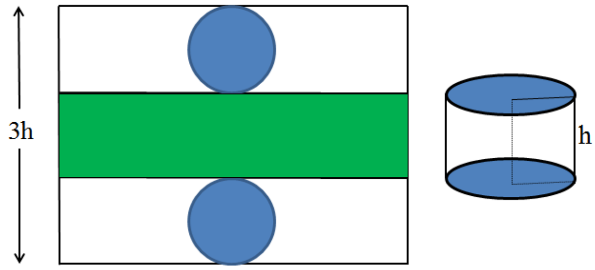
ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1: **(Ba Đình Lần2)** Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



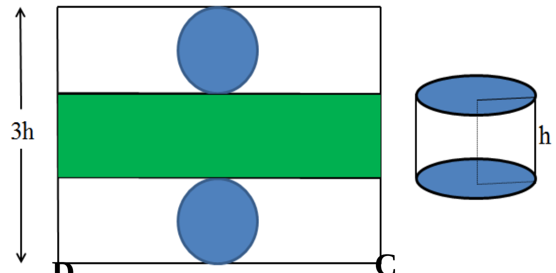
Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

A. $1,8062\,\text{m}^2$. **B.** $2,2012\,\text{m}^2$. **C.** $1,5072\,\text{m}^2$. **D.** $1,2064\,\text{m}^2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$ (Hình vẽ dưới), r là bán kính của hình tròn đáy.



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB.AD.$

Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r.$

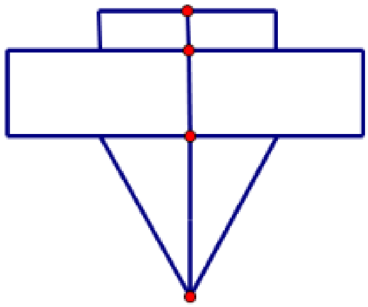
Thể tích của khối trụ $V = \pi.r^2.h = 3,14.r^2.2\text{r} = 6,28\text{r}^3$.

Theo bài ra $V = 50,24 \Leftrightarrow 6,28r^3 = 50,24 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2\,\text{dm} = 0,2\,\text{m} \Rightarrow AD = 3h = 6r = 1,2\,\text{m}; AB = 2\pi.r = 1,256\,\text{m}.$

Vậy $S = 1,2.1,256 = 1,5072\,(\text{m}^2).$

Câu 2: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N)(*Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ*). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_1(cm)$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(cm)$, chiều cao $h_2 = 2h_1(cm)$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_n = 4h_1(cm)$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(cm^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



A. $5(cm^3)$. **B.** $3(cm^3)$. **C.** $4(cm^3)$. **D.** $6(cm^3)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_n$; $h_2 = 2h_1 = \frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là

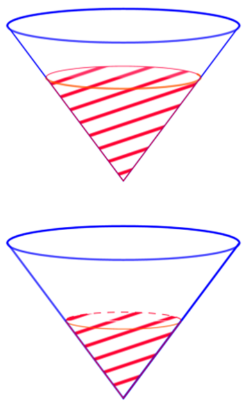
$$V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)} = \pi.r^2.h_1 + \pi.(2r)^2.h_2 + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \pi.r^2.\frac{1}{4}h_n + \pi.4r^2.\frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) + 6\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n \Leftrightarrow 31 = \frac{31}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n = 4$$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = 4(cm^3)$.

Câu 3: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy của hình nón là r.

Khi đó thể tích nước trong khối nón phía trên lúc ban đầu là: $\frac{\pi r^2.2}{3}$

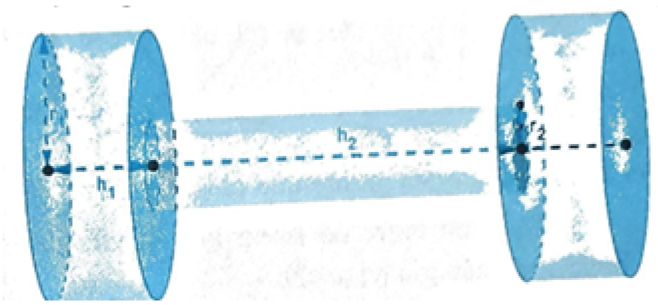
Thể tích nước trong khối nón phía trên sau khi chảy xuống nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm là: $\dfrac{\pi.\left(\dfrac{r}{2}\right)^2.1}{3}=\dfrac{\pi r^2}{12}$

Thể tích nước trong nón phía dưới sau khi nón trên chảy xuống là: $\dfrac{2\pi r^2}{3}-\dfrac{\pi r^2}{12}=\dfrac{7\pi r^2}{12}$.

Gọi chiều cao nước trong nón dưới là h, bán kính đáy nước trong nón dưới là r', khi đó: $\dfrac{h}{2}=\dfrac{r'}{r}\Leftrightarrow r'=\dfrac{rh}{2}$.

Thể tích nước trong nón phía dưới là: $\dfrac{\pi(r')^2h}{3}=\dfrac{7\pi r^2}{12}\Leftrightarrow\dfrac{\pi\left(\dfrac{rh}{2}\right)^2.h}{3}=\dfrac{7\pi r^2}{12}\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{7}$.

Câu 4: **(THTT lần5)** Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1), (H_2), (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1,h_1, r_2,h_2, r_3,h_3 thỏa mãn $r_1=r_3$, $h_1=h_3$; $r_2=\dfrac{1}{3}r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?



(H_1)

A. $\pi\dfrac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$. **B.** $\pi\dfrac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **C.** $\pi\dfrac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **D.** $\pi\dfrac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$

Lời giải

Chọn C

Chiều dài quả tạ là $l=h_1+h_2+h_3=2h_1+h_2=9\Rightarrow h_2=9-2h_1$

Thể tích quả tạ là $V=V_{(H_1)}+V_{(H_2)}+V_{(H_3)}=\pi r_1h_1+\pi r_2h_2+\pi r_3h_3=2\pi r_1h_1+\pi r_2h_2=60\pi$

$\Leftrightarrow 2r_1h_1+r_2h_2=60\Leftrightarrow 6r_2h_1+r_2(9-2h_1)=60\Leftrightarrow r_2(9+4h_1)=60\Leftrightarrow r_2=\dfrac{60}{9+4h_1}$

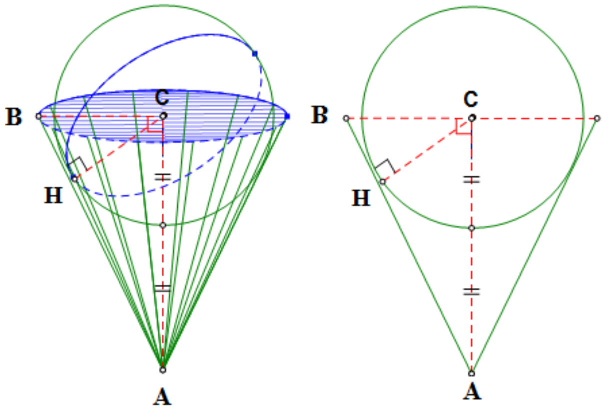
Thể tích $V_{(H_2)}=\pi r_2h_2=\pi\dfrac{60}{9+4h_1}(9-2h_1)=\pi\dfrac{60(9-2h_1)}{9+4h_1}$.

Câu 5: **(Chuyên Thái Nguyên)** Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$.Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

Lời giải

Chọn B



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R, lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

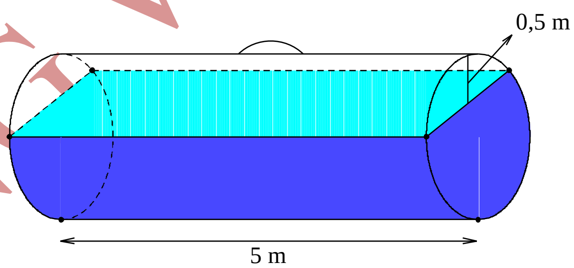
Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$ (Vì khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước)

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow CB^2 = \frac{4R^2}{3}$.

Thể tích khối nón: $V_n = \frac{1}{3}\pi.CB^2.AC = \frac{1}{3}\pi.\frac{4R^2}{3}.2R = \frac{8\pi}{9}.R^3 = 24\pi\ dm^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi\ dm^3$

Câu 6: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5\,\text{m}$, có bán kính đáy $1\,\text{m}$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\,\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).

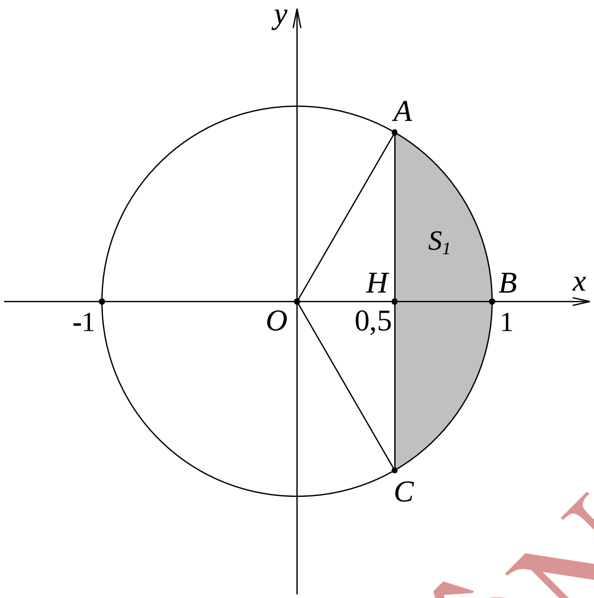


A. $23,562\,\text{m}^3$. **B.** $12,637\,\text{m}^3$. **C.** $6,319\,\text{m}^3$. **D.** $11,781\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn B

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào đáy hình trụ như hình vẽ sau



Ta có H là trung điểm OB nên ΔOAB là tam giác đều. Suy ra $\widehat{AOB}=60^\circ$ và $\widehat{AOC}=120^\circ$ nên hình quạt chứa cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ có diện tích là $S=\frac{1}{3}\pi r^2=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trên hình vẽ là $S_1=S-S_{OAC}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}.0,5.\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

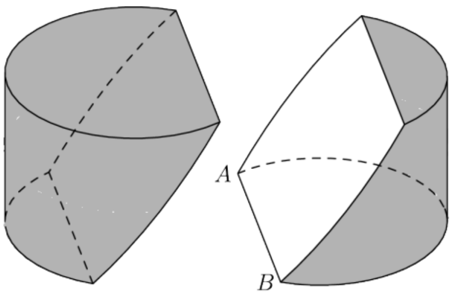
Và thể tích dầu được rút ra là $V_1=h.S_1=5.\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Thể tích bồn chứa dầu hình trụ là $V=\pi r^2 h=5\pi$.

Thể tích dầu còn lại trong bồn là $V_2=V-V_1=5\pi-5.\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{10\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\approx 12,637\left(\text{m}^3\right)$.

Cách khác: Có thể tính diện tích phần tô đậm bằng tích phân $S_1=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\text{d}x$.

Câu 7: [THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5] Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm A,B sao cho cung AB có số đo 120^0. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A,B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Tính diện tích S của thiết diện thu được.



A. $S=20\pi$. **B.** $S=20\pi+30\sqrt{3}$. **C.** $S=12\pi+18\sqrt{3}$. **D.** $S=20\pi+25\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

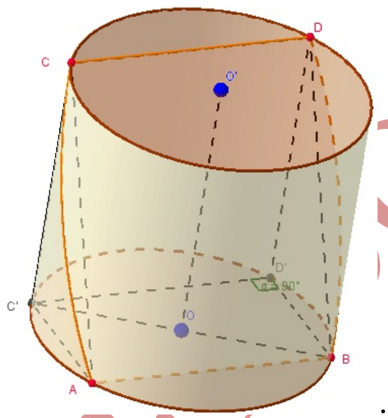
Gọi giao tuyến của mặt phẳng cắt với đáy còn lại là đoạn CD.
Kẻ các đường sinh CC', DD'. Khi đó $ABD'C'$ là hình chữ nhật.

Góc $OC'D' = 120^0 \Rightarrow C'D' = 6\sqrt{3}$; $BD' = 6$; $\widehat{AOC'} = 60^o$.
Gọi φ là góc giữa mặt cắt và mặt đáy.

$$\cos\varphi = \cos\widehat{DBD'} = \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{3}{5}.$$

Thiết diện cần tìm có hình chiếu xuống đường tròn đáy tâm O là phần hình nằm giữa cung $C'D'$ và cung AB. Áp dụng công thức hình chiếu $S = \dfrac{S_{HChieu}}{\cos\alpha}$; Và

$S_{HChieu} = 2\left(S_{AOB} + S_{\widehat{AOC'}}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}.6.6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{60}{360}.\pi.36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi$. Do đó $S = 20\pi + 30\sqrt{3}$..



Câu 8: **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $r = \sqrt[3]{\dfrac{V\pi}{2}}$. **B.** $r = \sqrt[3]{V}$. **C.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **D.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{đáy} = \pi r^2$; $S_{xq} = 2\pi rh$.

Thể tích khối trụ $V = S_{đáy}.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{S_{đáy}} = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

$S_{tp} = 2S_{đáy} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r.\dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$, có $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$; $f'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \dfrac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$		$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy khi $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất.

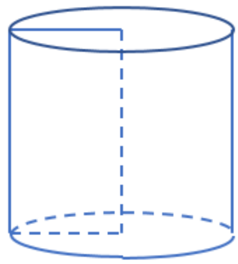
Câu 9: **(Trần Đại Nghĩa)** Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng$/\text{m}^2$, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng$/\text{m}^2$, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng$/\text{m}^2$. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Như Hưng; Fb: Nguyen Hung

Chọn B



Gọi bán kính đáy của hình trụ là R (m) và chiều cao là h (m).

Do thể tích khối trụ là 72 nên $\pi R^2h=72\Leftrightarrow h=\dfrac{72}{\pi R^2}$.

Diện tích đáy là πR^2.

Diện tích xung quanh là $2\pi Rh=2\pi R.\dfrac{72}{\pi R^2}=\dfrac{144}{R}$.

Chi phí làm bình là:

$T=100.\pi R^2+90.\dfrac{144}{R}+140.\pi R^2=240\pi R^2+\dfrac{12960}{R}$

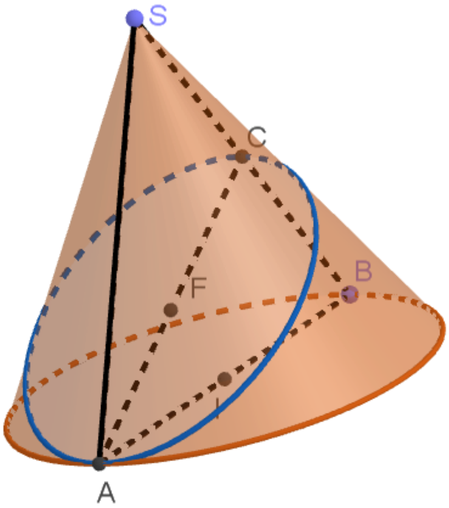
$=240\pi R^2+\dfrac{6480}{R}+\dfrac{6480}{R}\ge 3\sqrt[3]{240\pi R^2.\dfrac{6480}{R}.\dfrac{6480}{R}}=6480\sqrt[3]{\pi}$.

Dấu bằng xảy ra khi $240\pi R^2=\dfrac{6480}{R}=\dfrac{6480}{R}\Leftrightarrow R=\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 10: **(CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019)** Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l=10m$, bán kính đáy $R=5m$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. $15\,m$. **B.** $10\,m$. **C.** $5\sqrt{3}\,m$. **D.** $5\sqrt{5}\,m$.

Lời giải



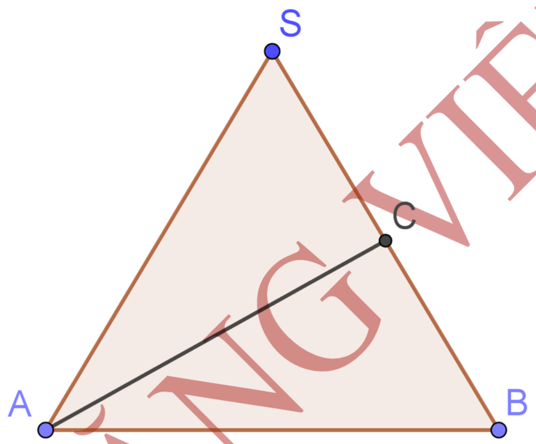
Ta có: ΔSAB cân và $SB = AB \Rightarrow \Delta SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = 50\pi\left(m^2\right)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện tử ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trải hình ra sẽ thấy ngay như sau

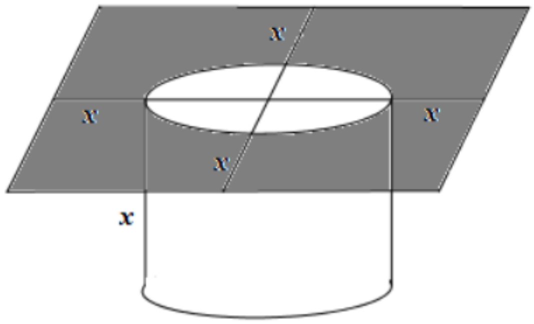


Hình trải dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R.\pi = 5\pi(m)$

$S_{ABS} = \frac{1}{2}S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{\widehat{ASB}.\pi R_1^2}{360} = 25\pi \Leftrightarrow \widehat{ASB} = \frac{360.25\pi}{\pi.10^2} = 90^0$

Vậy ΔSAC vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}.$

Câu 11: **(THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V=13,5\pi\left(m^3\right)$.   **B.** $V=27\pi\left(m^3\right)$.   **C.** $V=36\pi\left(m^3\right)$.   **D.** $V=72\pi\left(m^3\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V=\pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9-2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V=\pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x=\dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x=\dfrac{\pi}{4}f(x)$

Xét hàm số $f(x)=(9-2x)^2 x=4x^3-36x^2+81x$ với $0<x<\dfrac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x)=12x^2-72x+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

BBT:

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max}=54 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max}=\dfrac{\pi}{4}.54=\dfrac{27\pi}{2}=13,5\pi\left(m^3\right)$.

Câu 12: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$.   **B.** $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.   **C.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.   **D.** $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Thể tích của cốc: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=27 \Rightarrow r^2 h=\dfrac{81}{\pi} \Rightarrow h=\dfrac{81}{\pi}.\dfrac{1}{r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi r\sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r\sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^4}} = 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}} \geq 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}}$$

$$= 2\sqrt{3}\pi\sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}} \text{ (theo BĐT Cauchy)}$$

$$S_{xq} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}.$$

Câu 13: Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích 12π (cm^3) và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miếng giấy bạc cần thêm là.

A. $(12\sqrt{13} - 15)\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $12\pi\sqrt{13}\left(cm^2\right)$.

C. $\dfrac{12\sqrt{13}}{15}\left(cm^2\right)$. **D.** $(12\sqrt{13} + 15)\pi\left(cm^2\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đường tròn đáy hình nón lúc đầu; h_1 là chiều cao của hình nón lúc đầu.

Gọi R_2 là bán kính đường tròn đáy hình nón sau khi tăng thể tích; h_2 là chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi R_1^2 4 \Rightarrow R_1 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \\ h_2 = h_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 6$$

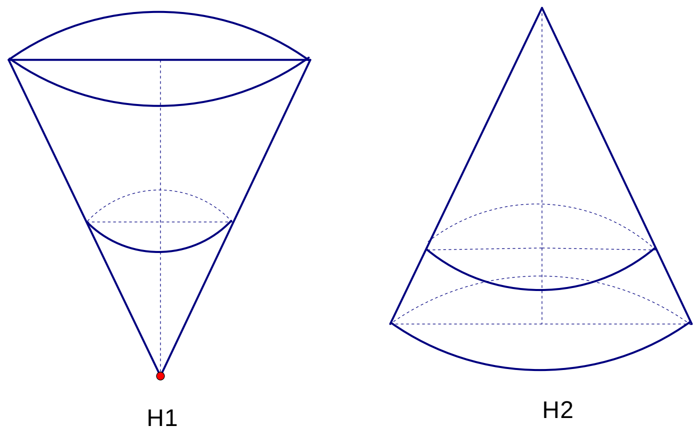
Diện tích xung quanh hình nón lúc đầu: $S_{xp1} = \pi R_1 l_1 = \pi 3\sqrt{16 + 9} = 15\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích xung quanh hình nón sau khi tăng thể tích: $S_{xp2} = \pi R_2 l_2 = \pi 6\sqrt{16 + 36} = 12\pi\sqrt{13}\left(cm^2\right)$

Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm là: $S = \left(12\sqrt{13} - 15\right)\pi\left(cm^2\right)$

Chọn A.

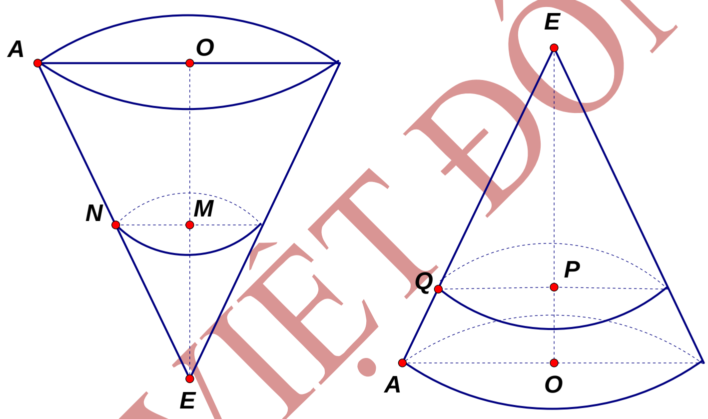
Câu 14: Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là $30cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng $15cm$ (hình H_1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H_2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần với giá trị nào sau đây ?



A. $1,553\left(cm\right)$. **B.** $1,306\left(cm\right)$. **C.** $1,233\left(cm\right)$ **D.** $15\left(cm\right)$.

Lời giải

Chọn B



Phễu có dạng hình nón, gọi E là đỉnh, đáy là đường tròn tâm O, bán kính OA chiều cao $OE = 30cm$.

Gọi V là thể tích của khối nón có đỉnh E, đáy là đường tròn tâm O, bán kính OA.

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OE = 10\pi OA^2$

Gọi M là trung điểm của đoạn OE , N là trung điểm của đoạn EA .Khi đổ nước vào phễu chiều cao của cột nước là $EM = 15cm$.

Gọi V_1 là thể tích của khối nón có đỉnh E, đáy là đường tròn tâm M , bán kính MN .

$\Rightarrow$ Thể tích nước là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.MN^2.EM = 5\pi.MN^2 = \frac{5}{4}\pi.OA^2 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8}V$

Khi bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên, chiều cao của cột nước là OP .

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có đỉnh E, đáy là đường tròn tâm P, bán kính PQ

Ta có $V_2 = V - V_1 = \frac{7}{8}V \Leftrightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi.PQ^2.PE}{\frac{1}{3}\pi.OA^2.OE} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PQ^2.PE}{OA^2.OE} = \frac{7}{8}\ (1)$

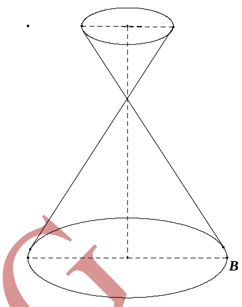
Ta có ΔPEQ vuông tại P và ΔOEA vuông tại O có $\widehat{OEA} = \widehat{PEQ}$

$\Rightarrow \Delta PEQ$ và ΔOEA đồng dạng $\Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{PE}{OE}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{PE}{OE}\right)^3 = \dfrac{7}{8} \Leftrightarrow \dfrac{PE}{OE} = \dfrac{\sqrt[3]{7}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{OE - OP}{OE} = \dfrac{\sqrt[3]{7}}{2}$

$$\Leftrightarrow OP = OE\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 30\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \approx 1,306cm$$

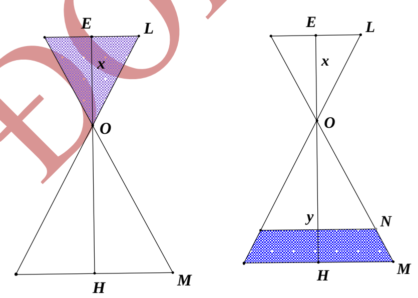
Câu 15: Cho một đồng hồ cát như hình vẽ (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại) trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60^0. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là $30\,cm$ và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\left(cm^3\right)$. Nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới. khi đó tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu



A. $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{1}{27}$

C. $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ **D.** $\dfrac{1}{64}$

Đặt $\begin{cases} OE = x > 0 \\ OH = y > 0 \Rightarrow x + y = 60 \quad (1) \\ x < y \end{cases}$



Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\pi.EL^2.x + \dfrac{1}{3}\pi.\mathrm{HM}^2.\mathrm{y} = 1000\pi \\ \tan 60^0 = \dfrac{x}{EL} = \dfrac{y}{HM} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} EL^2.x + \mathrm{HM}^2.\mathrm{y} = 3000 \\ EL = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; HM = \dfrac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow x^3 + y^3 = 9000\ (2)$ .Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x = 10\,(cm) \\ y = 20\,(cm) \end{cases}$ Khi cát chảy hết xuống dưới

$$\frac{V_{cat\,chiem\,cho}}{V_{duoi}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Câu 16: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

Hướng dẫn giải: :

Đặt $a = 50cm$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y\,(x, y > 0)$. Ta có

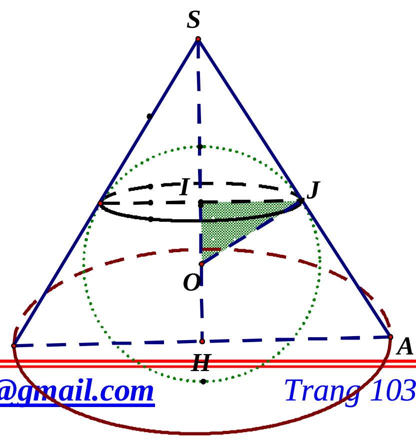
$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là

$S_{tp} = \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2}$

Theo giả thiết ta có:

$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$



$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x^2 \Leftrightarrow$

$x^2\left(x^2+y^2\right)=a^4+x^4-2a^2x^2,\left(DK:x<a\right)\Leftrightarrow x^2=\dfrac{a^4}{y^2+2a^2}$

Khi đó thể tích khối nón là: $V=\dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{a^4}{y^2+2a^2}.y=\dfrac{1}{3}\pi a^4.\dfrac{y}{y^2+2a^2}$

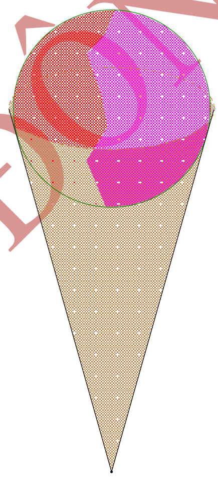
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{y^2+2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

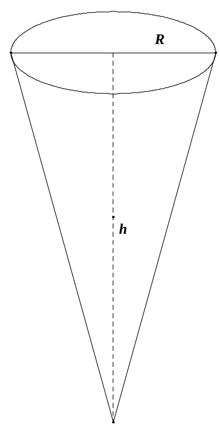
Ta có $\dfrac{y^2+2a^2}{y}=y+\dfrac{2a^2}{y}\ge 2\sqrt{y.\dfrac{2a^2}{y}}=2\sqrt{2}a$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y=\dfrac{2a^2}{y}$, tức là $y=a\sqrt{2}\Rightarrow x=\dfrac{a}{2}=25cm$

Chọn D.

Câu 17: Một kem ốc quế gồm hai phần, phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h,r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỷ số $\dfrac{h}{r}$





A. $\dfrac{h}{r}=3$ **B.** $\dfrac{h}{r}=2$

C. $\dfrac{h}{r}=\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{h}{r}=\dfrac{16}{3}$

Hướng dẫn giải:

Thể tích kem ban đầu: $V_{kem(bd)}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

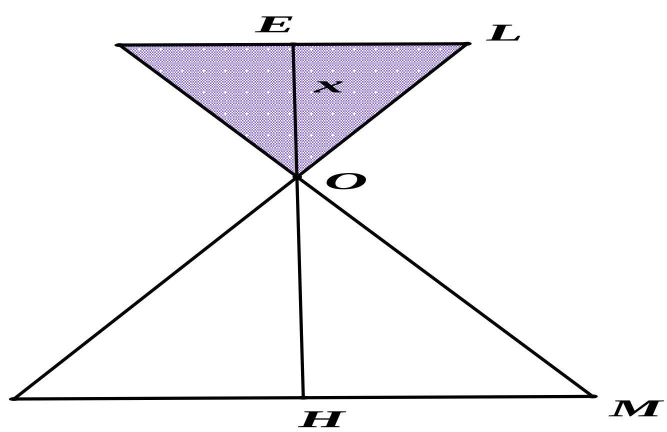
Thể tích phần ốc quế: $V_{oc\,que}=\dfrac{1}{3}\pi.R^2.h$

Ta có $V_{oc\,que}=\dfrac{3}{4}V_{kem(bd)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\pi.R^2.h=\dfrac{3}{4}.\dfrac{4}{3}\pi R^3\Leftrightarrow\dfrac{h}{R}=3$

Câu 18: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao $9cm$, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là và $4cm$. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:

A. $250ml$ **B.** $300ml$

C. $350ml$ **D.** $400ml$



Hướng dẫn giải:

$\Delta AGC\sim\Delta ABC\Rightarrow\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{GC}{BD}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow AG=\dfrac{3}{4}AB$

$\Leftrightarrow \dfrac{AG}{AG+9}=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow AG=27$

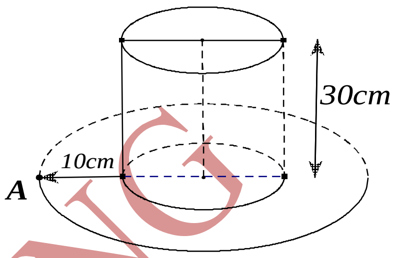
Suy ra $V_{coc}=V_{non\,lon}-V_{non\,nho}$

$=\dfrac{1}{3}.\pi.4^2.(27+9)-\dfrac{1}{3}.\pi.3^2.27=111\pi \approx 348,72ml$

Vậy lượng nước tối đa là $300ml$.

Chọn B.

Câu 19: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



A. $700\pi\left(cm^2\right)$ **B.** $754,25\pi\left(cm^2\right)$

C. $750,25\pi\left(cm^2\right)$ **D.** $756,25\pi\left(cm^2\right)$

Hướng dẫn giải:

$S_{hinh\,tron}=\pi R^2=\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2;$

$S_{xq\,lang\,tru}=2\pi rl=2\pi\left(\dfrac{35-20}{2}\right).30=450\pi$

$S=\pi\left[\left(\dfrac{35}{2}\right)^2+450\right]=756,25\pi.$

Chọn D.

Câu 20: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68. **B.** 0,6. **C.** 0,12. **D.** 0,52.

Hướng dẫn giải:

Gọi x $(x>0)$ là bán kính đáy của lon sữa.

Khi đó $V=\pi x^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa là

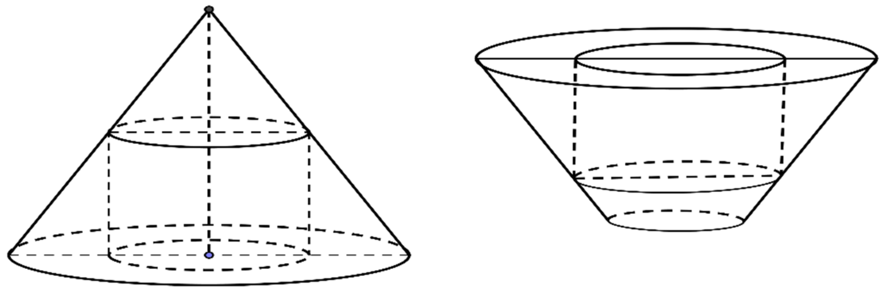
$S(x)=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi x^2+2\pi x\dfrac{V}{\pi x^2}=2\pi x^2+2\dfrac{2}{x}=2\pi x^2+\dfrac{4}{x},\ x>0$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số $S(x)=2\pi x^2+\dfrac{4}{x},\ x>0$

$S'(x)=4\pi x-\dfrac{4}{x^2}$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}\approx 0,6827$

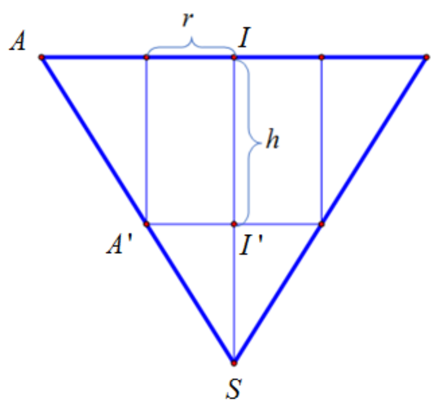
Câu 21: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao $9\,\text{cm}$ và bán kính đáy $6\,\text{cm}$. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.



A. 48π .   **B.** $\dfrac{81}{2}\pi$.   **C.** 36π .   **D.** 54π .

Lời giải

Chọn A



• Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ.
Đặt r là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.
Thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất khi khối trụ có thể tích lớn nhất.
Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h$.
Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng.

$\Rightarrow \dfrac{SI}{SI'} = \dfrac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \dfrac{9}{9-h} = \dfrac{6}{r} \Rightarrow h = 9 - \dfrac{3r}{2}$.

Khi đó $V = \pi.r^2.h = \pi.r^2.\left(9 - \dfrac{3r}{2}\right) = \pi\left(-\dfrac{3r^3}{2} + 9r^2\right)$.

• Khảo sát hàm số V , biến số r $(0 < r < 6)$.

$V' = \pi\left(-\dfrac{9r^2}{2} + 18r\right)$.

$V' = 0 \Leftrightarrow \pi\left(-\dfrac{9r^2}{2} + 18r\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \ (l) \\ r = 4 \ (n) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

r	$-\infty$	0		4		6	$+\infty$
V'		0	$+$	0	$-$		
V		0	$\nearrow$	48π	$\searrow$	0	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = 48\pi$ khi $r = 4$.

Vậy thớ mì tôm có thể tích lớn nhất là 48π.

Câu 22: Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

A. $0,33$. **B.** $0,11$. **C.** $0,21$. **D.** $0,08$

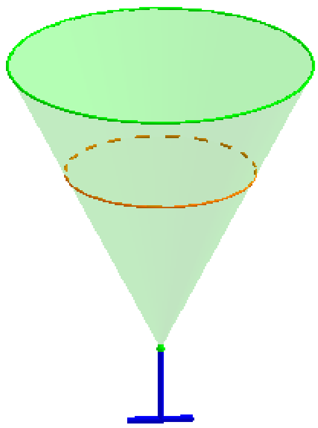
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của cái ly lần lượt là h và R.

Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\frac{2h}{3}$ và $\frac{2R}{3}$.

Do đó thể tích lượng nước trong bình là $\frac{8V}{27} \Rightarrow$ Phần không chứa nước chiếm $\frac{19}{27}V$.



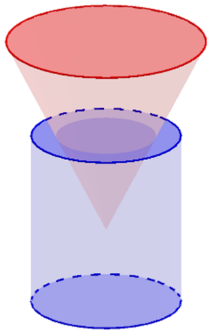
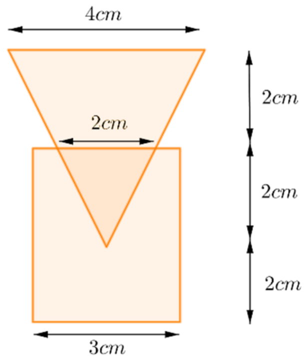
Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón và ta gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó.

Ta có $\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa nước là $\frac{19}{27}V$

$$\Rightarrow \frac{h'}{3}.\pi R'^2 = \frac{19}{27}.\frac{h}{3}.\pi R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt[3]{19}}{3}.$$

Do đó tỷ lệ chiều cao của phần chứa nước và chiều cao của cái ly trong trường hợp úp ngược ly là $1 - \frac{h'}{h} = \frac{3 - \sqrt[3]{19}}{3}$.

Câu 23: Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).

A. $V_{(H)} = 23\pi$.   **B.** $V_{(H)} = 13\pi$.   **C.** $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$.   **D.** $V_{(H)} = 17\pi$.

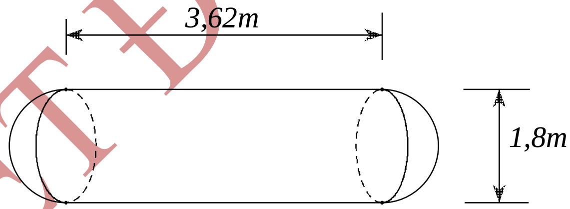
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = Bh = \pi 1.5^2.4 = 9\pi$. Thể tích khối nón là $V_{non} = \frac{1}{3}\pi 2^2.4 = \frac{16\pi}{3}$.

Thể tích phần giao là: $V_{p.giao} = \frac{1}{3}\pi 1^2.2 = \frac{2\pi}{3}$. Vậy $V_{(H)} = 9\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{41\pi}{3}$.

Câu 24: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính $1,8m$ và chiều dài của hình trụ là $3,62m$. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?



A. $10905l$ **B.** $23650l$ **C.** $12265l$ **D.** $20201l$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $V_{tru} = \pi R^2 h$

Vì thể tích của 2 nửa hình cầu bằng nhau nên tổng thể tích của 2 nửa hình cầu là 1 khối cầu có $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Vậy $V_H = V_{tru} + V_C = \pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 = 12,265m^3$

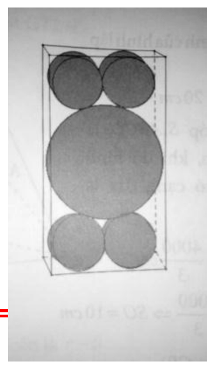
Vậy bồn xăng chứa: $12265\,l$.

Chọn C.

Câu 25: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4\times 4\times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lón tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

A. $32+32\sqrt{7}$ **B.** $48+32\sqrt{5}$ **C.** $64+32\sqrt{7}$ **D.** $64\sqrt{5}$

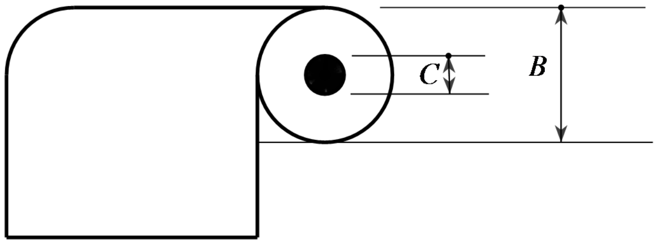
Hướng dẫn giải:



Gọi tâm hình cầu lớn là I và tâm bốn hình cầu nhỏ tiếp xúc với đáy là $ABCD$. Khi đó ta có $I.ABCD$ là hình chóp đều với cạnh bên $IA = 3$ và cạnh đáy $AB = 2$ do đó chiều cao hình chóp là $\sqrt{7}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt đáy là $1+\sqrt{7}$ hay chiều cao hình hộp chữ nhật là: $2\left(1+\sqrt{7}\right)$ suy ra thể tích hình hộp là $32\left(1+\sqrt{7}\right)$.

Chọn A.

Câu 26: Một bang giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi
hình trụ rỗng có đường kính
$C = 12,5mm.$
Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6mm$ và đường kính cả cuộn giấy là
$B = 44,9mm.$
Tính chiều dài l của cuộn giấy.



A. $L \approx 44m$	**B.** $L \approx 38m$	**C.** $L \approx 4m$	**D.** $L \approx 24m$

Hướng dẫn giải:

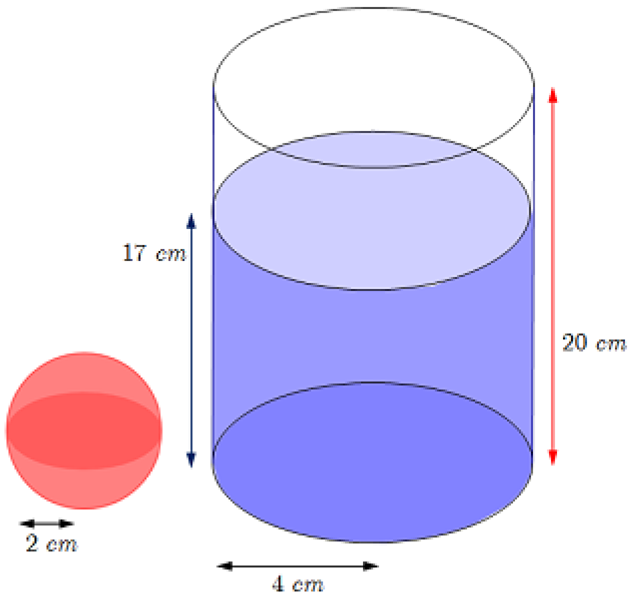
Gọi chiều rộng của băng giấy là r, chiều dài băng giấy là L độ dày của giấy là m khi đó ta có thể tích của băng giấy: $V = r.m.L \quad (1)$

Khi cuộn lại ta cũng có thể tích: $V = \pi\left(\frac{B}{2}\right)^2.m - \pi\left(\frac{C}{24}\right)^2.m = \frac{\pi}{4}r\left(B^2 - C^2\right) \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra: $m.r.L = \frac{\pi}{4}r\left(B^2 - C^2\right) \Rightarrow L = \frac{\pi}{4m}\left(B^2 - C^2\right)$

Câu 27: **(Thị Xã Quảng Trị)** Một ly nước hình trụ có chiều cao $20\ cm$ và bán kính đáy bằng $4\ cm$. Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly $17\ cm$ thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính $2\ cm$ thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

A. 4.	**B.** 7.	**C.** 5.	**D.** 6.



Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích phần không chứa nước $V_1 = 3.\pi.4^2 = 48\pi$. Như vậy để nước trào ra ngoài thì số bi thả vào cốc có tổng thể tích lớn hơn 48π.

Gọi n là số viên bi tối thiểu thả vào cốc khi đó tổng thể tích của n viên bi là

$V_2 = n.\frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32\pi n}{3}$. Theo bài ra $\frac{32\pi n}{3} > 48\pi \Leftrightarrow n > \frac{9}{2}$. Vậy $n = 5$.

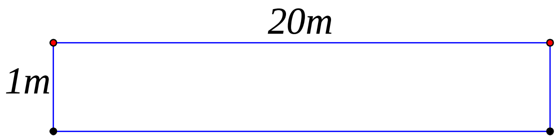
Câu 28: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20cm$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000 đồng) bằng 2 cách:

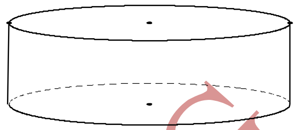
Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

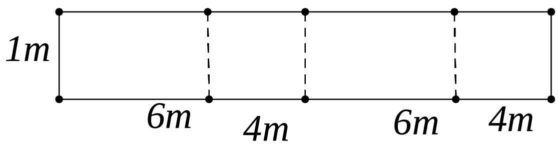
Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955 dong/m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1





Hình 2



A. Cả 2 cách như nhau **B.** Không chọn cách nào

C. Cách 2 **D.** Cách 1

Hướng dẫn giải:

Ở cách 2:

$1m^2 \to 90.000$

$20m^2 \to 1.800.000$

Ta có $V_{nuoc} = 0,8.6.4 = 19,2m^3$

Do đó tổng tiền ở phương án 2 là $19,2.9955 + 20.90000 = 1.991.136$.

Ở cách 2:

$20m^2 \to 1.800.000$

Ta có $20 = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{10}{\pi} \Rightarrow V_{nuoc} = h\pi r^2 = 0,8.\pi.\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$

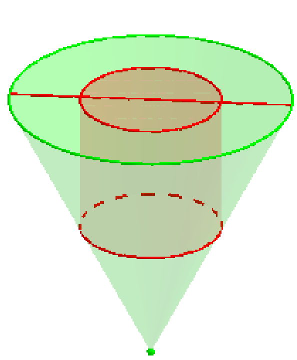
Do đó tiền nước: 253.454 đồng

Tổng tiền: 2.053.454 đồng.

Vậy thầy nên chọn cách 2.

Chọn C.

Câu 29: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.



A. $R = 3(dm)$. **B.** $R = 4(dm)$.

C. $R = 2(dm)$. **D.** $R = 5(dm)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi h, h' lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ.

R, r lần lượt là bán kính của khối nón và khối trụ.

Theo đề ta có: $h = 3R, h' = 2R.$

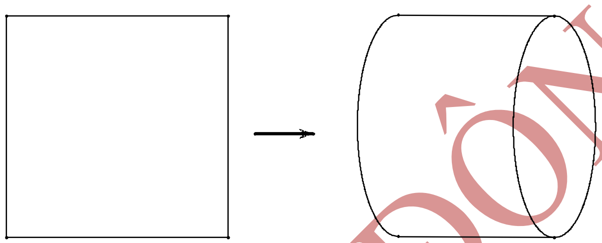
Xét tam giác SOA ta có: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{IM}{OA} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{h-h'}{h} = \dfrac{3R-2R}{3R} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow r = \dfrac{1}{3}R$. Ta lại có: $V_{\text{trô}} = \pi r^2 h' = \pi \cdot \dfrac{R^2}{9} \cdot 2R = \dfrac{2\pi R^3}{9} = \dfrac{16\pi}{9}$

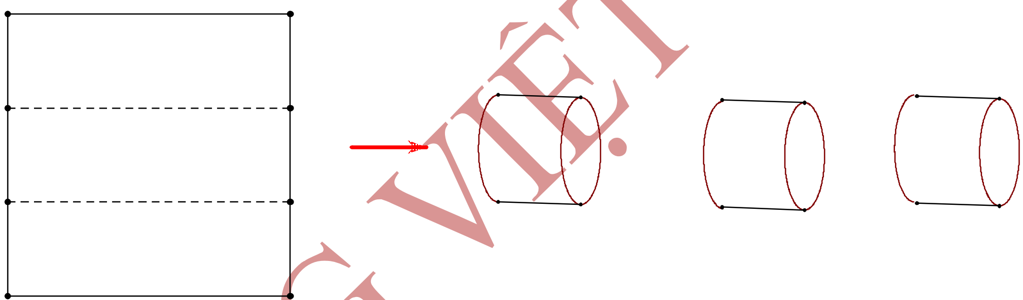
$\Rightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2\ dm.$

Câu 30: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là $3dm$, một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xunng quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1.



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2.



Khi đó, tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3   **B.** 2   **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có: $2\pi R_1 = 3 \Leftrightarrow R_1 = \dfrac{3}{2\pi} \Rightarrow V_1 = \pi R_1^2 h = \dfrac{27}{4\pi}$

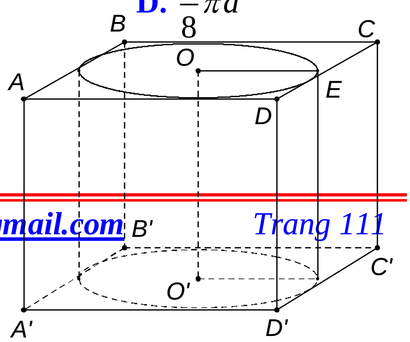
Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ hai, có: $2\pi R_2 = 1 \Leftrightarrow R_2 = \dfrac{1}{2\pi} \Rightarrow V_2 = \pi R_2^2 h = \dfrac{9}{4\pi}$

Chọn A.

Câu 31: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

A. πa^3 **B.** $\dfrac{1}{2}\pi a^3$ **C.** $\dfrac{1}{4}\pi a^3$ **D.** $\dfrac{1}{8}\pi a^3$

Hướng dẫn giải:



Ta có $OE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$;

$OO' = a$

Thể tích là:

$V = \pi.OE^2.OO' = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2.\pi.a = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Chọn C.

Câu 32: Người ta dùng một loại vải vintage để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

A. 2.500.470 đồng　　**B.** 3.150.342 đồng

C. 2.513.274 đồng　　**D.** 2.718.920 đồng

Hướng dẫn giải:

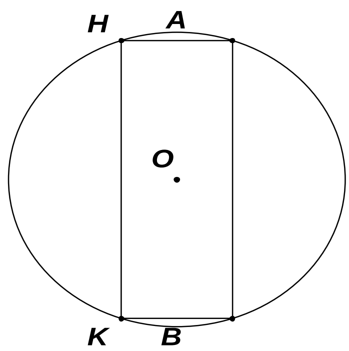
$S_{mat\,cau} = 4\pi R^2$

Với $R = \dfrac{d}{2} = 1(m)$. Vậy $S_{mat\,cau} = 4\pi.1^2 = 4\pi\left(m^2\right)$

Vậy cần tối thiểu số tiền: $4\pi.200000 = 2.513.274$ đồng.

Chọn C.

Câu 33: Cho biết rằng hình chỏm cầu có công thức thể tích là $\dfrac{\pi h\left(3r^2+h^2\right)}{6}$, trong đó h là chiều cao chỏm cầu và r là bán kính đường tròn bề mặt chỏm cầu (bán kính này khác vớibán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần dưa còn lại.



A. $200\pi cm^3$　　**B.** $96\pi cm^3$　　**C.** $288\pi cm^3$　　**D.** $144\pi cm^3$

Hướng dẫn giải:

Đặt r là bán kính của hình cầu.

Chiều cao của lỗ là 12 nên chiều cao của chỏm cầu lag $r-6$.

Bán kính của chỏm cầu, cũng là bán kính đáy của hình trụ và là: $\sqrt{r^2-36}$

Thể tích hình trụ là $12\pi\left(r^2-36\right)$.

Thể tích 2 chỏm cầu: $\dfrac{2\pi(r-6)\left[\left(3\left(r^2-36\right)+(r-6)^2\right)\right]}{6} = \dfrac{\pi(r-6)\left(4r^2-12r-72\right)}{3}$

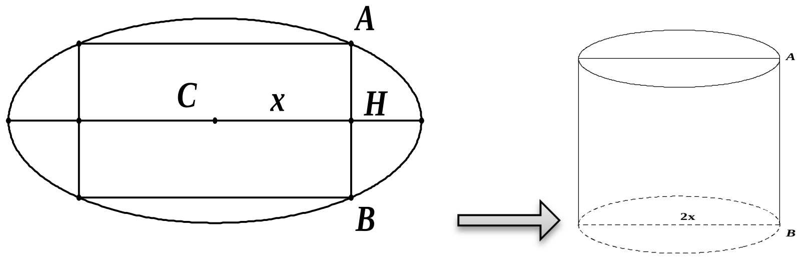
Thể tích cái lỗ là: $12\pi\left(r^2-36\right)+\dfrac{\pi(r-6)\left(4r^2-12r-72\right)}{3}$

$= \pi(r-6)\left[12(r+6)+\dfrac{4r^2-12r-72}{3}\right] = \dfrac{\pi(r-6)\left(4r^2+24r+144\right)}{3} = \dfrac{4\pi\left(r^3-6^3\right)}{3} = \dfrac{4\pi r^3}{3} - 288\pi$

Thể tích hình cầu là $\dfrac{4\pi r^3}{3}$ nên thể tích cần tìm là: $V = 288\pi$.

Chọn C.

Câu 34: người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng một elip với độ dài trục lớn bằng 8 độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được thành một hình trụ không có đáy như hình bên. Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó



A. $\frac{128\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$ **B.** $\frac{64}{3\sqrt{2}\pi}\left(cm^3\right)$ **C.** $\frac{64}{3\sqrt{3}\pi}\left(cm^3\right)$ **D.** $\frac{128}{3\sqrt{2}\pi}\left(cm^3\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có $(E):\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$. Chu vi 1 đáy của hình trụ $2\pi R=2x\Leftrightarrow R=\frac{x}{\pi}$

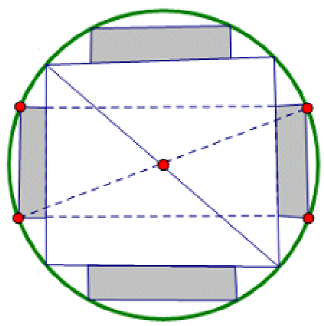
Ta có $AH=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}\Rightarrow h=\sqrt{16-x^2}\Rightarrow V_{tru}=\pi.R^2.h=\pi\left(\frac{x}{\pi}\right)^2.\sqrt{16-x^2}=\pi x^2\sqrt{16-x^2}$

Đặt $f(x)=x^2\sqrt{16-x^2}\ (-4<x<4)\Rightarrow f'(x)=\frac{-32x^3+32x}{\sqrt{16-x^2}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{\frac{32}{3}}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \max f(x)=f\left(\pm\sqrt{\frac{32}{3}}\right)=\frac{128\sqrt{3}}{9}\Rightarrow V_{\max}=\frac{128\sqrt{3}}{9\pi}$

TỔNG QUÁT: Elip có độ dài trục lớn $2a$, trục bé $2b$ khi đó $\left(V_{tru}\right)_{\max}=\frac{4a^2b}{3\sqrt{3}\pi}$

Câu 35: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xả thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x=\frac{3\sqrt{34}-17\sqrt{2}}{2}(cm)$ **B.** $x=\frac{3\sqrt{34}-19\sqrt{2}}{2}(cm)$

C. $x=\frac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}(cm)$ **D.** $x=\frac{5\sqrt{34}-13\sqrt{2}}{2}(cm)$

Hướng dẫn giải:

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S=S_{MNPQ}+4xy$

Cạnh hình vuông $MN=\frac{MP}{\sqrt{2}}=\frac{40}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}\,(cm)$

$\Rightarrow S=\left(20\sqrt{2}\right)^2+4xy=800+4xy$ (1)

Ta có $2x=AB-MN=AB-20\sqrt{2}<BD-20\sqrt{2}=40-20\sqrt{2}\Rightarrow 0<x<20-10\sqrt{2}$

Lại có $AB^2+AD^2=BD^2=40^2\Rightarrow\left(2x+20\sqrt{2}\right)^2+y^2=1600$

$\Rightarrow y^2=800-80x\sqrt{2}-4x^2\Rightarrow y=\sqrt{800-80x\sqrt{2}-4x^2}$

Thế vào $(1)\Rightarrow S=800+4x\sqrt{800-80x\sqrt{2}-4x^2}=800+4\sqrt{800x^2-80x^3\sqrt{2}-4x^4}$

Xét hàm số $f(x)=800x^2-80x^3\sqrt{2}-4x^4$, với $x\in\left(0;20-10\sqrt{2}\right)$ có

$f'(x)=1600x-240x^2\sqrt{2}-16x^3=16x\left(100-15x\sqrt{2}-x^2\right)$

Ta có $\begin{cases}x\in\left(0;20-10\sqrt{2}\right)\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(0;20-10\sqrt{2}\right)\\ 16x\left(100-15x\sqrt{2}-x^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $x=\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}$ chính là giá trị thỏa mãn bài toán.

Chọn C.

Câu 36: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá làm vật liệu xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h là chiều cao của thùng và bán kính đáy là R. Tính tỷ số $\dfrac{h}{R}$ sao cho chi phí làm thùng là nhỏ nhất

A. $\dfrac{h}{R}=2$ **B.** $\dfrac{h}{R}=\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{h}{R}=3\sqrt{2}$ **D.** $\dfrac{h}{R}=6$

Hướng dẫn giải:

Gọi V là thể tích của khối trụ, T là giá tiền cho một đơn vị S_{xq}

Ta có $V_{tru}=\pi.R^2.\text{h}\Leftrightarrow \text{h}=\dfrac{V_{tru}}{\pi R^2}$

Ta có $\begin{cases}S_{2day}=2\pi R^2\\ S_{xq}=2\pi R.h=2\pi R.\dfrac{V_{tru}}{\pi R^2}=\dfrac{2V_{tru}}{R}\end{cases}$

Giá vật liệu để làm 2 đáy là: $G_{2d}=2\pi R^2.3T=6\pi T.R^2$, Giá vật liệu làm xung quanh thùng

$G_{xq}=\dfrac{2V_{tru}}{R}.T$

Giá vật liệu làm thùng là:

$G_{thung}=\dfrac{2V_{tru}.T}{R}+6\pi T.R^2=\dfrac{V_{tru}.T}{R}+\dfrac{V_{tru}.T}{R}+6\pi T.R^2\ge 3\sqrt[3]{6V_{tru}^2}.T\ (const)$

$\Rightarrow\left(G_{thung}\right)_{\min}=3\sqrt[3]{6V_{tru}^2}.T\Leftrightarrow\dfrac{V_{tru}.T}{R}=6\pi T.R^2\Leftrightarrow V_{tru}=6\pi R^3\Rightarrow\dfrac{h}{R}=6$

Câu 37: Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000\,cm^3$. Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\ cm$. **B.** $10.\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}\ cm$. **C.** $\dfrac{500}{\pi}\ cm$. **D.** $10.\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}\ cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $h\ (cm)$ là chiều cao hình trụ và $R\ (cm)$ là bán kính nắp đậy.

Ta có: $V=\pi R^2h=1000$. Suy ra $h=\dfrac{1000}{\pi R^2}$.

Để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ nhỏ nhất.

Ta có: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R.\dfrac{1000}{\pi R^2}$

$=2\pi R^2+\dfrac{1000}{R}+\dfrac{1000}{R}\ge 3.\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{1000}{R}.\dfrac{1000}{R}}=3\sqrt[3]{2\pi.1000^2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\pi R^2=\dfrac{1000}{R}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$.

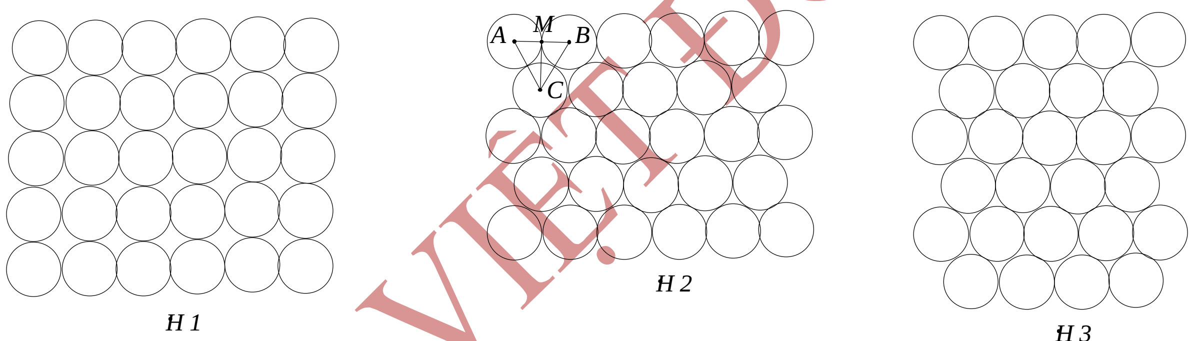
Câu 38: Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng $0,5cm$, chiều dài $6cm$. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước $6cm\times 5cm\times 6cm$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Có 3 cách xếp phấn theo hình vẽ dưới đây:



 Nếu xếp theo hình $H1$: vì đường kính viên phấn là $2.0,5=1cm$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $6.5=30$.

 Nếu xếp theo hình $H2$: hàng 6 viên xen kẽ hàng 5 viên. Gọi số hàng xếp được là $n+1, n\in\mathbb{Z}_+$.

Ta có ΔABC đều cạnh bằng $1\Rightarrow CM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta phải có $2.0,5+n.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le 5\Rightarrow n\le\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ xếp tối đa được 5 hàng $\Rightarrow$ mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.6+2.5=28$.

 Nếu xếp theo hình $H3$:hàng 5 viên xen kẽ hàng 4 viên. Gọi số hàng xếp được là $m+1, m\in\mathbb{Z}_+$.

Ta phải có $2.0,5+m.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le 6\Rightarrow m\le\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ xếp tối đa được 6 hàng $\Rightarrow$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.5+3.4=27$.

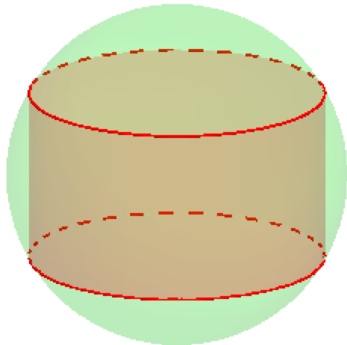
Vậy, xếp theo hình $H1$ thì xếp được nhiều phấn nhất, nên cần ít hộp nhất.

Ta có $460:30\approx 15,3$ $\Rightarrow$ cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phấn.

Câu 39: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$

C. $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left.\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

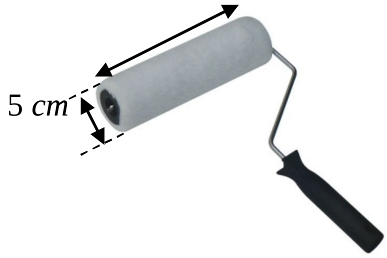
Thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Câu 40: Một cái tục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là $5cm$, chiều dài lăn là $23cm$ (hình bên). Sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện diện tích là

A. $1725\pi\ cm^2$. **B.** $3450\pi\ cm^2$.

C. $1725\pi\ cm^2$. **D.** $862,5\pi\ cm^2$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Diện tích xung quanh của mặt trụ là

$S_{xq}=2\pi Rl=2\pi.5.23=230\pi cm^2$.

Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là:

$S=230\pi.15=3450\pi cm^2$.

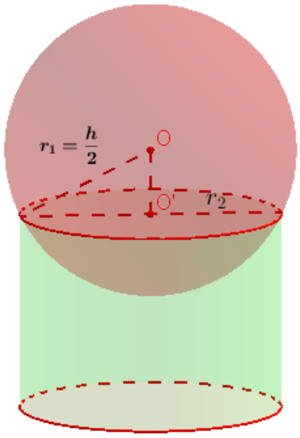
Câu 41: Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi $V_1,\ V_2$ lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

A. $9V_1=8V_2$. **B.** $3V_1=2V_2$. **C.** $16V_1=9V_2$. **D.** $27V_1=8V_2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi r_1 là bán kính quả bóng, r_2 là bán kính chiếc chén, h là chiều cao chiếc chén.



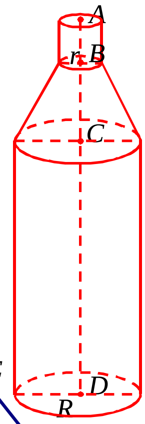
Theo giả thiết ta có $h = 2r_1 \Rightarrow r_1 = 2h$ và $OO' = \frac{r_1}{2} = \frac{h}{4}$.

Ta có $r_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}h^2$.

Thể tích của quả bóng là $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$

và thể tích của chén nước là $V_2 = B.h = \pi r_2^2 h = \frac{3}{16}\pi h^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$.

Câu 42: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5cm$, bán kính cổ $r = 2cm$, $AB = 3cm$, $BC = 6cm$, $CD = 16cm$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:



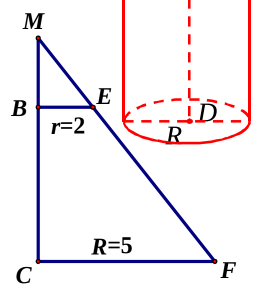
A. $495\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $462\pi\left(cm^3\right)$.

C. $490\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $412\pi\left(cm^3\right)$.

Hướng dẫn giải:

Thể tích khối trụ có đường cao CD: $V_1 = \pi R^2.CD = 400\pi\left(cm^3\right)$.

Thể tích khối trụ có đường cao AB: $V_2 = \pi r^2.AB = 12\pi\left(cm^3\right)$.



Ta có $\frac{MC}{MB} = \frac{CF}{BE} = \frac{5}{2} \Rightarrow MB = 4$

Thể tích phần giới hạn giữa BC:

$V_3 = \frac{\pi}{3}\left(R^2.MC - r^2.MB\right) = 78\pi\left(cm^3\right)$.

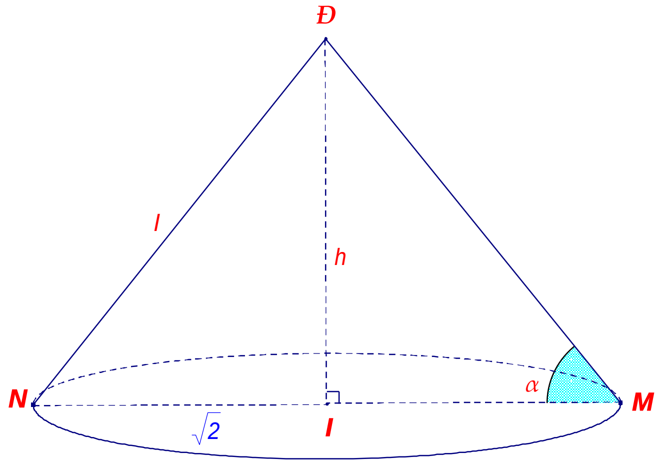
Suy ra: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 490\pi\left(cm^3\right)$.

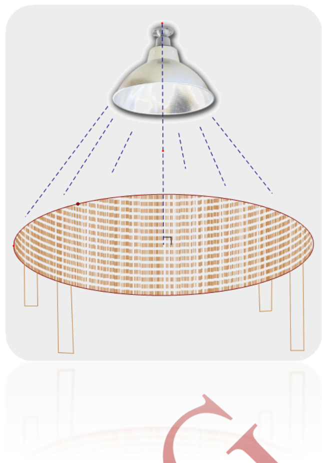
Chọn C.

Câu 43: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c\frac{\sin\alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

A. 1m **B.** 1,2m **C.** 1.5 m **D.** 2m

Hướng dẫn giải:





Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn (h > 0); Đ là bóng điện; I là hình chiếu của Đ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn.(như hình vẽ)

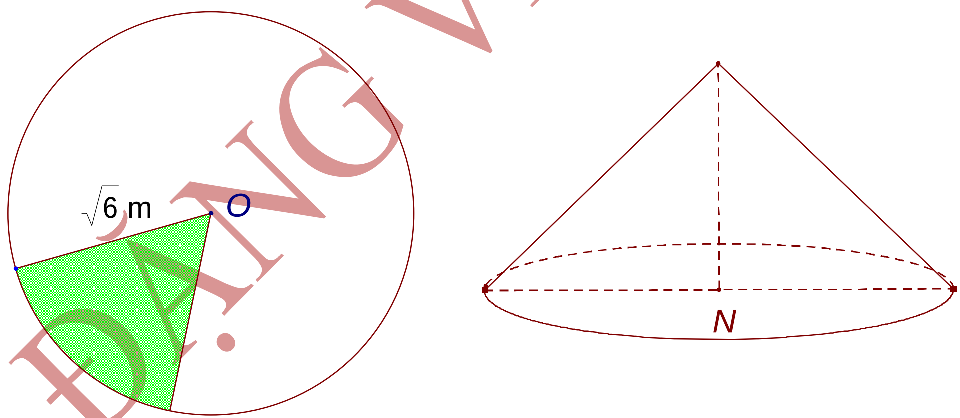
Ta có $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c\dfrac{\sqrt{l^2-2}}{l^3}$ $(l > \sqrt{2})$.

$C'(l) = c.\dfrac{6-l^2}{l^4.\sqrt{l^2-2}} > 0\left(\forall l > \sqrt{2}\right)$

$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6}\left(l > \sqrt{2}\right)$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó

Câu 44: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?



A. $\approx 66°$ **B.** $\approx 294°$ **C.** $\approx 12,56°$ **D.** $\approx 2,8°$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của dĩa).

Khi đó $x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$

Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}$

Thể tích khối nón sẽ là: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{x^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi $x=\frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}=4\pi$

Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là: $2\pi R-4\pi\Rightarrow\alpha=\frac{2\sqrt{6}\pi-4\pi}{2\sqrt{6}\pi}360^0\approx 66^0$

Câu 45: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi\, m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu?

A. $R=2m, h=\frac{1}{2}m$. **B.** $R=\frac{1}{2}m, h=8m$.**C.** $R=4m, h=\frac{1}{8}m$. **D.** $R=1m, h=2m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi R là bán kính đáy thùng (m), h: là chiều cao của thùng (m). ĐK: $R>0, h>0$

Thể tích của thùng là: $V=\pi R^2h=2\pi\Leftrightarrow R^2h=2\Leftrightarrow h=\frac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng là:

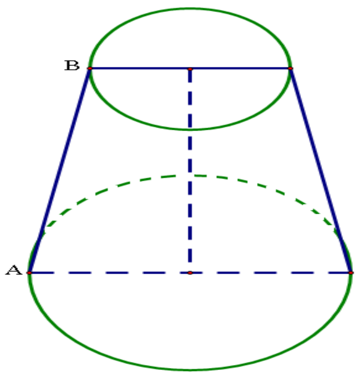
$$S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi R(h+R)=2\pi R\left(\frac{2}{R^2}+R\right)=2\pi\left(\frac{2}{R}+R^2\right)$$

Đặt $f(t)=2\pi\left(\frac{2}{t}+t^2\right)(t>0)$ với $t=R$

$$f'(t)=4\pi\left(t-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{4\pi\left(t^3-1\right)}{t^2}, f'(1)=0\Leftrightarrow t^3=1\Leftrightarrow t=1$$

Từ bảng biến thiên….. ta cần chế tạo thùng với kích thước $R=1m, h=2m$

Câu 46: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20\,cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

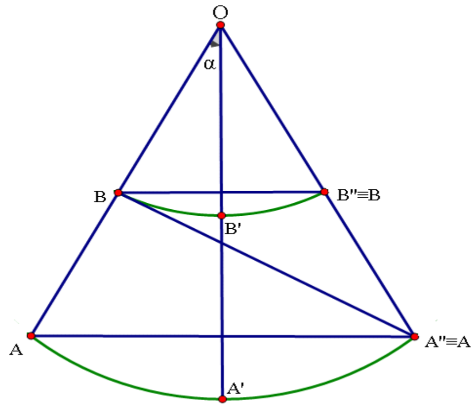


A. $59,98\,cm$ **B.** $59,93\,cm$ **C.** $58,67\,cm$ **D.** $58,80\,cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA". Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (1).

$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4\pi a}{4\pi b} = \dfrac{l(\overset{\frown}{BB''})}{l(\overset{\frown}{AA''})} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB+AB}{OB} = 1 + \dfrac{AB}{\frac{2\pi b}{\alpha}} = 1 + \dfrac{AB.\alpha}{2\pi b}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi(a-b)}{AB} = \dfrac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+h^2}}$ (a). $\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}$ (b).

$OA'' = OB + BA = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2+h^2}$ (c).

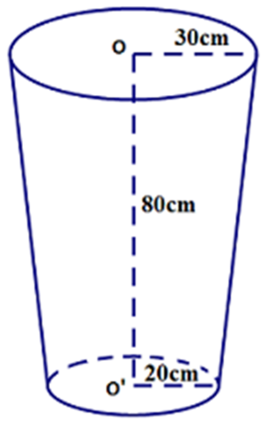
Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l.

$l \approx 58,79609cm \approx 58,80$

Ghi chú. *Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA" phải không cắt cung $\overset{\frown}{BB''}$ tại điểm nào khác B, tức là BA" nằm dưới tiếp tuyến của $\overset{\frown}{BB''}$ tại B. Điều này tương đương với $2\alpha < \cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$.*

Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).

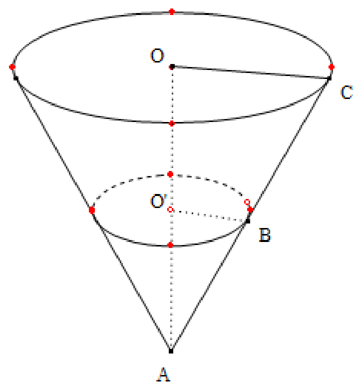
Câu 47: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước**.** Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m^3 (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



A. 35279 đồng. **B.** 38905 đồng. **C.** 42116 đồng. **D.** 31835 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta xét hình nón đỉnh A, đường cao $h > 80$ cm đáy là đường tròn tâm O, bán kính bằng 30 cm. Mặt phẳng (α) cách mặt đáy 80 cm cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn tâm O' có bán kính bằng 20 cm. Mặt phẳng (α) chia hình nón thành 2 phần. Phần I là phần chứa đỉnh A, phần II là phần không chứa đỉnh A (Như hình vẽ)

Ta có $\dfrac{O'B}{OC} = \dfrac{AO'}{AO} \Leftrightarrow \dfrac{AO'}{AO' + O'O} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow AO' = 160$ cm

Thể tích hình nón $V = \dfrac{1}{3} AO.\pi.30^2 = 72000\pi$ cm^3

Thể tích phần I là $V_1 = \dfrac{1}{3} AO'.\pi.20^2 = \dfrac{64000}{3}\pi$ cm^3

Vậy thể tích cái xô là thể tích phần II là $V_2 = V - V_1 = \dfrac{152000}{3}\pi$ cm^3 $= \dfrac{19}{375}\pi \left(\text{m}^3\right)$

Vậy số tiền phải trả là $T = \dfrac{19\pi}{375}.10.20000 \approx 31835$ đồng.

Câu 48: Một cốc nước hình trụ có chiều cao $9cm$, đường kính $6cm$. Mặt đáy phẳng và dày $1cm$, thành cốc dày $0,2cm$. Đổ vào cốc $120ml$ nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính $2cm$. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm. (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. $3,67\,cm$. **B.** $2,67\,cm$. **C.** $3,28\,cm$. **D.** $2,28\,cm$.

Hướng dẫn giải:

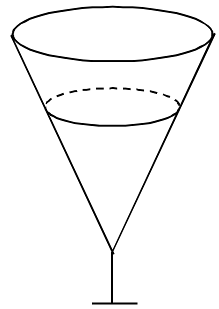
Chọn D.

Thành cốc dày $0,2cm$ nên bán kính đáy trụ bằng $2,8cm$. Đáy cốc dày $1cm$ nên chiều cao hình trụ bằng $8cm$. Thể tích khối trụ là $V = \pi.(2,8)^2.8 = 197,04\ (cm^3)$.

Đổ $120ml$ vào cốc, thể tích còn lại là $197,04 - 120 = 77,04\,(cm^3)$.

Thả 5 viên bi vào cốc, thể tích 5 viên bi bằng $V_{bi} = 5.\dfrac{4}{3}.\pi.1^3 = 20,94\ (cm^3)$.

Thể tích cốc còn lại $77,04 - 20,94 = 56,1\,(cm^3)$.



Ta có $56,1 = h'.\pi.(2,8)^2 \Rightarrow h' = 2,28\ cm$.

Cách khác: Dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{Tr}}{V_{nuoc} + V_{bi}} = \frac{h_{coc}}{h_{nuoc+bi}} \Leftrightarrow \frac{8.(2,8)^2.\pi}{120 + 5.\frac{4}{3}.\pi} = \frac{8}{h_{nuoc+bi}} \Rightarrow h_{nuoc+bi} = 5,72$$

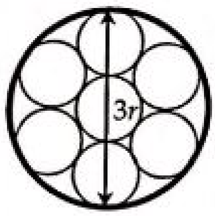
Chiều cao còn lại của trụ là $8 - 5,72 = 2,28$.

Vậy mặt nước trong cốc cách mép cốc là $2,28\,cm$.

Câu 49: Người ta xếp 7 hình trụ có cùng bán kính đáy r và cùng chiều cao h vào một cái lọ hình trụ cũng có chiều cao h, sao cho tất cả các hình tròn đáy của hình trụ nhỏ đều tiếp xúc với đáy của hình trụ lớn, hình trụ nằm chính giữa tiếp xúc với sáu hình trụ xung quanh, mỗi hình trụ xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ lớn. Khi thể tích của lọ hình trụ lớn là:

A. $16\pi r^2 h$ **B.** $18\pi r^2 h$ **C.** $9\pi r^2 h$ **D.** $36\pi r^2 h$

Hướng dẫn giải:



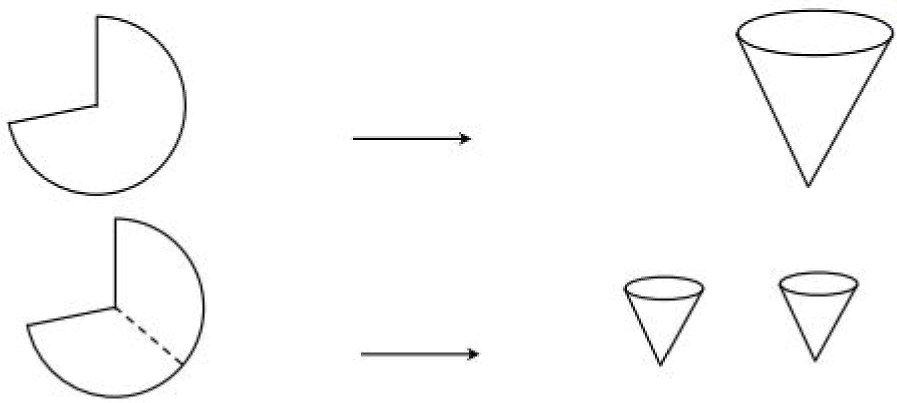
Ta có hình vẽ minh họa mặt đáy của hình đã cho như trên, khi đó ta rõ ràng nhận ra rằng $R = 3r$, đề bài thì có vẻ khá phức tạp, tuy nhiên nếu để ý kĩ thì lại rất đơn giản. Vậy khi đó $V = B.h = (3r)^2.\pi.h = 9\pi r^2 h.$

Câu 50: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

Câu 51: Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu

Câu 52: Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu

Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$?



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{21}{\sqrt{7}}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Do chu vi của hình quạt tròn là P = độ dài cung + 2R. Do đó độ dài cung tròn là $l = 8\pi$

Theo cách thứ nhất: 8π chính là chu vi đường tròn đáy của cái phễu. Tức là $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}.3\pi.4^2$

Theo cách thứ hai: Thì tổng chu vi của hai đường tròn đáy của hai cái phễu là $8\pi \Leftrightarrow$ chu vi của một đường tròn đáy là $4\pi \Rightarrow 4\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 2$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

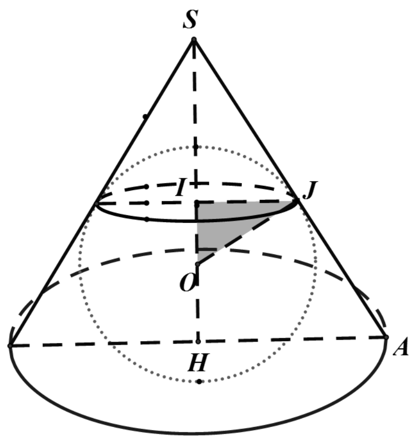
$\Rightarrow V_2 = 2.\frac{1}{3}\sqrt{21}.2^2.\pi$

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4^2}{\frac{8\sqrt{21}}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

Câu 53: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

Hướng dẫn giải:



Đặt $a = 50cm$

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y\left(x, y > 0\right)$. Ta có $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2}$

Theo giả thiết ta có

$$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 + y^2\right) = a^4 + x^4 - 2a^2x^2, \left(DK : x < a\right) \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^4}{y^2 + 2a^2}.y = \frac{1}{3}\pi a^4.\frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

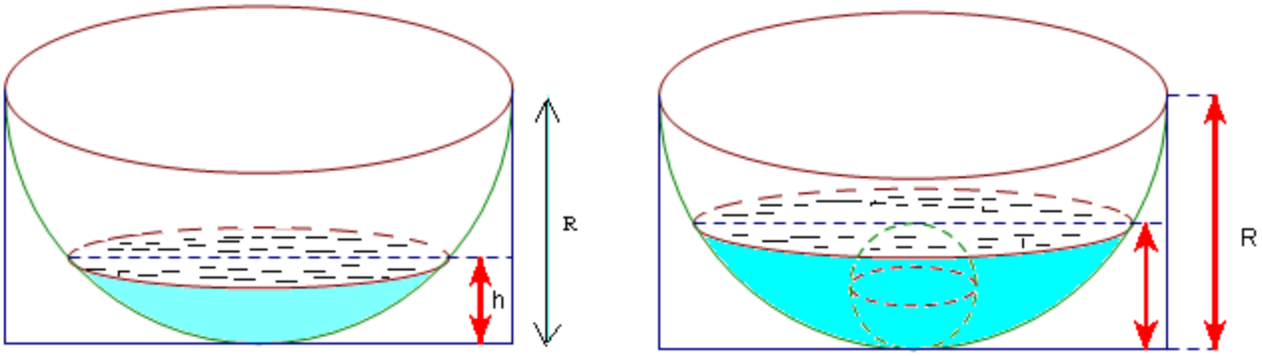
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có $\frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25cm$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

Câu 54: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính R =10cm, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao h = 4cm. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Bán kính của viên bi gần số nguyên nào sau đây. (Cho biết thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$)



A. 2 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 10

Hướng dẫn giải:

Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

- Thể tích viên bi là $V_{bi} = \dfrac{4}{3}\pi x^3$.

- Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào $V_1 = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = 16\pi\left(10 - \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{416\pi}{3}$

- Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có thể tích là: $V_2 = \pi(2x)^2\left(R - \dfrac{2x}{3}\right) = \dfrac{4\pi x^2(30-2x)}{3}$

- Ta có phương trình:

$$V_2 - V_1 = V_{bi} \Leftrightarrow \frac{4\pi x^2(30-2x)}{3} - \frac{416\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2(30-2x) - 416\pi = 4\pi x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0$$

- Giải phương trình ta có các nghiệm: $x_1 \approx 9{,}6257 > 5$ (loại)

$x_2 \approx 2{,}0940 < 5$ (thỏa mãn), và $x_3 \approx -1{,}8197$ (loại).

Vậy bán kính viên bi là: $r \approx 2{,}09$ (cm).

Câu 55: Một người có một dải duy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ **B.** $32000\pi\ cm^3$ **C.** $1000\pi\ cm^3$ **D.** $16000\pi\ cm^3$

Hướng dẫn giải:

Một bài toán thực tế khá hay trong ứng dụng của việc tìm giá trị lớn nhất của hàm số. Ta nhận thấy, dải duy băng tạo thành hai hình chữ nhật quanh cái hộp, do đó chiều dài của dải duy băng chính là tổng chu vi của hai hình chữ nhật đó. Tất nhiên chiều dài duy băng đã phải trừ đi phần duy băng dùng để thắt nơ, có nghĩa là: $22(2r+h) = 120 \Leftrightarrow h = 30 - 2r$

Khi đó thể tích của hộp quà được tính bằng công thức:

$$V = B.h = \pi.r^2(30-2r) = \pi\left(-2r^3 + 30r^2\right)$$

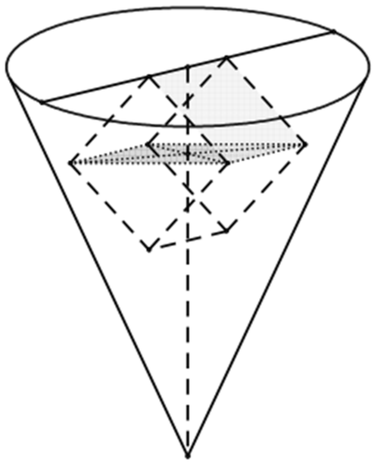
Xét hàm số $f(r) = -2r^3 + 30r^2$ trên $(0;15)$

$f'(r) = -6r^2 + 60r;\ f'(r) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0(l) \\ r = 10 \end{array}\right.$

Khi đó vẽ BBT ta nhận ra $\underset{(0;10)}{Max}\, f(r) = f(10)$. Khi đó thể tích của hộp quà $V = B.h = \pi.10^2.10 = 1000\pi$

Câu 56: Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếu phễu hình nón tròn xoay chứa đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt này); các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón; tâm của viên gạch nằm trên trục của hình nón. Tính thể tích nước còn lại ở trong phễu (làm tròn 2 chữ số thập phân).

A. V =22,27 **B.** V =22,30 **C.** V =23.10 **D.** 20,64



Hướng dẫn giải:

Gọi R, h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình nón (phễu).

Thiết diện của hình nón song song với đáy của hình nón, qua tâm của viên gạch là hình tròn có bán kính $R_1 = \sqrt{3}$ thỏa mãn $\frac{R_1}{R} = \frac{h-\sqrt{2}}{h} \Rightarrow \frac{h-\sqrt{2}}{h}.R = \sqrt{3}\,(1)$

Thiết diện của hình nón song song với đáy hình nón, chứa cạnh đối diện với cạnh nằm trên đáy của hình nón là hình tròn có bán kính $R_2 = 1$ thỏa mãn $\frac{R_2}{R} = \frac{h-2\sqrt{2}}{h} \Rightarrow \frac{h-2\sqrt{2}}{h}.R = 1\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{h-\sqrt{2}}{h-2\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ và $R = 2\sqrt{3} - 1$

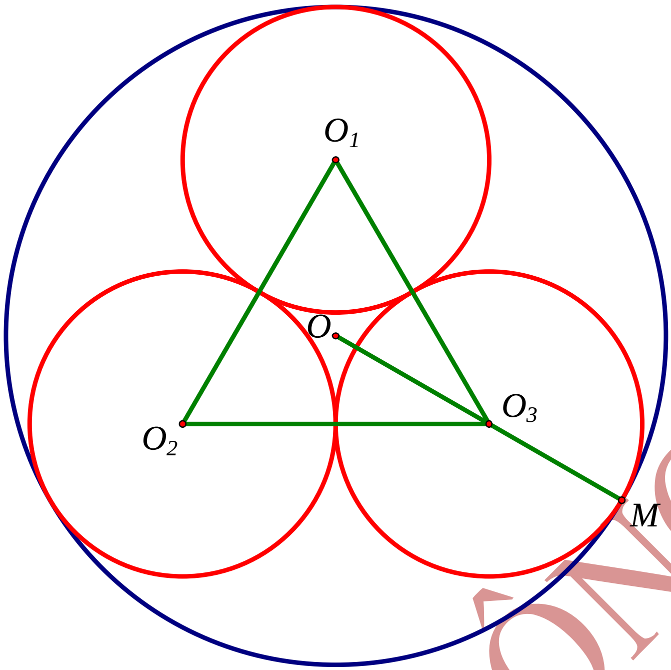
Thể tích lượng nước còn lại trong phễu là $V = V_{\text{nón}} - V_{\text{gach}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h - 2^3 \approx 22,2676$

Câu 57: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

A. $1+2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



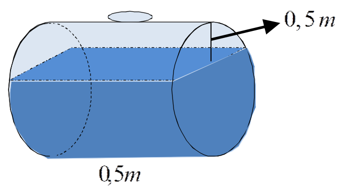
Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba viên bi và $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}$ là bán kính của ba viên bi đó. Theo giả thiết thì ba đường tròn lớn của ba viên bi đôi một tiếp xúc với nhau , khi đó ba điểm O_1, O_2, O_3 tạo thành một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Gọi O là trọng tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ thì

$OO_1 = OO_2 = OO_3 = \frac{2}{3}.2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Cũng theo giả thiết thì ba viên bi tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ tại 3 điểm nằm trên một đường tròn bằng đường tròn đáy của lọ hình trụ (tham khảo hình vẽ trên).

Vậy bán kính đáy của lọ hình trụ là $OM = OO_3 + O_3M = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 58: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)



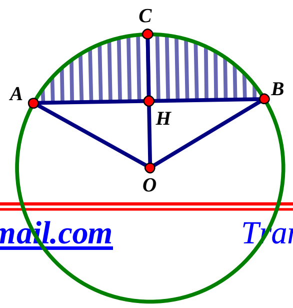
A. $12,637m^3$. **B.** $114,923m^3$. **C.** $11,781m^3$. **D.** $8,307m^3$.

Hướng dẫn giải:

Nhận xét $OH = CH = 0,5 = \frac{R}{22} = \frac{OB}{2}$ suy ra ΔOHB là tam giác nửa đều

$\Rightarrow \widehat{HOB} = 60° \Rightarrow \widehat{AOB} = 120°$

Suy ra diện tích hình quạt OAB là: $S = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi$



Mặt khác: $S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta HOB} = S_{\Delta BOC} = \frac{OB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (ΔBOC đều)

Vậy diện tích hình viên phân cung AB là $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

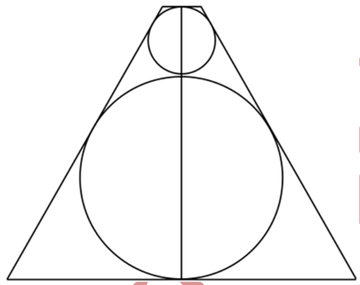
Suy ra thể tích dầu được rút ra: $V_1 = 5.\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Thể tích dầu ban đầu: $V = 5.\pi.1^2 = 5\pi$

Vậy thể tích còn lại: $V_2 = V - V_1 \simeq 12,637m^3$.

Chọn A.

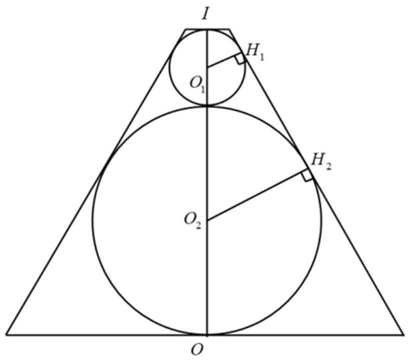
Câu 59: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục là hình thang cân. Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3cm$ và $r = 1cm$ tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của (N) đồng thời hai khối cầu tiếp xúc với hai đáy của (N). Tính thể tích của vật lưu niệm đó.



A. $\frac{485}{6}\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $81\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $72\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $\frac{728}{9}\pi\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\Delta IO_1H_1 \sim \Delta IO_2H_2 \Rightarrow \frac{IO_1}{IO_2} = \frac{O_1H_1}{O_2H_2} = \frac{1}{3}$

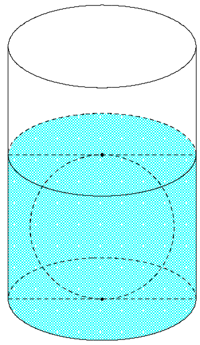
Mà $IO_2 - IO_1 = 4$ nên $IO_2 = 6cm$; $IO_1 = 2cm$; $IK = 1cm$; $IO = 9cm$

(N) là khối nón cụt có bán kính đáy lớn và đáy bé là r_1 và r_2

Trong ΔIO_1H_1 có $\sin\widehat{O_1IH_1} = \frac{1}{2}$ nên $r_1 = 3\sqrt{3}; r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy thể tích của (N) là $V = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2\right)h = \frac{728}{9}\pi\left(cm^3\right)$

Câu 60: **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\text{cm}$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Bán kính của viên billiards đó bằng?



A. $4,2cm$. **B.** $3,6cm$. **C.** $2,7cm$. **D.** $2,6cm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi V_1 là thể tích của viên billiards snooker và r là bán kính của nó (ĐK: $0 < r < 4,5$).

Gọi V_2, V lần lượt là thể tích của khối trụ trước và sau khi thả viên billiards snooker vào.

Khi đó: $V = V_1 + V_2$ (1).

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi.r^3$; $V_2 = \pi.5,4^2.4,5 = 131,22.\pi$; $V = \pi.5,4^2.2r = 58,32\pi.r$. Thay vào (1) ta có phương trình:

$\frac{4}{3}\pi.r^3 + 131,22.\pi = 58,32\pi.r \Leftrightarrow \frac{4}{3}.r^3 - 58,32.r + 131,22 = 0$ (2).

Giải phương trình (2) ta được $r_1 \approx 4,83$ (loại); $r_2 \approx -7,53$ (loại); $r_3 = 2,7$ (Thỏa mãn).

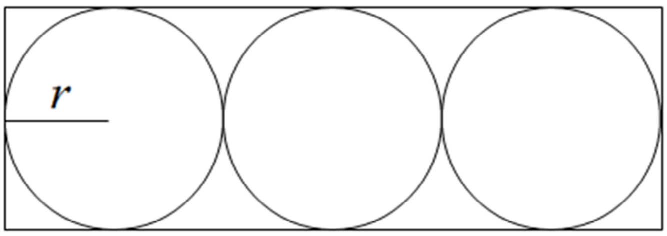
Vậy $r = 2,7cm$.

Câu 61: **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019)** Một hộp dựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống trong hộp chiếm tỉ lệ $a\%$ so với thể tích của hộp bóng tennis. Số a gần nhất với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D



Gọi r là bán kính của quả bóng tennis.

Khi đó bán kính đáy hộp bằng r và chiều cao hộp bằng $6r$.

Khi đó thể tích hộp bóng hình trụ: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 6r = 6\pi r^3$.

Thể tích một quả bóng tennis: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

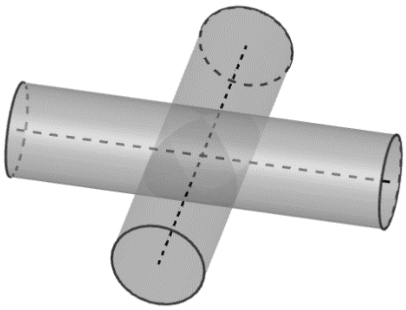
Suy ra thể tích ba quả bóng tennis là $3V_1 = 4\pi r^3$.

Thể tích phần không gian còn trống trong hộp là $V_2 = V - 3V_1 = 6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$.

Ta có: $\dfrac{V_2}{V} = a\% \Leftrightarrow \dfrac{2\pi r^3}{6\pi r^3} = a\% \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = a\%$.

Suy ra $a \approx 33$.

Câu 62: Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.

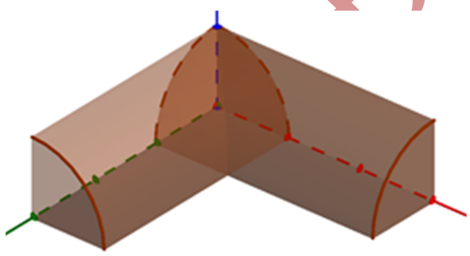


A. 256π. **B.** 512. **C.** $\dfrac{256}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{1024}{3}$.

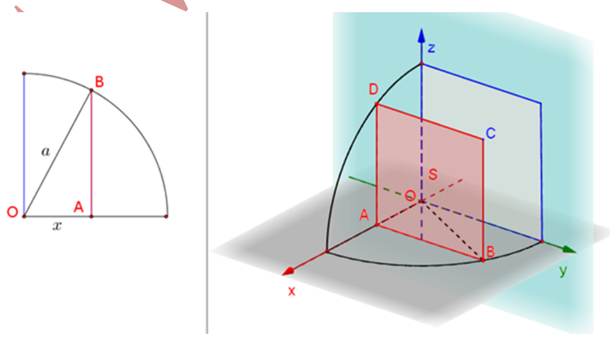
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. Ta xét $\dfrac{1}{8}$ phần giao của hai trụ như hình.



Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 4, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = 4^2 - x^2$.

Thể tích khối (H) là $\int_0^4 S(x)\,dx = \int_0^4 \left(16 - x^2\right)dx = \dfrac{128}{3}$. Vậy thể tích phần giao là $\dfrac{1024}{3}$.

Cách 2. Dùng công thức tổng quát giao hai trụ $V = \dfrac{16}{3}R^3 = \dfrac{1024}{3}$.