Tính toán tọa độ tâm đường tròn $F(x_c, y_c)$

Theo định lý Pytago

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2}$$

$$AH = \sqrt{AD^2 + DH^2}$$

$$EH = DH - DE$$

1. Tính tọa độ x của tâm viên đạn (x_c)

Chọn điểm $A\ (0, 0)$ ở gốc tọa độ. Phương trình dạng chuẩn cho hai đường thẳng AE và AH ($Ax + By = 0$) là:

1. Line AE: $DE \cdot x + AD \cdot y = 0$
2. Line AH: $DH \cdot x + AD \cdot y = 0$

Khoảng cách d từ một điểm (x_c, y_c) tới đường thẳng có phương trình $Ax + By = 0$ được định nghĩa bởi $d = \frac{|Ax_c + By_c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Khoảng cách từ tâm đường tròn tới AE và AH lần lượt là:

$$r = -\frac{DE \cdot x_c + AD \cdot y_c}{AE} \quad \text{Khoảng cách tới AE (1)}$$

$$r = \frac{DH \cdot x_c + AD \cdot y_c}{AH} \quad \text{Khoảng cách tới AH (2)}$$

Từ (1) và (2):

1. $r \cdot AE = -DE \cdot x_c - AD \cdot y_c$
2. $r \cdot AH = DH \cdot x_c + AD \cdot y_c$

Cộng hai vế của 2 phương trình trên ta có:

$$r(AE) + r(AH) = (-DE \cdot x_c + DH \cdot x_c) + (-AD \cdot y_c + AD \cdot y_c)$$

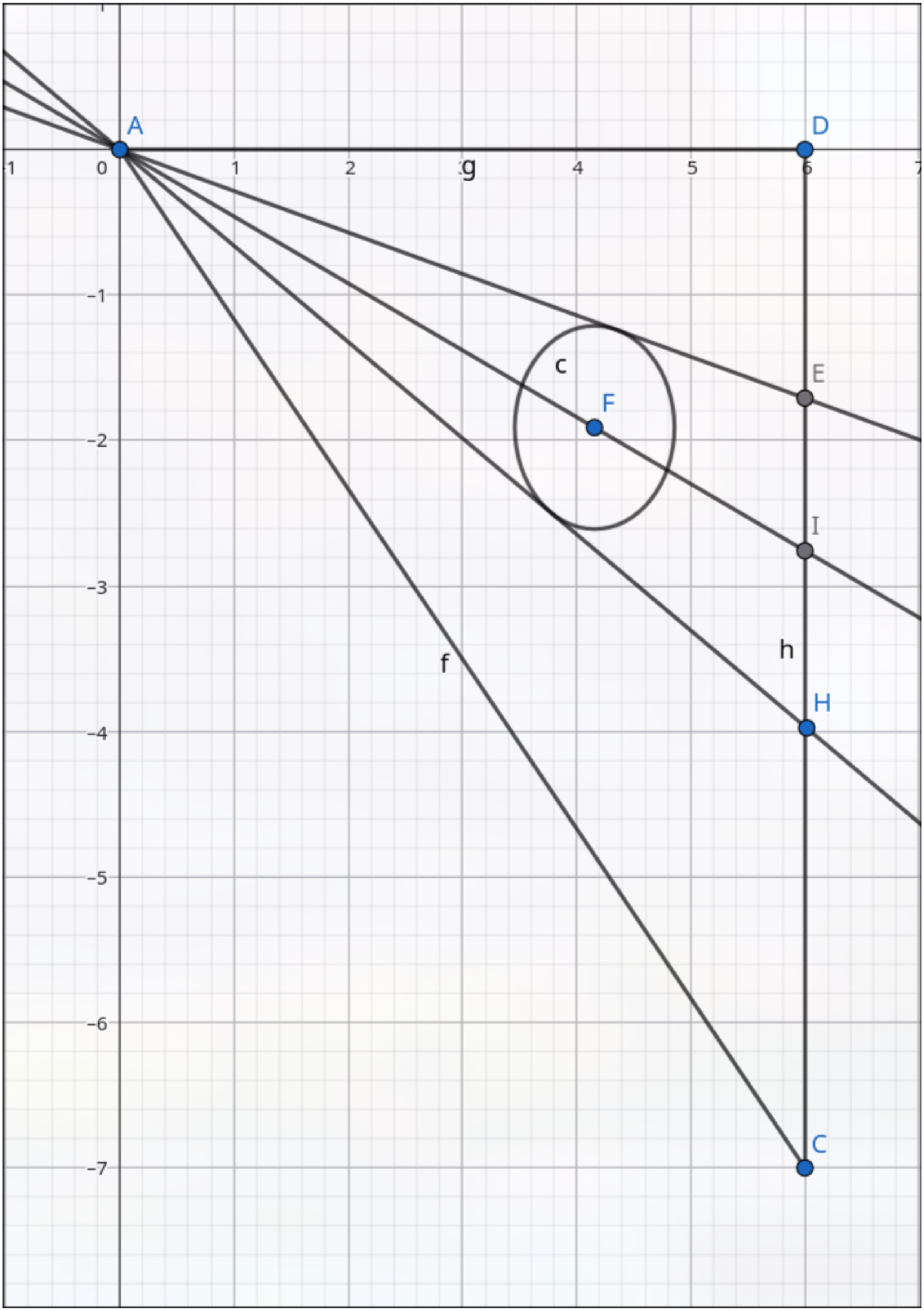


Figure 1: Hình minh họa setup (A là LED phát DC là thanh cảm biến)

$$r(AE + AH) = x_c(DH - DE)$$

Ta lại có:

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2}$$

$$AH = \sqrt{AD^2 + DH^2}$$

Vậy giá trị của x_c:

$$x_c = f(DH, DE) = r \cdot \frac{\sqrt{AD^2 + DE^2} + \sqrt{AD^2 + DH^2}}{DH - DE}(3)$$

2. Tính tọa độ y (y_c)

Tâm đường tròn nằm trên đường phân giác của góc $\angle EAH$. Theo tính chất của đường phân giác trong tam giác:

$$\frac{EI}{IH} = \frac{AE}{AH} \quad \text{Vì I là giao điểm của phân giác với EH}$$

Bổ đề - tìm tọa độ của điểm I

Nếu 1 điểm I chia đoạn thẳng EH thành 2 phần có tỉ lệ m:n thì tọa độ y của của điểm I sẽ được tính theo công thức:

$$y_I = \frac{m \cdot y_2 + n \cdot y_1}{m + n}$$

Với

1. Điểm E có tọa độ y_1.
2. Điểm H có tọa độ y_2.
3. Tỉ lệ:

$$\frac{\text{Khoảng cách từ } y_1 \text{ tới } y_I}{\text{Khoảng cách từ } y_I \text{ tới } y_2} = \frac{m}{n}$$

Chứng minh Theo đề bài ta có:

$$\frac{y_I - y_1}{y_2 - y_I} = \frac{m}{n}$$

Ta sẽ cố gắng cô lập y_I

Nhân chéo và khai triển ta có

$$n \cdot (y_I - y_1) = m \cdot (y_2 - y_I)$$

$$n \cdot y_I - n \cdot y_1 = m \cdot y_2 - m \cdot y_I$$

Cộng $n \cdot y_1$ và $m \cdot y_I$ ở cả hai vế

$$n \cdot y_I + m \cdot y_I = m \cdot y_2 + n \cdot y_1$$

Nhóm ở vế trái

$$y_I \cdot (n + m) = m \cdot y_2 + n \cdot y_1$$

Chia $(n + m)$ cho cả 2 vế

$$y_I = \frac{m \cdot y_2 + n \cdot y_1}{m + n}$$

Suy ra tọa độ của điểm I trong trường hợp này

$$y_I = \frac{DE \cdot AH + DH \cdot AE}{AH + AE}$$

Tìm tọa độ của tâm F

Rõ ràng điểm F nằm trên đường AI, mà ta đã biết tọa độ x của điểm F, vậy nên ta sẽ tính tọa độ y dựa vào độ đốc của đường AI

Độ dốc của AI:

$$Slope = \frac{y_I}{AD} = \frac{1}{AD}\frac{DE \cdot AH + DH \cdot AE}{AH + AE}$$

Từ độ dốc của AI, ta có thể tìm tọa độ y của tâm F như sau

$$y_c = \text{Slope} \cdot x_c$$

Khai triển ta có

$$y_c = \underbrace{\left[-\frac{1}{AD} \cdot \frac{DE \cdot AH + DH \cdot AE}{\mathbf{AE} + \mathbf{AH}}\right]}_{\text{Slope}} \times \underbrace{\left[r \cdot \frac{\mathbf{AE} + \mathbf{AH}}{DH - DE}\right]}_{x_c}$$

Giản ước AE+AH ở cả tử và mẫu

$$y_c = \frac{1}{AD} \cdot (DE \cdot AH + DH \cdot AE) \cdot \frac{r}{DH - DE}$$

Hay

$$y_c = \frac{r}{AD} \cdot \left(\frac{DE \cdot \sqrt{AD^2 + DH^2} + DH \cdot \sqrt{AD^2 + DE^2}}{DH - DE}\right)$$

Tính toán sai số cho x_c và y_c

Với các đại lượng đo được ngoài thực tế DH và DE, để dễ viết công thức hơn em quy ước luôn 1. Các giá trị hằng số * $L = AD$ * r bán kính của viên đạn 2. Các biến đo được * $u = DH$ * $v = DE$ 3. Giá trị cạnh huyền được tính gián tiếp * $S_u = AH = \sqrt{L^2 + u^2}$ * $S_v = AE = \sqrt{L^2 + v^2}$ 4. Sai số đo ảnh của 2 biến đo * δ (thực tế vì cách đặt LED nên $\Delta DH = \Delta DE = \delta$)

Vì tọa độ x_c và y_c được tính gián tiếp nhờ u và v nên sai số của chúng đều được tính theo

$$\Delta F \approx \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| \delta + \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| \delta$$

2. Tính toán sai số x_c

$$x_c = r \cdot \frac{S_u + S_v}{u - v}$$

Bước 1: Tính đạo hàm riêng với u (DH) Luật đạo hàm phân số $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Đạo hàm tử số

$f = r(S_u + S_v) \implies f'_u = r(\frac{u}{S_u})$

Đạo hàm mẫu số

$g = (u - v) \implies g'_u = 1$

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = \frac{r\frac{u}{S_u}(u - v) - r(S_u + S_v)}{(u - v)^2}$$

Chia cả tử và mẫu cho $\frac{r}{u-v}$:

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = \frac{r}{u - v}\left[\frac{u}{S_u} - \frac{S_u + S_v}{u - v}\right]$$

Bước 2: Tính đạo hàm riêng với v (DE) Đạo hàm tử số $f = r(S_u + S_v) \implies f'_v = r(\frac{v}{S_v})$

Đạo hàm mẫu số $g = (u - v) \implies g'_v = -1$

$$\frac{\partial x_c}{\partial v} = \frac{r\frac{v}{S_v}(u - v) - r(S_u + S_v)(-1)}{(u - v)^2}$$

$$\frac{\partial x_c}{\partial v} = \frac{r(u - v)\frac{v}{S_v} + r(S_u + S_v)}{(u - v)^2}$$

Chia cả tử và mẫu cho $\frac{r}{u-v}$:

$$\frac{\partial x_c}{\partial v} = \frac{r}{u - v}\left[\frac{v}{S_v} + \frac{S_u + S_v}{u - v}\right]$$

Tổng sai số Δx_c

$$\Delta x_c = \delta \cdot \frac{r}{DH - DE} \left(\left| \frac{DH}{\sqrt{AD^2 + DH^2}} - \frac{\sqrt{AD^2 + DH^2} + \sqrt{AD^2 + DE^2}}{DH - DE} \right| \right.$$
$$\left. + \left| \frac{DE}{\sqrt{AD^2 + DE^2}} + \frac{\sqrt{AD^2 + DH^2} + \sqrt{AD^2 + DE^2}}{DH - DE} \right| \right)$$

---

3. Tính toán sai số y_c

$$y_c = \frac{r}{L} \cdot \frac{vS_u + uS_v}{u - v}$$

Đặt $k = \frac{r}{L}$, $N = vS_u + uS_v$, $D = u - v$ Hàm số trở thành $k \cdot \frac{N}{D}$

Bước 1: Tính đạo hàm riêng với u (DH) Vì k là hằng số, ta chỉ quan tâm đạo hàm của $\frac{N}{D}$

Đạo hàm tử số

$\frac{\partial N}{\partial u} = v\frac{\partial S_u}{\partial u} + S_v \cdot 1 = v\frac{u}{S_u} + S_v$

Đạo hàm mẫu số

$\frac{\partial D}{\partial u} = 1$

Từ luật đạo hàm phân số đã nêu:

$$\frac{\partial y_c}{\partial u} = k \cdot \frac{(u - v)(v\frac{u}{S_u} + S_v) - (vS_u + uS_v)}{(u - v)^2}$$

Rút gọn tử số:

$$\text{TS} = (u - v)\frac{uv}{S_u} + (u - v)S_v - vS_u - uS_v$$

$$\text{TS} = \frac{uv(u - v)}{S_u} + uS_v - vS_v - vS_u - uS_v$$

$$\text{TS} = \frac{uv(u - v)}{S_u} - v(S_u + S_v)$$

Kết quả:

$$\frac{\partial y_c}{\partial u} = \frac{r}{L(u-v)^2}\left[\frac{uv(u-v)}{S_u} - v(S_u + S_v)\right]$$

Bước 2: Tính đạo hàm riêng với v (DE) Tương tự phần trên

Đạo hàm tử

$\frac{\partial N}{\partial v} = 1 \cdot S_u + u\frac{\partial S_v}{\partial v} = S_u + u\frac{v}{S_v}$

Đạo hàm mẫu

$\frac{\partial D}{\partial v} = -1$

Đạo hàm phân số

$$\frac{\partial y_c}{\partial v} = k \cdot \frac{(u-v)(S_u + \frac{uv}{S_v}) - (vS_u + uS_v)(-1)}{(u-v)^2}$$

Rút gọn tử số

$$\text{TS} = (u-v)S_u + \frac{uv(u-v)}{S_v} + vS_u + uS_v$$

$$\text{TS} = uS_u - vS_u + \frac{uv(u-v)}{S_v} + vS_u + uS_v$$

$$\text{TS} = u(S_u + S_v) + \frac{uv(u-v)}{S_v}$$

Kết quả

$$\frac{\partial y_c}{\partial v} = \frac{r}{L(u-v)^2}\left[u(S_u + S_v) + \frac{uv(u-v)}{S_v}\right]$$

Tổng sai số Δy_c

$$\Delta y_c = \frac{\delta \cdot r}{L(DH - DE)^2}\left(|\Omega_1| + |\Omega_2|\right)$$

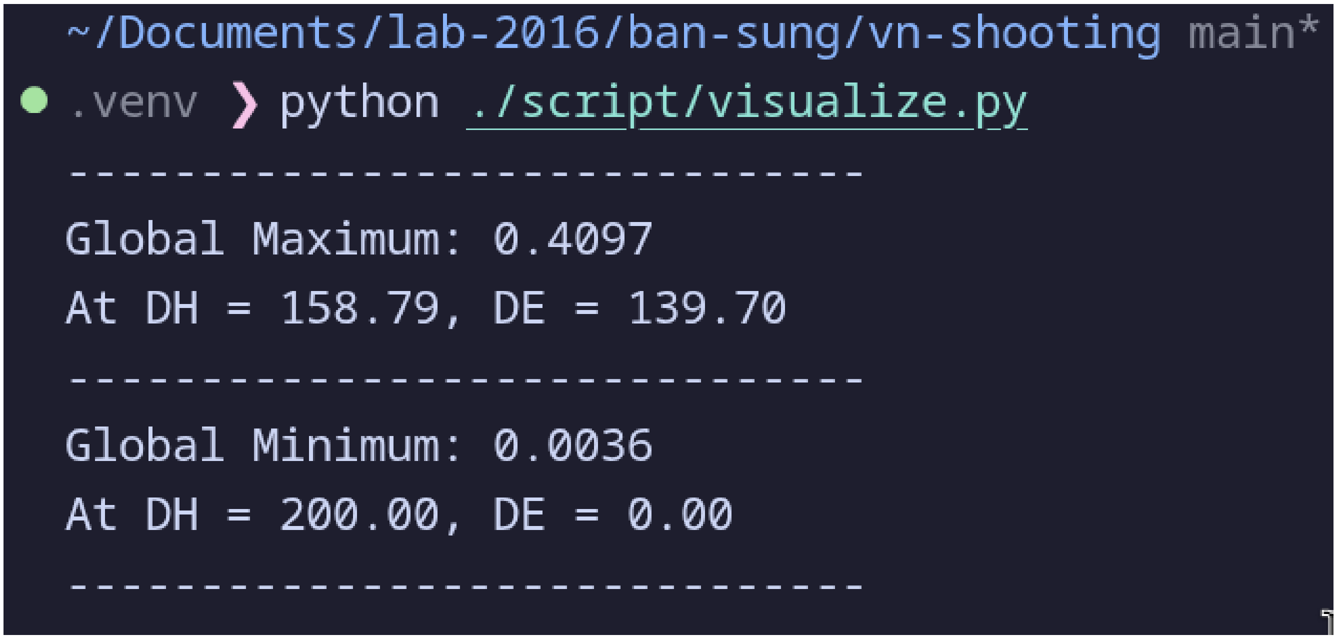
Với

$\Omega_1 = \frac{DH \cdot DE(DH-DE)}{AH} - DE(AH + AE)$

$\Omega_2 = DH(AH + AE) + \frac{DH \cdot DE(DH-DE)}{AE}$

Kết luận

Để đạt được độ chính xác 0.4mm (tọa độ x) thì độ phân giải của cảm biến IR ở hai bên phải là 0.01mm, điều này là không thể với cách làm sử dụng giá trị nhị phân 0-1 từ các cảm biến



```
~/Documents/lab-2016/ban-sung/vn-shooting main*
● .venv ❯ python ./script/visualize.py
------------------------------
Global Maximum: 0.4097
At DH = 158.79, DE = 139.70
------------------------------
Global Minimum: 0.0036
At DH = 200.00, DE = 0.00
------------------------------
```

Figure 2: Kết quả Max-Min của sai số khi DH&DE thay đổi