

Übungsaufgaben 02.10.2024

Aufgabe 1:

$$1. T(N) = 2T\left(\frac{N}{2}\right) + N^3$$

$$2. T(1) = c$$

$$\leftarrow \text{allg. } T(N) = aT\left(\frac{N}{b}\right) + f(N)$$

$$a = 2$$

$$\log_b(a) \rightarrow \log_2(2) = 1$$

$$b = 2$$

$$f(N) = N^3$$

$$f(N) = N^3 \rightarrow N^{\log_b(a)} = N^1$$

Fall 1:

$$f(N) = O(N^{\log_b(a) - \epsilon}) \text{ für } \epsilon > 0, \text{ dann gilt: } T(N) = O(N^{\log_b(a)})$$
$$f(N) = N^3 \Leftrightarrow N^{1-\epsilon}, \text{ da } f(N) = N^3 > N^1 \text{ Fall nicht nutzbar}$$

Fall 2:

$$f(N) = \Theta(N^{\log_b(a)}), \text{ dann gilt } T(N) = \Theta(N^{\log_b(a)} \log N)$$

$$f(N) \neq \Theta(N^1), \text{ daher Fall nicht nutzbar}$$

Fall 3:

$$f(N) = N^3 > N^{\log_b(a)} = N^1$$

$$af\left(\frac{N}{b}\right) = 2 \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^3 = 2 \cdot \frac{N^3}{8} = \frac{N^3}{4}$$

$$\frac{N^3}{4} \leq \alpha \cdot N^3 \quad (: N^3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha f(N) = \alpha \cdot N^3$$

$$\frac{1}{4} \leq \alpha < 1$$

$$\text{für } \alpha = \frac{1}{4} \text{ ist } af\left(\frac{N}{b}\right) \leq \alpha f(N) \text{ erfüllt}$$

$$T(N) = O(f(N)) = O(N^3)$$

Ergebnis:

$$\underline{\underline{T(N) = O(N^3)}}$$

Aufgabe 2:

$$f(N) = N \cdot f(N-1)$$
$$f(0) = 1$$

generelle Form Mastertheorem:

$$T(N) = \alpha T\left(\frac{N}{b}\right) + f(N)$$

Mastertheorem kann nicht angewendet werden! Keine Reduktion durch festen Bruch $\left(\frac{N}{b}\right)$, stattdessen Reduktion Schrittweise um 1.

Lösungsansatz:

$$f(N) = N \cdot f(N-1)$$

$$f(N-1) = f(N-1) \cdot f(N-2)$$

$$f(N-2) = f(N-2) \cdot f(N-3)$$

$$f(N-3) = f(N-3) \cdot f(N-4) \dots \text{bis } f(0), \text{ daher gilt:}$$

$$f(N) = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot f(0),$$

da gilt $f(0) = 1$, ist die Lösung

$$\underline{f(N) = N!}$$

$$T(N) = T(N-1) + O(1)$$

Zeit für $f(N-1)$ Zeit für $N \cdot f(N-1)$

$$T(N) = T(N-1) + O(1)$$

$$T(N-1) = T(N-2) + O(1)$$

$$T(N-2) = T(N-3) + O(1) \dots$$

$$T(N) = T(0) + O(1) + O(1) + \dots + O(1)$$

$$\hookrightarrow T(0) = O(1) \hat{=} \underline{\underline{T(N) = O(N)}}$$