ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

MÔN HỌC: **PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN**

ĐỀ TÀI: **BÀI TẬP NHÓM SỐ 1**

LỚP: CS112.O11

Nhóm sinh viên thực hiện:

Họ và tên	***MSSV***
Nguyễn Hoàng Phúc	**22521129**
Đoàn Văn Hoàng	**22520459**
Nguyễn Viết Đức	**22520273**

Bài 1

Câu a. $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999 = [\frac{999-1}{2} + 1]\frac{1+999}{2} = 250000$

Câu b. $S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 = \sum_{i=1}^{10} 2^i = \sum_{i=0}^{10} 2^i - 1 = 2046$

Câu c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n + 1 - 3 + 1 = n - 1$

Câu d. $\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{2} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} - 2$

Câu e. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + i)$

$= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2$

Câu f. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = 3 \sum_{j=1}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1} - 3^2}{2}$

Câu g. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = [\frac{(n+1)n}{2}]^2$

Câu h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = 1 - \frac{1}{i+1}$

Câu i. $\sum_{j \in (2,3,5)} j^2 + j$

Bài 2

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 2n$(G)
- $n + 1$(SS)

Gọi α_i là số lần lặp lại vòng while trong.
Ta có: α_i là số con i chạy từ $1- > i^2$, bước nhảy 1
$\Rightarrow \alpha_i = i^2$

Suy ra: $\begin{cases} \text{G(n)} = & 2+2n+\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \\ \text{SS(n)} = & n+1+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2+2n+\frac{n(n+1)(2n+1}{3} \\ \text{SS(n)} = & 2n+1+\frac{n(n+1)(2n+1}{6} \end{cases}$

Bài 3

Gọi α_i là số lần lặp lại vòng while trong.

Suy ra: $\begin{cases} \text{G(n)} = & 2+2n+\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \\ \text{SS(n)} = & n+1+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+1) \end{cases}$

Xét đk: $j \leq i^2 \Leftrightarrow i \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$

Vậy $\begin{cases} 2i^2-n+1 & \text{khi } i \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \\ 0 & \text{khi } i < \sqrt{\frac{n}{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2+2n+2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(2i^2-n+1) \\ \text{SS(n)} = & n+1+n+\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(2i^2-n+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2+2n+\dots \\ \text{SS(n)} = & n+1+n+\dots \end{cases}$

Bài 4

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2+4*n$(G)
- $n+1$(SS)

- Xét vòng while trong : Đặt α_i là số vòng lặp của while trong, ta có:

- $2 * \alpha_i$ (G)
- $\alpha_i + 1$ (SS)

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \end{cases}$$

Xét α_i ta có:

α_i là số con j với $j \leq i$, Bước tăng theo tỉ lệ: $2 * j$

$\Rightarrow \alpha_i$ là số phần tử của tập hợp $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3 ...\} = k(\in 0 < 2^k \leq i)$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2^k \leq i$

$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \log_2 i$

$\Longrightarrow \alpha_i = \log_2 i + 1$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2(\log_2 i + 1) \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + \sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 6n + \log_2 n! \\ \text{SS(n)} = & 3n + 1 + \log_2 n! \end{cases}$$

Bài 5

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 3 * n$(G)
- $n + 1$(SS)

- Xét vòng $while_{(1)}$ trong : Đặt α_i là số vòng lặp của while, ta có:

- $2 * \alpha_i$ (G)
- $\alpha_i + 1$ (SS)

- Xét vòng $while_{(2)}$ trong : Đặt β_i là số vòng lặp của while, ta có:

- $2 * \beta_i$ (G)
- $\beta_i + 1$ (SS)

Suy ra: $\begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_i \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \end{cases}$

Xét α_i ta có:

α_i là số con j với $j \leq 2 * i$, Bước tăng theo tỉ lệ: 2

$\Rightarrow \alpha_i = \frac{3i-n}{2}$

Ta có: Vòng lặp $while_{(1)}$ trong chỉ thực hiện khi $j \leq 2*i \Longleftrightarrow n/3 \leq i$

$\begin{cases} \alpha_i = & \frac{3i-n+1}{2} \text{ , } i \geq n/3 \\ \alpha_i = & 0 \text{ , còn lại} \end{cases}$

Xét β_i ta có:

β_i là số con k với $k > 0$, Bước giảm theo tỉ lệ: 1/2

$\Rightarrow \beta_i$ là số phần tử của tập hợp $\{\frac{i}{2^0}, \frac{i}{2^1}, \frac{i}{2^2}, \frac{i}{2^3} ...\} = k(\in 0 < \frac{i}{2^k} \leq i)$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{i}{2^k} \leq i$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2^k \leq i$

$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \log_2 i$

$\Rightarrow \beta_i = \log_2 i + 1$ (c/m tương tự câu 4)

Suy ra: $\begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n + \sum_{i=n/3}^{n} 2^{\frac{3i-n}{2}} + \sum_{i=1}^{n} 2(\log_2 i + 1) \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + n + \sum_{i=n/3}^{n} \frac{3i-n}{2} + \sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{3i-n}{2}} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} 2^{\frac{3i-n}{2}} + \sum_{i=1}^{n} 2(\log_2 i + 1) \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + n + \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-n}{2} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} \frac{3i-n}{2} + \sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n - \dots \\ \text{SS(n)} = & 3n + 1 - \dots \end{cases}$$

Bài 6

-Gọi α_i là số con j và j chạy từ $1->x$, bước tăng là 2.
Xét tương đối ta được: $\frac{x}{2}$

Đk: $x > 0 \Rightarrow n < i < 3n$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{(n-i)(i-3n)}{2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

i		n		2n		3n
x	-	0		+		0
y		-		0		+

- Lệnh if$(y > 0)$ xảy ra khi $x > 0 \Leftrightarrow n < i < 3n$ có $2n - 1$ số i thỏa.
- Thực hiện gán count khi $x > 0, y > 0 \Leftrightarrow 2n < i < 3n$ (có $n - 1$ giá trị)

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 12n + 4n + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i + n - 1 \\ \text{SS(n)} = & 4n + 1 + 2n - 1 + 4n + \sum_{i=1}^{4n} (2\alpha_i + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow : \begin{cases} \text{G(n)} = & 1 + 13n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n) \\ \text{SS(n)} = & 14n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2} \end{cases}$$

Bài 7

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 2n$(G)
- $n + 1$(SS)

Gọi α_i là số lần lặp lại vòng while trong.
Ta có: α_i là số con i chạy từ $1->x$, bước tăng 1
$\Rightarrow \alpha_i = x = (n-i)(i-3n)$
Gọi β_i là số lần lệnh count = count - 2 được thực hiện $(i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2i - 4n)$
Xét bảng dấu:

i		n		2n		3n		4n
x = (n-i)(i-3n)	-	0	+	|	+	0	-	
y = i -2n	-	|	-	0	+	|	+	
2y = 2i - 4n	-	|	-	0	+	|	+	

Lệnh $count = count - 2$ được thực hiện khi i chạy từ $2n->3n-1$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = \begin{cases} (n-i)(i-3n) & n < i < 3n \\ 0 & \text{, còn lại} \end{cases}$$

$$\beta_i = 3n - 1 - 2n + 1 = n$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + \beta_i) \\ \text{SS(n)} = & 4n + 1\sum_{i=1}^{4n}(2\alpha_i + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 16n + \sum_{i=n+1}^{3n-1}[(n - i(i-3n)) + n] \\ \text{SS(n)} = & 8n + 3 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}[(n-i)(i-3n)] \end{cases}$$

Bài 8

Gọi α_i là số lần lặp lại của vòng while trong,

β_{i-} là số lần lệnh $count = count - 1$ được thực hiện

β_{i+} là số lần lệnh $count = count + 1$ được thực hiện

γ_i là số lần $y > 0$

$$\text{Suy ra::} \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n}(\alpha_i + \beta_{i-}) + \beta_{i+} \\ \text{SS(n)} = & 4n + 1 \sum_{i=1}^{3n}(2\alpha_i + 1) + \gamma_i \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

i		n		2n		3n
x = 2n - i	+		+	0	-	
y = i - n	-	0	+		+	

$=> \gamma_i = 2n - (n+1) + 1 = 2n$

$\beta_{i+} = 2n - 1 - n + 1 = n$(vì khi y $>$ 0 thì mới tiếp tục xét) x $>$ 0

$$\alpha_i = \begin{cases} 2n - i & \text{, khi } 1 \le i \le 2n - 1 \\ 0 & \text{, còn lại} \end{cases}$$

-Xét β_{i-}:

$n \le j \le x \Leftrightarrow n \le j \le 2n - i$

.Nếu $2n - i \ge n \Leftrightarrow 1 \le i \le n$ thì $\beta_{i-} \ge 1$

$$\Rightarrow \beta_{i-} = \begin{cases} n + 1 - i & \text{, khi } 1 \le i \le n \\ 0 & \text{, còn lại} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 12n + \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) + n \\ \text{SS(n)} = & 11n + 1 + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) \end{cases}$$

Bài 9

- Xét vòng while ngoài: Ta có:

- $2 + 3 * n$(G)
- $n + 1$(SS)

- Xét vòng while trong : Đặt α_i là số vòng lặp của while, ta có:

- $3 * \alpha_i$ (G)
- $\alpha_i + 1$ (SS)

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \end{cases}$$

Xét α_i ta có:

α_i là số con j với $j \leq i$, Bước tăng theo tỉ lệ: $j = j + k + 2$

$\Rightarrow \alpha_i$ là số phần tử $\in \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$

Hay $1 \leq k^2 \leq i$

$\Rightarrow \alpha_i = \sqrt{i}$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\sqrt{i} \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 2 + 3n + \frac{3}{1/2+1} * n^{k+1} \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + n + \frac{1}{1/2+1} * n^{k+1} \end{cases}$$

Bài 10

- Gọi α_i là số phép so sánh được thưc hiện trong lệnh
if $(i == j)\&\&(i + j == n + 1)$
* Quy ước: chỉ tính so sánh thấy được (tường minh), bỏ qua so sánh tiềm ẩn
- Gọi β_i là số phép gán mà $(idx = i)$ thực hiện, phép gán được thực hiện khi lệnh if $(i == j)\&\&(i + j == n + 1)$ đúng, : $i = j = \frac{n+1}{2} \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ n lẻ

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{khi n lẻ} \\ 0 & \text{khi n chẳn} \end{cases}$$

- Gọi α_{idx} là số lần $sum = sum - a[idx][idx]$ thực hiện gán, tức là if$(idx! = -1)$ đúng hay n lẻ.
Vậy $\alpha_{idx} = n\%2$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \text{G(n)} = & 3 + 2n + \sum_{i=1}^{n} (2n + \beta_i) + \alpha_{idx} \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (n + 1 + \alpha_{idx}) + 1 \end{cases}$$

$\alpha_i = 2n$ Có 2 phép so sánh trong if với n lần j

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G(n)} = & 3 + 2n + \sum_{i=1}^{n} (2n) + 2(n\%2) \\ \text{SS(n)} = & n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (3n + 1) + 1 \end{cases}$$