Đồ thị con dày đặc của đồ thị phân cực và số chu trình 4 đỉnh cực đại

Michael Tait* Craig Timmons†

Tóm tắt nội dung

Trong nội dung bài báo, chúng tôi sẽ chứng minh rằng với mọi $m \in \{1, 2, \ldots, q+1\}$, nếu G là một đồ thị phân cực của một mặt phẳng ánh xạ bậc q chứa một hình oval, thì G chứa một đồ thị con với $m + \binom{m}{2}$ đỉnh và $m^2 + \frac{m^4}{8q} - O(\frac{m^4}{q^{3/2}} + m)$ cạnh. As an application, ta sẽ đưa ra một cận dưới tốt nhất cho số Turán $\mathrm{ex}(n, C_4)$ với một giá trị chính xác của n. Cụ thể hơn, chúng tôi bác bỏ phỏng đoán của Abreu, Balbuena, và Labbate về $\mathrm{ex}(q^2 - q - 2, C_4)$ với q là lũy thừa của 2.

Michael Tait và Craig Timmons đưa ra các khái niệm về *F-free*, số Turán, đồ thị phân cực, hình học hữu hạn, điểm phân cực và hình oval:

Cho F là một đồ thị:

- Đồ thị G được gọi là F-*free* nếu F không phải là đồ thị con của G.
- $\mathrm{ex}(n, F)$ được định nghĩa là số Turán của F, là số cạnh tối đa của 1 đỉnh trong một đồ thị F-*free* n đỉnh
- $\mathrm{Ex}(n, F)$ là họ đồ thị n đỉnh là F-*free* và có các cạnh ex(n, F). Các đồ thị trong họ $\mathrm{Ex}(n, F)$ được gọi là *đồ thị phân cực.*
- Cho $\mathcal{P}$ và $\mathcal{L}$ là các tập rời rạc, hữu hạn, và cho $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Bộ ba $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ là một hình học hữu hạn. Các phần tử của $\mathcal{P}$ được gọi là điểm, các phần tử của $\mathcal{L}$ được gọi là đoạn thẳng. Một cực của hình học là một phép chiếu từ $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ đến $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ để gửi điểm tới đường, gửi đường tới điểm.
- Cho một hình học hữu hạn $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ và một cực π, đồ thị phân cực G_π là đồ thị có tập đỉnh $V(G_\pi) = \mathcal{P}$ và tập cạnh

$$E(G_\pi) = \{\{p, q\} : p, q \in \mathcal{P}, (p, \pi(q)) \in \mathcal{I}\}$$

- Điểm phân cực là điểm mà $(p, \pi(p)) \in \mathcal{I}$.
- Hình oval trong mặt ánh xạ bậc q là tập hợp của $q + 1$ điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

*Department of Mathematics, University of California San Diego, mtait@math.ucsd.edu

†Department of Mathematics and Statistics, California State University Sacramento, craig.timmons@csus.edu

Hiện nay việc xác định số cạnh tối đa của các đồ thị F-*free* khác nhau là một trong những vấn đề được nghiên cứu nhiều nhất trong lý thuyết đồ thị phân cực. Đặc biệt là $F = C_4$ - chu trình bốn đỉnh.

Michael Tait và Craig Timmons đã phát biểu định lý

Định lý 1.1:

Định lý 1. *Gọi Π là một mặt phẳng ánh xạ bậc q, chứa hình oval và có một phân cực π. Nếu $m \in \{1, 2, \ldots, q+1\}$, thì đồ thị phân cực G_π chứa một đồ thị con có nhiều nhất $m + \binom{m}{2}$ đỉnh và có ít nhất*

$$2\binom{m}{2} + \frac{m^4}{8q} - O\left(\frac{m^4}{q^{3/2}} + m\right)$$

cạnh.

Bằng cách xem xét các đồ thị con của ER_q, Abreu, Balbuena và Labbate đã chứng minh rằng

$$\mathrm{ex}(q^2 - q - 2, C_4) \geq \frac{1}{2}q^3 - q^2$$

trong đó q là lũy thừa của 2.

Tuy nhiên, bằng cách sử dụng định lý 1, Michael Tait và Craig Timmons đã bác bỏ phỏng đoán trên và đưa ra một kết quả mới

Hệ quả 1. *Nếu q là lũy thừa của số nguyên tố, thì*

$$\mathrm{ex}(q^2 - q - 2, C_4) \geq \frac{1}{2}q^3 - q^2 + \frac{3}{2}q - O\left(q^{1/2}\right)$$