

Đường cong Elliptic (trước và sau quantum)

Nguyễn Đức Huy ¹, Lê Thị Thùy Dung, Lưu Hiểu Huy

Đại học Khoa học Tự Nhiên
Khoa Toán Cơ Tin học

Ngày 20 tháng 4 năm 2022



¹Khoa Toán Cơ Tin học

Table of Contents

- 1 Introduction
- 2 Kiến thức cơ bản
- 3 Mật mã đường cong Elliptic
 - Cơ bản
 - Logarit rời rạc và mã hóa
- 4 Classical and Quantum attacks on ECC
- 5 Thuật toán Shor
- 6 Ánh xạ đường cong kỳ dị
- 7 Kết luận

Definition

Ta định nghĩa bài toán logarit rời rạc trên một nhóm với phép nhân các số nguyên theo modulo p , \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p , như sau:

Cho $g, a \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$, với a là phần tử của nhóm cyclic có phần tử sinh g , tìm số nguyên k thỏa mãn:

$$g^k \equiv a \pmod{p} \quad (1)$$

Definition

Ta định nghĩa bài toán phân tích rời rạc như sau: Cho một số nguyên N , có ước là hai số nguyên tố lớn p và q . Tìm p và q .

Definition

Một *nhóm* là một cấu trúc đại số bao gồm:

- Một tập phần tử G
- Một toán tử đóng (\cdot) trên tập G thỏa mãn tính chất kết hợp. Nghĩa là $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, với mọi $a, b, c \in G$.
- Một phần tử đơn vị 1 , để $a \cdot 1 = a$ với mọi $a \in G$.
- Tồn tại phần tử nghịch đảo $a^{-1} \in G$ nếu $a \in G$ để $a^{-1} \cdot a = 1$.

Một *nhóm* thỏa mãn thêm điều kiện toán tử hai ngôi có thêm tính giao hoán (hay $a \cdot b = b \cdot a$) là nhóm giao hoán hoặc *nhóm Abel*

Example

Với tập số nguyên \mathbb{Z} được trang bị toán tử $+$ và xem số 0 như phần tử đơn vị, xem các cặp số nguyên có dấu ngược nhau là các cặp nghịch đảo, ta có một *nhóm*.

Ngược lại, tập số tự nhiên \mathbb{N} không phải một nhóm vì không định nghĩa được phần tử nghịch đảo.

Definition

Cho nhóm G được trang bị toán tử (\cdot) với phần tử đơn vị 1. Với mỗi $a \in G$, *bậc* của a , là số nguyên n nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = 1 \quad (2)$$

Tập $\{a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n\}$ là nhóm cyclic con của G có bậc n , a được gọi là *phần tử sinh* của nhóm đó.

Definition

Một *trường* là một cấu trúc đại số bao gồm:

- Tập G là tập đóng dưới phép cộng và phép nhân.
- Phép cộng và phép nhân phải có tính kết hợp trên tập G .
- Phép cộng và phép nhân phải có tính giao hoán trên tập G .
- Tồn tại phần tử nghịch đảo cho cả phép cộng và phép nhân.
- Phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng:
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$
- Phần tử đơn vị của phép cộng và phép nhân phải khác nhau.

Kiến thức cơ bản

Definition

Tính đặc trưng của trường F là số n nhỏ nhất thỏa mãn tổng của n phần tử 1 bằng 0. Kí hiệu $\text{char}(F) = n$.

Example

Nếu tính đặc trưng của F , $\text{char}(F)$, là 2 và phần tử đơn vị là 1, thì $1 + 1 = 0$.

Nếu $\text{char}(F) = 3$ thì $1 + 1 + 1 = 0$.

Kiến thức cơ bản

Definition

Trường Galois là trường bao gồm một tập hữu hạn phần tử.

Example

Tập số nguyên theo modulo số nguyên tố p , \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p là một trường Galois. Với p phần tử, 0 đến $p - 1$, kí hiệu $GF(p)$.

Phần còn lại, ta sẽ đề cập nhiều hơn đến trường của số nguyên tố $GF(p)$, tổng quát hơn là $GF(p^n)$.

Definition

Một đường cong elliptic $E(F)$ là một tập điểm trên trường F , thỏa mãn phương trình có dạng:

$$y^2 + a_1xy + a_2y = x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \quad (3)$$

Trong đó $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in F$.

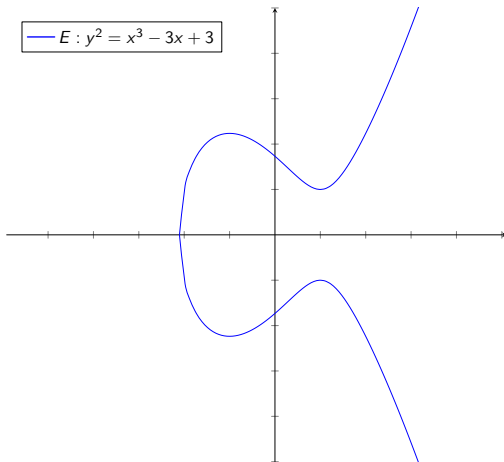
Nếu ta giả sử tính đặc trưng của F khác 2, hay $1 + 1 = 2 \neq 0$, phương trình có thể viết lại dưới dạng:

$$y^2 = x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \quad (4)$$

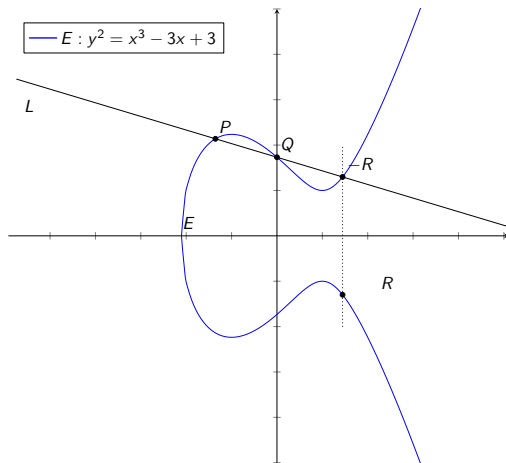
Phương trình có thể rút gọn hơn nữa nếu tính đặc trưng của trường khác 3, ta được phương trình đơn giản hơn, được gọi là phương trình Weierstrass.

$$y^2 = x^3 + ax + b \mid_{a=a_4, b=a_5} \quad (5)$$

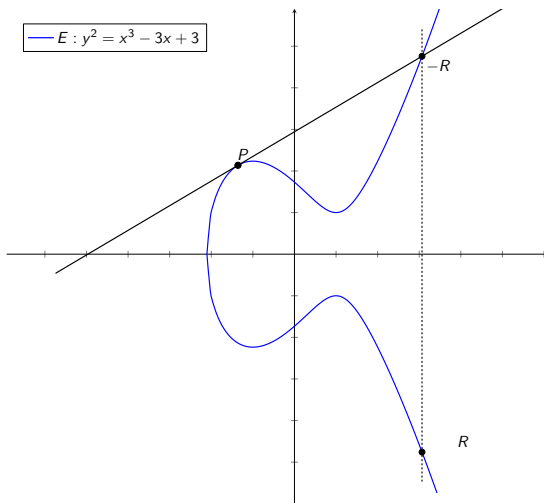
Hình: Đường cong Elliptic E trên \mathbb{R}^2



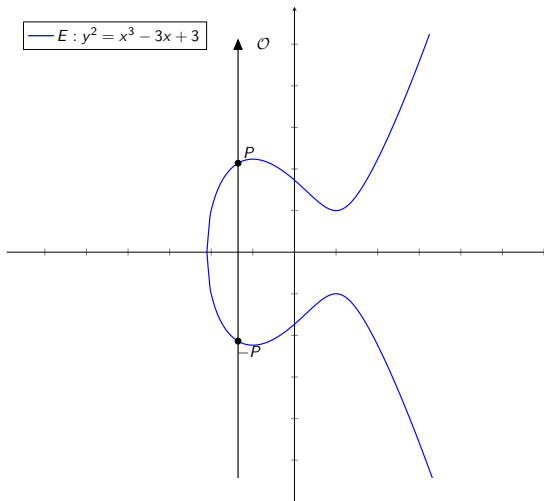
Hình: Cộng hai điểm P và Q trên E



Hình: Cộng hai điểm P và P trên E



Hình: Cộng hai điểm P và $-P$ trên E



Tính $P + Q$ nếu $P(x_1, y_1)$ và $Q(x_2, y_2)$ phân biệt

Cho

$$E : Y^2 = X^3 + AX + B$$

là một đường cong elliptic và P và Q là hai điểm trên E .

- Nếu $P = \mathcal{O}$ thì $P + Q = Q$.
- Ngược lại, nếu $Q = \mathcal{O}$ thì $P + Q = P$.
- Nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = -y_2$ thì $P + Q = \mathcal{O}$.
- Nếu không, định nghĩa λ bởi

$$\lambda = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \text{nếu } P \neq Q \\ \frac{3x_1^2 + A}{2y_1} & \text{nếu } P = Q. \end{cases}$$

Và ta có $P + Q = (x_3, y_3)$, trong đó:

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \quad \text{và} \quad y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1.$$

Phép nhân

Sử dụng phép cộng này, ta định nghĩa phép *nhân vô hướng* trên nhóm G

Definition

Phép *nhân vô hướng* trên nhóm G là phép cộng một điểm nhiều lần.

$$nP = \underbrace{P + P + \dots + P}_n \quad (6)$$

Thuật toán nhân đôi và cộng

Algorithm 1: Nhân đôi và cộng

input : n, P

output: $R = nP$

begin

$Q \leftarrow P$

$E \leftarrow \mathcal{O}$

while $n > 0$ **do**

if $n \equiv 1 \pmod{2}$ **then**

$R \leftarrow R + Q$

else

$R \leftarrow R + Q$

$Q \leftarrow 2 \cdot Q$

$n \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

end

end

return R

end

Định lý Lagrange

Corollary

Vì $nP + mP = \underbrace{P + P + P + \dots + P}_n + \underbrace{P + P + P + \dots + P}_m = (n + m)P$
nên khi cộng 2 bội của P ta thu được bội khác của P . Tập hợp các bội của P là một nhóm cyclic với bậc k , trong đó P là phần tử sinh.

Theorem (Định lý Lagrange)

Nếu H là nhóm con của nhóm hữu hạn G , thì bậc (số phần tử) của H là ước của bậc của G .

Corollary

Nếu bậc của nhóm hữu hạn G là số nguyên tố p thì bậc của H là 1 hoặc p .
Nếu bậc của H là p , mọi điểm thuộc G đều là phần tử sinh của H

Bài toán logarit rời rạc đối với đường cong elliptic

Definition

Cho đường cong elliptic E trên trường hữu hạn F , và nhóm G bao gồm tập các điểm trên E được định nghĩa với phép $+$. Cho điểm $P, Q \in G$ sao cho Q là bội của P , hay $Q = kP$ với k là số nguyên. Bài toán logarit rời rạc được định nghĩa như sau:

Cho trước 2 điểm $P, Q \in G$.

Tìm số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn $kP = Q$.

k gọi là logarit rời rạc của Q theo cơ sở P .

Bài toán logarit rời rạc đối với đường cong elliptic

Xét trường hữu hạn \mathbb{F}_p bao gồm các số nguyên theo modulo p , trong đó p là số nguyên tố. Kí hiệu $E(\mathbb{F}_p^2)$ là tập điểm của \mathbb{F}_p^2 nằm trên đường cong E . Điểm $P = (x, y) \in \mathbb{F}_p^2$ khi và chỉ khi, với mọi $a, b \in \mathbb{F}_p$, biểu thức được thỏa mãn:

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p} \quad (7)$$

$E(\mathbb{F}_p^2)$ là một nhóm abel với phép toán $+$ được định nghĩa ở trên.

Bài toán logarit rời rạc đối với đường cong elliptic

Xét trường hữu hạn \mathbb{F}_p bao gồm các số nguyên theo modulo p , trong đó p là số nguyên tố. Kí hiệu $E(\mathbb{F}_p^2)$ là tập điểm của \mathbb{F}_p^2 nằm trên đường cong E . Điểm $P = (x, y) \in \mathbb{F}_p^2$ khi và chỉ khi, với mọi $a, b \in \mathbb{F}_p$, biểu thức được thỏa mãn:

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p} \quad (8)$$

$E(\mathbb{F}_p^2)$ là một nhóm abel với phép toán $+$ được định nghĩa ở trên.

$$|G| = |E(\mathbb{F}_p^2)| = h \cdot k,$$

trong đó k là số nguyên tố và là bậc của nhóm sinh bởi P . Để sử dụng E trong mã hóa, thường $h \leq 4$.

Thuật toán tìm tham số đường cong trên trường \mathbb{F}_p

Algorithm 2: Tìm tham số đường cong

input : p

output : $out = (p, a, b, P, k, h)$

begin

1. Chọn ngẫu nhiên đường cong E , hay ngẫu nhiên a, b
2. Dùng thuật toán Schoof [Schoof, 1995] để tìm bậc của G
3. Tìm ước nguyên tố k lớn của $|G|$. Đảm bảo h đủ nhỏ và k đủ lớn với $h \cdot k = |G|$
4. **if** k không đủ lớn **then**
| Trở lại bước 1, tìm đường cong mới.
- end**
5. Chọn ngẫu nhiên $P \in G$ và tính kP bằng thuật toán nhân đôi và cộng.
6. **if** $kP \neq 1$ **then**
| k không phải bậc của nhóm con sinh bởi P , trở lại bước 6 tìm điểm P khác.
- end**
7. **return** (p, a, b, P, k, h)

end

Một số đường cong đặc biệt

- Đường cong Koblitz trên trường nhị phân:

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + 1 \text{ với } a \in \{0, 1\} \text{ trên trường } GF(2^m)$$

với m là số nguyên tố

- Đường cong Weierstrass trên trường số nguyên tố:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

với $a, b \in \mathbb{F}_p$ Được cho rằng đem lại hiệu quả bảo mật cao hơn đường Koblitz hay đường nhị phân dù chi phí tính toán tốn kém hơn.

NIST đã cung cấp một vài đường cong để sử dụng trong ECC. 3 trường \mathbb{F}_p với các số p cụ thể: $2^{607} - 1$, $2^{521} - 1$, $180 * (2^{127} - 1)^2 + 1$, với độ bảo mật tương ứng giảm dần.

Trao đổi khóa Diffie-Hellman

Tạo tham số công khai	
Cả hai chấp nhận cùng sử dụng (p, a, b, P, k, h)	
Thực hiện tính toán bí mật	
Alice	Bob
Chọn bí mật một số nguyên n_A Tính $Q_A = n_A P$	Chọn bí mật một số nguyên n_B Tính $Q_B = n_B P$
Trao đổi giá trị công khai	
Alice gửi Q_A cho Bob $Q_B \leftarrow$	$\rightarrow Q_A$ Bob gửi Q_B cho Alice
Tiếp tục thực hiện tính toán bí mật	
Alice	Bob
Tính $n_A Q_B \pmod{p}$	Tính $n_B Q_A \pmod{p}$
Khóa bí mật của cả hai là $n_A n_B P$	

Chữ ký số

Alice muốn gửi tin nhắn m cho Bob
Cả hai chấp nhận cùng sử dụng (p, a, b, P, k, h)
n_A, Q_A tương ứng là khóa bí mật và công khai Alice
Alice chọn một số n làm khóa tạm thời
Alice tính $Q = nP$, đặt r là tọa độ x của điểm Q Tính $s = n^{-1}(m + rn_A)$ Gửi cặp (r, s) cho Bob →
Bob tính $u_1 = s^{-1}m \pmod{k}$ $u_2 = s^{-1}r \pmod{k}$ $Q = u_1P + u_2Q_A$ kiểm tra nếu $r = x_Q$ thì đúng là Alice.

Bài toán của Sony [Fildes, 2011]

Proposition

Nếu n trong thuật toán chữ ký số không đổi, ta có thể khôi phục khóa bí mật từ chữ ký của Alice.

Chứng minh.

Ta có 2 bộ chữ ký của Alice là (r_1, s_1) và (r_2, s_2) . Vì $r = x_Q$ mà $Q = nP$, nên với n không đổi, ta có $r_1 = r_2$. Lại có;

$$s_1 - s_2 = n^{-1}(m_1 + rn_A) - n^{-1}(m_2 + rn_A) = n^{-1}(m_1 - m_2) \pmod{k}$$

nên

$$n = (m_1 - m_2)(s_1 - s_2)^{-1} \pmod{k}$$

Sau khi tính được n , ta tính được

$$n_A = r^{-1}(s_1 n - m_1) \pmod{k}$$

Thuật toán Pollard Rho

Algorithm 3: Tìm chu trình của Floyd

input : P, Q

output: $out = (a, b, c, d)$

begin

 Sinh ra dãy S , mỗi phần tử là một cặp (a, b)

 Khởi tạo con trỏ $it_1 = 0$ và $it_2 = 0$

while $aP + bQ \neq cP + dQ$ **do**

$it_1 \leftarrow it_1 + 1$

$it_2 \leftarrow it_2 + 1$

$(a, b) \leftarrow S[it_1]$

$(c, d) \leftarrow S[it_2]$

end

return (a, b, c, d)

end

Thuật toán Pollard Rho

Algorithm 4: Pollard Rho

input : P, Q

output: n thỏa mãn $nP = Q$

begin

$(a, b, c, d) \leftarrow \text{Floyd}(P, Q)$

$n \leftarrow (a - c)(d - b)^{-1}$

return n

end

Độ phức tạp thời gian: $O(\sqrt{k})$ hoặc $2^{O(b)}$ với b là số bit của k .

Thuật toán Shor đối với bài toán logarit rời rạc

Giả sử ta có $g^r \equiv x \pmod{p}$, cần tìm r .

Ta định nghĩa hàm $f : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ như sau:

$$f(a, b) = g^a x^{-b} \pmod{p}$$

Đầu ra của QFT là cặp (c, d) thỏa mãn

$$d + rc \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Khi tìm được c thỏa mãn $\gcd(c, p-1) = 1$ ta thu được

$$r = -dc^{-1} \pmod{p-1}$$

Áp dụng tương tự đối với đường cong elliptic với phép cộng và nhân vô hướng. Tham khảo [Proos and Zalka, 2003], [Shor, 1999]

Definition

Trên trường cụ thể, đường cong kỳ dị không có điểm nào có bậc p , cụ thể đường cong có $p \pm 1$ điểm. Những đường cong này có vành tự đồng cấu lớn.

Definition

Một *isogeny* là một ánh xạ biến đường cong E thành E' sao cho $|E| = |E'|$.

Definition

j -invariant của đường cong E , ký hiệu $j(E)$. Đối với $E : y^2 = x^3 + ax + b$, giá trị của $j(E)$ là

$$j(E) = 1728 \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2}$$

Trao đổi khóa

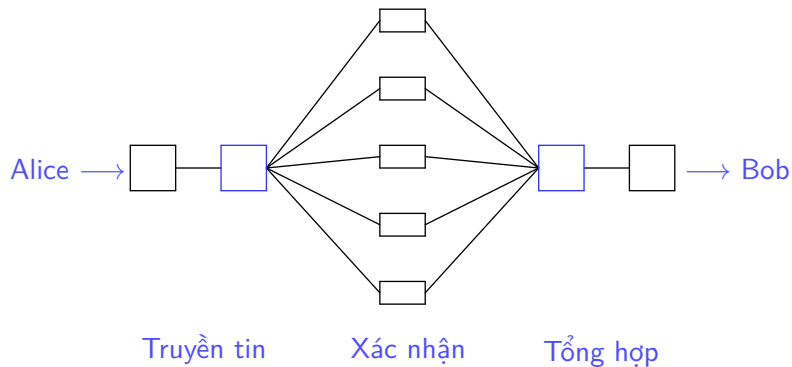
Một vài thông tin cần được công khai trước:

- Số nguyên tố $p = a^e b^d \pm 1$, a, b là các số nguyên tố, $e, d \in \mathbb{F}_p$ là các số nguyên tùy ý.
- Đường cong kỳ dị E trên \mathbb{F}_p^2
- Điểm $P_A, Q_A, P_B, Q_B \in E$ thỏa mãn bậc của P_A, Q_A là a^e và bậc của P_B, Q_B là b^d .

Trao đổi khóa

Tạo tham số công khai	
Alice chọn 2 số $m_a, n_a < a^e$	Bob chọn 2 số $m_b, n_b < b^d$
Alice tính $R_A = m_a P_A + n_a Q + A$	Bob tính $R_B = m_b P_B + n_b Q_B$
$\phi_A = E / \langle R_A \rangle$	$\phi_B = E / \langle R_B \rangle$
Trao đổi giá trị công khai	
Alice gửi $\phi_A(E), \phi_A(P_A), \phi_A(Q_A)$ $\phi_B(E), \phi_B(P_B), \phi_B(Q_B) \leftarrow$	$\rightarrow \phi_A(E), \phi_A(P_A), \phi_A(Q_A)$ Bob gửi $\phi_B(E), \phi_B(P_B), \phi_B(Q_B)$
Tiếp tục thực hiện tính toán bí mật	
Alice	Bob
Tính $S_A = m_a \phi_B(P_B) + n_a \phi_B(Q_B)$	Tính $S_B = m_b \phi_A(P_A) + n_b \phi_A(Q_A)$
$\psi_A = (\phi_A(E)) / \langle S_A \rangle$	$\psi_B = (\phi_B(E)) / \langle S_B \rangle$
Khóa bí mật của cả hai là $j(\psi_A(E)) = j(\psi_B(E))$	

Mô hình đề xuất



Kết luận

Mật mã đường cong elliptic được áp dụng rộng rãi vào đầu những năm 2000, đã mang lại những cải tiến đáng kể bằng cách giảm đáng kể kích thước khóa cần thiết cho cùng một mức độ bảo mật. Tuy nhiên, ECC, giống như các hệ mã hóa khác dựa trên nhóm abel, đang bị đe dọa bởi sự phát triển của tính toán lượng tử và rất có thể sẽ lỗi thời. Tuy nhiên, điều này sẽ không làm nản lòng những người đam mê đường cong elliptic. Đầu tiên, đường cong elliptic sẽ tồn tại trong một thời gian dài trước khi máy tính lượng tử có thể phá vỡ giao thức. Thứ hai, đường cong elliptic là cấu trúc toán học hấp dẫn chứa nhiều tính chất thú vị. Như chúng ta thảo luận trong phần thứ hai, các isogeny có thể được chứng minh là có khả năng chống lượng tử, có thể kế thừa ECC.

References I



Fildes, J. (2011).
iphone hacker publishes secret sony playstation 3 key.
BBC News, 6.



Proos, J. and Zalka, C. (2003).
Shor's discrete logarithm quantum algorithm for elliptic curves.
arXiv preprint quant-ph/0301141.



Schoof, R. (1995).
Counting points on elliptic curves over finite fields.
Journal de théorie des nombres de Bordeaux, 7(1):219–254.



Shor, P. W. (1999).
Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete
logarithms on a quantum computer.
SIAM review, 41(2):303–332.