

Problèmes des taquins 4×4

(et plus généralement $n \times n$)

Salem BENFERHAT

Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL-CNRS)

email : benferhat@cril.fr

Remarques préliminaires

Problème du taquin $n \times n$

Question

Est-il facile de résoudre ce taquin 4×4 ?

Problème du taquin $n \times n$

Question

Est-il facile de résoudre ce taquin 4×4 ?

■	2	1	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15



■	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Exercice

■	2	1	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15



■	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Une remarque et une question

- Ce taquin n'admet pas de solution.

Exercice

■	2	1	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15



■	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Une remarque et une question

- Ce taquin n'admet pas de solution.
- Enoncer les conditions d'insatisfiabilité des taquins 4×4 ?

**Remarques
sur la satisfiabilité
des taquins 4×4**

Taquin 4×4 solvables difficiles

Taquin difficiles

- Les taquin les plus difficiles 4×4 nécessitent 80 déplacements de la case 'blanc' pour les résoudre.

Taquin 4×4 solvables difficiles

Taquin difficiles

- Les taquin les plus difficiles 4×4 nécessitent 80 déplacements de la case 'blanc' pour les résoudre.
- Cependant, ils se traitent (peut-être un peu difficile à implémenter) avec l'introduction des heuristiques avancées (et des techniques de compilation ou de pré-traitements).

Taquin 4×4 solvables difficiles

Taquin difficiles

- Les taquin les plus difficiles 4×4 nécessitent 80 déplacements de la case 'blanc' pour les résoudre.
- Cependant, ils se traitent (peut-être un peu difficile à implémenter) avec l'introduction des heuristiques avancées (et des techniques de compilation ou de pré-traitements).
- Voir TP.

Taquin 4×4 insatisfiables

Notion d'inversion : Rappels

- La notion d'inversion est la même que celle qui a été définie pour les taquins 3×3 .

Notion d'inversion : Rappels

- La notion d'inversion est la même que celle qui a été définie pour les taquin 3×3 .
- Une inversion est un couple de deux nombres (a, b) qui ne sont pas ordonnés de la même manière dans le taquin initial et dans le taquin but. C'est-à-dire :

Notion d'inversion : Rappels

- La notion d'inversion est la même que celle qui a été définie pour les taquins 3×3 .
- Une inversion est un couple de deux nombres (a, b) qui ne sont pas ordonnés de la même manière dans le taquin initial et dans le taquin but. C'est-à-dire :
 - dans le taquin but, le premier nombre a se trouve avant (resp. après) le deuxième nombre b ,

Taquin 4×4 insatisfiables

Notion d'inversion : Rappels

- La notion d'inversion est la même que celle qui a été définie pour les taquins 3×3 .
- Une inversion est un couple de deux nombres (a, b) qui ne sont pas ordonnés de la même manière dans le taquin initial et dans le taquin but. C'est-à-dire :
 - dans le taquin but, le premier nombre a se trouve avant (resp. après) le deuxième nombre b ,
 - alors que dans le taquin initial, le premier nombre a se trouve après (resp. avant) le deuxième nombre b .

Taquin 4×4 insatisfiables

Exemple :

■	2	1	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	15	14



■	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Ce taquin admet deux inversions :

Taquin 4×4 insatisfiables

Exemple :

■	2	1	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	15	14



■	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Ce taquin admet deux inversions :

- Le couple (2,1) est une inversion (les deux nombres 2 et 1 ne sont pas dans le même ordre dans le taquin initial et dans le taquin final),

Taquin 4×4 insatisfiables

Exemple :

■	2	1	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	15	14



■	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Ce taquin admet deux inversions :

- Le couple (2,1) est une inversion (les deux nombres 2 et 1 ne sont pas dans le même ordre dans le taquin initial et dans le taquin final),
- Le couple (15,14) est également une inversion.

Taquin 4×4 insatisfiables

Taquin but et nombre d'inversion : rappels

- Si le nombre d'inversion est égal à 0 alors le taquin est un taquin but.

Taquin 4×4 insatisfiables

Taquin but et nombre d'inversion : rappels

- Si le nombre d'inversion est égal à 0 alors le taquin est un taquin but.
- C'est-à-dire tous les couples de nombres sont ordonnés de la même façon dans le taquin initial et dans le taquin final.

Taquin 4×4 insatisfiables : intuitivement

- Un déplacement de la case "blanc" peut augmenter, diminuer ou conserver le nombre d'inversion.

Taquin 4×4 insatisfiables : intuitivement

Déplacements horizontaux de la case "blanc" :

Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc"
(c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite)

Taquin 4×4 insatisfiables : intuitivement

Déplacements horizontaux de la case "blanc" :

Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite)

- ne modifie pas le nombre de d'inversion.

Déplacements horizontaux de la case "blanc" :

Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite)

- ne modifie pas le nombre de d'inversion.
- En effet, l'ordre relatif des nombres du taquin n'est pas modifié.

Taquin 4×4 insatisfiables : intuitivement

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le bas ou vers le haut) :

Taquin 4×4 insatisfiables : intuitivement

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le bas ou vers le haut) :
 - augmente le nombre d'inversion de ... (à définir) unités, ou

Taquin 4×4 insatisfiables : intuitivement

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le bas ou vers le haut) :
 - augmente le nombre d'inversion de ... (à définir) unités, ou
 - réduit le nombre d'inversion de ... (à définir) unités

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons :

- le déplacement de la case "blanc" vers le bas
- c'est-à-dire une permutation entre la case "blanc" et le nombre "d"

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons :

- le déplacement de la case "blanc" vers le bas
- c'est-à-dire une permutation entre la case "blanc" et le nombre "d"

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
X ₉	■	a	b
c	d	X ₁₀	X ₁₁



X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
X ₉	d	a	b
c	■	X ₁₀	X ₁₁

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons :

- le déplacement de la case "blanc" vers le bas
- c'est-à-dire une permutation entre la case "blanc" et le nombre "d"

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}




x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Nous rappelons que les nombres x_i ainsi que les nombres a, b, c et d sont tous différents et sont tous compris entre 1 et 15.

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	d	a	b
c	■	x ₁₀	x ₁₁

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- Le nombre d'inversion concernant les nombres x_i reste inchangé

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

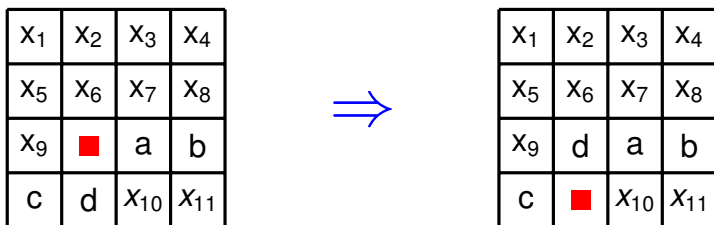


x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- Le nombre d'inversion concernant les nombres x_i reste inchangé
- En effet, l'ordre relatif entre :

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

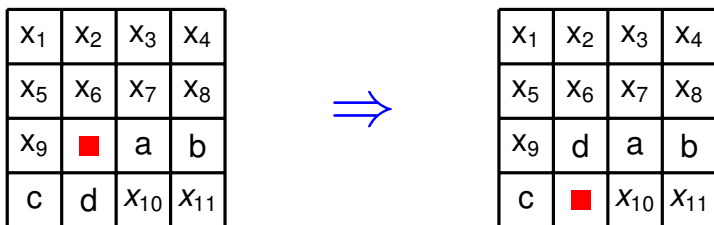
Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :



- Le nombre d'inversion concernant les nombres x_i reste inchangé
- En effet, l'ordre relatif entre :
 - un nombre x_i et

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

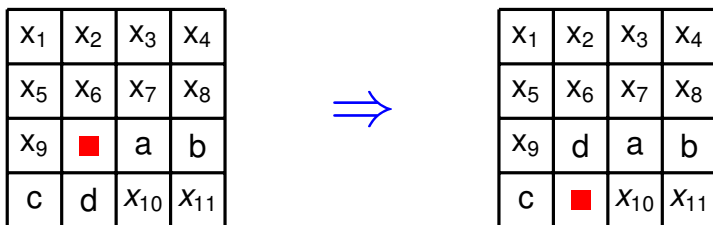
Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :



- Le nombre d'inversion concernant les nombres x_i reste inchangé
- En effet, l'ordre relatif entre :
 - un nombre x_i et
 - un des nombres de $\{a, b, c, d, x_j\}$


Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

Considérons le déplacement de la case "blanc" vers le bas :



- Le nombre d'inversion concernant les nombres x_i reste inchangé
- En effet, l'ordre relatif entre :
 - un nombre x_i et
 - un des nombres de $\{a, b, c, d, x_j\}$reste identique après le déplacement de la case "blanc".

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications


x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- La modification du nombre d'inversion ne dépend alors que de la relation entre le nombre d et les nombres a , b et c .

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquin's 4×4 unsatisfiable : justifications

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	d	a	b
c	■	x ₁₀	x ₁₁

Taquin's 4×4 unsatisfiable : justifications

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	d	a	b
c	■	x ₁₀	x ₁₁

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- (Cas 1) Si le nombre d est plus grand que chacun des nombres a , b et c alors :

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications


x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}




x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- (Cas 1) Si le nombre d est plus grand que chacun des nombres a , b et c alors :
 - Dans le taquin de gauche, les couples (a,d) , (b,d) et (c,d) sont dans le bon ordre par rapport au taquin final

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c		x_{10}	x_{11}

- (Cas 1) Si le nombre d est plus grand que chacun des nombres a, b et c alors :
 - Dans le taquin de gauche, les couples (a,d) , (b,d) et (c,d) sont dans le bon ordre par rapport au taquin final
 - Dans le taquin de droite, les couples (d,a) , (d,b) et (d,c) sont des inversions par rapport au taquin final

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- (Cas 1) De ce fait, si le nombre d est plus grand que les nombres a , b et c alors le nombre d'inversion **augmente de 3**.

Taquin's 4×4 insatisfiable : justifications

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications


x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	d	a	b
c	■	x ₁₀	x ₁₁

- (Cas 2) De manière symétrique, si le nombre d est plus petit que les nombres a, b et c alors le nombre d'inversion **diminue de 3**.

Taquin 4×4 insatisfiable : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiable : justifications

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	d	a	b
c	■	x ₁₀	x ₁₁

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications


x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- (Cas 3) Si le nombre d est plus grand qu'un des nombres (par exemple d est plus grand que le nombre a) mais plus petit que les deux autres (par exemple d est plus petit que les nombres b, c) alors :
 - Dans le taquin de gauche (a,d) est bien ordonné mais (b, d) et (c,d) ne le sont pas.
 - Dans le taquin de droite (a,d) n'est pas bien ordonné mais (b, d) et (d,c) le sont.

Taquin's 4×4 insatisfiable : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

- Si le nombre d est plus grand qu'un des nombres (par exemple d est plus grand que le nombre a) mais plus petit que les deux autres (par exemple d est plus petit que les nombres b, c) alors le nombre d'inversion **diminue de 1**.

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁

Taquin's 4×4 insatisfiable : justifications

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	■	a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉	d	a	b
c	■	x ₁₀	x ₁₁

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}




x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

De manière symétrique :

- (Cas 4) Si le nombre d est plus petit qu'un des nombres (par exemple d est plus petit que le nombre a) mais plus grand que les deux autres (par exemple d est plus grand que les nombres b, c) alors le nombre d'inversion **augmente de 1**.

Taquin 4×4 insatisfiables : justifications

De manière symétrique on peut analyser l'impact d'un déplacement de la case "blanc" vers le haut sur le nombre d'inversion.

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
x ₉		a	b
c	d	x ₁₀	x ₁₁

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

De manière symétrique on peut analyser l'impact d'un déplacement de la case "blanc" vers le haut sur le nombre d'inversion.


x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	■	a	b
c	d	x_{10}	x_{11}




x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c	■	x_{10}	x_{11}

Taquins 4×4 insatisfiables : justifications

De manière symétrique on peut analyser l'impact d'un déplacement de la case "blanc" vers le haut sur le nombre d'inversion.

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9		a	b
c	d	x_{10}	x_{11}



x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	d	a	b
c		x_{10}	x_{11}

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite) ne modifie pas le nombre de d'inversion.

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite) ne modifie pas le nombre de d'inversion.
- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite) ne modifie pas le nombre de d'inversion.
- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite) ne modifie pas le nombre de d'inversion.
- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite) ne modifie pas le nombre de d'inversion.
- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou
 - une diminution de 3 inversions ou finalement

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement horizontal (sur la même ligne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers la gauche ou vers la droite) ne modifie pas le nombre de d'inversion.
- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou
 - une diminution de 3 inversions ou finalement
 - une diminution de 1 inversion.

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou
 - une diminution de 3 inversions

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou
 - une diminution de 3 inversions ou finalement
 - une diminution de 1 inversion.

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou
 - une diminution de 3 inversions ou finalement
 - une diminution de 1 inversion.
- De ce fait :
 - Si le nombre d'inversion du taquin initial est pair, alors un déplacement vertical produira un nom impair d'inversion dans le nouveau taquin

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- Un déplacement vertical (sur la même colonne) de la case "blanc" (c'est-à-dire vers le haut ou vers le bas) peut induire :
 - une augmentation de 3 inversions ou
 - une augmentation de 1 inversion, ou
 - une diminution de 3 inversions ou finalement
 - une diminution de 1 inversion.
- De ce fait :
 - Si le nombre d'inversion du taquin initial est pair, alors un déplacement vertical produira un nom impair d'inversion dans le nouveau taquin
 - Si le nombre d'inversion du taquin initial est impair, alors un déplacement vertical produira un nom pair d'inversion dans le nouveau taquin

Premier récapitulatif sur la dynamique des inversions dans les taquins 4×4

- De manière générale, une séquence de déplacements verticaux fera successivement alterner la parité du nombre d'inversions des taquins obtenues

**Un dernier point
à prendre en compte**

Taquin 4x4 insatisfiables non-solvables

Position de la case "blanc" ...

- Si la case "blanc" se trouve à la ligne d'indice 0 ou à l'indice 2, alors il faut un nombre "pair" de déplacements verticaux afin que le case "blanc" retrouve sa place finale et résoudre le taquin.
- Si la case "blanc" se trouve à la ligne d'indice 1 ou à l'indice 3, alors il faut un nombre "impair" de déplacements verticaux afin que le case "blanc" retrouve sa place finale et résoudre le taquin.

Taquin 4x4 insatisfiables non-solvables

En résumé ...

Que peut-on dire sur l'insatisfiabilité des taquins 4x4 en fonction du nombre d'inversion ?

Taquin 4×4 insatisfiables

En résumé ...

- Un taquin 4×4 est insatisfiable si :
 - le nombre d'inversion est impair et la case vide se trouve sur la ligne d'indice "0" ou "2",
 - ▶ En effet, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'inversion reste impair à chaque fois que la case blanc se trouve à la case 0

Taquin 4×4 insatisfiables

En résumé ...

- Un taquin 4×4 est insatisfiable si :
 - le nombre d'inversion est impair et la case vide se trouve sur la ligne d'indice "0" ou "2",
 - ▶ En effet, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'inversion reste impair à chaque fois que la case blanc se trouve à la case 0
- ou bien

Taquin 4×4 insatisfiables

En résumé ...

- Un taquin 4×4 est insatisfiable si :
 - le nombre d'inversion est impair et la case vide se trouve sur la ligne d'indice "0" ou "2",
 - ▶ En effet, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'inversion reste impair à chaque fois que la case blanc se trouve à la case 0ou bien
 - le nombre d'inversion est pair et la case vide se trouve sur la ligne d'indice "1" ou "3".
 - ▶ De même, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'inversion reste impair à chaque fois que la case blanc se trouve à la case 0

Exercise

Taquin $n \times n$ insatisfiables

Taquin $n \times n$

Supposons que n est impair. Que peut-on dire sur la satisfiabilité des taquin $n \times n$?