Đinh Đức Tài - 23122013

HW1 Math 4 AI
AI23 @ HCMUS

I. Trường

1/ Ta có: $0 . a = 0 . a \quad \forall a \in F$

$\Rightarrow (0+0) . a = 0 . a$ (t/c phần tử trung hoà của phép cộng)

$\Rightarrow 0 . a + 0 . a = 0 . a$ (t/c phân phối)

Đặt $0 . a = b$

$\Rightarrow b + b = b$

$\Rightarrow b + b + (-b) = b + (-b)$ (phần tử đối)

$\Rightarrow b + 0 = 0$

$\Rightarrow b = 0$ (t/c phần tử trung hoà)

Thay $b = 0 . a$

$\Rightarrow 0 . a = 0 \quad \forall a \in F$

2/ Xét $F = \{0, 1, \alpha\}$. Ta sẽ đi tìm và chứng minh sự duy nhất của hai phép toán $+$ và $\cdot$ thoả ycbt.

$+$	0	1	α
0	0	1	α
1	1	α	0
α	α	0	1

$\cdot$	0	1	α
0	0	0	0
1	0	1	α
α	0	α	1

Ta mô tả 2 phép toán trên dưới dạng bảng (ma trận)

- Vì trường có tính giao hoán của phép cộng và phép nhân $\Rightarrow$ Hai ma trận đối xứng qua đường chéo chính, ta chỉ cần điền một nửa ma trận và lấy đối xứng.

⊗ Phép $+$:

- Vì 0 là phần tử trung hoà của phép cộng
  $\Rightarrow 0+0=0$; $0+1=1$; $0+\alpha=\alpha$ $(\exists!)$
- Giả sử $a+b = a+c$ $(a, b, c \in F, a \neq b \neq c)$

$\Rightarrow (-a)+a+b = (-a)+a+c$

$\Rightarrow b = c$ (vô lí vì $b \neq c$)

$\Rightarrow$ Trong 1 hàng, các giá trị phải khác nhau (hay $a+b \neq a+c$)

< Bổ đề I >

- Giả sử $1+1=0 \Rightarrow 1+\alpha=\alpha$ <I>

$\Rightarrow 1+\alpha+(-\alpha)=\alpha+(-\alpha)$

$\Rightarrow 1 = 0$ (vô lí)

Giả sử $1+1=1 \Rightarrow 1+1+(-1)=1+(-1)$

$\Rightarrow 1=0$ (vô lí)

$\Rightarrow 1+1=\alpha$ $(\exists!)$

- Từ <I> $\Rightarrow 1+\alpha=0=\alpha+1$ $(\exists!)$

$\Rightarrow \alpha+\alpha=1$ $(\exists!)$

⊛ Phép $\cdot$:

- Ta đã chứng minh $0.a=0\ \forall a\in F$ (câu 1)

$\Rightarrow 0.0=0;\ 0.1=0;\ 0.\alpha=0$ $(\exists!)$

- Vì 1 là phần tử trung hoà của phép nhân

$\Rightarrow 1.0=0;\ 1.1=1;\ 1.\alpha=\alpha$ $(\exists!)$

- Xác định $\alpha.\alpha$:

Giả sử $\alpha.\alpha=0$, mà $0.a=0\ \forall a\in F$

$\Rightarrow \alpha=0$ (vô lí vì $\alpha\neq 0$)

Giả sử $\alpha.\alpha=\alpha$

$\Rightarrow \alpha.\alpha.\alpha^{-1}=\alpha.\alpha^{-1}$

$\Rightarrow \alpha.1=1$

$\Rightarrow \alpha=1$ (vô lí vì $\alpha\neq 1$)

$\Rightarrow \alpha.\alpha=1$ $(\exists!)$

$\Rightarrow$ Tồn tại duy nhất 1 cách xây dựng trường thì $F=\{0,1,\alpha\}$

II. Không gian vecto và hình học trong $\mathbb{R}^n$

1. $a \in F$, $\vec{v} \in V$: $a.\vec{v} = \vec{0}$ thì $a = 0$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ (I)

- Với $a = 0$, mệnh đề (I) luôn đúng (*)
- Với $a \neq 0$, ta có:

$$a.\vec{v} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow a^{-1}.(a.\vec{v}) = a^{-1}.\vec{0}$$
$$\Rightarrow (a^{-1}.a).\vec{v} = a^{-1}.\vec{0}$$
$$\Rightarrow 1.\vec{v} = a^{-1}.\vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{v} = a^{-1}.\vec{0} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$a^{-1}.\vec{0} = a^{-1}.(\vec{0} + \vec{0})$$
$$\Rightarrow a^{-1}.\vec{0} = a^{-1}.\vec{0} + a^{-1}.\vec{0}$$

Đặt $\vec{u} = a^{-1}.\vec{0}$, phương trình trở thành:

$$\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$$
$$\Rightarrow \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} + \vec{u} + (-\vec{u})$$
$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{u} + \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow a^{-1}.\vec{0} = \vec{0} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ Mệnh đề (I) luôn đúng.

2. • Đặt $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. S là cơ sở của V.

=) S là tập sinh của V, hay $V = \langle S \rangle$

=) mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S

=) $\forall \vec{v} \in V, \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ (1)

• Giả sử $\exists\, \beta_1, \dots \beta_n : \vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$

=) $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$

=) $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{v}_n = \vec{0}$ (*)

Vì $S = \{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ là cơ sở của V

=) S độc lập tuyến tính

=) Phương trình (*) chỉ có nghiệm tầm thường:

$\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$

=) $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ (2)

Từ (1), (2)

=) $\forall \vec{v} \in V, \exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_n : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$

3\. Giả sử $S = \{W_1, W_2, \dots W_n\}$. $\cancel{W \quad V \in R^n}$

$\Rightarrow W_i \subset V \quad \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \subset V$

- $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ (vì $\vec{0} \in W_1$, $\vec{0} \in W_2$ do $\begin{cases} W_1 \le V \\ W_2 \le V \end{cases}$)

  $\Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$

- $\forall u, v \in W_1 \cap W_2, \alpha \in R$:

⊕ $u, v \in W_1 \Rightarrow \alpha . u + v \in W_1$ (vì $W_1 \le V$)

⊕ $u, v \in W_2 \Rightarrow \alpha . u + v \in W_2$ (vì $W_2 \le V$)

$\Rightarrow \alpha . u + v \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \le V$ ($W_1 \cap W_2$ là không gian con của V)

Đặt $W_1 \cap W_2 = W_{12}$

Tương tự $\Rightarrow W_{12} \cap W_3 \le V$

Quy nạp ta có: $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n \le V$

hay $\bigcap\limits_{W \in S} W \le V$

($\le$ là ký hiệu kgian con)

4. CM $proj_W(\vec{v})$ là nghiệm của bài toán: $W \subset V$, $\vec{v} \in V$

tìm $\vec{w} \in W$: $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ đạt min

Đặt $proj_W(\vec{v}) = \vec{p} \Rightarrow \vec{p} \in W$

$\Rightarrow (\vec{v} - \vec{p}) \in W^T$

ycbt $\Leftrightarrow \|\vec{v} - \vec{w}\| \geq \|\vec{v} - \vec{p}\| \; \forall \vec{w} \in W$

$\Rightarrow \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 \geq \|\vec{v} - \vec{p}\|^2 \; \forall \vec{w} \in W$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 &= \|(\vec{v} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{w})\|^2 \\
&= [(\vec{v} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{w})] \cdot [(\vec{v} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{w})] \\
&= (\vec{v} - \vec{p}) \cdot (\vec{v} - \vec{p}) + (\vec{v} - \vec{p}) \cdot (\vec{p} - \vec{w}) \\
&\quad + (\vec{p} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{w}) \\
&= \|\vec{v} - \vec{p}\|^2 + (\vec{v} - \vec{p}) \cdot (\vec{p} - \vec{w}) \\
&\quad + (\vec{p} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{p}) + \|\vec{p} - \vec{w}\|^2
\end{aligned}$$

Mà $\vec{p} \in W$, $\vec{w} \in W \Rightarrow \vec{p} - \vec{w} \in W$, $\vec{v} - \vec{p} \in W^T$

$\Rightarrow (\vec{v} - \vec{p}) \cdot (\vec{p} - \vec{w}) = 0$; $(\vec{p} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{p}) = 0$

$\Rightarrow \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{p}\|^2 + \|\vec{p} - \vec{w}\|^2$

Bởi vì $\|\vec{p} - \vec{w}\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 \geq \|\vec{v} - \vec{p}\|^2 \; \forall \vec{w} \in W$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{p} = \vec{w}$

$\Leftrightarrow$ đpcm.

III. Ý nghĩa hình học hồi quy tuyến tính

1. Ta có: $S = \{x_1, \dots, x_N\}$

$V = \{f : S \to R\}$ là không gian các hàm số từ S vào R và có cấu trúc không gian vectơ tương đương R^N

$\Rightarrow \vec{y} = (y_1, \dots, y_N) \in R^N$ hay $\vec{y} \in V$

Mặt khác:

$W = \{f : S \to R \mid \exists a, b \in R : f(x_1, \dots x_N) = a(x_1, \dots x_N) + b(1, \dots, 1)\}$

$\Rightarrow \begin{cases} W \subset V \quad (1) \\ W = \{f \in V \mid \exists a, b \in R : f(x_i) = a x_i + b \ \forall i = \overline{1, N}\} \end{cases}$

$\Rightarrow W = \{(a x_1 + b, \dots, a x_N + b) \mid a, b \in R\}$

Đặt $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$; $\vec{1} = (1, \dots, 1)$

$\Rightarrow W = \{a\vec{x} + b.\vec{1} \mid a, b \in R\}$

$= \langle \{\vec{x}, \vec{1}\} \rangle \quad (*)$

Ta có: $\exists \vec{0} \in V : \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

Chọn $a = 0$, $b = 0$

$\Rightarrow 0\vec{x} + 0.\vec{1} = \vec{0} \in W$

$\Rightarrow \vec{0} \in W \quad (2)$

- $\forall w_1, w_2 \in W, \exists a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$:

$w_1 = a_1 \vec{x} + b_1 . \vec{1}$

$w_2 = a_2 \vec{x} + b_2 . \vec{1}$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = (a_1 + a_2)\vec{x} + (b_1 + b_2)\vec{1}$

Đặt $a = a_1 + a_2 \Rightarrow a \in R$; $b = b_1 + b_2 \Rightarrow b \in R$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = a\vec{x} + b.\vec{1}$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in W \ (3)$

- $\forall w \in W, c \in R: \exists a, b \in R$:

$w = a\vec{x} + b\vec{1}$

$\Rightarrow c.w = c(a\vec{x} + b.\vec{1}) = (ca).\vec{x} + (cb).\vec{1}$

Đặt $a' = ca \Rightarrow a' \in R$; $b' = cb \Rightarrow b' \in R$

$\Rightarrow c.w = a'\vec{x} + b'\vec{1}$

$\Rightarrow c.w \in W \ (4)$

Từ (1), (2), (3), (4)

$\Rightarrow$ W là không gian con của V

$\Rightarrow W \leq V$

2. Ở (*) câu 1, ta có:

$W = \langle \{\vec{x}, \vec{1}\} \rangle$ (**)

Xét tổ hợp tuyến tính:

$\alpha_1 . \vec{x} + \alpha_2 . \vec{1} = \vec{0}$ (5)

hay $\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 x_N + \alpha_2 = 0 \end{cases}$

Vì $x_1, \dots x_N$ đôi một khác nhau, chọn $i \neq J$:

$\begin{cases} \alpha_1 x_i + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 x_J + \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1 (x_i - x_J) = 0$, mà $x_i \neq x_J$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$ (6)

$\Rightarrow \alpha_1 x_i + \alpha_2 = 0 . x_i + \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$ (7)

(***)

Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow \{\vec{x}, \vec{1}\}$ độc lập tuyến tính

~~Từ (**), (***) $\Rightarrow$ W là tập sinh~~

$\Rightarrow \{\vec{x}, \vec{1}\}$ là một tập sinh của W và độc lập tuyến tính

$\Rightarrow \{\vec{x}, \vec{1}\}$ là một cơ sở của W

$\Rightarrow \dim W = 2$

3. Bài toán hồi quy tuyến tính là tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để tối thiểu hoá:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a x_i + b) \right]^2$$

Mỗi (a, b) xác định một $\vec{w} = a\vec{x} + b\vec{1} \in W$

Đặt $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$

$\Rightarrow L = \|\vec{y} - \vec{w}\|^2$

$\Rightarrow$ Bài toán hồi quy tuyến tính là tìm $\vec{w} \in W$ sao cho $L = \|\vec{y} - \vec{w}\|^2$ (hay $\|\vec{y} - \vec{w}\|$) đạt giá trị nhỏ nhất.

Trong chứng minh phần II.4,

$\vec{w} = \mathrm{proj}_W(\vec{y})$ là nghiệm của bài toán tối thiểu hoá $\|\vec{y} - \vec{w}\|$

$\Rightarrow$ Nghiệm của bài toán hồi quy tuyến tính với bộ dữ liệu D tương ứng với hình chiếu của $\vec{y}$ (hay $(y_1, \ldots, y_N)$) lên W, ký hiệu $\mathrm{proj}_W(\vec{y})$

$\Rightarrow$ đpcm.