Funções Exponenciais

Texto baseado no livro:

Cálculo vol 1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial,* pois a variável x é o expoente.

Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma $f(x) = a^x$ onde a é uma constante positiva.

Vamos recordar o que isso significa:

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

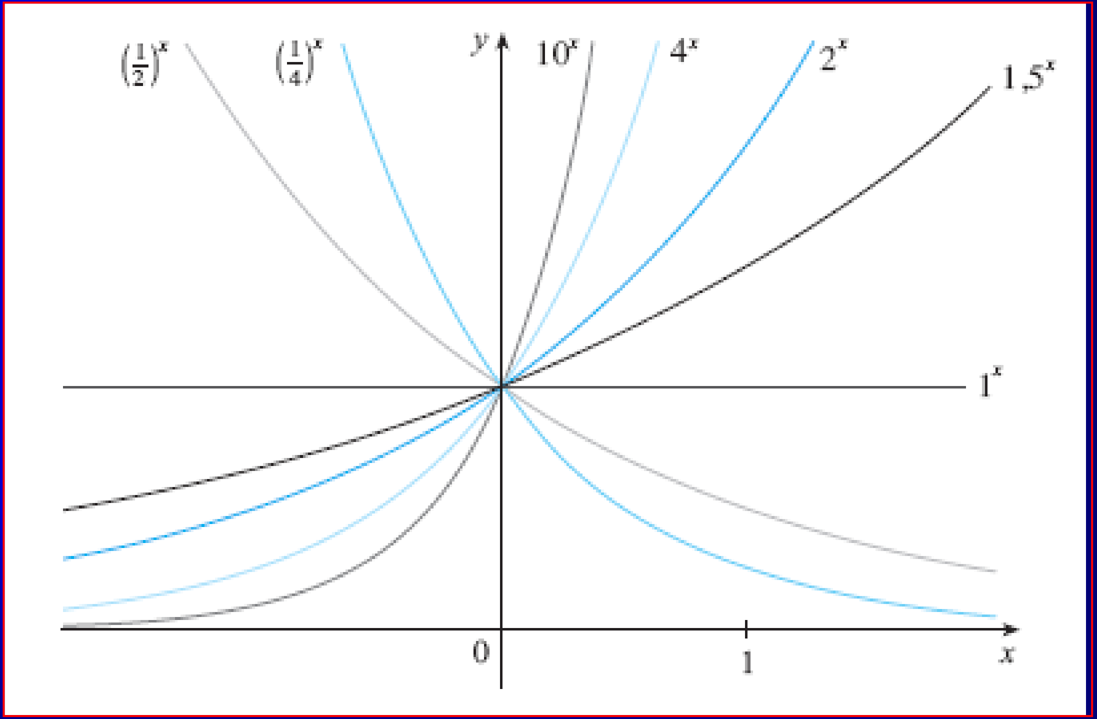
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

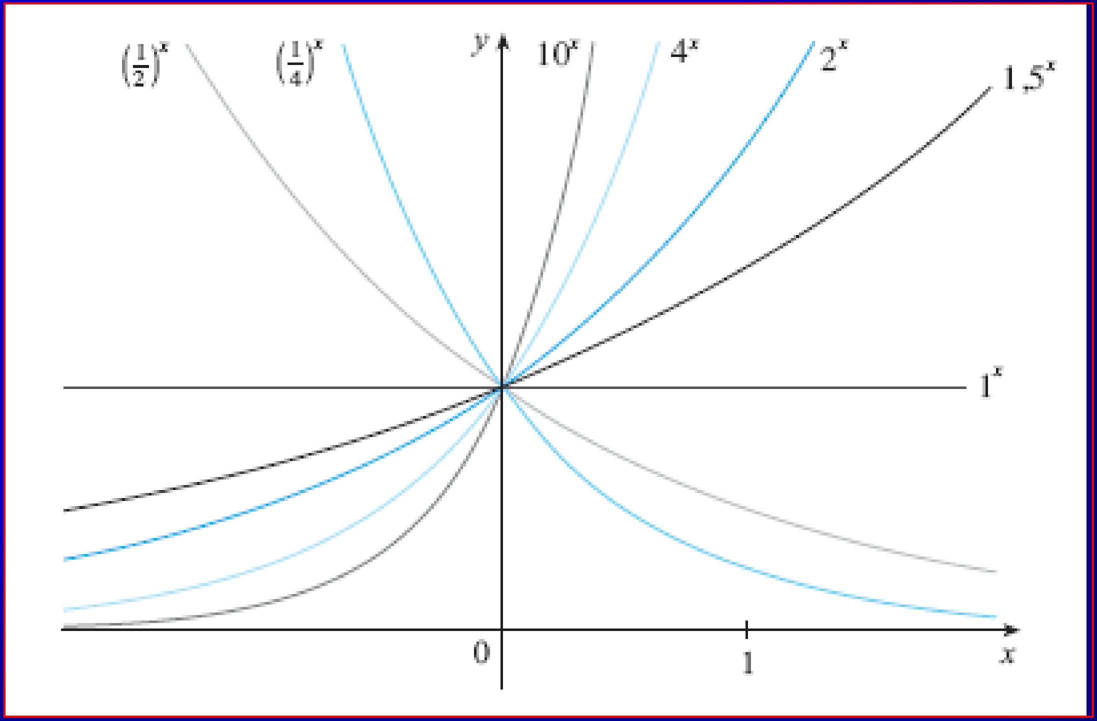
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão no quadro, para vários valores da base a .



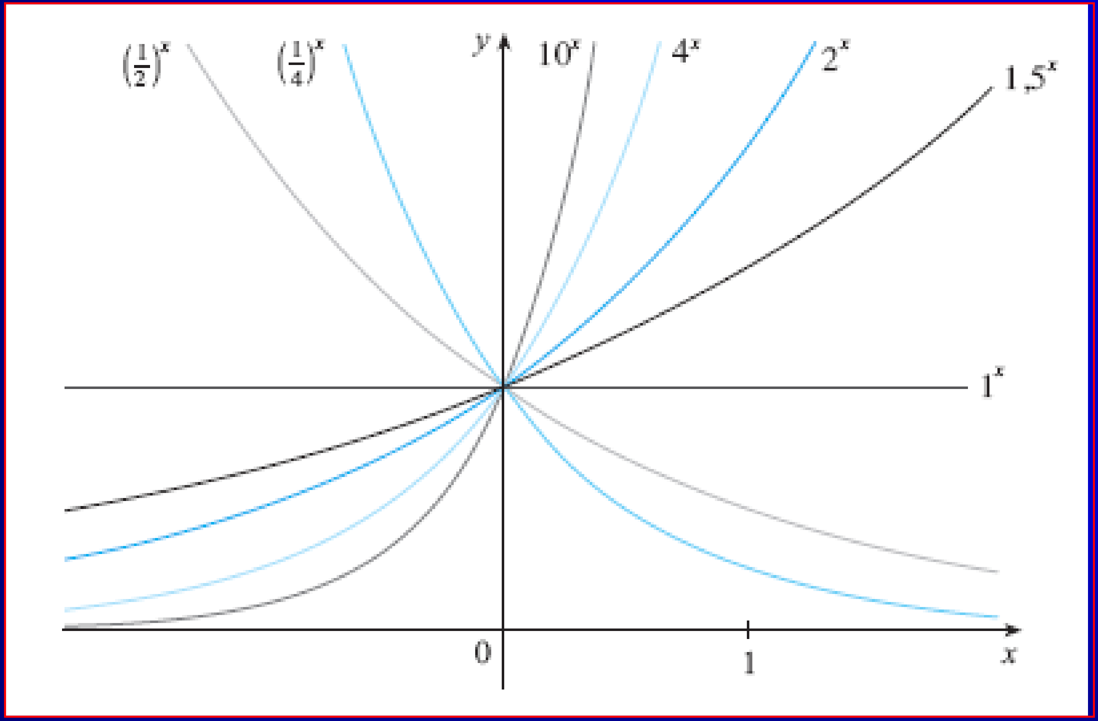
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto (0, 1), pois $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.



FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Você pode ver que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$.



Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce;

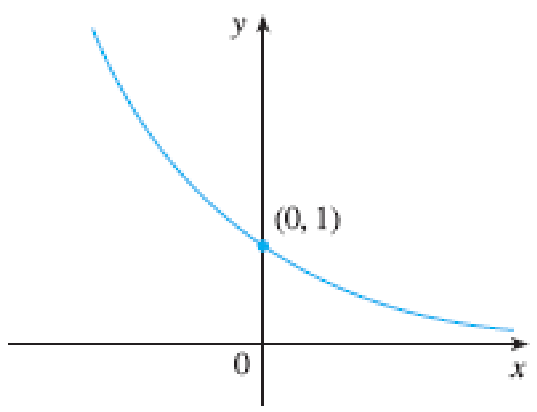
Se $a = 1$, ela é uma constante;

Se $a > 1$, ela cresce.

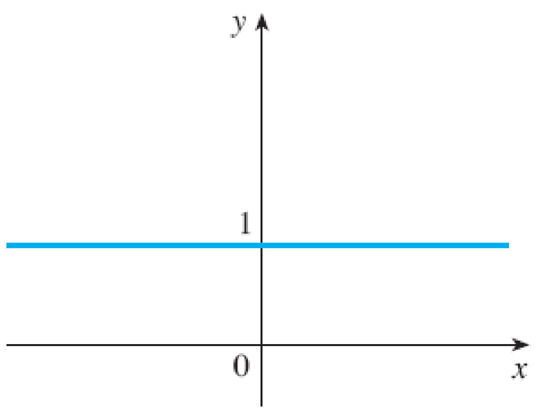
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Seguem as figuras desses três casos.

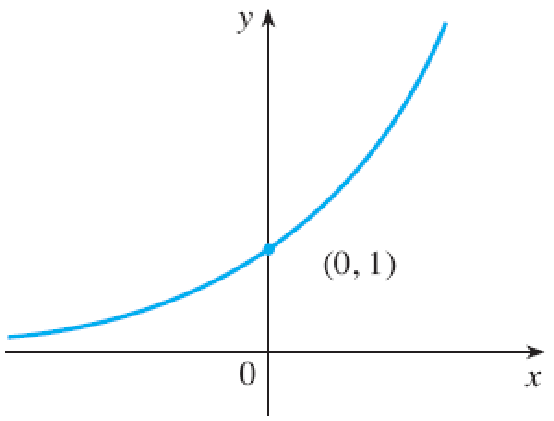
Observe que se $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem o domínio $\mathbb{R}$ e a imagem $(0, \infty)$.



(a) $y = a^x, 0 < a < 1$



(b) $y = 1^x$



(c) $y = a^x, a > 1$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir.

Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar.

Pode-se demonstrar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y.

PROPRIEDADE DOS EXPOENTES

Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = a^x a^{-y} = a^x / a^y$
3. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

A função exponencial ocorre com frequência em modelos matemáticos da natureza e da sociedade.

Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional.

APLICAÇÕES: POPULAÇÃO DE BACTÉRIAS

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo.

Suponhamos que tomando amostras da população em certos intervalos de tempo fique determinado que a população dobra a cada hora.

APLICAÇÕES: POPULAÇÃO DE BACTÉRIAS

Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1.000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Desse padrão percebemos que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

APLICAÇÕES: POPULAÇÃO DE BACTÉRIAS

Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças) esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

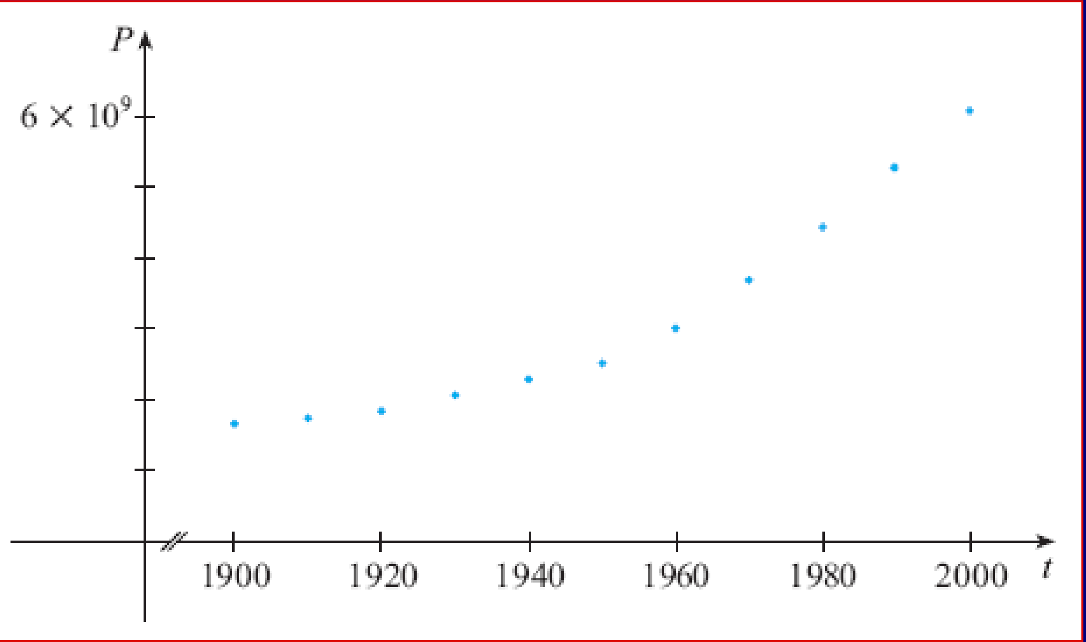
APLICAÇÕES: POPULAÇÃO HUMANA

O que pode ser dito sobre a população humana?

APLICAÇÕES: POPULAÇÃO HUMANA

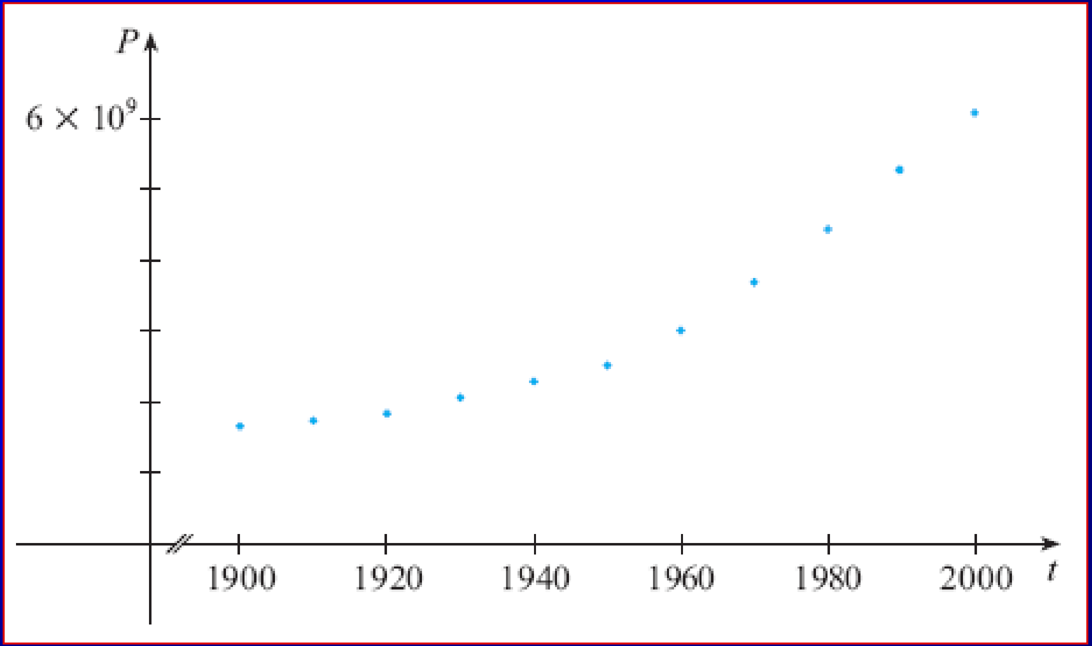
A tabela mostra os dados da população mundial do século XX, e a figura mostra o correspondente diagrama de dispersão.

Ano	População (milhões)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080



APLICAÇÕES: POPULAÇÃO HUMANA

O padrão dos dados da figura sugere um crescimento exponencial.



APLICAÇÕES: POPULAÇÃO HUMANA

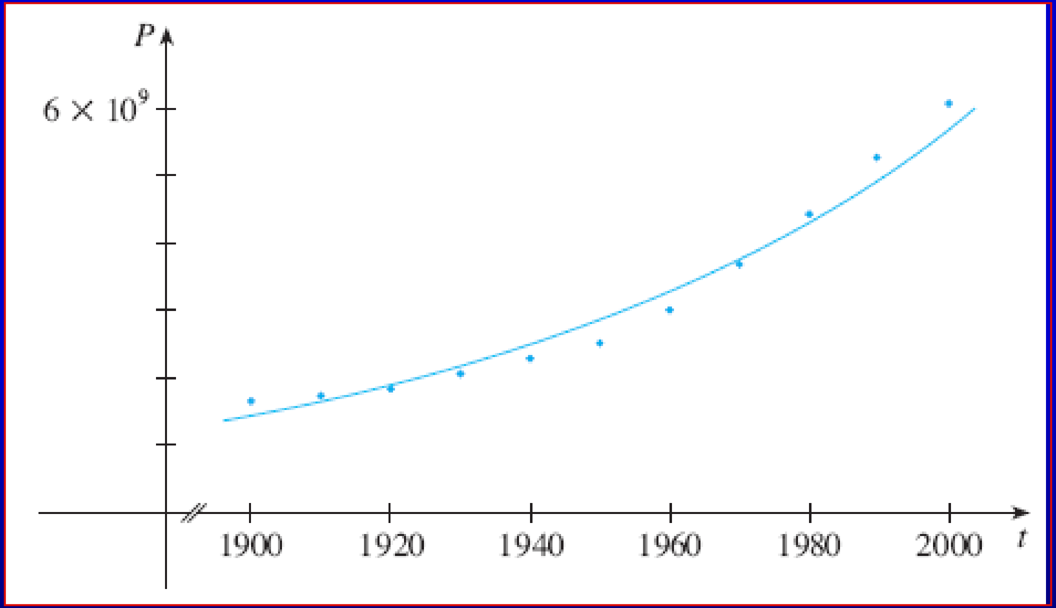
Assim, se usarmos um software matemático com capacidade para regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (0{,}008079266) \cdot (1{,}013731)^t$$

APLICAÇÕES: POPULAÇÃO HUMANA

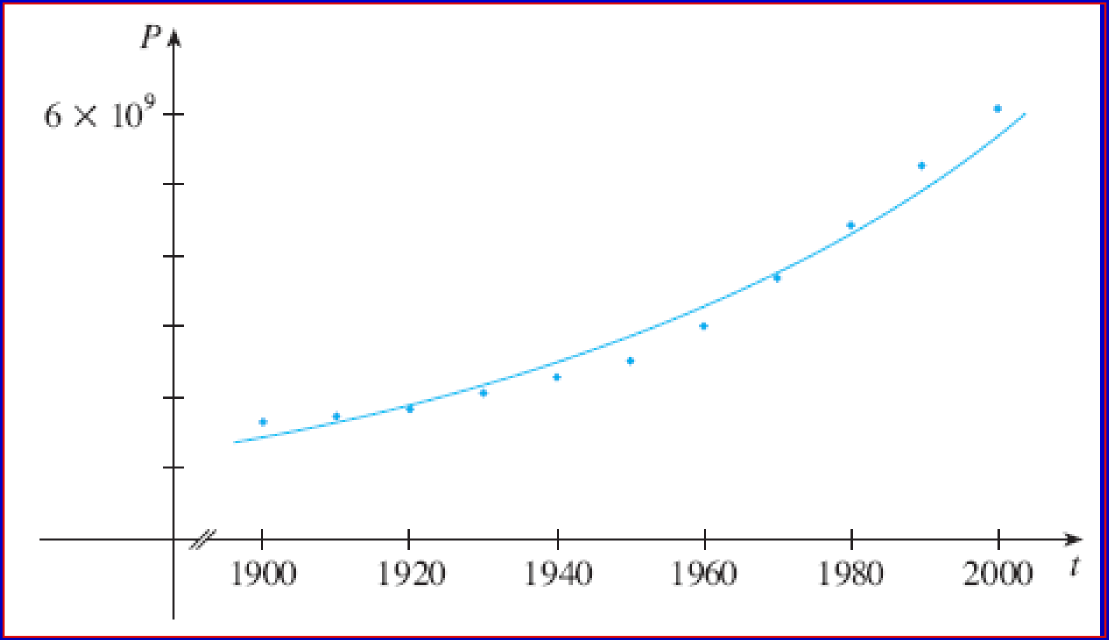
A figura mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais.

Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados.



APLICAÇÕES: POPULAÇÃO HUMANA

Os períodos de crescimento populacional lento podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 1930.



O NÚMERO *e*

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo.

Na escolha de uma base a pesa muito a forma como a função $y = a^x$ cruza o eixo y.

O NÚMERO *e*

De fato, existe um número assim e ele é denotado pela letra e.

Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente por ser a primeira letra da palavra *exponencial*.

$$e \approx 2{,}71$$

O NÚMERO *e*

Vendo as figuras da esquerda, não nos surpreende que o gráfico de $y = e^x$ esteja entre $y = 2^x$ e $y = 3^x$ (veja a figura à direita).