

CHƯƠNG 4

TRƯỜNG HẤP DẪN

Nhiều hiện tượng trong tự nhiên chứng tỏ rằng các vật có khối lượng luôn luôn tác dụng lên nhau những *lực hút*. Ví dụ: quả đất quay xung quanh mặt trời là do lực hút của mặt trời, mặt trăng quay xung quanh quả đất là do sức hút của quả đất... Các lực hút đó gọi là *lực hấp dẫn vũ trụ*. Giữa các vật xung quanh ta cũng có lực hấp dẫn vũ trụ nhưng quá nhỏ, ta không phát hiện được bằng cách quan sát trực quan thông thường. Newton là người đầu tiên nêu lên định luật cơ bản về lực hấp dẫn vũ trụ.

4.1. ĐỊNH LUẬT NEWTON VỀ HẤP DẪN VŨ TRỤ

4.1.1. Định luật

Hai chất điểm m và m' đặt cách nhau một khoảng r sẽ hút nhau với một lực có phương nằm trên đường thẳng nối hai chất điểm đó, có độ lớn tỷ lệ thuận với hai khối lượng m và m' và tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách.

$$F = F' = G \frac{m.m'}{r^2} \quad (4-1)$$

G là hệ số tỷ lệ gọi là hằng số hấp dẫn. Trong hệ đơn vị SI thì $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

Ghi chú:

a. Công thức (4-1) chỉ áp dụng cho các chất điểm. Muốn tính lực hấp dẫn giữa các vật có kích thước lớn ta phải dùng phương pháp tích phân.

b. Có thể chứng minh rằng do tính đối xứng cầu, công thức (4-1) cũng thể áp dụng cho trường hợp 2 quả cầu đồng chất, khi đó r là khoảng cách giữa hai tâm của 2 quả cầu đó.

4.1.2. Ứng dụng

1. Sự thay đổi của gia tốc trọng trường theo độ cao.

Do có lực hấp dẫn, bất kỳ vật nào ở gần quả đất cũng chịu tác dụng của lực hút lên nó, do khối lượng của quả đất rất lớn ($\approx 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$) so với các vật đó, nên các vật đó bị hút về phía quả đất. Các lực hút đó chính là lực hấp dẫn vũ trụ, ta thường gọi là trọng lực \vec{P} , trọng lực gây ra gia tốc trọng trường \vec{g} cho vật.

Nếu chất điểm ở ngay trên mặt đất, áp dụng định luật hấp dẫn (4-1) ta được:

$$P_0 = G \frac{Mm}{R^2} \quad (4-2)$$

Trong đó M là khối lượng quả đất, m là khối lượng của chất điểm, R là bán kính của quả đất.

Trọng lực \vec{P}_0 gây ra gia tốc g_0 cho chất điểm m ở trên mặt đất. Theo định luật Newton II, ta có:

$$P_o = mg_o \quad (4-3)$$

So sánh hai biểu thức (4-2) và (4-3) ta được:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} \quad (4-4)$$

Nếu chất điểm ở độ cao h so với mặt đất, trọng lực tác dụng lên chất điểm khối lượng m được tính theo (4-1) là:

$$P = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad (4-5)$$

Mặt khác, theo định luật Newton II, ta có:

$$P=mg$$

Từ đó ta suy ra giá trị của gia tốc trọng trường ở độ cao h là:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad (4-6)$$

Từ đó ta suy ra được:

$$g = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = g_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \quad (4-7)$$

Các vật ở gần mặt đất có độ cao $h \ll R$, do đó $\frac{h}{R} \ll 1$ và có thể tính gần đúng:

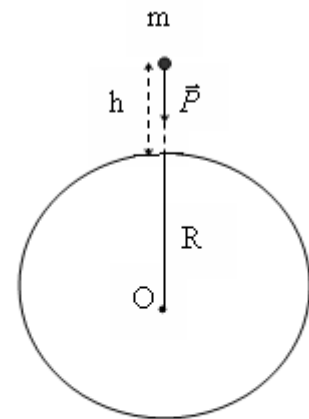
$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx \left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

Do đó ta tìm được gia tốc trọng trường ở độ cao h :

$$g = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \quad (4-8)$$

Các công thức (4-7) và (4-8) cho thấy càng lên cao gia tốc trọng trường của chất điểm m càng giảm.

b. Tính khối lượng của các thiên thể



Hình 4-1
Sự phụ thuộc của gia tốc trọng trường vào độ cao h

*** Khối lượng của quả đất**

Từ (4-2) ta tính được khối lượng M của quả đất:

$$M = \frac{g_0 R^2}{G}$$

Biết bán kính R của quả đất có giá trị trung bình là $6370\text{km} = 6,370.10^6\text{m}$, gia tốc trọng trường g_0 có giá trị trung bình là $9,8\text{m/s}^2$. Vậy:

$$M = \frac{9,8.(6,37.10^6)^2}{6,67.10^{-11}} \approx 6.10^{24}\text{kg}$$

***. Khối lượng của mặt trời**

Quả đất quay xung quanh mặt trời là do lực hấp dẫn của mặt trời đối với quả đất. Lực này bằng:

$$F = G \frac{MM'}{R'^2}$$

trong đó: M' là khối lượng của mặt trời, M là khối lượng của quả đất, R' là khoảng cách trung bình từ tâm quả đất đến tâm mặt trời.

Lực này làm cho quả đất quay xung quanh mặt trời nên nó đóng vai trò của lực hướng tâm. Nếu coi quỹ đạo chuyển động của quả đất quay xung quanh mặt trời là tròn với bán kính R' , vận tốc chuyển động là v thì lực hướng tâm F_n cho bởi công thức:

$$F_n = M \frac{v^2}{R'} \quad (4-9)$$

Vận tốc v của quả đất liên hệ với vận tốc góc ω theo công thức:

$$v = R'\omega = R' \frac{2\pi}{T} \quad (4-10)$$

Trong đó T là chu kỳ quay quả đất xung quanh mặt trời.

Thay giá trị của v ở (4-10) vào (4-9) ta được:

$$F_n = \frac{M}{R'} \left(\frac{2\pi}{T} R' \right)^2 = \frac{4\pi^2 MR'}{T^2} \quad (4-11)$$

So sánh (4-11) với (4-9), $F=F_n$, ta được:

$$\frac{4\pi^2 MR'}{T^2} = G \frac{MM'}{R'^2}$$

Từ đó suy ra khối lượng của mặt trời:

$$M' = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{R'^3}{G}$$

Khoảng cách trung bình từ tâm quả đất đến tâm mặt trời là $R' = 149.10^6 \text{ km}$, thời gian quả đất quay một vòng xung quanh mặt trời là 365 ngày, thay vào công thức vừa tìm được, ta tính được: $M' \approx 2.10^{30} \text{ kg}$.

4.2. TRƯỜNG HẤP DẪN

Để giải thích lực hấp dẫn, người ta cho rằng xung quanh một vật có khối lượng tồn tại một trường hấp dẫn. Biểu hiện cụ thể của trường hấp dẫn là bất kỳ vật nào có khối lượng đặt tại một vị trí trong không gian của trường hấp dẫn đều bị chịu tác dụng của lực hấp dẫn. Trong bài này chúng ta xét những tính chất tổng quát của trường hấp dẫn.

4.2.1. Định luật bảo toàn mômen động lượng

Khảo sát chuyển động của chất điểm khối lượng (m) trong trường hấp dẫn của chất điểm khối lượng (M) đặt cố định tại một điểm O. Chọn O làm gốc tọa độ.

Định lý mômen động lượng áp dụng đối với chất điểm (m):

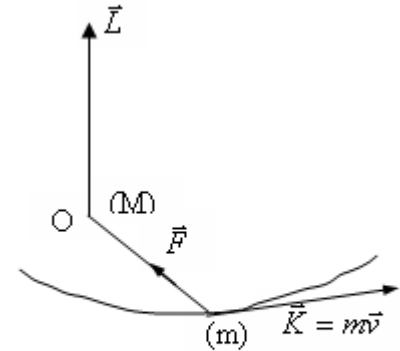
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{O(\vec{F})}$$

Nhưng lực \vec{F} luôn luôn hướng tâm O nên

$$\vec{M}_{O(\vec{F})} = 0 \text{ và } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ do đó } \vec{L} = \text{const}$$

Vậy khi chất điểm (m) chuyển động trong trường hấp dẫn của chất điểm (M) thì mômen động lượng của (m) là một đại lượng được bảo toàn.

Hệ quả: chất điểm (m) chuyển động trên quỹ đạo phẳng, mặt phẳng quỹ đạo của (m) vuông góc với \vec{L}



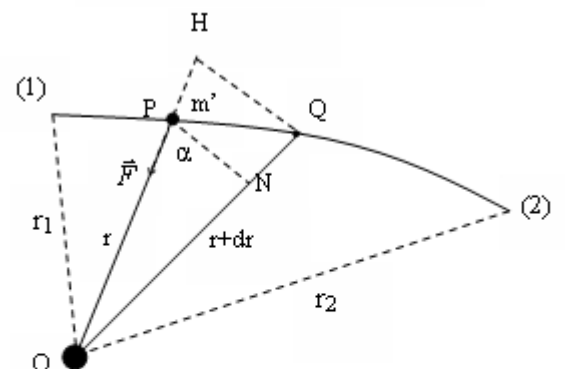
Hình 4-2
Mômen động lượng trong trường hấp dẫn

4.2.2. Tính chất thế của trường hấp dẫn

Tính công của lực hấp dẫn \vec{F} tác dụng lên chất điểm (m) chuyển động trong trường hấp dẫn của chất điểm (M), khi (m) chuyển dời từ một điểm (1) đến điểm (2) trên quỹ đạo.

Công của lực \vec{F} trong chuyển dời vi phân $d\vec{s}$ là:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \alpha$$



Hình 4-3
Minh họa tính công của lực hấp dẫn

Từ hình vẽ ta có :

$$|d\vec{s}| \cdot \cos \alpha = -dr$$

$$\text{Vậy } dA = -|\vec{F}| \cdot dr = -G \frac{Mm}{r^2} dr$$

Công của lực \vec{F} trong chuyển dời của (m) từ điểm (1) đến điểm (2) là :

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\int_{r_1}^{r_2} F dr = -\int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr \\ A_{12} &= -\left(G \frac{Mm}{r_1} \right) - \left(G \frac{Mm}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (4-12)$$

Ta thấy công của lực hấp dẫn \vec{F} không phụ thuộc vào đường dịch chuyển mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu (1) và vị trí cuối (2). Vậy trường hấp dẫn của chất điểm (M) là trường lực thế.

Tổng quát, người ta chứng minh rằng trường hấp dẫn Newton là trường lực thế.

Hệ quả :

Thế năng của chất điểm (m) trong trường hấp dẫn của chất điểm (M) tại vị trí (1) là :

$$W_t(1) = -G \frac{Mm}{r_1} + C$$

Tại vị trí (2) là :

$$W_t(2) = -G \frac{Mm}{r_2} + C$$

Tổng quát thế năng của chất điểm (m) tại vị trí cách O một khoảng r :

$$W_t = -G \frac{Mm}{r} + C$$

Trong đó C là hằng số tùy ý chọn, có giá trị bằng thế năng tại ∞

$$W_t(\infty) = C$$

4.2.3. Định luật bảo toàn cơ năng trong trường hấp dẫn

Vì trường hấp dẫn là trường lực thế nên khi chất điểm (m) chuyển động trong trường hấp dẫn thì cơ năng của nó được bảo toàn

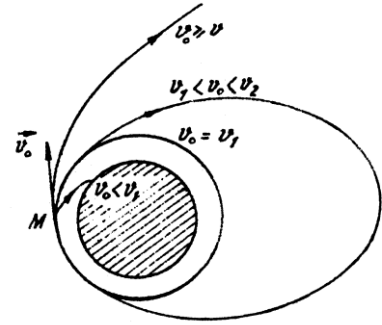
$$W = \frac{mv^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \text{const}$$

Vậy khi r tăng thế năng tăng thì động năng giảm và ngược lại

4.2.4. Chuyển động trong trường hấp dẫn của quả đất

Nếu từ một điểm A nào đó trong trường hấp dẫn của quả đất ta bắn một viên đạn khối lượng m với vận tốc ban đầu v_0 thì lý thuyết và thực nghiệm chứng tỏ rằng tùy theo trị số của v_0 , có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau (hình 4-4):

- * Viên đạn rơi trở về quả đất.
- * Viên đạn bay vòng quanh quả đất theo một quỹ đạo kín (tròn hoặc elip).
- * Viên đạn bay ngày càng xa quả đất.



Hình 4-4. Chuyển động trong trường hấp dẫn của quả đất

a. Vận tốc vũ trụ cấp 1

Trị số vận tốc ban đầu v_0 cần thiết để viên đạn được bắn lên bay vòng quanh quả đất theo quỹ đạo tròn gọi là *vận tốc vũ trụ cấp 1*.

Ta hãy tính giá trị đó. Giả sử viên đạn bay xung quanh quả đất, cách mặt đất không xa lắm. Khi đó, bán kính quỹ đạo của nó gần bằng bán kính quả đất. Gia tốc hướng tâm của viên đạn ở đây bằng gia tốc trọng trường:

$$a_0 = g_0 = \frac{v_0^2}{R}$$

Từ đó suy ra:

$$v_1 = \sqrt{Rg_0} = \sqrt{6370000 \cdot 9,8} = 7901 \text{ m/s} = 7,9 \text{ km/s}$$

Như vậy, nếu viên đạn bắn lên có $v_0 < 7,9 \text{ km/s}$ thì nó sẽ bị hút trở về mặt đất, nếu viên đạn bắn lên có $v_0 > 7,9 \text{ km/s}$ (nhưng nhỏ hơn v_2) thì nó sẽ chuyển động với quỹ đạo êlip xung quanh quả đất. Nếu $v_0 = v_1$, viên đạn chuyển động xung quanh quả đất với quỹ đạo tròn.

b. Vận tốc vũ trụ cấp 2

Giả sử viên đạn xuất phát từ A cách tâm quả đất một khoảng bằng bán kính R của quả đất, vận tốc ban đầu v_0 và bay ngày càng xa quả đất. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng đối với viên đạn ta có:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = \frac{mv_\infty^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{\infty} \right)$$

$$\text{Vì } \frac{mv_\infty^2}{2} \geq 0 \text{ nên } \frac{mv_0^2}{2} \geq G \frac{Mm}{R}$$

$$\text{Ta suy ra: } v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Tại mặt đất, gia tốc trọng trường $g_0 = G \frac{M}{R^2}$. Do đó:

$$v_0 \geq \sqrt{2g_0 R}$$

Giá trị tối thiểu của v_0 chính là vận tốc vũ trụ cấp 2.

$$v_2 = \sqrt{2g_0 R} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 6370000} = 11173,7 \text{ m/s} \approx 11,2 \text{ km/s}.$$

HƯỚNG DẪN HỌC CHƯƠNG 4

I. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU:

Sau khi nghiên cứu chương 4, yêu cầu sinh viên:

1. Nắm vững định luật Newton về hấp dẫn vũ trụ.
2. Nắm được ứng dụng của định luật Newton về hấp dẫn vũ trụ.
3. Nắm được tính chất thế của trường hấp dẫn và định luật bảo toàn cơ năng trong trường hấp dẫn.

II. TÓM TẮT NỘI DUNG

1. Định luật : Hai chất điểm m và m' đặt cách nhau một khoảng r sẽ hút nhau với một lực có phương nằm trên đường thẳng nối hai chất điểm đó, có độ lớn tỷ lệ thuận với hai khối lượng m và m' và tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách.

$$F = F' = G \frac{m.m'}{r^2}$$

G là hệ số tỷ lệ gọi là hằng số hấp dẫn.

Trong hệ đơn vị SI thì $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

2. Ứng dụng định luật Newton về hấp dẫn vũ trụ

a. Sự thay đổi của gia tốc trọng trường theo độ cao.

Gọi g là gia tốc trọng trường tại độ cao h , g_0 là gia tốc trọng trường trên bề mặt trái đất:

$$g = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R} \right)$$

b. Tính khối lượng của các thiên thể

*** Khối lượng của quả đất**

Khối lượng M của quả đất được tính theo công thức sau:

$$M = \frac{g_0 R^2}{G}$$

Khối lượng của mặt trời được tính theo công thức sau:

$$M' = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{R'^3}{G}$$

Trong đó khoảng cách trung bình từ tâm quả đất đến tâm mặt trời là $R' = 149.10^6 \text{ km}$, thời gian quả đất quay một vòng xung quanh mặt trời là 365 ngày, thay vào công thức vừa tìm được, ta tính được: $M' \approx 2.10^{30} \text{ kg}$.

3. Trường hấp dẫn

Tính công của lực hấp dẫn \vec{F} tác dụng lên chất điểm (m) chuyển động trong trường hấp dẫn của chất điểm (M), khi (m) chuyển dời từ một điểm (1) đến điểm (2) trên quỹ đạo.

Công của lực \vec{F} trong chuyển dời của (m) từ điểm (1) đến điểm (2) là :

$$A_{12} = -\left(G \frac{Mm}{r_1}\right) - \left(G \frac{Mm}{r_2}\right)$$

Ta thấy công của lực hấp dẫn \vec{F} không phụ thuộc vào đường dịch chuyển mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu (1) và vị trí cuối (2). Vậy trường hấp dẫn của chất điểm (M) là trường lực thế.

Tổng quát, người ta chứng minh rằng trường hấp dẫn Newton là trường lực thế.

Vậy thế năng của chất điểm (m) tại vị trí cách O một khoảng r :

$$W_t = -G \frac{Mm}{r} + C$$

Trong đó C là hằng số tùy ý chọn, có giá trị bằng thế năng tại ∞

$$W_t(\infty) = C$$

4. Định luật bảo toàn cơ năng trong trường hấp dẫn

Vì trường hấp dẫn là trường lực thế nên khi chất điểm (m) chuyển động trong trường hấp dẫn thì cơ năng của nó được bảo toàn

III. CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Phát biểu định Newton về hấp dẫn vũ trụ.
2. Tìm biểu thức gia tốc phụ thuộc vào độ cao.
3. Chứng minh rằng khối lượng mặt trời tính theo công thức : $M' = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{R'^3}{G}$
4. Chứng minh trường hấp dẫn là trường lực thế.

5. Dựa vào định luật Newton về hấp dẫn vũ trụ, tìm vận tốc vũ trụ cấp I, cấp II.

IV. BÀI TẬP

Thí dụ : Một vệ tinh nhân tạo khối lượng 500kg được đưa lên độ cao 500km so với mặt đất nhờ một tên lửa. Xác định :

a. Gia tốc trọng trường ở độ cao 500km và lực hấp dẫn của trái đất tác dụng lên vệ tinh ở độ cao này. Lấy bán kính trái đất 6500km, gia tốc trọng trường tại mặt đất $g = 9,8\text{m/s}^2$.

b. Vận tốc phóng vệ tinh nhân tạo theo phương vuông góc với bán kính trái đất ở độ cao 500km để vệ tinh này quay quanh trái đất theo một quỹ đạo tròn.

Bài giải :

a. Gia tốc trọng trường ở độ cao h :

$$g = g_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} = 9,8 \left(1 + \frac{500}{6500}\right)^{-2} = 8,45\text{m/s}^2$$

Lực hấp dẫn của trái đất tác dụng lên vệ tinh :

$$F_{hd} = P = mg = 500.8,45 = 4225\text{N}$$

b. Vệ tinh quay quanh trái đất theo quỹ đạo tròn bán kính $R + h$. Trong trường hợp này lực hấp dẫn đóng vai trò là lực hướng tâm :

$$F_{hd} = F_{ht} \rightarrow mg = \frac{mv^2}{R + h}$$

Từ đó suy ra vận tốc dài của vệ tinh ở độ cao 500km bằng :

$$v = \sqrt{g(R + h)} = \sqrt{8,45.(6500.10^3 + 500.10^3)} \approx 7,69\text{km/s}$$

Bài tập tự giải

1. Khối lượng của mặt trăng nhỏ hơn khối lượng của trái đất 81 lần, đường kính của mặt trăng bằng 3/11 đường kính quả đất. Hỏi một người trên mặt đất nặng 600N, thì lên mặt trăng sẽ nặng bao nhiêu?

Đáp số : $P' = 99,6\text{N}$

2. Bán kính của mặt trời lớn gấp 110 lần bán kính trái đất, khối lượng riêng của mặt trời bằng 1/4 khối lượng riêng của trái đất. Hỏi gia tốc rơi tự do ở trên bề mặt mặt trời bằng bao nhiêu? Cho gia tốc rơi tự do ở trên mặt đất $g = 9,8\text{m/s}^2$.

Đáp số : $g = 269,5\text{ m/s}^2$

3. Khoảng cách giữa trái đất và mặt trăng là 384000km. Khối lượng của trái đất là $6 \cdot 10^{27}$ g và của mặt trăng là $7,35 \cdot 10^{25}$ g. Xác định vị trí của điểm tại đó lực hút của mặt trăng và trái đất lên một chất điểm cân bằng nhau.

Đáp số : $x = 2,95 \cdot 10^5$ km

4. Tìm vận tốc dài của trái đất quay quanh mặt trời, biết rằng khối lượng của mặt trời là $2 \cdot 10^{30}$ kg, khoảng cách trung bình giữa trái đất và mặt trời $1,5 \cdot 10^8$ km.

Đáp số : $v = 30$ km/s

5. Tìm vận tốc dài của một vệ tinh nhân tạo của trái đất biết rằng quỹ đạo của vệ tinh là tròn. Vệ tinh ở độ cao trung bình $h = 1000$ km. Coi vệ tinh chỉ chịu ảnh hưởng lực hút của trái đất và ở độ cao trên, lực cản của không khí không đáng kể. Cho bán kính trái đất $R = 6370$ km.

Đáp số : $v = 7,34$ km/s

6. – Tìm vận tốc vũ trụ cấp II của mặt trăng (nghĩa là vận tốc của một tên lửa phóng từ bề mặt của mặt trăng cần phải có để nó thoát khỏi sức hút của mặt trăng).

Đáp số : $v_{II} = \sqrt{2g_0R} = 2,38$ km/s