

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



MÔN HỌC: PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

ĐỀ TÀI: BÀI TẬP NHÓM SỐ 1

LỚP: CS112.O11

Nhóm sinh viên thực hiện:

Họ và tên

Nguyễn Hoàng Phúc

Đoàn Văn Hoàng

Nguyễn Việt Đức

MSSV

22521129

22520459

22520273

Bài 1

Câu a. $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999 = \left[\frac{999-1}{2} + 1\right] \frac{1+999}{2} = 250000$

Câu b. $S = 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 = \sum_{i=1}^{10} 2^i = \sum_{i=0}^{10} 2^i - 1 = 2046$

Câu c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n + 1 - 3 + 1 = n - 1$

Câu d. $\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^2 i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} - 2$

Câu e. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + i)$
 $= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2$

Câu f. $\sum_{j=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^2 i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} - 2$

Câu i. $\sum_{j \in (2,3,5)} j^2 + j$

Bài 2

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 2n(G)$
- $n + 1(SS)$

Gọi α_i là số lần lặp lại vòng while trong.

Ta có: α_i là số con i chạy từ $1 \rightarrow i^2$, bước nhảy 1

$\Rightarrow \alpha_i = i^2$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} G(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i \\ SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G(n) = 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\ SS(n) = 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{cases}$$

Bài 4

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 4 * n(G)$
- $n + 1(SS)$

- Xét vòng while trong : Đặt α_i là số vòng lặp của while trong, ta có:

- $2 * \alpha_i (G)$
- $\alpha_i + 1 (SS)$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} G(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i \\ SS(n) = n + 1 + n + \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{cases}$$

Xét α_i ta có:

α_i là số con j với $j \leq i$, Bước tăng theo tỉ lệ: $2 * j$

$\Rightarrow \alpha_i$ là số phần tử của tập hợp $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \dots\} = k (\in 0 < 2^k \leq i)$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2^k \leq i$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \log_2 i$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \log_2 i + 1$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} G(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^n 2(\log_2 i + 1) \\ SS(n) = n + 1 + n + \sum_{i=1}^n (\log_2 i + 1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} G(n) = 2 + 6n + \log_2 n! \\ SS(n) = 3n + 1 + \log_2 n! \end{cases}$$

Bài 5

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 3 * n(G)$
- $n + 1(SS)$

- Xét vòng $while_{(1)}$ trong : Đặt α_i là số vòng lặp của while, ta có:

- $2 * \alpha_i$ (G)
- $\alpha_i + 1$ (SS)

- Xét vòng $while_{(2)}$ trong : Đặt β_i là số vòng lặp của while, ta có:

- $2 * \beta_i$ (G)
- $\beta_i + 1$ (SS)

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} G(n) = & 2 + 4n + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i + \sum_{i=1}^n 2\beta_i \\ SS(n) = & n + 1 + n + n + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \end{cases}$$

Xét α_i ta có:

α_i là số con j với $j \leq 2 * i$, Bước tăng theo tỉ lệ: 2

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{3i-n}{2}$$

Ta có: Vòng lặp $while_{(1)}$ trong chỉ thực hiện khi $j \leq 2 * i \iff n/3 \leq i$

$$\begin{cases} \alpha_i = & \frac{3i-n}{2} , i \geq n/3 \\ \alpha_i = & 0 , \text{ còn lại} \end{cases}$$

Xét β_i ta có:

β_i là số con k với $k > 0$, Bước giảm theo tỉ lệ: 1/2

$$\Rightarrow \beta_i \text{ là số phần tử của tập hợp } \left\{ \frac{i}{2^0}, \frac{i}{2^1}, \frac{i}{2^2}, \frac{i}{2^3} \dots \right\} = k (\in 0 < \frac{i}{2^k} \leq i)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{i}{2^k} \leq i$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2^k \leq i$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \log_2 i$$

$$\Rightarrow \beta_i = \log_2 i + 1 \text{ (c/m tương tự câu 4)}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} G(n) = 2 + 4n + \sum_{i=n/3}^n 2^{\frac{3i-n}{2}} + \sum_{i=1}^n 2(\log_2 i + 1) \\ SS(n) = n + 1 + n + n + \sum_{i=n/3}^n \frac{3i-n}{2} + \sum_{i=1}^n (\log_2 i + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G(n) = 2 + 6n - 3 * (\frac{1}{2}n^2 + 1) + \log_2 n! \\ SS(n) = 4n + 1 - (\frac{1}{2}n^2 + 1) + \log_2 n! \end{cases}$$

Bài 7

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 2n(G)$
- $n + 1(SS)$

Gọi α_i là số lần lặp lại vòng while trong.

Ta có: α_i là số con i chạy từ $1 - > x$, bước tăng 1

$$\Rightarrow \alpha_i = x = (n - i)(i - 3n)$$

Gọi β_i là số lần lệnh $\text{count} = \text{count} - 2$ được thực hiện ($i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2i - 4n$)

Xét bảng dấu:

i	n	2n	3n	4n
$x = (n-i)(i-3n)$	-	0	+	-
$y = i - 2n$	-	-	0	+
$2y = 2i - 4n$	-	-	0	+

Lệnh $\text{count} = \text{count} - 2$ được thực hiện khi i chạy từ $2n - > 3n - 1$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = \begin{cases} (n - i)(i - 3n) & n < i < 3n \\ 0 & , \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\beta_i = 3n - 1 - 2n + 1 = n$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} G(n) = 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n} (\alpha_i + \beta_i) \\ SS(n) = 4n + 1 \sum_{i=1}^{4n} (2\alpha_i + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G(n) = 2 + 16n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} [(n - i)(i - 3n)) + n] \\ SS(n) = 8n + 3 + 2 \sum_{i=n+1}^{3n-1} [(n - i)(i - 3n)] \end{cases}$$

Bài 8

Gọi α_i là số lần lặp lại của vòng while trong,

β_{i-} là số lần lệnh $count = count - 1$ được thực hiện

β_{i+} là số lần lệnh $count = count + 1$ được thực hiện

γ_i là số lần $y > 0$

$$\text{Suy ra:} \begin{cases} G(n) = 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n} (\alpha_i + \beta_{i-}) + \beta_{i+} \\ SS(n) = 4n + 1 \sum_{i=1}^{3n} (2\alpha_i + 1) + \gamma_i \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

i	n		2n	3n	
x = 2n-i	+		+	0 -	
y = i - n	-	0	+		+

$$\Rightarrow \gamma_i = 2n - (n + 1) + 1 = 2n$$

$$\beta_{i+} = 2n - 1 - n + 1 = n \text{ (vì khi } y > 0 \text{ thì mới tiếp tục xét) } x > 0$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 2n - i & , \text{ khi } 1 \leq i \leq 2n - 1 \\ 0 & , \text{ còn lại} \end{cases}$$

-Xét β_{i-} :

$$n \leq j \leq x \Leftrightarrow n \leq j \leq 2n - i$$

$$\text{.Nếu } 2n - i \geq n \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n \text{ thì } \beta_{i-} \geq 1$$

$$\Rightarrow \beta_{i-} = \begin{cases} n + 1 - i & , \text{ khi } 1 \leq i \leq n \\ 0 & , \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} G(n) = & 2 + 12n + \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + \sum_{i=1}^n (n + 1 - i) + n \\ SS(n) = & 11n + 1 + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) \end{cases}$$

Bài 9

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 3 * n(G)$
- $n + 1(SS)$

- Xét vòng while trong : Đặt α_i là số vòng lặp của while, ta có:

- $3 * \alpha_i (G)$
- $\alpha_i + 1 (SS)$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} G(n) = & 2 + 3n + \sum_{i=1}^n 3\alpha_i \\ SS(n) = & n + 1 + n + \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{cases}$$

Xét α_i ta có:

α_i là số con j với $j \leq i$, Bước tăng theo tỉ lệ: $j = j + k + 2$

$\Rightarrow \alpha_i$ là số phần tử $\in \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

Hay $1 \leq k^2 \leq i$

$\Rightarrow \alpha_i = \sqrt{i}$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} G(n) = & 2 + 3n + \sum_{i=1}^n 3\sqrt{i} \\ SS(n) = & n + 1 + n + \sum_{i=1}^n \sqrt{i} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G(n) = & 2 + 3n + \frac{3}{1/2+1} * n^{k+1} \\ SS(n) = & n + 1 + n + \frac{1}{1/2+1} * n^{k+1} \end{cases}$$