Derivadas

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Vimos que as derivadas são interpretadas como inclinações e taxas de variação.

Usamos a definição de derivada para calcular as derivadas de funções definidas por fórmulas.

Mas seria tedioso e trabalhoso se sempre usássemos a definição.

Nesta aula desenvolveremos regras para encontrar as derivadas sem usar diretamente a definição.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Essas regras de derivação nos permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de:

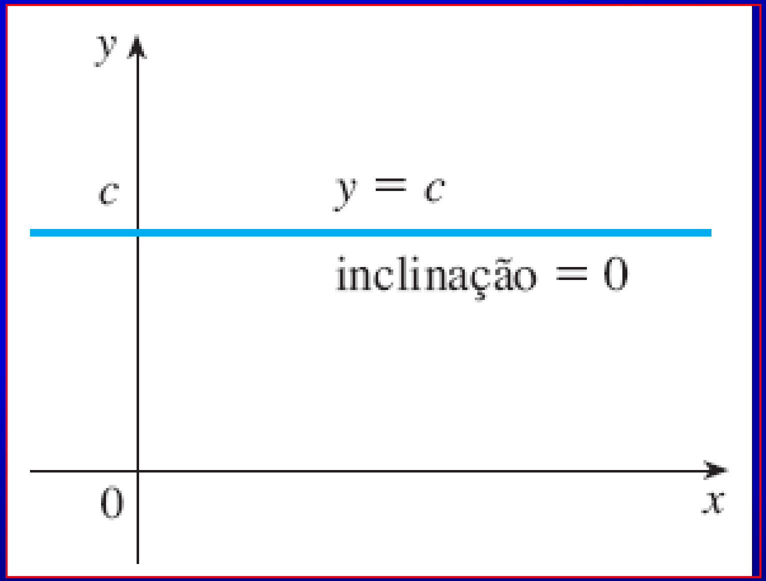
polinômios;
funções racionais;
funções algébricas;
funções exponenciais e logarítmicas;
funções trigonométricas

FUNÇÃO CONSTANTE

Vamos iniciar com a função mais simples, a função constante, $f(x) = c$.

O gráfico dessa função é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0; logo, devemos ter

$$f'(x) = 0 \;.$$



FUNÇÃO CONSTANTE

A demonstração formal a partir da definição de uma derivada é simples:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

REGRA DA POTÊNCIA

Se n for um real qualquer, então:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n}\right) = nx^{n-1}$$

REGRA DA POTÊNCIA EXEMPLO

Ilustraremos a Regra da Potência

Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.

Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$.

$$\frac{d}{dr}\left(r^3\right) = 3r^2$$

INTEIROS NEGATIVOS

O que dizer sobre as funções potências com os expoentes negativos: Por exemplo: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

de modo que a Regra da Potência é verdadeira quando $n = -1$.

De fato, a Regra da Potência é válida também para todo inteiro negativo.

FRAÇÕES

E se o expoente for uma fração?

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

REGRA DA POTÊNCIA EXEMPLO

Derive:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Em cada caso reescrevemos a função como uma potência de x.

REGRA DA POTÊNCIA **EXEMPLO 2 a**

Uma vez que $f(x) = x^2$, usamos a Regra da Potência com $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2})$$

$$= -2x^{-2-1}$$

$$= -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

REGRA DA POTÊNCIA

EXEMPLO 2 b

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^{\left(\frac{2}{3}\right)-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

RETAS TANGENTES EXEMPLO

Ache a equação da reta tangente à curva

$$y = x\sqrt{x}$$

no ponto (1, 1).

RETA TANGENTE **EXEMPLO**

A derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$$f\,'(x) = \tfrac{3}{2}\,x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}\,x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Logo, a inclinação da reta tangente em (1, 1) $(x_0 = y_0 = 1)$ é $f\,'(1) = \tfrac{3}{2}$

(Lembrando que a Equação da reta tangente é: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$)

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1)$$

ou $y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DAS ANTIGAS

Quando as novas funções são formadas a partir de antigas por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das antigas funções.

Em particular, a fórmula a seguir nos diz que *a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.*

Ou seja, se $g(x) = cf(x)$. Então:

$$g'(x) = cf'(x)$$

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTIGAS EXEMPLO

a. $$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= 3(4x^3) = 12x^3$$

b. $$\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}\left[(-1)x\right]$$

$$= -1\frac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$$

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTIGAS

EXEMPLO

$$\frac{d}{dx}(5x) = 5\frac{d}{dx}[x^1]$$

$$= 5\frac{d}{dx}(1.x^{1-1}) = 5(x^0) = 5\,.\,1 = 5$$

$$\frac{d}{dx}(ax) = a\frac{d}{dx}[x^1] = a\frac{d}{dx}(1.x^{1-1}) = a(x^0) = a\,.\,1 = a$$

Para qualquer $a \in \mathbb{R}$

A REGRA DA SOMA

A regra a seguir nos diz que *a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas de suas funções.*

Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

A REGRA DA SOMA

A Regra da Soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções.

Por exemplo, usando esse teorema duas vezes, obtemos

$$
\begin{aligned}
(f+g+h)' &= \left[(f+g)+h\right]' \\
&= (f+g)' + h' \\
&= f' + g' + h'
\end{aligned}
$$

A REGRA DA DIFERENÇA

Escrevendo *f* - *g* como *f* + (-1)*g* e aplicando a Regra da Soma e a Regra da Multiplicação por Constante, obtemos a seguinte fórmula.

Se f e *g* forem ambas deriváveis, então:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTIGAS

As três regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para derivar qualquer polinômio, como ilustram os exemplos a seguir.

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTIGAS **Exemplo**

As três regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para derivar qualquer polinômio, como ilustram os exemplos a seguir.

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTIGAS Exemplo

Calcule a derivada da função:

$$y = x^4 - 6x^2 + 4$$

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

A derivada da função exponencial $f(x) = a^x$, é dada por:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x lna$$

A derivada da função exponencial natural $f(x) = e^x$, é dada por:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

FUNÇÕES LOGARITMICAS

A derivada da função logarítmica $f(x) = \log_a x,$ é dada por:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\, lna}$$

A derivada da função logarítmica natural $f(x) = lnx$, é dada por:

$$\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$$

Exemplos: Calcule as derivadas:

1. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 8x + \frac{1}{2}$

2. $f(x) = -2x^5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{3} = -2x^5 + 4x^{-1} + \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\quad f'(x) = -10x^4 - 4x^{-2} = -10x^4 - \frac{4}{x^2}$

3. $f(x) = 2^x \Rightarrow$ $\quad f'(x) = 2^x\, ln2$

4. $f(x) = -3e^x \Rightarrow$ $\quad f'(x) = -3e^x$

5. $f(x) = -x^2 + 3^x - 5e^x - \frac{1}{x} + 32 \Rightarrow$ $\quad f'(x) = -2x + 3^x ln3 - 5e^x + \frac{1}{x^2}$

Regra para Derivar o Produto de Duas Funções.

Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Ou: $$\boxed{[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

Em palavras: A *derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função.*

AS REGRAS DO PRODUTO EXEMPLO 1 a

a) Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

Pela Regra do Produto, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1$$

$$= (x+1)e^x$$

AS REGRAS DO PRODUTO EXEMPLO 1 b

b. Encontre segunda derivada $f''(x)$.

Usando a Regra do Produto uma segunda vez, obtemos

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[(x+1)e^x\right]$$

$$= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1$$

$$= (x+2)e^x$$

AS REGRAS DO PRODUTO EXEMPLO 2

Derive a função $f(t) = \sqrt{t}(a + bt)$

Solução 1: Usando a Regra do Produto, temos

$$f'(t) = \sqrt{t}\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}(\sqrt{t})$$

$$= \sqrt{t} \cdot b + (a + bt) \cdot \frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}$$

$$= b\sqrt{t} + \frac{(a + bt)}{2\sqrt{t}} = \frac{(a + 3bt)}{2\sqrt{t}}$$

Regra para Derivar o Quociente de Duas Funções.

Se f e g forem deriváveis e $g \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Ou: $$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Em palavras, a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.

A REGRA DO QUOCIENTE — EXEMPLO

Calcule a derivada da função:

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$$

$$y' = \frac{(x^3+6)\frac{d}{dx}(x^2+x-2) - (x^2+x-2)\frac{d}{dx}(x^3+6)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(x^3+6)(2x+1) - (x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4+x^3+12x+6) - (3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2} = \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$$

A REGRA DO QUOCIENTE **EXEMPLO**

Encontre uma equação da reta tangente à curva: $(x_0, y_0) = \left(x_0\,, f(x_0)\right)$

$y = \frac{e^x}{1+x^2}$ no ponto $\left(1\,, \frac{e}{2}\right)$. $\quad (\; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\;)$

$x_0 = 1 \;\; e \;\; f(x_0) = \frac{e}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\frac{d}{dx}(e^x) - e^x\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(1 + x^2)^2}$$

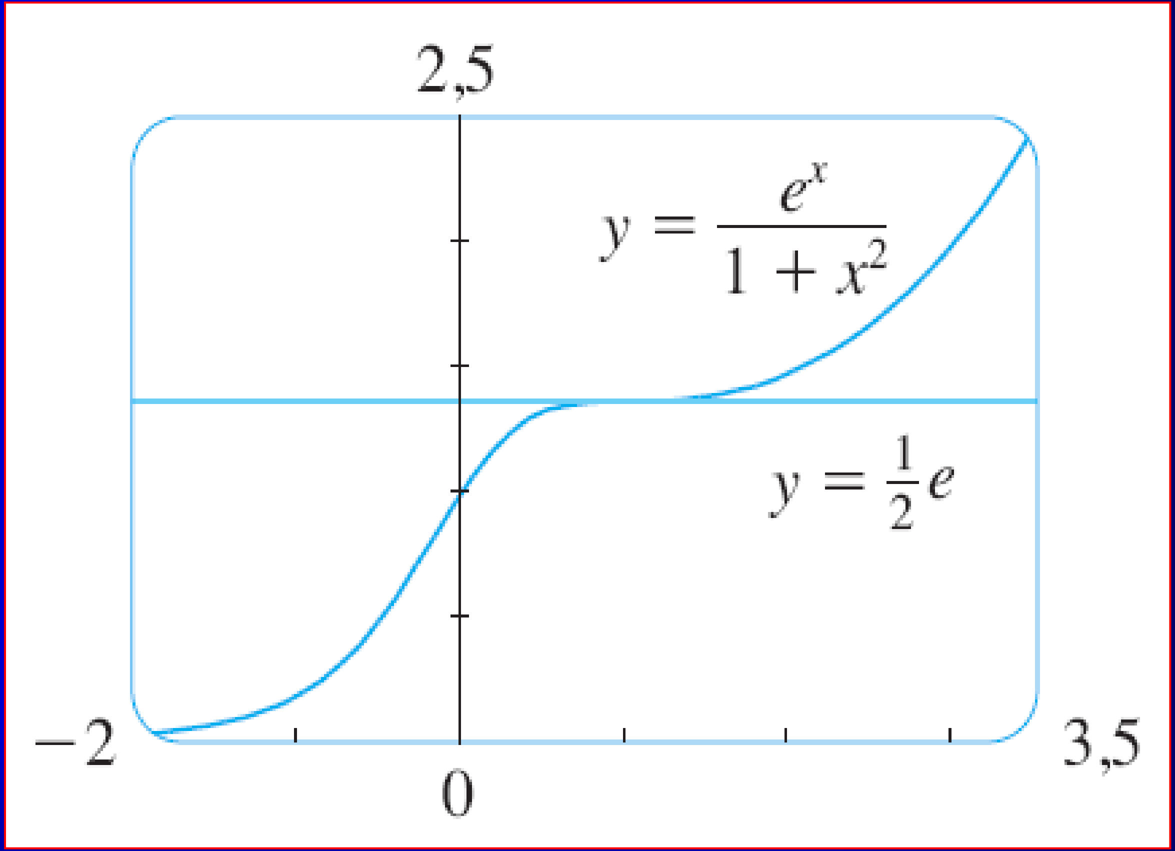
A REGRA DO QUOCIENTE EXEMPLO

Note que a derivada aplicada ao ponto dado é zero.

Isso significa que a reta tangente em $\left(1\,,\,\frac{e}{2}\right)$ é horizontal, e sua equação é

$$y = \frac{e}{2}$$

Observe que a função está crescendo e cruza sua reta tangente em $\left(1\,,\,\frac{e}{2}\right)$



OBSERVAÇÃO

Nem sempre devemos usar a Regra do Quociente *toda vez* que você virmos um quociente.

Algumas vezes é mais fácil reescrever um quociente primeiro, colocando-o em uma forma que seja mais simples para derivar.

Algumas vezes é mais fácil reescrever um quociente primeiro, colocando-o em uma forma que seja mais simples para derivar

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

Aqui, é mais fácil efetuar primeiro a divisão antes de derivar.

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = 3x + 2x^{\frac{1}{2}}\,x^{-1} = 3x + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = 3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = 3 - x^{-\frac{3}{2}} = 3 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 3 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

TABELA DE REGRAS DE DERIVAÇÃO

Resumo das regras de derivação que aprendemos até agora:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

TABELA DE REGRAS DE DERIVAÇÃO

Resumo das regras de derivação que aprendemos até agora

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Reunimos todas as fórmulas de derivação para funções trigonométricas na tabela a seguir para *x* em radianos.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIG. EXEMPLO 1

Derive $y = x^2 senx$

Usando a Regra do Produto

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIG. EXEMPLO 2

Derive $f(x) = \frac{secx}{1+tgx}$

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIG. EXEMPLO 2

Derive $f(x) = \dfrac{secx}{1+tgx}$

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\, x$$

$$tgx + \text{tg}^2\, x - \sec^2 x$$

$$= tgx + \text{tg}^2\, x - (1 + \text{tg}^2\, x)$$

$$= tgx + \text{tg}^2\, x - 1 - \text{tg}^2\, x$$

$$= tgx - 1$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \text{tg}\, x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\, \dfrac{d}{dx}(1 + \text{tg}\, x)}{(1 + \text{tg}\, x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \text{tg}\, x) \sec x \,\text{tg}\, x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \text{tg}\, x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\, (\text{tg}\, x + \text{tg}^2\, x - \sec^2 x)}{(1 + \text{tg}\, x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\, (\text{tg}\, x - 1)}{(1 + \text{tg}\, x)^2}$$

REGRA DA CADEIA

Suponha que precisemos derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

As fórmulas de derivação que foram vistas até aqui não nos permitem calcular $F'(x)$, pois $F(x)$ é uma função composta.

REGRA DA CADEIA

Observe que F é uma função composta.

De fato, se tomarmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever:

$y = F(x) = f(g(x))$, isto é, $F = f \circ g$.

Já sabemos como derivar f e g.

REGRA DA CADEIA

Então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

Resulta que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g.

Esse fato é uma das mais importantes regras de derivação, chamada ***Regra da Cadeia***.

A REGRA DA CADEIA

Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$, definida por $F(x) = f(g(x))$ será derivável em x e F' será dada pelo produto:

$$\boxed{F'(x) = [f(g(x))]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)}$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

REGRA DA CADEIA EXEMPLO

Encontre $F'(x)$, se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Solução: Temos que F *pode ser expressa* como:

$F(x) = f\,(g(x))$, onde

$$f\,(u) = \sqrt{u}$$

e u = $g(x) = x^2 + 1$.

REGRA DA CADEIA **EXEMPLO**

Sendo $f(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, então: $f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

e u = $g(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad u' = g'(x) = 2x$

Temos

$$F'(x) = f'(g\,(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

REGRA DA CADEIA **EXEMPLO**

Derive:

$a.\ y = \text{sen}\,(x^2)$

$b.\ y = sen^2 x = (senx)^2$

REGRA DA CADEIA EXEMPLO

Se $y = \text{sen}(x^2)$, então a função de fora é a função seno, e a função de dentro é a função quadrática; logo, a Regra da Cadeia dá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

REGRA DA CADEIA EXEMPLO

Observe que $\text{sen}^2 x \;\; (\text{sen}\, x)^2$. Aqui, a função de fora é a função quadrado, e a função de dentro é a função seno. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\text{sen}\, x)^2}_{\substack{\text{função} \\ \text{de dentro}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{da função} \\ \text{de fora}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{calculada} \\ \text{na função} \\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{da função} \\ \text{de dentro}}}$$

A resposta pode ser deixada como **2 sen x cos x** ou escrita como **sen 2x** (pela identidade trigonométrica conhecida como fórmula do ângulo duplo).

REGRA DA POTÊNCIA COMBINADA

Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$

Tomando $u = g(x) = x^3 - 1$ e $f(u) = u^{100}$

REGRA DA POTÊNCIA COMBINADA

Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$

Tomando $u = g(x) = x^3 - 1$ e $f(u) = u^{100}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100}$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2$$

$$= 300x^2 (x^3 - 1)^{99}$$

REGRA DA POTÊNCIA COMBINADA

Encontre $f'(x)$ *se* $\qquad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}.$

Primeiro reescreva f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

Assim,

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{4}{3}}(2x + 1) = -\frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^4}}$$

REGRA DA CADEIA

Derive $y = e^{senx}$

Aqui a função de dentro é $g(x) = \text{sen } x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$.

REGRA DA CADEIA

Derive $y = e^{senx}$

Aqui a função de dentro é $g(x) = \text{sen}\ x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$.

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\text{sen}\ x}\right) = e^{\text{sen}\ x}\frac{d}{dx}(\text{sen}\ x) = e^{\text{sen}\ x}\cos x$$

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

De forma geral, se combinarmos a derivada do log com a Regra da Cadeia, obtemos:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(lnu) = \frac{1}{u}\frac{du}{x}}$$

ou

$$\boxed{\frac{d}{dx}(lnu) = \frac{u'}{u}}$$

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Para usar a Regra da Cadeia vamos fazer $u = x^3 + 1$.

Então $y = \ln u$; logo:

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Derive : $y = \ln(senx)$

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Derive : $y = \ln(senx)$

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{cotg} x$$

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Derive: $f(x) = \sqrt{lnx} = (lnx)^{\frac{1}{2}}$

Dessa vez o logaritmo é a função de dentro;

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Derive: $f(x) = \sqrt{lnx} = (lnx)^{\frac{1}{2}}$

Dessa vez o logaritmo é a função de dentro; logo, a Regra da Cadeia dá

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Derivadas das funções compostas: $u = u(x)$

a) $[e^u]' = e^u \,.\, u'$

b) $[lnu]' = \frac{u'}{u}$

c) $[senu]' = cosu \,.\, u'$

d) $[cosu]' = -senu \,.\, u'$

e) $[tgu]' = \sec^2 u \,.\, u'$

f) $[cotgu]' = -cossec^2u\,.\,u'$

g) $[secu]' = secu\,.\,tgu\,.\,u'$

h) $[cossecu]' = -cossecu\,.\,cotgu\,.\,u'$

i) $[u^n]' = nu^{n-1}\,.\,u'$