dần sang phía nửa mặt phẳng phức bên trái, vì $-B$ là ma trận xác định âm. Giá trị q cần tìm chính là giá trị nhỏ nhất để tất cả các giá trị riêng của $\tilde{P}$ vẫn còn nằm bên phải trục ảo, tức là vẫn còn làm cho $\tilde{P}$ xác định dương.

Ví dụ 4.22: (Tính giá trị q)

Cho

$$T = \frac{s+1}{10s+1}, \qquad U = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+2)^2}.$$

Như vậy ta có

$$k_1 = 1,\ T(k_1) = \frac{2}{11} \qquad \text{và} \qquad k_2 = 5,\ T(k_2) = \frac{6}{51}$$

Suy ra

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0,167 \\ 0,167 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,017 & 0,004 \\ 0,004 & 0,001 \end{pmatrix}.$$

và với các lệnh **sqrtm()**, **inv()** của MatLab, ta được

$$V = \begin{pmatrix} 0,6848 & 0,1763 \\ 0,1763 & 0,2625 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1,7655 & -0,1856 \\ -0,1856 & 4,6052 \end{pmatrix}$$

cũng như với lệnh **eig()** thì

$$V^{-1}BV^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0377 & -0,0029 \\ -0,0029 & 0,0014 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max}(V^{-1}BV^{-1}) = 0,0379$$

Vậy:

$$q = \sqrt{\lambda_{\max}(V^{-1}BV^{-1})} = 0,1946.$$

và đó cũng là kết quả đã có từ ví dụ 4.20 (mục 4.3.4), nhưng bằng phương pháp sử dụng toán tử Hankel và định lý Nehari. □

Tổng kết: Thuật toán tìm nghiệm bài toán cân bằng mô hình

Kết hợp nội dung phép nội suy Nevanlinna–Pick để có hàm $H(s)$ thỏa mãn $\|H\|_\infty \le 1$ và $H(k_i)=t_i$, với công thức (4.87) xác định q và công thức (4.83) xác định Q^* từ H và q, ta đi đến thuật toán chung gồm các bước như sau:

1) Xác định tất cả các điểm không có phần thực dương của $U(s)$ là k_i, $i=1,2,\ldots,m$.

2) Tính $q = \inf\limits_{Q \in RH_\infty} \|T-UQ\|_\infty$.

3) Xác định $t_i = \dfrac{T(k_i)}{q}$, $i=1,2,\ldots,m$.

4) Sử dụng phép nội suy Nevanlinna–Pick để tìm hàm $H(s)\in RH_\infty$, thỏa mãn $\|H\|_\infty \le 1$ và $H(k_i)=t_i$.

5) Đáp số: $Q^* = \dfrac{T-qH}{U}$.

Ví dụ 4.23: (Tìm hàm Q^*)

Cho bài toán cân bằng mô hình (4.67) với

$$T(s) = \frac{s-1}{2s+1}, \qquad U(s) = \frac{(s-2)(s-1)}{(s+1)^2}.$$

Hàm $U(s)$ có hai điểm không nằm bên phải trục ảo là $k_1=2$ và $k_2=1$. Giá trị tương ứng của $T(s)$ tại đó là $T(k_1)=0,2$ và $T(k_2)=0$.

Lập hai ma trận

$$A=(a_{ij}) \quad \text{với} \quad a_{ij}=\frac{1}{k_i+\bar{k}_j} \quad \to \quad A=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,3333 \\ 0,3333 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$B=(b_{ij}) \quad \text{với} \quad b_{ij}=\frac{T(k_i)\bar{T}(k_j)}{k_i+\bar{k}_j} \quad \to \quad B=\begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ta có (nhờ các lệnh **sqrtm()**, **inv()** và **eig()** của MatLab)

$$V=\sqrt{A}=\begin{pmatrix} 0,3705 & 0,3357 \\ 0,3357 & 0,6223 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V^{-1}=\begin{pmatrix} 5,2805 & -2,8489 \\ -2,8489 & 3,1439 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad q=\sqrt{\lambda_{\max}(V^{-1}BV^{-1})}=0,6$$

Bước tiếp theo, ta xác định hàm $H(s)$ thỏa mãn $H\in \mathrm{RH}_\infty$, $\|H\|_\infty\le 1$ và $H(k_i)=t_i$ trong đó

$$t_1=\frac{T(k_1)}{q}=\frac{1}{3} \quad \text{và} \quad t_2=\frac{T(k_2)}{q}=0$$

Đây là bài toán nội suy Nevanlinna-Pick có hai cặp giá trị. Ma trận Pick tương ứng của nó là

$$P=\begin{pmatrix} 0,23 & 0,33 \\ 0,33 & 0,5 \end{pmatrix}$$

xác định dương nên bài toán nội suy có nghiệm.

Áp dụng thuật toán nội suy bằng cách chuyển thành bài toán chỉ còn có một cặp giá trị là

$$k_1=2 \quad \text{và} \quad t_1'=\frac{M_{t_2}(t_1)}{A_{k_2}(k_1)}=\underbrace{\frac{t_1-t_2}{1-\bar{t}_2t_1}}_{M_{t_2}(t_1)}\;\underbrace{\frac{k_1+\bar{k}_2}{k_1-k_2}}_{A_{k_2}^{-1}(k_1)}=1$$

ta được $H_1(s)=1$. Suy ra

$$H(s)=\frac{H_1A_{k_2}+t_2}{1+\bar{t}_2H_1A_{k_2}}=\frac{s-1}{s+1}.$$

Vậy

$$T(s)-qH(s)=\frac{s-1}{2s+1}-\frac{0,6(s-1)}{s+1}=\frac{-0,2(s-2)(s-1)}{2s^2+3s+1}$$

$$\Rightarrow \qquad Q^*=\frac{T-qH}{U}=\frac{-0,2(s+1)^2}{2s^2+3s+1}. \qquad \square$$

Chú ý: Phương pháp tìm Q^* của bài toán cân bằng mô hình (4.67) theo phép nội suy Nevannlinna–Pick phụ thuộc vào sự tồn tại hàm $H(s)$ thỏa mãn $H\in RH_\infty$, $\|H\|_\infty\le 1$ và $H(k_i)=t_i$. Có thể bài toán cân bằng mô hình (4.67) có nghiệm Q^* nhưng lại không có hàm $H(s)$. Do đó nghiệm Q^* này cũng sẽ không thể tìm được bằng phương pháp nội suy Nevannlinna–Pick.

Ví dụ sau minh họa cho nhận xét trên.

Ví dụ 4.24: Trường hợp không áp dụng được phương pháp nội suy Nevannlinna–Pick

Trong ví dụ 4.20 (mục 4.3.4) ta đã xét bài toán (4.67) với:

$$T(s)=\frac{s+1}{10s+1}, \qquad U(s)=\frac{(s-1)(s-5)}{(s+2)^2}.$$

và đi đến nghiệm tối ưu:

$$Q^*=\frac{3(s+2)^2}{(10s+1)(s+19)}.$$

Bây giờ ta sẽ xét lại bài toán đó nhưng bằng phương pháp nội suy Nevannlina–Pick. Hàm $U(s)$ có hai điểm không với phần thực dương là $k_1=1$ và $k_2=5$. Ngoài ra, theo kết quả của ví dụ 4.22 ta đã có $q\approx 0,2$. Như vậy, tiếp theo ta phải xác định hàm $H(s)$ thỏa mãn $H\in RH_\infty$, $\|H\|_\infty\le 1$ cũng như $H(k_i)=t_i$, trong đó:

$$t_1=\frac{T(k_1)}{q}=\frac{2}{2,2}=0,9 \qquad \text{và} \qquad t_2=\frac{T(k_2)}{q}=\frac{3}{5,1}=0,59$$

Bài toán nội suy trên có ma trận Pick (4.84):

$$P=\begin{pmatrix}0,0868 & 0,0775\\ 0,0775 & 0,0654\end{pmatrix}$$

và ma trận này có hai giá trị riêng là $\lambda_1=0,1544$ và $\lambda_2=-0,0022$ nên không phải là ma trận xác định dương (λ_2 là số âm). Vậy không tồn tại hàm $H(s)$ thỏa mãn yêu cầu đề ra (định lý 4.16), tức là bài toán không giải được bằng phương pháp nội suy Nevannlinna–Pick, trong khi nó vẫn có nghiệm tối ưu Q^*. $\square$

4.3.6 Nghiệm cận tối ưu (suboptimal)

Trước khi đề cập đến bài toán tìm nghiệm cận tối ưu ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.25 ([30]): Nghiệm Q^* không hợp thức, hay bài toán cân bằng mô hình (4.67) vô nghiệm

Cho bài toán (4.67) với:

$$T=\frac{100(s+2)(s-1)(s+4.75)}{(10s+1)(s+1)^3}\,,\qquad U=\frac{100(s+2)(s-1)(s-2)}{(10s+1)(s+1)^4}\,.$$

Từ đây ta có $k_1=1$ và $k_2=2$ là hai điểm không nằm bên phải trục ảo của $U(s)$, cũng như $T(k_1)=0$ và $T(k_2)=4.762$.

Lập hai ma trận:

$$A=(a_{ij})\qquad \text{với}\qquad a_{ij}=\frac{1}{k_i+\bar{k}_j}\qquad \Rightarrow\qquad A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.33\\ 0.33 & 0.25\end{pmatrix}$$

$$B=(b_{ij})\qquad \text{với}\qquad b_{ij}=\frac{T(k_i)\overline{T}(k_j)}{k_i+\bar{k}_j}\qquad \Rightarrow\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5.67\end{pmatrix}$$

ta có:

$$V^{-1}=\begin{pmatrix}3.144 & -2.849\\ -2.849 & 5.281\end{pmatrix}\qquad \Rightarrow\qquad q=\sqrt{\lambda_{\max}(V^{-1}BV^{-1})}=14.286$$

Áp dụng thuật toán nội suy Nevannlinna–Pick với hai cặp giá trị:

$$k_1=1,\ t_1=\frac{T(k_1)}{q}=0\quad \text{và}\quad k_2=2,\ t_2=\frac{T(k_2)}{q}=0.334$$

ta đi đến:

$$H(s)=\frac{s-1}{s+1}$$

Suy ra

$$Q^*=\frac{T-qH}{U}=\frac{1.43s^3+6.29s^2+9.37s+4.68}{s+2}$$

Tuy nhiên nghiệm Q^* này lại không hợp thức ($Q^*\notin \mathrm{RH}_\infty$). ❐

Một ví dụ khác về trường hợp bài toán cân bằng mô hình không có nghiệm Q^* là ví dụ 4.18 đã được xét ở mục 4.3.3 khi nói về các khả năng tồn tại nghiệm Q^*. Cả hai ví dụ này (ví dụ 4.18 và 4.25) đều có một điểm chung là Q^* tìm được tuy bền (*stable*) song lại không hợp thức (bậc đa thức tử số lớn hơn bậc đa thức mẫu số).

Hiện tượng nghiệm Q^* tìm được nhưng không hợp thức cũng xảy ra khi ta áp dụng phương pháp sử dụng toán tử Hankel và định lý Nehari (mục 4.3.4), hoặc các định lý 4.9, 4.10 (mục 4.3.3). Ví dụ sau minh hoạ điều đó.

Ví dụ 4.26: (Nghiệm Q^* không hợp thức)

Xét bài toán cân bằng mô hình (4.67) với

$$T(s) = \frac{(s-7)(s-3)}{(s+1)(s+3)}, \qquad U(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+3)}.$$

Hàm $U(s)$ có một điểm không $s_0=3$ duy nhất nằm bên phải trục ảo. Nhưng khi áp dụng công thức (4.68) để tìm Q^* ta lại có nghiệm không hợp thức

$$Q^* = \frac{T(s)-T(s_0)}{U(s)} = s+7 \notin RH_\infty \qquad \square$$

Cả hai ví dụ trên đều cho thấy nguyên nhân làm cho hàm phức thực–hữu tỷ và bền Q^* đã tìm được:

$$Q^* = \frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n} \tag{4.88a}$$

cho dù bằng phương pháp sử dụng toán tử Hankel, định lý Nehari hay phép nội suy Nevannlinna–Pick, không phải là nghiệm của bài toán cân bằng mô hình ($Q^* \notin RH_\infty$), chỉ vì nó không hợp thức, tức là Q^* có bậc đa thức tử số là m lớn hơn bậc đa thức mẫu số là n ($m>n$).

Từ nhận xét như vậy thì rõ ràng cách đơn giản nhất để xấp xỉ Q^* thành nghiệm cận tối ưu (gần tối ưu) $\tilde{Q}^* \in RH_\infty$ là biến nó thành:

$$\tilde{Q}^* = \frac{Q^*}{(es+1)^{m-n}} = \frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{(es+1)^{m-n}(a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n)} \tag{4.88b}$$

trong đó $e>0$ là số thực dương nhỏ tuỳ ý. Số thực dương e này quyết định sai số giữa $\tilde{Q}^*$ và Q^*. Cụ thể hơn thì $\lim_{e\to 0}\tilde{Q}^* = Q^*$. Từ đây ta đi đến:

Định lý 4.17: Nếu hàm phức thực–hữu tỷ và bền (4.88a) tìm được của bài toán cân bằng mô hình (4.67) không hợp thức ($m>n$) thì nghiệm cận tối ưu của bài toán (4.67) sẽ có dạng (4.88b), với e là một số thực dương nhỏ tuỳ ý nhưng được chọn trước (càng nhỏ càng tốt).

Ví dụ 4.27: Nghiệm cận tối ưu

Bài toán (4.67) đã xét ở ví dụ (4.25) không có nghiệm Q^*, nhưng ta có thể thay nó bằng nghiệm cận tối ưu:

$$\tilde{Q} = \frac{1.43s^3+6.29s^2+9.37s+4.68}{(es+1)^2(s+2)}$$

với $0<e$ nhỏ tùy ý. Chẳng hạn với $e = 0.1$ thì:

$$\tilde{Q}^* = \frac{1.43s^3+6.29s^2+9.37s+4.68}{0.01s^3+0.4s^2+1.4s+2}$$

Cũng tương tự như vậy, nghiệm cận tối ưu $\tilde{Q}^*$ của bài toán cân bằng mô hình (4.67) trong ví dụ (4.26) là:

$$\tilde{Q}^* = \frac{s-7}{es+1}\,.$$

□

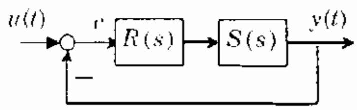
Câu hỏi ôn tập và bài tập

1) Chứng minh rằng với mọi ma trận truyền đạt $S(s)=NM^{-1}=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ trong đó $N(s),M(s)\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên phải và $\tilde{N}(s),\tilde{M}(s)\in RH_\infty$ nguyên tố cùng nhau bên trái, luôn tồn tại bốn ma trận $X(s),Y(s),\tilde{X}(s),\tilde{Y}(s)\in RH_\infty$ thỏa mãn *hệ phương trình Bezout*:

$$\begin{pmatrix}\tilde{Y} & \tilde{X}\\ \tilde{N} & -\tilde{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M & X\\ N & Y\end{pmatrix}=I.$$

2) Xét hệ có cấu trúc cho ở hình 4.20. Hãy xác định tất cả các bộ điều khiển $R(s)$ làm hệ ổn định, biết rằng:

$$S(s) = \frac{(1+2s)(1-s)}{(1+3s)(4-s^2)}$$



Hình 4.20: Hệ kín với phản hồi đơn vị

3) Cho hệ MIMO có cấu trúc như ở hình 4.20, trong đó đối tượng có ma trận truyền đạt

$$S(s) = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \qquad \text{và} \qquad R(s) = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$$

Biết rằng:

- Tất cả 8 ma trận truyền đạt con $N, M, \tilde{N}, \tilde{M}, U, V, \tilde{U}, \tilde{V}$ đều thuộc RH_∞.
- N, M và U, V là những cặp nguyên tố cùng nhau bên phải, cũng như $\tilde{N}, \tilde{M}$ và $\tilde{U}, \tilde{V}$ là những cặp nguyên tố cùng nhau bên trái.

Hãy chứng minh sự tương đương của các phát biểu sau:

a) Hệ kín là ổn định.

b) $\begin{pmatrix} M & \begin{pmatrix}\Theta \\ I\end{pmatrix} U \\ (\Theta \quad I)N & V \end{pmatrix}^{-1} \in RH_\infty$ c) $\begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{N}\begin{pmatrix}\Theta \\ I\end{pmatrix} \\ \tilde{U}(\Theta \quad I) & \tilde{V} \end{pmatrix}^{-1} \in RH_\infty$

4) Tìm nghiệm Q^* của bài toán cân bằng mô hình sau:

$$Q^* = \arg \inf_{Q \in RH_\infty} \| T - UQ \|_\infty$$

với

$$T(s) = \frac{5s+1}{s+2} \quad \text{và} \quad U(s) = \frac{s}{s+2}$$

5 ĐIỀU KHIỂN THÍCH NGHI

Như đã đề cập ở mục 1.6.4, điều khiển thích nghi là bài toán thiết kế bộ điều khiển nhằm luôn giữ chất lượng hệ thống được ổn định, cho dù có nhiễu không mong muốn tác động vào hệ thống hoặc có những sự thay đổi không biết trước xảy ra bên trong đối tượng điều khiển làm thay đổi mô hình của nó. Nguyên tắc hoạt động của hệ thống điều khiển thích nghi là mỗi khi có sự thay đổi của đối tượng, bộ điều khiển sẽ tự thay đổi theo nhằm đảm bảo được tính cân bằng chất lượng trong hệ thống. Trong chương này chúng ta sẽ làm quen với một số cấu trúc thường gặp của bộ điều khiển thích nghi thông dụng, cũng như các phương pháp thiết kế chúng.

5.1 Điều khiển thích nghi tự chỉnh (STR)

Để thiết kế được bộ điều khiển cho một đối tượng cụ thể thì cần phải có mô hình toán học mô tả đối tượng đó. Đối với những đối tượng tuyến tính, có một tín hiệu vào, một tín hiệu ra (đối tượng SISO) thì mô hình toán học thông dụng nhất thường được sử dụng là hàm truyền đạt dạng thực–hữu tỷ:

$$S(s)=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}=\frac{B(s)}{A(s)}\qquad (n\ge m)\tag{5.1}$$

Như vậy, rõ ràng kết quả chất lượng điều khiển phụ thuộc vào độ chính xác của mô hình toán học mô tả đối tượng. Ngoài ra, sau này trong quá trình làm việc, để chất lượng hệ thống vẫn đạt được các chỉ tiêu như thiết kế ban đầu thì cần phải có giả thiết rằng đối tượng không tự thay đổi, tức là độ chính xác của mô hình vẫn còn được giữ nguyên. Song điều này trong thực tế chỉ là lý tưởng, phần lớn các mô hình đều chứa trong nó một sai lệch nhất định so với đối tượng và trong quá trình làm việc, bản thân đối tượng lại cũng tự thay đổi, làm cho sai lệch giữa mô hình và đối tượng càng lớn, dẫn đến độ sai lệch chất lượng so với chỉ tiêu thiết kế càng nhiều. Trong trường hợp như vậy, chúng ta thường nghĩ đến việc là làm lại từ đầu, tức là lại phải xác định một mô hình toán học đối tượng mới và lại thiết kế một bộ điều khiển mới.

Một bộ điều khiển tổng hợp, nếu trong quá trình làm việc có khả năng tự xác định lại mô hình toán học mô tả đối tượng để từ đó tự chỉnh định lại bản thân nó cho phù hợp với sự thay đổi của đối tượng được gọi là *bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh* (*self–tuning–regulator*), viết tắt là STR. Bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh đơn giản nhất là *bộ điều khiển thích nghi tự chỉnh tham số*, tức là nó không tự thay đổi cấu trúc bộ điều khiển mà