Capítulo 4

Distribuições de probabilidade discreta

Texto baseado no livro:

Estatística Aplicada - Larson / Farber – Editora Pearson – 2010

Descrição do capítulo

4.1 Distribuições de probabilidades

4.2 Distribuições binomiais

4.3 Mais distribuições de probabilidades discretas

Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias

Representa um valor numérico associado com cada resultado de uma distribuição de probabilidade, denotado por x

Exemplos:

x = Número de vendas que um vendedor faz em um dia

x = Horas gastas em ligações de venda em um dia

Variáveis aleatórias

Tipos: Discretas ou contínuas

Discretas

Exemplos:

a) número de ocorrências da face cara no lançamento de três moedas.

b) número de lâmpadas queimadas em um lote de 30 lâmpadas.

c) número de carros que passam por um cruzamento por minuto, durante certa hora do dia.

Variáveis aleatórias

Tipos: Discretas ou contínuas

Contínuas

Exemplos:

a) tempo durante o qual um equipamento elétrico é usado em carga máxima

b) diâmetro de um cabo elétrico

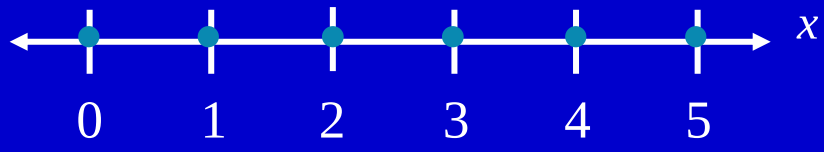
c) peso de um indivíduo

Variáveis aleatórias discretas

Tem um número finito ou contável de possíveis resultados que podem ser listados

Exemplo:

x = Número de vendas que um vendedor faz em um dia

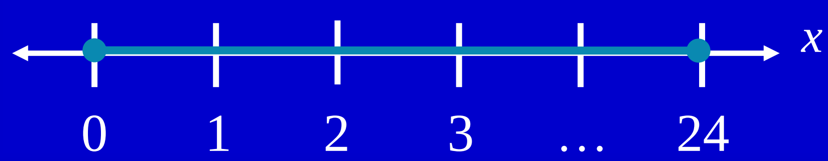


Variáveis aleatórias contínuas

Tem um número incontável de resultados possíves, representados por um intervalo na reta numérica

Exemplo:

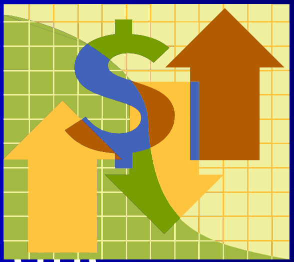
x = Horas gastas em ligações de venda em um dia



Exemplo: variáveis aleatórias

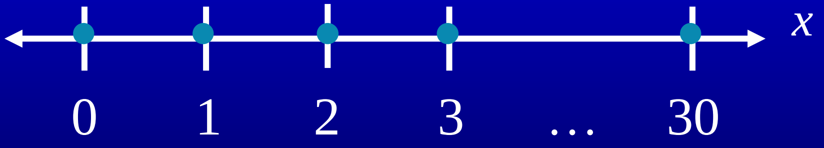
Decida se a variável aleatória *x* é discreta ou contínua.

1. *x* = O número de ações na média industrial da Dow Jones que tiveram aumento no preço em um dia.



Solução:

Variável aleatória discreta (o número de ações que tiveram aumento de preço pode ser contado).

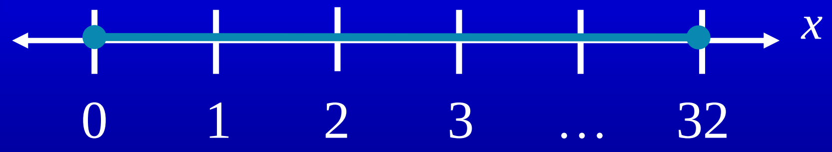


Decida se a variável aleatória *x* é discreta ou contínua.

2. x = O volume de água em um recipiente de 32 litros.

Solução:

Variável aleatória contínua (a quantidade de água pode ser qualquer volume entre 0 até 32 litros).



Distribuição de probabilidades: Variável aleatória discreta

Definições:

a) **Variável aleatória:** função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral, um único número real.

b) **Função de probabilidade:** função que associa a cada valor assumido pela variável aleatória, a probabilidade do evento correspondente, ou seja, $P(X = x_i) = P(A_i)$, $i=1,2...,n$.

c) Distribuição de probabilidade da variável X:

Conjunto $\{(x_i, p(x_i)), \; i=1,...,n\}$, onde $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Distribuições de probabilidade discreta

Distribuição de probabilidade discreta

Lista cada possível valor que a variável aleatória possa assumir, juntamente com sua probabilidade

Precisa satisfazer as seguintes condições:

Em palavras	*Em símbolos*
1. A probabilidade de cada valor da variável discreta aleatória precisa estar entre 0 e 1.	$0 \leq P(x) \leq 1$
2. A soma de todas as probabilidades tem de ser 1.	$\sum P(x) = 1$

Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

Seja x uma variável discreta aleatória com resultados possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Faça uma distribuição de frequências para os resultados possíveis.
2. Encontre a soma das frequências.
3. Encontre a probabilidade de cada resultado possível dividindo sua frequência pela soma das frequências.
4. Certifique-se de que cada probabilidade esteja entre 0 e 1 e que a soma seja 1.

Exemplo: construindo uma distribuição de probabilidade discreta

Um psicólogo industrial aplicou um teste de inventário de personalidade para traços passivo-agressivos em 150 funcionários. Os indivíduos receberam pontuações de 1 a 5, em que 1 era extremamente passivo e 5 extremamente agressivo.

Uma pontuação de 3 indica neutralidade de traços. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória *x*. Então faça um gráfico da distribuição usando um histograma.

Pontuação, *x*	**Frequência, *f***
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

Solução: construindo uma distribuição de probabilidade discreta

Divida a frequência de cada pontuação pelo número total de indivíduos no estudo para encontrar a probabilidade para cada valor da variável aleatória

$$P(1) = \frac{24}{150} = 0.16 \qquad P(2) = \frac{33}{150} = 0.22 \qquad P(3) = \frac{42}{150} = 0.28$$

$$P(4) = \frac{30}{150} = 0.20 \qquad P(5) = \frac{21}{150} = 0.14$$

Distribuição da probabilidade discreta:

x	1	2	3	4	5
P(x)	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Essa é uma distribuição de probabilidade discreta válida, já que:

1. Cada probabilidade está entre 0 e 1, $0 \leq P(x) \leq 1$.

2. A soma das probabilidades é igual a 1:

$\Sigma P(x) = 0{,}16 + 0{,}22 + 0{,}28 + 0{,}20 + 0{,}14 = 1.$

Histograma

Como a largura de cada barra é 1, a área de cada barra é igual à probabilidade de um resultado em particular.

Média

Média de uma distribuição de probabilidade discreta

$$\boxed{\mu = \sum x\,P(x)}$$

Cada valor de *x* é multiplicado por sua probabilidade correspondente e os produtos são somados

Exemplo: encontrando a média

A distribuição de probabilidade para traços passivo-agressivos é dada. Encontre a média.

Solução:

x	$P(x)$	$xP(x)$
1	0,16	1(0.16) = 0.16
2	0,22	2(0.22) = 0.44
3	0,28	3(0.28) = 0.84
4	0,20	4(0.20) = 0.80
5	0,14	5(0.14) = 0.70

$$\boldsymbol{\mu} = \sum \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = 2{,}94$$

Variância e desvio padrão

Variância de uma distribuição de probabilidade discreta

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 P(x)}$$

Desvio padrão de uma distribuição de probabilidade discreta:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sum (x-\mu)^2 P(x)}}$$

Exemplo: encontrando a variância e o desvio padrão

A distribuição de probabilidade de personalidade para traços passivo-agressivos é dada. Encontre a variância e o desvio padrão ($\mu = 2{,}94$).

x	$P(x)$
1	0,16
2	0,22
3	0,28
4	0,20
5	0,14

Solução: encontrando a variância e o desvio padrão: Lembre-se: μ = 2,94

x	$P(x)$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 P(x)$
1	0,16	1 – 2,94 = –1,94	$(-1.94)^2 = 3.764$	3.764(0.16) = 0.602
2	0,22	2 – 2,94 = –0,94	$(-0.94)^2 = 0.884$	0.884(0.22) = 0.194
3	0,28	3 – 2,94 = 0,06	$(0.06)^2 = 0.004$	0.004(0.28) = 0.001
4	0,20	4 – 2,94 = 1,06	$(1.06)^2 = 1.124$	1.124(0.20) = 0.225
5	0,14	5 – 2,94 = 2,06	$(2.06)^2 = 4.244$	4.244(0.14) = 0.594

Variância: $\boldsymbol{\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 P(x) = 1.616}$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.616} \approx 1.3$

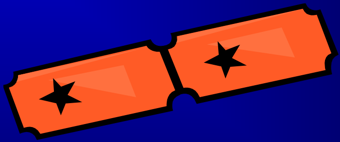
Valor esperado

Valor esperado (esperança matemática) de uma variável aleatória discreta é igual à média da variável aleatória, ou seja:

$$\boxed{E(x) = \mu = \sum x\, P(x)}$$

Exemplo: encontrando um valor esperado

Em uma rifa, 1.500 bilhetes são vendidos a R$ 2 cada para quatro prêmios de R$ 500, R$ 250, R$ 150 e R$ 75. Você compra um bilhete. Qual o valor esperado do seu ganho?

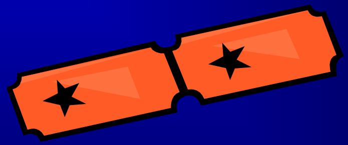


Solução: encontrando um valor esperado

Para encontrar o ganho de cada prêmio, subtraia o valor do bilhete do prêmio:

Seu ganho para o prêmio de R$ 500 é R$ 500 – R$ 2 = R$ 498
Seu ganho para o prêmio de R$ 250 é R$ 250 – R$ 2 = R$ 248
Seu ganho para o prêmio de R$150 é R$ 150 – R$ 2 = R$ 148
Seu ganho para o prêmio de R$ 75 é R$ 75 – R$ 2 = R$ 73

Se você não ganhar um prêmio, seu ganho é R$ 0 – R$ 2 = – R$ 2



A distribuição da probabilidade para os possíveis ganhos (resultados)

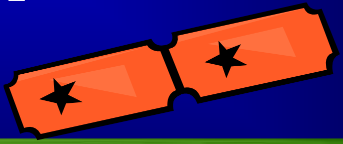
Ganho, x	R$ 498	R$ 248	R$ 148	R$ 73	– R$ 2
P(x)	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1496}{1500}$

$$E(x) = \Sigma x P(x) =$$

$$498 \cdot \frac{1}{1500} + 248 \cdot \frac{1}{1500} + 148 \cdot \frac{1}{1500} + 73 \cdot \frac{1}{1500} + (-2) \cdot \frac{1496}{1500}$$

$$= -1.35$$

Você pode esperar perder uma média de R$ 1,35 para cada bilhete que comprar.



Seção 4.2

Distribuições binomiais

Características dos experimentos Binomiais

1. O experimento é repetido para um número fixo de tentativas; cada tentativa é independente das outras.

2. Há apenas dois resultados possíveis de interesse para cada tentativa. Os resultados podem ser classificados como sucesso (S) ou falha (F).

3. A probabilidade de um sucesso $P(S)$ é a mesma para cada tentativa.

4. A variável aleatória x conta o número de tentativas bem-sucedidas.

Notações para experimentos binomiais

Símbolo	*Descrição*
n	Número de vezes que uma tentativa é repetida
$p = P(s)$	Probabilidade de sucesso em uma única tentativa
$q = P(F)$	Probabilidade de falha em uma única tentativa ($q = 1 – p$)
x	A variável aleatória representa a contagem do número de sucessos em n tentativas: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots , n$.

Exemplo: experimentos binomiais

Decida se o experimento é um experimento binomial. Se for, especifique os valores de *n, p* e *q* e liste os valores possíveis da variável aleatória *x*.

1. Um certo procedimento cirúrgico tem uma chance de sucesso de 85%. Um médico realiza o procedimento em oito pacientes. A variável aleatória representa o número de cirurgias bem-sucedidas.

Solução: experimentos binomiais

Experimento binomial

1. Cada cirurgia representa uma tentativa. Há oito cirurgias, e cada uma é independente das outras.

2. Há apenas dois resultados possíveis de interesse para cada cirurgia: um sucesso (S) ou uma falha (F).

3. A probabilidade de um sucesso, $P(S)$, é 0,85 para cada cirurgia.

4. A variável aleatória x conta o número de cirurgias bem-sucedidas.

Experimento binomial

$n = 8$ (número de tentativas)

$p = 0{,}85$ (probabilidade de sucesso)

$q = 1 - p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$ (probabilidade de falha)

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (número de cirurgias bem-sucedidas)

Exemplo: experimentos binomiais

Decida se o experimento é um experimento binomial. Se for, especifique os valores de *n, p* e *q* e liste os possíveis valores da variável aleatória *x*.

2. Uma jarra contém cinco bolinhas vermelhas, nove bolinhas azuis e seis bolinhas verdes. Você pega aleatoriamente três bolinhas do jarro, *sem recolocá-las*. A variável aleatória representa o número de bolinhas vermelhas.

Solução: experimentos binomiais

Não é um experimento binomial

A probabilidade de selecionar uma bolinha vermelha na primeira tentativa é de 5/20

Como a bolinha não é recolocada no jarro, a probabilidade de sucesso (vermelho) para as tentativas subsequentes já não será mais 5/20

As tentativas não são independentes e a probabilidade de sucesso não é a mesma para cada tentativa

Fórmula de probabilidade binomial

Fórmula de probabilidade binomial

A probabilidade de exatamente *x* sucessos em *n* tentativas é:

$$P(x) = C(n,x)p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x\, q^{n-x}$$

n = número de tentativas

p = probabilidade de sucesso

$q = 1 - p$ probabilidade de falha

x = número de sucessos em n tentativas

Binomial no Excel

DISTRBINOM(*núm_s; tentativas; probabilidade_s; cumulativo*)

A função estatística DISTRBINOM retorna a probabilidade ou a probabilidade acumulada do número de tentativas bem-sucedidas *núm_s*, conforme o valor do argumento cumulativo.

- Se o argumento *cumulativo* for FALSO, a função retornará a probabilidade do número de sucessos *núm_s* com *probabilidade_s* de sucesso para um número de *tentativas* independentes.
- Se o argumento *cumulativo* for VERDADEIRO, a função retornará a probabilidade acumulada do número máximo de sucessos *núm_s* com *probabilidade_s* de sucesso para um número de *tentativas* independentes.

Binomial no PYTHON

Importar biblioteca: from scipy.stats import binom

binom.pmf(k, n, p)

> **A** função retornará a probabilidade do número de sucessos k com *probabilidade p* de sucesso para um número de n *tentativas* independentes.

binom.cdf(k, n, p):

> **A** função retornará a probabilidade acumulada do número de sucessos k com *probabilidade p* de sucesso para um número de n *tentativas* independentes.

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais

Cirurgias de microfraturas no joelho têm 75% de chance de sucesso em pacientes com problemas degenerativos no joelho. A cirurgia é realizada em três pacientes. Encontre a probabilidade da cirurgia ser bem-sucedida em exatamente dois pacientes.

Fórmula da probabilidade binomial.

$$n = 3, \quad p = \frac{3}{4}, \quad q = 1 - p = \frac{1}{4}, \quad x = 2$$

$$P(2 \text{ cirurgias com sucesso}) = \frac{3!}{(3-2)!2!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$= 3\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{9}{64}\right) = \frac{27}{64} \approx 0,422 \; .$$

No Excel: =DISTRBINOM(2;3;0,75;FALSO)

Fórmula da probabilidade binomial.

$$n = 3, \quad p = \frac{3}{4}, \quad q = 1 - p = \frac{1}{4}, \quad x = 2$$

No Python:

```
prob = binom.pmf(2, 3, 0.75)

print(‘%0.3f' % prob)
```

$= 0{,}422$

Distribuição de probabilidade binomial

Distribuição de probabilidade binomial

Lista os valores possíveis de x com a correspondente probabilidade de cada um

Exemplo: Distribuição de probabilidade binomial para a cirurgia de microfraturas no joelho: $n = 3$, $p = \frac{3}{4}$

Usa a fórmula da probabilidade binomial para encontrar probabilidades

x	0	1	2	3
$P(x)$	0,016	0,141	0,422	0,422

Exemplo: construindo uma distribuição binomial

Em uma pesquisa, foi pedido a trabalhadores dos EUA as fontes de renda esperadas na aposentadoria. Sete trabalhadores que participaram da pesquisa são aleatoriamente selecionados e perguntados se eles planejam confiar no Seguro Social para sua renda na aposentadoria. Crie uma distribuição de probabilidade binomial para o número de trabalhadores que responderam sim.

(*Fonte: The Gallup Organization.*)

Solução: construindo uma distribuição binomial

25% dos trabalhadores americanos esperam confiar no Seguro Social para recebimento de renda na aposentadoria

$n = 7,\ \ p = 0{,}25,\ \ q = 0{,}75,\ \ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$P(x = 0) = \text{C}(7{,}0)\ (0{,}25)^0\,(0{,}75)^7 = 1(0{,}25)^0\,(0{,}75)^7 \approx 0{,}1335$

$P(x = 1) = \text{C}(7{,}1)\ (0{,}25)^1\,(0{,}75)^6 = 7(0{,}25)^1\,(0{,}75)^6 \approx 0{,}3115$

$P(x = 2) = \text{C}(7{,}2)\ (0{,}25)^2\,(0{,}75)^5 = 21(0{,}25)^2\,(0{,}75)^5 \approx 0{,}3115$

$P(x = 3) = \text{C}(7{,}3)\ (0{,}25)^3\,(0{,}75)^4 = 35(0{,}25)^3\,(0{,}75)^4 \approx 0{,}1730$

$P(x = 4) = \text{C}(7{,}4)\ (0{,}25)^4\,(0{,}75)^3 = 35(0{,}25)^4\,(0{,}75)^3 \approx 0{,}0577$

$P(x = 5) = \text{C}(7{,}50\ (0{,}25)^5\,(0{,}75)^2 = 21(0{,}25)^5\,(0{,}75)^2 \approx 0{,}0115$

$P(x = 6) = \text{C}(7{,}6)\ (0{,}25)^6\,(0{,}75)^1 = 7(0{,}25)^6\,(0{,}75)^1 \approx 0{,}0013$

$P(x = 7) = \text{C}(7{,}7)\ (0{,}25)^7\,(0{,}75)^0 = 1(0{,}25)^7\,(0{,}75)^0 \approx 0{,}0001$

x	$P(x)$
0	0,1335
1	0,3115
2	0,3115
3	0,1730
4	0,0577
5	0,0115
6	0,0013
7	0,0001

Todas as probabilidades estão entre 0 e 1 e a soma das probabilidades é $1{,}00001 \approx 1$.

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais

Uma pesquisa indica que 41% das mulheres nos EUA consideram leitura como seu lazer favorito. Você seleciona aleatoriamente quatro mulheres dos EUA e pergunta se ler é o passatempo preferido delas. Encontre a probabilidade de pelo menos duas delas dizer sim.

Solução:

$n = 4$, $p = 0{,}41$, $q = 0{,}59$

Pelo menos duas significa duas ou mais

Encontre a soma de $P(2)$, $P(3)$, e $P(4)$

Solução: encontrando probabilidades binomiais

$P(x = 2) = C(4,2)\,(0{,}41)^2\,(0{,}59)^2 = 6\,(0{,}41)^2\,(0{,}59)^2 \approx 0{,}351094$

$P(x = 3) = C(4,3)\,(0{,}41)^3\,(0{,}59)^1 = 4\,(0{,}41)^3\,(0{,}59)^1 \approx 0{,}162654$

$P(x = 4) = C(4,4)\,(0{,}41)^4\,(0{,}59)^0 = 1\,(0{,}41)^4\,(0{,}59)^0 \approx 0{,}028258$

$$
\begin{aligned}
P(x \geq 2) &= P(2) + P(3) + P(4) \\
&\approx 0{,}351094 + 0{,}162654 + 0{,}028258 \\
&\approx 0{,}542
\end{aligned}
$$

Excel: =1- DISTRBINOM(1;4;0,41;VERDADEIRO)

Python: 1 - binom.cdf(1, 4, 0.41)

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando tecnologia

Os resultados de uma pesquisa recente indicam que, quando fazem grelhados, 59% dos lares dos Estados Unidos usam grelhas a gas. Se você selecionar aleatoriamente 100 lares, qual é a probabilidade de que exatamente 65 lares usem uma grelha a gás? Use uma ferramenta tecnológica para encontrar a probabilidade. (*Fonte: Greenfield Online for Weber-Stephens Products Company*.)

Solução:

Binomial com n = 100, p = 0,59, x = 65

Solução: encontrando probabilidades binomiais usando tecnologia

No excel: =DISTRBINOM(65;100;0,59;FALSO) = 0,0391

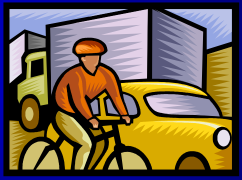
No Python: binom.pmf(65, 100, 0.59) = 0,0391

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando uma tabela

Cerca de 30% dos adultos trabalhadores gastam menos de 15 minutos para ir e voltar ao trabalho. Você seleciona aleatoriamente seis adultos trabalhadores. Qual é a probabilidade de exatamente três deles gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho? Use uma tabela para encontrar a probabilidade. (*Fonte: U.S. Census Bureau*.)

Solução:

Binomial com $n = 6$, $p = 0{,}30$, $x = 3$



Solução: encontrando probabilidades binomiais usando uma tabela

		p												
n	x	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**
2	0	0,980	0,902	0,810	0,723	0,640	0,563	0,490	0,423	0,360	0,303	0,250	0,203	0,160
	1	0,020	0,095	0,180	0,255	0,320	0,375	0,420	0,455	0,480	0,495	0,500	0,495	0,480
	2	0,000	0,002	0,010	0,023	0,040	0,063	0,090	0,123	0,160	0,203	0,250	0,303	0,360
3	0	0,970	0,857	0,729	0,614	0,512	0,422	0,343	0,275	0,216	0,166	0,125	0,091	0,064
	1	0,029	0,135	0,243	0,325	0,384	0,422	0,441	0,444	0,432	0,408	0,375	0,334	0,288
	2	0,000	0,007	0,027	0,057	0,096	0,141	0,189	0,239	0,288	0,334	0,375	0,408	0,432
	3	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,016	0,027	0,043	0,064	0,091	0,125	0,166	0,216
6	0	0,941	0,735	0,531	0,377	0,262	0,178	0,118	0,075	0,047	0,028	0,016	0,008	0,004
	1	0,057	0,232	0,354	0,399	0,393	0,356	0,303	0,244	0,187	0,136	0,094	0,061	0,037
	2	0,001	0,031	0,098	0,176	0,246	0,297	0,324	0,328	0,311	0,278	0,234	0,186	0,138
	3	0,000	0,002	0,015	0,042	0,082	0,132	0,185	0,236	0,276	0,303	0,312	0,303	0,276
	4	0,000	0,000	0,001	0,006	0,015	0,033	0,060	0,095	0,138	0,186	0,234	0,278	0,311
	5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,010	0,020	0,037	0,061	0,094	0,136	0,187
	6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016	0,028	0,047

A probabilidade de exatamente três dos seis trabalhadores gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho é de 0,185.

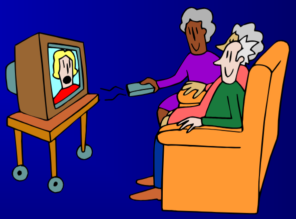
Exemplo: fazendo um gráfico de distribuição binomial

Cinquenta e nove por cento dos lares nos EUA são assinantes de TV a cabo. Você seleciona aleatoriamente seis lares e pergunta se a casa tem TV a cabo. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória *x*. Depois, faça um gráfico da distribuição. (*Fonte: Kagan Research, LLC*.)

Solução:

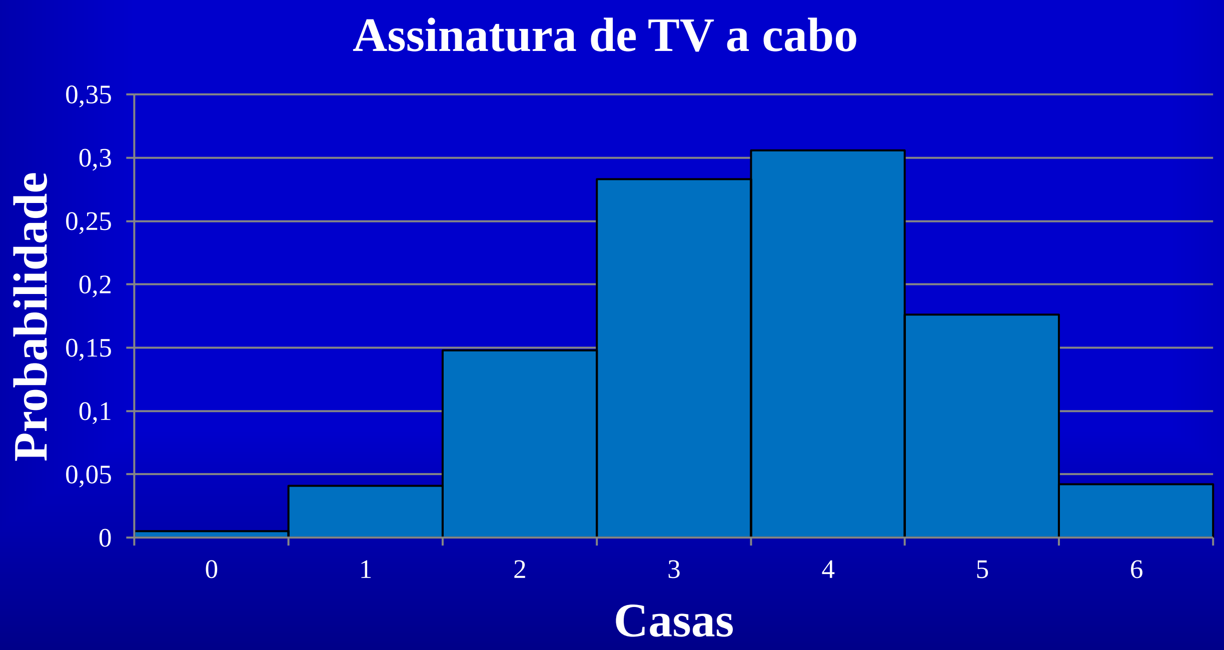
$n = 6$, $p = 0{,}59$, $q = 0{,}41$

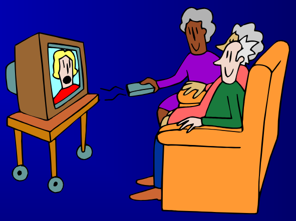
Encontre a probabilidade para cada valor de x



x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0,005	0,041	0,148	0,283	0,306	0,176	0,042

Histograma





Média, variância e desvio padrão

Média: $\mu = np$

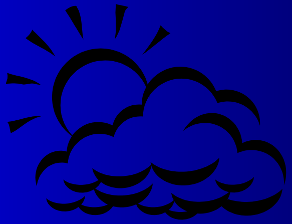
Variância: $\sigma^2 = npq$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq}$

Exemplo: encontrando a média, variância e desvio padrão

Em Pitsburgo, Pensilvânia, cerca de 56% dos dias em um ano são nublados. Encontre a média, variância e desvio padrão para o número de dias nublados durante o mês de junho. Interprete os resultados e determine quaisquer valores incomuns. (*Fonte: National Climatic Data Center*.)

Solução: $n = 30$, $p = 0{,}56$, $q = 0{,}44$

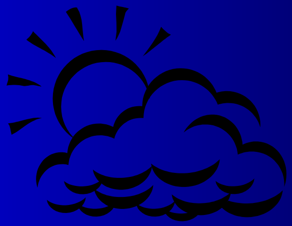


Média: $\mu = np = 30 \cdot 0{,}56 = 16{,}8$

Variância: $\sigma^2 = npq = 30 \cdot 0{,}56 \cdot 0{,}44 \approx 7{,}4$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0.56 \cdot 0.44} \approx 2.7$

Solução: encontrando a média, variância e desvio padrão



$\mu = 16{,}8$; $\sigma^2 \approx 7{,}4$ e $\sigma \approx 2{,}7$

Em média, há 16,8 dias nublados no mês de junho

O desvio padrão é de cerca de 2,7 dias

Valores maiores de dois desvios padrão da média são considerados incomuns

- $16{,}8 - 2(2{,}7) = 11{,}4$; junho com 11 dias nublados seria incomum
- $16{,}8 + 2(2{,}7) = 22{,}2$; junho com 23 dias nublados seria incomum também

Distribuição de Poisson

Uma distribuição de probabilidade discreta

Satisfaz as seguintes condições:

- O experimento consiste em contar o número de vezes que um evento, *x*, ocorre em um dado intervalo. O intervalo pode ser de tempo, área ou volume

- A probabilidade de o evento ocorrer é a mesma para cada intervalo

- O número de ocorrências em um intervalo independe do número de ocorrências em outros intervalos

Distribuição de Poisson

Condições:

A probabilidade do evento ocorrer é a mesma para cada intervalo

A probabilidade de exatamente x ocorrências em um intervalo é

$$\boxed{P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}}$$

em que $e \approx 2.71818$ e μ é o número médio de ocorrências

POISSON(*x; média; cumulativo*)

A função estatística POISSON retorna dois tipos de probabilidades conforme o valor do argumento *cumulativo*. Se o argumento *cumulativo* for FALSO, a função retornará a probabilidade do número de sucessos *x* considerando o argumento *média* esperada de sucessos. Se o argumento *cumulativo* for VERDADEIRO, a função retornará a probabilidade acumulada até *x* considerando o argumento *média*.

Importar biblioteca: from scipy.stats import poisson

poisson.pmf(k, media)

A função retorna a probabilidade do número de sucessos *k* considerando o argumento *média* esperada de sucessos.

poisson.cdf(k, media)

A função retornará a probabilidade acumulada até *k* considerando o argumento *média*.

Exemplos de Aplicações na distribuição do número de:

carros que passam por um cruzamento por minuto, durante certa hora do dia

erros tipográficos por página em um material impresso

defeitos por unidade (m^2, m^3, etc) por peça fabricada

mortes de ataque de coração por ano em uma cidade

Exemplo: distribuição de Poisson

O número médio de acidentes mensais em uma certa interseção é 3. Qual é a probabilidade de que em um mês qualquer quatro acidentes ocorram na interseção?

Solução:

Distribuição de Poisson com $x = 4$, $\mu = 3$

$$P(4) = \frac{3^4 (2.71828)^{-3}}{4!} \approx 0.168$$

Excel: =POISSON(4;3;FALSO)

Python: **poisson.pmf(4, 3)**

Exemplo: distribuição de Poisson

O número médio de acidentes mensais em uma certa interseção é 3. Qual é a probabilidade de que em um mês qualquer pelo menos quatro acidentes ocorram na interseção?

Solução:

Distribuição de Poisson com $x = 4$, $\mu = 3$

Excel: =1- POISSON(3;3;VERDADEIRO)

Python: 1 - **poisson.cdf(3, 3)**

Exemplo: distribuição de Poisson

O número médio de acidentes mensais em uma certa interseção é 3. Qual é a probabilidade de que em um mês qualquer no máximo dois acidentes ocorram na interseção?

Solução:

Distribuição de Poisson com $x = 4$, $\mu = 3$

Excel: = POISSON(2;3;VERDADEIRO)

Python: **poisson.cdf(2, 3)**

Exercícios: Distribuição de Poisson

1. Uma firma recebe 720 mensagens em sua central de atendimento em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

a) em 4 minutos não receba mensagem?

Resp: 0,002479

b) em 6 minutos receba pelo menos 4 mensagens?

Resp: 0,978774

c) Em 12 minutos recebe no máximo 6 mensagens?

Resp: 0,00104

Exercícios: Distribuição de Poisson

1. Uma firma recebe 720 mensagens em seu fax em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

a) em 4 minutos não receba mensagem? **Resp: 0,002479**

Excel; =POISSON(0;6;FALSO) $\left(\lambda = \frac{720}{480} * 4 = 6\right)$

Python: **poisson.pmf(0, 6)**

(média 1,5 por minuto. 4 minutos média é 6)

Exercícios: Distribuição de Poisson

1. Uma firma recebe 720 mensagens em seu fax em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

b) em 6 minutos receba pelo menos 4 mensagens?

Resp: 0,978774) **(6 minutos, média é 9)**

Excel: = 1 - POISSON(3;9;VERDADEIRO)

Python: 1 - poisson.cdf(3, 9)

$$\frac{6}{480} * 720 = 9 \ \ média$$

Exercícios: Distribuição de Poisson

1. Uma firma recebe 720 mensagens em sua central de atendimento em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

c) Em 12 minutos recebe no máximo 6 mensagens?

Excel: = POISSON(6;18;VERDADEIRO) = 0,00104

Python: poisson.cdf(6, 18) = 0,00104

$$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{480}} * \mathbf{720} = \mathbf{18}\ \boldsymbol{média}$$

Exercícios: Distribuição de Poisson

2. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que:

a) uma página contenha pelo menos três erros? **Resp: 0,080302**

b) uma página contenha no máximo 4 erros? **Resp: 0,9963**

c) uma página contenha cinco erros? **Resp: 0,00305**

Exercícios: Distribuição de Poisson

2. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão.

a) Qual a probabilidade de que uma página contenha pelo menos três erros? **Resp: 0,080302**

Média: $\lambda = 1$

Excel: = 1 - POISSON(2;1;VERDADEIRO)

Python: 1 - poisson.cdf(2, 1)

Exercícios: Distribuição de Poisson

2. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que:

b) uma página contenha no máximo 4 erros? **Resp: 0,9963**

Excel: = POISSON(4;1;VERDADEIRO)

Python: poisson.cdf(4, 1)

Exercícios: Distribuição de Poisson

2. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que:

c) uma página contenha cinco erros? **Resp: 0,00307**

Excel: = POISSON(5;1;FALSO)

Python: poisson.pmf(5, 1)

Exercícios: Distribuição de Poisson

3. Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 km. Qual a probabilidade de que em 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes?

Resp: 0,875348

Exercícios: Distribuição de Poisson

3. Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 km. Qual a probabilidade de que em 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes? **Resp: 0,875348**

Média em 250 km = 5

Excel: = 1 - POISSON(2;5;VERDADEIRO)

Python: 1 - poisson.cdf(2, 5)

Exercícios: Distribuição de Poisson

4. A experiência mostra que de cada 400 lâmpadas, 2 se queimam ao serem ligadas. Qual a probabilidade de que numa instalação de 900 lâmpadas, exatamente 8 se queimem?

Resp: 0,046330

Exercícios: Distribuição de Poisson

4. A experiência mostra que de cada 400 lâmpadas, 2 se queimam ao serem ligadas. Qual a probabilidade de que numa instalação de 900 lâmpadas, exatamente 8 se queimem? **Resp: 0,046330**

Média para 900 lâmpadas = 4,5

Excel: =POISSON(8;4,5;FALSO)

Python: 1 - poisson.pmf(8,4.5)

Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição de Poisson

No uso da Binomial, quando $n \to \infty$ (maior que o maior valor tabelado, no caso, $n > 30$) e $p \to 0$ ($p < 0{,}1$),

é possível fazer uma aproximação da Binomial pela distribuição de Poisson.

Neste caso, $E(X) = n.p$ será tomada como $\lambda = n.p$ e, em seguida, utiliza-se a fórmula de Poisson.

Exercício:
Aproximação da Binomial por Poisson

Seja X: B(200; 0,01). Calcular P(X=10):

a) Pela Binomial **Resp: 0,000033**

Excel: = DISTRBINOM(10;200;0,01;FALSO)

Python: binom.pmf(10, 200 , 0.01)

b) Aproximação por Poisson ($\lambda = np = 200\,.\,0{,}01 = 2$)

Resp: 0,000038

Excel: =POISSON(10;2;FALSO)

Python: poisson.pmf(10, 2)