Đinh Đức Tài
23122013

Đề thi giữa kỳ
MTH00056 - PP Toán TTNT
AI23 @ HCMUS

1/ a/ Theo giả thiết, ta có:

$$P_t = w_1 . P_{t-1} + w_2 . P_{t-2}$$

với P_t là giá cổ phiếu ngày thứ t,

$w_1, w_2 \in R$

=> Gia đình hàm H các hàm số tuyến tính ứng với giả sử trên:

$$H = \{ f : R^2 \to R \mid f(x,y) = a.x + b.y \,;\, a, b \in R \}$$

b/ Với gia đình hàm H:

$+$: phép cộng hàm số tuyến tính 2 ẩn

$\bullet$: phép nhân một hàm số tuyến tính 2 ẩn với một số thực

Giả sử $f_1, f_2, f_3 \in H$; $c, d \in R$

với $f_i(x,y) = a_i x + b_i y$, $\forall i = \overline{1,3}$

Ta có:

⊛ $f_1(x,y) + f_2(x,y) = (a_1 x + b_1 y) + (a_2 x + b_2 y)$

$= (a_2 x + b_2 y) + (a_1 x + b_1 y)$

$= f_2(x,y) + f_1(x,y)$ (1)

⊛ $[f_1(x,y) + f_2(x,y)] + f_3(x,y)$

$= [(a_1 x + b_1 y) + (a_2 x + b_2 y)] + (a_3 x \; b_3 y)$

$= (a_1 x + b_1 y) + [(a_2 x + b_2 y) + (a_3 x + b_3 y)]$

$= f_1(x,y) + [f_2(x,y) + f_3(x,y)]$ (2)

⊛ $\exists f_0(x,y) = 0.x + 0.y = 0 \in H \quad (a=0; b=0)$:

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) = 0 + (a_1x + b_1y) = (a_1x + b_1y) + 0$$
$$= a_1x + b_1y$$
$$= f_1(x,y) + f_0(x,y) = f_1(x,y) \quad (3)$$

⊛ $\exists -f_1(x,y) = (-a_1)x + (-b_1)y \in H$:

$$-f_1(x,y) + f_1(x,y) = (-a_1)x + (-b_1)y + a_1x + b_1y$$
$$= (a_1 - a_1)x + (b_1 - b_1)y = 0 \quad (4)$$

⊛ $$c.[d.f_1(x,y)] = c.[d.(a_1x + b_1y)] = (c.d)(a_1x + b_1y)$$
$$\cancel{= d.[c(a_1x + b_1y)]}$$
$$\cancel{= d.\ c}$$
$$= (cd).f_1(x,y) \quad (5)$$

⊛ $$c.[f_1(x,y) + f_2(x,y)] = c.[(a_1x + b_1y) + (a_2x + b_2y)]$$
$$= c(a_1x + b_1y) + c.(a_2x + b_2y)$$
$$= cf_1(x,y) + cf_2(x,y) \quad (6)$$

⊛ $$(c+d)f_1(x,y) = (c+d)(a_1x + b_1y)$$
$$= c(a_1x + b_1y) + d(a_1x + b_1y)$$
$$= cf_1(x,y) + df_1(x,y) \quad (7)$$

⊛ $1 \in R$: $$1.f_1(x,y) = 1(a_1x + b_1y)$$
$$= a_1x + b_1y = f_1(x,y) \quad (8)$$

Từ (1) → (8) ⇒ Giả định hàm H với 2 phép cộng (+) và nhân (·) là một không gian vectơ trên R

Xét $f_x(x,y) = 1.x + 0.y = x \in H$ $(a=1; b=0)$

và $f_y(x,y) = 0.x + 1.y = y \in H$ $(a=0; b=1)$

$\forall f(x,y) \in H$:

$f(x,y) = ax + by$ ~~$= af_x(a,b$~~

$= af_x(x,y) + bf_y(x,y)$

$\Rightarrow H = \langle \{f_x(x,y); f_y(x,y)\} \rangle$ (9)

Xét tổ hợp tuyến tính của $f_x(x,y)$ và $f_y(x,y)$:

$c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y) = 0$ $(c_1, c_2 \in R)$

$\Rightarrow c_1 x + c_2 y = 0$ $\forall x, y \in R$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\Rightarrow \{f_x(x,y); f_y(x,y)\}$ độc lập tuyến tính (10)

Từ (9), (10) ⇒ $\{f_x(x,y); f_y(x;y)\}$ là tập sinh của H và độc lập tuyến tính

$\Rightarrow \{f_x(x,y); f_y(x;y)\}$ là cơ sở của H

$\Rightarrow \dim H = |\{f_x(x,y); f_y(x;y)\}| = 2$

⇒ Giả định hàm H có số chiều là 2

c/ Với mô hình hồi quy:

$$P_t = w_1 P_{t-1} + w_2 P_{t-2},$$

ta có điểm dữ liệu trong R^3 tương ứng:

$$(P_{t-1}; P_{t-2}; P_t)$$

$\Rightarrow \theta = \{(105; 109; 95); (95; 105; 96); (96; 95; 98)\}$

d/ Bài toán học từ dữ liệu

- Giả định hàm H:

$$= wx$$

$$H = \{ f_w : R^2 \to R \mid f_w(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 ; w_1 \in R ; w_2 \in R ;$$
$$x = (x_1 ; x_2) ; w = (w_1 ; w_2) \}$$

- Dữ liệu θ:

$$\theta = \{ (x^{(i)} ; y^{(i)}) \mid x^{(i)} = (x_1^{(i)} ; x_2^{(i)}) \in R^2 ; y^{(i)} \in R ;$$
$$\forall i = \overline{1,3} \} ; n = 3$$

$$= \{ ((105; 109); 95) ; ((95; 105); 96) ; ((96; 95); 98) \}$$

- Hàm mất mát L:

$$L(\theta, f_w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y^{(i)} - f_w(x^{(i)}))^2$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} (y^{(i)} - f_w(x^{(i)}))^2$$

=) Bài toán học từ dữ liệu này tối ưu hoá hàm mất mát L dựa trên dữ liệu θ cho trước

=) Học có giám sát.

e/ Nghiệm tối ưu chính xác của bài toán:

$$w^* = (X^T X)^{-1} X^T y \text{ với } X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix}_{3\times 2} , y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

hay $X = \begin{bmatrix} 105 & 109 \\ 95 & 105 \\ 96 & 95 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 95 \\ 96 \\ 98 \end{bmatrix}$

Ta có: $X^T X = \begin{bmatrix} 29266 & 30540 \\ 30540 & 31931 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{31931}{1801046} & \frac{-15270}{900523} \\ \frac{-15270}{900523} & \frac{14633}{900523} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (X^T X)^{-1} X^T = \begin{bmatrix} \frac{23895}{1801046} & \frac{-173255}{1801046} & \frac{82038}{900523} \\ \frac{-8353}{900523} & \frac{85815}{900523} & \frac{-75785}{900523} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} \frac{1716993}{1801046} \\ \frac{17775}{900523} \end{bmatrix} = w^* = \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_1^* = \frac{1716993}{1801046} \approx 0{,}95333 ; \quad w_2^* = \frac{17775}{900523} \approx 0{,}01973$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tối ưu của bài toán:

$$f_{w^*}(x) = w^* x = \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = w_1^* x_1 + w_2^* x_2$$

$$= \frac{1716993}{1801046} x_1 + \frac{17775}{900523} x_2$$

⊛ Chứng minh cho nghiệm tối ưu của bài toán:

Ta có:

$$L(\theta, f_w) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(y^{(i)} - f_w(x^{(i)})\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(y^{(i)} - w\,x^{(i)}\right)^2$$

với $\underset{2\times 1}{w} = (w_1, w_2)^T$; $\underset{1\times 2}{x^{(i)}} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$

$$\Rightarrow L(\theta, f_w) = \frac{1}{3}(y - Xw)^T(y - Xw)$$

với $\underset{3\times 1}{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})^T$; $\underset{3\times 2}{X} = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})^T$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dw} = \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{3}(y - Xw)^T(y - Xw)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{d}{dw}\left(y^Ty - y^TXw - w^TX^Ty + w^TX^TXw\right)$$

mà $\underset{1\times 1}{y^TXw}$; $(y^TXw)^T = (Xw)^T(y^T)^T = w^TX^Ty$

$$\Rightarrow y^TXw = w^TX^Ty$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dw} = \frac{1}{3}\frac{d}{dw}\left(y^Ty - 2y^TXw + w^TX^TXw\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(0 - 2y^TX + w^T\left(X^TX + (X^TX)^T\right)\right)$$

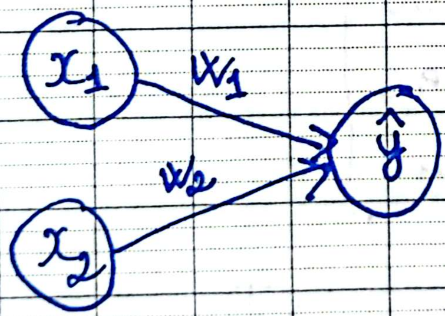
$$= \frac{1}{3}\left(-2y^TX + w^T\left(X^TX + X^T(X^T)^T\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-y^TX + w^TX^TX\right)$$

Với $\frac{dL}{dw} = 0^T$; $\underset{1\times 2}{0^T} = (0,0)$, ta có nghiệm tối ưu w^*:

$$w^{*T} X^T X = y^T X$$
$$\Rightarrow w^{*T} = y^T X (X^T X)^{-1}$$
$$\Rightarrow w^* = (X^T X)^{-1} X^T y$$

f/ Mạng nơ-ron tương ứng với mô hình hồi quy tuyến tính:



Input: x_1, x_2

Weights: w_1, w_2

Output: $y = w_1 x_1 + w_2 x_2$.

g/ Gradient Descent:

Điểm xuất phát: $\underset{2\times1}{w^{(0)}} = (0,5 ; 0,5)^T$

Tốc độ học: $\alpha = 0,01$

$$\underset{1\times2}{\frac{dL}{dw}} = \frac{2}{3}\left(-y^T X + w^T X^T X\right)$$

với $X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 & 109 \\ 95 & 105 \\ 96 & 95 \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 \\ 96 \\ 98 \end{bmatrix}$$

Cách cập nhật w:

$$w^{(i+1)} = w^{(i)} - \alpha . \left(\frac{dL}{dw^{(i)}}\right)^T$$

- Bước 1:

$$\frac{dL}{dw^{(0)}} = \frac{2}{3}\left(-\begin{bmatrix} 95 & 96 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 & 109 \\ 95 & 105 \\ 96 & 95 \end{bmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 & 95 & 96 \\ 109 & 105 & 95 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 & 109 \\ 95 & 105 \\ 96 & 95 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\begin{bmatrix} 28503 & 29745 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29903 & \frac{62471}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2800}{3} & \frac{2981}{3} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow w^{(1)} = w^{(0)} - 0{,}01 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2800}{3} \\ \frac{2981}{3} \end{pmatrix} =}$$

$$\Rightarrow w^{(1)} = w^{(0)} - \alpha \cdot \left(\frac{dL}{dw^{(0)}}\right)^T = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - 0{,}01 \begin{bmatrix} \frac{2800}{3} \\ \frac{2981}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-53}{6} \\ \frac{-2831}{300} \end{bmatrix}$$

- Bước 2:

$$\frac{dL}{dw^{(1)}} = \frac{2}{3}\left(-\begin{bmatrix} 95 & 96 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 & 109 \\ 95 & 105 \\ 96 & 95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-53}{6} & \frac{-2831}{300} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 & 95 & 96 \\ 109 & 105 & 95 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 & 109 \\ 95 & 105 \\ 96 & 95 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\begin{bmatrix} 28503 & 29745 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-8200682}{15} & \frac{-171327661}{300} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-17256454}{45} & \frac{-180251161}{\cancel{300}450} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow w^{(2)} = w^{(1)} - \alpha \cdot \left(\frac{dL}{dw^{(1)}}\right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-53}{6} \\ \frac{-2831}{300} \end{bmatrix} - 0{,}01 \cdot \begin{bmatrix} \frac{-17256454}{45} \\ \frac{-180251161}{\cancel{300}450} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\approx \begin{bmatrix} 3825{,}9342 \\ 5998{,}9354 \end{bmatrix}} \approx \begin{bmatrix} 3825{,}9342 \\ 3996{,}1447 \end{bmatrix}$$

- Bước 3:

$$\frac{dL}{dw^{(2)}} = \frac{2}{3}\left(-\begin{bmatrix}95 & 96 & 98\end{bmatrix}\begin{bmatrix}105 & 109\\ 95 & 105\\ 96 & 95\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3825,9342 & 3996,1447\end{bmatrix}\begin{bmatrix}105 & 95 & 96\\ 109 & 105 & 95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}105 & 109\\ 95 & 105\\ 96 & 95\end{bmatrix}\right)$$

$$\approx \frac{2}{3}\left(-\begin{bmatrix}28503 & 29745\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2,34.10^8 & 2,44.10^8\end{bmatrix}\right)$$

$$\approx \frac{2}{3}\left(\begin{bmatrix}233983546,4 & 244415181,9\end{bmatrix}\right)$$

$$\approx \begin{bmatrix}155989031 & 162943454,6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow w^{(3)} = w^{(2)} - \alpha\left(\frac{dL}{dw^{(2)}}\right)^T$$

$$\approx \begin{bmatrix}3825,9342\\ 3996,1447\end{bmatrix} - 0,01\cdot\begin{bmatrix}155989031\\ 162943454,6\end{bmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{bmatrix}-1556064,376\\ -162903\end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix}-1556064,376\\ -1625438,401\end{bmatrix}$$

Nhận xét: α lớn $\Rightarrow$ trọng số w tăng quá nhanh

$\Rightarrow$ bị phân kỳ

2/ Xét ma trận : $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & a \\ 2 & b & c \\ 5 & 4 & d \end{bmatrix}$; $a, b, c, d \geq 0$

$\Rightarrow r(A) \in \{0; 1; 2; 3\}$

Dễ thấy $A \neq O_{3\times3}$ $\Rightarrow r(A) \neq 0$

• Giả sử $r(A) = 1$

$\Rightarrow [4 \ \ 3 \ \ a] = k\,[2 \ \ b \ \ c]$; $k \in R$, $k \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{4}{2} = \dfrac{3}{b} \Rightarrow b = \dfrac{3}{2}$ (1)

và $[5 \ \ 4 \ \ d] = k'\,[2 \ \ b \ \ c]$; $k' \in R$, $k' \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{4}{b} \Rightarrow b = \dfrac{8}{5}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow r(A) \neq 1$

• Giả sử $r(A) = 2 < 3$

$\Rightarrow \det(A) = 0$

$\Rightarrow \det(A) = 4.b.d + 3.c.5 + a.2.4$
$- a.b.5 - 4.c.4 - 3.2.d$

$= 4bd + 15c + 8a - 5ab - 16c - 6d$

$= 4bd \cancel{+ 15c + 8a} - c + 8a - 5ab - 6d$

$= 0$

Với $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ thoả mãn $\det(A) = 0$

$\Rightarrow \min r(A) = 2$ với $a = b = c = d = 1$.

• Điều kiện cần và đủ của a, b, c, d để ma trận A có hạng nhỏ nhất có thể:

Vì min $r(A) = 2$ (chứng minh ở trên)

$\Rightarrow$ Điều kiện cần: $a, b, c, d \geq 0$

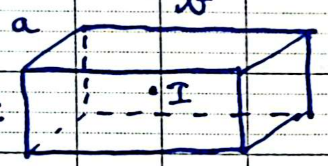
Điều kiện đủ: $\det(A) = 0$

hay $4bd - c + 8a - 5ab - 6d = 0$

3/ Giả sử hình hộp chữ nhật có chiều rộng, chiều dài, chiều cao lần lượt là a, b, c.

$\Rightarrow S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R;\ a, b, c > 0;$

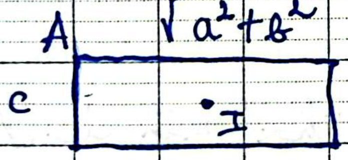
$S_{mặt} = 2(ab + bc + ca) = 54;\ V = abc = 23\}$



Vì tính chất đối xứng của hình hộp chữ nhật tâm của hình cầu nhỏ nhất chứa được hình hộp chữ nhật trùng với tâm I của hình hộp chữ nhật

$\Rightarrow$ Bán kính của hình cầu bằng khoảng cách từ tâm I đến điểm xa nhất (A) trên hình hộp.

Xét các mặt cắt, ta có mặt cắt chéo cho ta mặt phẳng chứa I và A:



$\Rightarrow IA = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

hay $\lambda = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

GTLN

YCBT $\Leftrightarrow$ tìm GTNN của:

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \; ; \; a,b,c>0; \quad abc = 23$$

$$2(ab+bc+ca) = 54 \Rightarrow ab+bc+ca = 27$$

Xét $f(a,b,c) = \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; a^2+b^2+c^2$

$g(a,b,c) = abc \cancel{-23}$

$h(a,b,c) = ab+bc+ca \cancel{-27}$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} \nabla f(a,b,c) = \lambda_1 \nabla g(a,b,c) + \lambda_2 \nabla h(a,b,c) \\ g(a,b,c) = 23 \\ h(a,b,c) = 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2a, 2b, 2c) = \lambda_1 (bc, ac, ab) + \lambda_2 (b+c, a+c, a+b) \\ abc = 23 \\ ab+bc+ca = 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = \lambda_1 bc + \lambda_2 (b+c) \quad (1) \\ 2b = \lambda_1 ac + \lambda_2 (a+c) \quad (2) \\ 2c = \lambda_1 ab + \lambda_2 (a+b) \\ abc = 23 \\ ab+bc+ca = 27 \end{cases}$$

Lấy (1) − (2) vế theo vế

$$\Rightarrow 2(a-b) = \lambda_1 . c(b-a) + \lambda_2 (b-a)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ 2 + \lambda_1 . c + \lambda_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ c = -\left(\dfrac{\lambda_2 + 2}{\lambda_1}\right) \end{array}\right.$$

Thực hiện tương tự, ta có:

$$\left[\begin{array}{l} a=b \\ c=-\left(\dfrac{\lambda_2+2}{\lambda_1}\right)\end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} b=c \\ a=-\left(\dfrac{\lambda_2+2}{\lambda_1}\right)\end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} a=c \\ b=-\left(\dfrac{\lambda_2+2}{\lambda_1}\right)\end{array}\right.$$

Ta có 3 trường hợp:

① : có 3 số trong a, b, c bằng nhau (hay $a=b=c$)

② có 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau

③ 3 số a, b, c khác nhau (hay $a \neq b \neq c$)

Xét $a=b=c$ (TH ①)

$\Rightarrow ab+bc+ca = 3a^2 = 27 \Rightarrow a = \pm 3$

Mà $abc = 23 = a^3 = \sqrt[3]{23}$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn.

Xét $a \neq b \neq c$ (TH ③)

$\Rightarrow c = -\left(\dfrac{\lambda_2+2}{1}\right) \wedge a = -\left(\dfrac{\lambda_2+2}{\lambda_1}\right) \wedge b = -\left(\dfrac{\lambda_2+2}{\lambda_1}\right)$

$\Rightarrow a=b=c$ (mâu thuẫn)

$\Rightarrow$ Có 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau (TH ②)

Vì không mất tính tổng quát, giả sử $a=c$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc=23 \\ ab+bc+ca=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b=23 \\ a^2+2ab=27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{23}{a^2} \\ a^2+2\cdot\dfrac{23}{a}=27 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \approx -5,89 \text{ (loại)} \\ a \approx 3,89898 \\ a = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = c = 2 \quad \wedge \quad b = 5,75 \\ a = c \approx 3,89898 \quad \wedge \quad b \approx 1,51295 \end{array}\right.$

và $f(3,89898; 1,51295; 3,89898) < f(2; 5,75; 2)$

$(\quad 32,6931 \quad < \quad 41,0625 \quad)$

$\Rightarrow$ Bộ nghiệm (a,b,c) để hàm $f(a,b,c)$ đạt giá trị ~~nhỏ~~ lớn nhất là $(a,b,c) = \cancel{(3,89898; 1,51295; 3,89898)}$ $(2; 5,75; 2)$ và hoán vị của chúng.

$\Rightarrow r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{f(a,b,c)}$

$\cancel{\geq \dfrac{1}{2}\sqrt{f(3,89898; 1,51295; 3,89898)}}$

$\cancel{= \dfrac{1}{2}\sqrt{32,6931} \approx 2,858894}$

~~Dấu "=" xảy ra khi $(a,b,c) = (3,89898; 1,51295; 3,89898)$ và hoán vị của chúng.~~

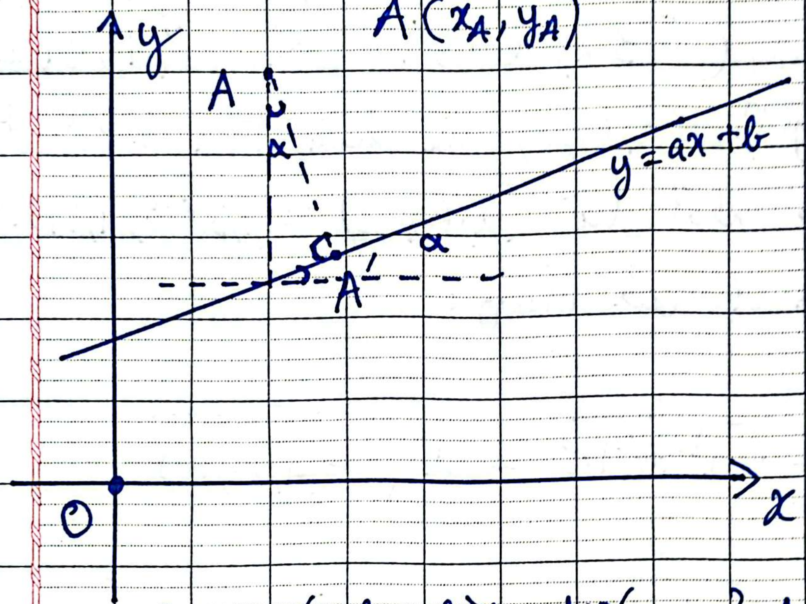
$\leq \dfrac{1}{2}\sqrt{f(2; 5,75; 2)} = \dfrac{3\sqrt{73}}{8} \approx 3,204$

Dấu "=" xảy ra khi $(a,b,c) = (2; 5,75; 2)$ và hoán vị của chúng.

4/ a/ $\Theta = \{(1,3); (0,2); (3,4)\} \subset R^2$

Xét các điểm dữ liệu trên trong hệ tọa độ Oxy với đường thẳng $d: y = ax + b \subset R^2$ sao cho tổng bình phương khoảng cách vuông góc từ các điểm trong Θ đến d là nhỏ nhất:

Với điểm A bất kì, $A \in \Theta$, ta có: $A(x_A, y_A)$



Gọi A' là hình chiếu của A lên d

$\Rightarrow AA' = \cos\alpha \cdot |y_A - ax_A - b|$

Ta có: $\tan\alpha = a$

$\Rightarrow a^2 + 1 = \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$$\Rightarrow AA' = \frac{|y_A - ax_A - b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Mà $|\Theta| = 3$ (có 3 điểm dữ liệu trong Θ)

$\Rightarrow$ Tổng bình phương khoảng cách vuông góc từ các điểm trong θ đến d là:

$$L(a,b) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{a^2+1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(ax_i + b - y_i)^2}{a^2+1}$$

với $(x_i, y_i) \in \theta \ \forall i = \overline{1,3}$

ycbt $\Leftrightarrow$ tìm giá trị nhỏ nhất của $L(a,b)$.

Ta có: $$\frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^{3} \frac{2(ax_i + b - y_i)}{a^2+1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} (ax_i + b - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow a\sum_{i=1}^{3} x_i + 3b - \sum_{i=1}^{3} y_i = 0$$

$$\Rightarrow b = \cancel{a\bar{x}} \ \bar{y} - a\bar{x}$$

với $\bar{y} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i = 3$; $\bar{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{4}{3}$

Thay $b = \bar{y} - a\bar{x}$ vào $L(a,b)$, ta có:

$$L(a) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(ax_i - a\bar{x} - (y_i - \bar{y}))^2}{a^2+1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{[a(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})]^2}{a^2+1}$$

Đặt ~~$u = [a(x_i$~~ $\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}$; $\tilde{y}_i = y_i - \bar{y}$

$$\Rightarrow L(a) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2}{a^2+1}$$

Đặt $u = \sum_{i=1}^{3} (a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2 \Rightarrow u'(a) = \sum_{i=1}^{3} 2(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)\tilde{x}_i$

$v = a^2 + 1 \Rightarrow v'(a) = 2a$

$$\frac{dL}{da} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{\left[\sum_{i=1}^{3} 2(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)\tilde{x}_i\right] \cdot (a^2+1)\cancel{2} - 2a\sum_{i=1}^{3}(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2}{(a^2+1)^2}$$

$\frac{dL}{da} = 0$

$\Rightarrow (a^2+1)\left[\sum_{i=1}^{3} 2(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)\tilde{x}_i\right] - 2a\sum_{i=1}^{3}(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2+1)\left(a\sum_{i=1}^{3}\tilde{x}_i^2 - \sum_{i=1}^{3}\tilde{x}_i\tilde{y}_i\right) - a\sum_{i=1}^{3}(a^2\tilde{x}_i^2 - 2a\tilde{x}_i\tilde{y}_i + \tilde{y}_i^2) = 0$

Đặt $S_{xx} = \sum_{i=1}^{3}\tilde{x}_i^2$; $S_{yy} = \sum_{i=1}^{3}\tilde{y}_i^2$

$S_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\tilde{x}_i\tilde{y}_i$

$\Rightarrow (a^2+1)(aS_{xx} - S_{xy}) - a(a^2S_{xx} - 2S_{xy}a + S_{yy}) = 0$

$\Rightarrow a^3S_{xx} - a^2S_{xy} + aS_{xx} - S_{xy} - a^3S_{xx} + 2a^2S_{xy}$

$- aS_{yy} = 0$

$\Rightarrow a^2S_{xy} - S_{xy} + aS_{xx} - aS_{yy} = 0$

$\Rightarrow a^2S_{xy} + a(S_{xx} - S_{yy}) - S_{xy} = 0 \quad (*)$

Ta có: $\bar{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{4}{3}$; $\bar{y} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i = 3$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{14}{3}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{y}_i^2 = \sum_{i=1}^{3} (y_i - \bar{y})^2 = 2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_i \tilde{y}_i = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 3$$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3a^2 + \left(\frac{14}{3} - 2\right)a - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 9a^2 + 8a - 9 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{97}}{9}$

Với $a = \frac{-4+\sqrt{97}}{9}$, $L(a) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2}{a^2+1} \approx 0,0503807$

$a = \frac{-4-\sqrt{97}}{9}$, $L(a) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(a\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2}{a^2+1} \approx 6,616285$

$\Rightarrow$ Chọn $a = \frac{-4+\sqrt{97}}{9} \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$

$= \frac{97 - 4\sqrt{97}}{27}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng d thoả ycbt:

$$d: y = \left(\frac{-4+\sqrt{97}}{9}\right)x + \frac{97-4\sqrt{97}}{27}$$

b, Thực hiện phương pháp PCA:

$\theta = \{(1,3), (0,2), (3,4)\}$

$\overline{x} = \frac{1+0+3}{3} = \frac{4}{3}$; $\overline{y} = \frac{3+2+4}{3} = 3$

$\Rightarrow$ gốc toạ độ mới: $\left(\frac{4}{3} ; 3\right)$

Gọi $\tilde{\theta}$ là các điểm dữ liệu sau khi được dời gốc toạ độ

$\Rightarrow \tilde{\theta} = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 0\right) ; \left(-\frac{4}{3}, -1\right) ; \left(\frac{5}{3}, 1\right)\right\}$

Gọi X là dạng ma trận của $\tilde{\theta}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận hiệp phương sai:

$$S = X^T X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng:

$$P_S(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(S - \lambda I_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{14}{3} - \lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{14}{3}-\lambda\right)(2-\lambda)-9=0$

$\Leftrightarrow \frac{28}{3}-\frac{20}{3}\lambda+\lambda^2-9=0$

$\Leftrightarrow 3\lambda^2-20\lambda+1=0$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{10\pm\sqrt{97}}{3}$

hay $\lambda_1=\frac{10+\sqrt{97}}{3}$ và $\lambda_2=\frac{10-\sqrt{97}}{3}$ $(\lambda_1>\lambda_2)$

Với $\lambda_1=\frac{10+\sqrt{97}}{3}$

$\Rightarrow S v_1=\lambda_1 v_1 \Rightarrow (S-\lambda_1 I_2)v_1=0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{14}{3}-\lambda_1 & 3 \\ 3 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{v_1} \\ y_{v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3x_{v_1}+(2-\lambda_1)y_{v_1}=0$

$\Rightarrow 3x_{v_1}+\left(-\frac{4+\sqrt{97}}{3}\right)y_{v_1}=0$

$\Rightarrow 9x_{v_1}=(4+\sqrt{97})y_{v_1}$

Chọn $x_{v_1}=4+\sqrt{97} \Rightarrow y_{v_1}=9$

$\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix} 4+\sqrt{97} \\ 9 \end{pmatrix}$ là thành phần chính thứ nhất (PCA1) của θ

Với $\lambda_2 = \frac{10-\sqrt{97}}{3}$

$\Rightarrow S v_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow (S - \lambda_2 I_2) v_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{14}{3} - \lambda_2 & 3 \\ 3 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{v_2} \\ y_{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3x_{v_2} + (2-\lambda_2) y_{v_2} = 0$

$\Rightarrow 3x_{v_2} + \frac{-4+\sqrt{97}}{3} y_{v_2} = 0$

$\Rightarrow \cancel{9x_{v_2}}\ 9x_{v_2} = -(\sqrt{97}-4) y_{v_2}$

Chọn $x_{v_2} = -\sqrt{97}+4 \Rightarrow y_{v_2} = 9$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{97}+4 \\ 9 \end{pmatrix}$ là thành phần chính thứ 2 (PC2)

$v_2 \cdot v_1^T = 0$ (thoả mãn trực giao).

c/ Nhận xét: Đường thẳng d ở câu a là đường thẳng đi qua gốc toạ độ mới ở câu b và có hướng song song với PC1 ở câu b.

$\left(a = \frac{-4+\sqrt{97}}{9} = \tan\alpha = \frac{9}{4+\sqrt{97}} = \frac{-4+\sqrt{97}}{9} \right)$

Tổng quát: Với tập $\Theta = \{x_i\} \forall i = \overline{1,N} \in R^{D\times N}$, siêu phẳng đi qua $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ và được sinh bởi k thành phần chính đầu tiên là siêu phẳng k-chiều tối thiểu hoá tổng bình phương khoảng cách vuông góc từ các điểm trong Θ đến siêu phẳng đó.