Bài tập về nhà 1

Toán học cho Trí tuệ nhân tạo

31 Tháng 3, 2025

1 Trường (field)

Định nghĩa 1. Một *trường* là một tập hợp F cùng với hai phép toán, ký hiệu là $+$ và $\cdot$. Mỗi phép toán là một ánh xạ: $F \times F \to F$. Hai phép toán này phải thỏa mãn các tính chất sau với mọi $a, b, c \in F$:

1. **Tính kết hợp của phép cộng và phép nhân**:
$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
2. **Tính giao hoán của phép cộng và phép nhân**:
$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$
3. **Phần tử trung hòa của phép cộng và phép nhân**: Tồn tại hai phần tử khác nhau 0 và 1 trong F sao cho:
$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$
4. **Phần tử đối của phép cộng**: Với mọi $a \in F$, tồn tại một phần tử $-a \in F$, gọi là **phần tử đối của** a, sao cho:
$$a + (-a) = 0$$
5. **Phần tử nghịch đảo của phép nhân**: Với mọi $a \neq 0$ trong F, tồn tại một phần tử a^{-1} hoặc $\frac{1}{a}$ trong F, gọi là **phần tử nghịch đảo của** a, sao cho:
$$a \cdot a^{-1} = 1$$
6. **Tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng**:
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Bài tập:

1. (1 điểm) Giả sử F là một trường. Chứng minh rằng $0 \cdot a = 0$ với mọi $a \in F$.
2. (2 điểm) Chứng minh rằng tồn tại đúng một cách xây dựng trường trên một tập có 3 phần từ phân biệt $F = \{0, 1, \alpha\}$.

2 Không gian véc-tơ và hình học trong $\mathbb{R}^n$

Trong phần này, ta sử dụng định nghĩa không gian véc-tơ ở **Định nghĩa 6.20**, chương **6.4**, tài liệu *Đại số tuyến tính*.

Bài tập:

1. (1 điểm) Cho không gian véc-tơ V trên trường F. Chứng minh rằng nếu $a \in F, \vec{v} \in V$ sao cho $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$ thì $a = 0$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$.
2. (1 điểm) Giả sử $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ là cơ sở của không gian véc-tơ V. Chứng minh rằng với mọi $\vec{v} \in V$, tồn tại duy nhất các hệ số $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sao cho $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$.
3. (1 điểm) Cho không gian véc-tơ V và $\mathcal{S}$ là một tập hợp các không gian gian con của V. Chứng minh rằng
$$\bigcap_{W \in \mathcal{S}} W$$
cũng là một không gian con của V (ký hiệu ở trên là giao của tất cả các phần tử trong $\mathcal{S}$.
4. (1 điểm) Cho không gian véc-tơ V, không gian con $W \subset V$, và $\vec{v} \in V$. Chứng minh rằng $\text{proj}_W \vec{v}$ là nghiệm của bài toán cực trị: Tìm $\vec{w} \in W$ sao cho $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3 Ý nghĩa hình học của mô hình hồi quy tuyến tính

Trong mục này, ta sẽ tìm hiểu ý nghĩa hình học của việc tìm đường thẳng hồi quy tuyến tính.

Hồi quy tuyến tính: Cho tập điểm dữ liệu $\theta = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\} \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử các giá trị x_i là đôi một khác nhau. Tìm đường thẳng $y = ax + b$ sao cho hàm mất mát

$$L = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $S = \{x_1, \dots, x_N\}$. Do mỗi hàm số $f : S \to \mathbb{R}$ tương ứng với việc chọn N giá trị thực, tập hợp tất cả hàm số như vậy $V := \{f : S \to \mathbb{R}\}$ có cấu trúc không gian véc-tơ tương đương với $\mathbb{R}^N$. Như vậy, $(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ tương đương với hàm số $f : S \to \mathbb{R}, f(x_i) = y_i$
Xét

$$W := \{f : S \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_N) = a(x_1, \dots, x_N) + b(1, \dots, 1)\}.$$

Mô tả bằng lời, tập W là những hàm số từ S đến $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x_1, \dots, x_N) = a(x_1, \dots, x_N) + b(1, \dots, 1).$$

Câu hỏi:

1. (1 điểm) Chứng minh rằng W là không gian con của V.
2. (1 điểm) Chứng minh rằng $\dim(W) = 2$.
3. (1 điểm) Chứng minh rằng nghiệm của bài toán hồi quy tuyến tính với bộ dữ liệu θ tương ứng với hình chiếu của $(y_1, \ldots, y_N)$ lên W.