Derivadas

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

Motivação para estudo de Derivadas

Ex. 1. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA. Uma doença está se disseminando de tal forma que, após t semanas, o número de pessoas infectadas é dado por:

$$N(t) = 5.175 - t^3(t-8)\,, \quad 0 \le t \le 8$$

a) A que taxa a epidemia está se disseminando após 3 semanas?

b) Suponha que as autoridades sanitárias declarem que uma doença atingiu proporções epidêmicas quando a taxa de variação percentual do número de pessoas infectadas ultrapassa 25%. Qual é o período de tempo no qual esse critério é satisfeito?

Ex. 2. Um modelo biológico sugere que a reação do organismo humano a uma dose de um medicamento pode ser modelada por uma função da forma

$$F = \frac{1}{3}(KM^2 - M^3)$$

em que K é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamento presente no sangue. A derivada $S = dF/dM$ pode ser considerada uma medida da sensibilidade do organismo ao medicamento.

a) Determine a sensibilidade S.
b) Calcule $dS/dM = d^2F/dM^2$ e interprete fisicamente essa derivada segunda.

Ex. 3. Um ornitólogo observa que a temperatura corporal de uma espécie de ave varia durante um Período aproximado de 17 horas de acordo com a expressão

$T(t) = -68{,}07t^3 + 30{,}98t^2 + 12{,}52t + 37{,}1 \quad (0 \le t \le 0{,}713)$, onde T é a

temperatura em graus Celsius t dias após o início de um período.

a) Calcule e interprete a derivada $T'(t)$.

b) A que taxas a temperatura está variando no início do período ($t = 0$) e no final do período ($t = 0{,}713$)? A temperatura está aumentando ou diminuindo nesses instantes?

c) Em que instante a temperatura não está aumentando nem diminuindo? Qual é a temperatura da ave nessa ocasião? Interprete o resultado.

Ex. 4. Uma empresa fabrica um gravador de DVD para computadores pessoais. O gerente de vendas observa que t semanas após o início de uma campanha publicitária, $P(t)$ por cento dos fregueses em potencial já conhecem o produto, em que:

$$P(t) = 100\left(\frac{t^2 + 5t + 5}{t^2 + 10t + 30}\right)$$

a) A que taxa a porcentagem do mercado $P(t)$ está variando com o tempo após 5 semanas? A porcentagem está aumentando ou diminuindo?

b) O que acontece com a porcentagem $P(t)$ a longo prazo, isto é, quando $t \to +\infty$ O que acontece com a taxa de variação de $P(t)$ quando $t \to +\infty$

DERIVADAS

Os limites do tipo: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgem sempre que calculamos uma taxa de variação nas ciências e engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia.

Uma vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notação especiais.

DERIVADAS

Definição

- A **derivada de uma função** f **em um número** a, denotada por $f'(a)$, é:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se tal limite existir e for finito.

Definição

- Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ tende a 0 se e somente se x tende a a.
- Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Encontre a derivada da função

$f(x) = -8x + 9$ em um número a.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[-8(a+h)+9]-[-8a+9]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-8a-8h+9+8a-9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-8h}{h} = \lim_{h\to 0}(-8) = -8$$

DERIVADAS

- Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (a , $f(a)$):

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

TAXAS DE VARIAÇÃO

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x.

Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$

Se x variar de x_1 para x_2 , então a variação de x (também chamada **incremento** de x) é

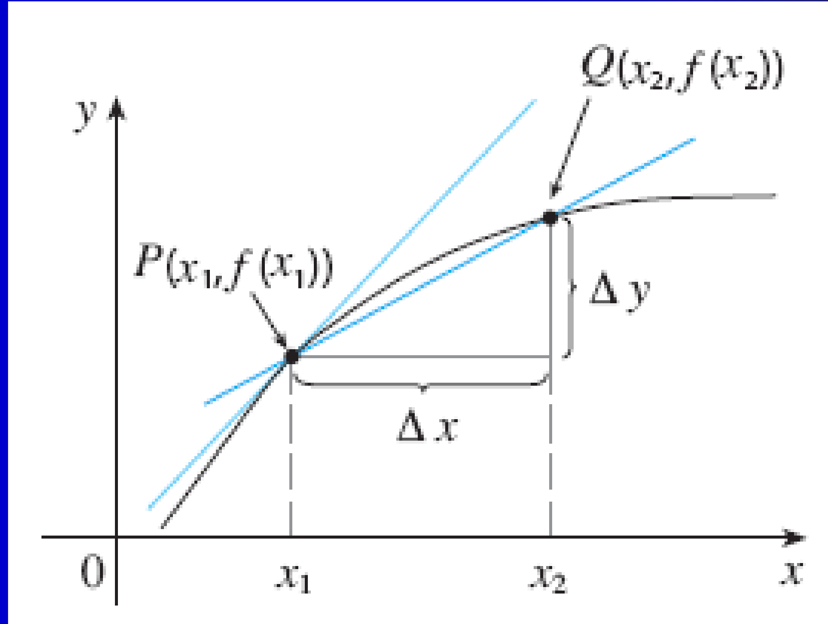
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente de y é:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

TAXAS DE VARIAÇÃO

- O quociente de diferenças $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$ é denominado **taxa média de variação de** $\boldsymbol{y}$ **em relação a** x no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ na Figura.



taxa média de variação $= m_{PQ}$

taxa instantânea de variação $=$ inclinação da tangente em P

TAXAS DE VARIAÇÃO

- Consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0.

- O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de *y* em relação a *x***.

TAXAS DE VARIAÇÃO

- Isso é interpretado como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(\, x_1 \,, f(x_1)\,)$:

- Taxa instantânea de variação:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconhecemos este limite como a derivada $f'(x)$

TAXAS DE VARIAÇÃO

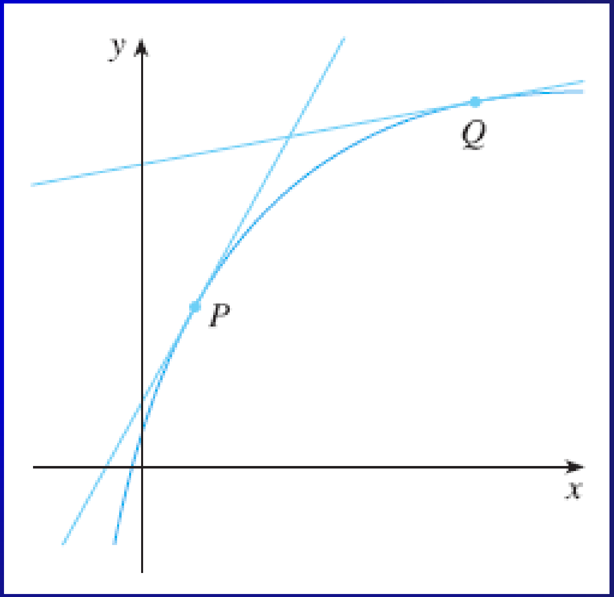
Uma das interpretações da derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = a$.

Outra interpretação:

A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

TAXAS DE VARIAÇÃO

- A conexão com a primeira interpretação é que se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$.
- Isso significa que:
  - Quando a derivada for grande (e portanto a curva será íngreme no ponto *P* na Figura), os valores de y mudarão rapidamente.



TAXAS DE VARIAÇÃO

- Em particular, se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então, $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t.

  - Em outras palavras, $f'(a)$ *é a velocidade da partícula no instante* $t = a$.

  - A **velocidade escalar** da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

Exemplo

- Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa e o custo da produção de x metros desse material é $C = f(x)$ reais.

a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?

b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1{,}000) = 9$?

TAXAS DE VARIAÇÃO

a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos.

Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal.*

TAXAS DE VARIAÇÃO

- Como $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta x}$

  as unidades para $f'(x)$ são iguais àquelas do quociente de diferenças $\dfrac{\Delta C}{\Delta x}$

Uma vez que ΔC é medida em reais e Δx em metros, segue que a unidade para $f'(x)$ é reais por metro.

TAXAS DE VARIAÇÃO

b) A afirmação que $f'(1.000) = 9$ significa que, depois de 1.000 metros da peça terem sido fabricados, a taxa segundo a qual o custo de produção está aumentando é R$ 9/m.

- Quando *x* =1.000, está aumentando 9 vezes mais rápido que *x*.

TAXAS DE VARIAÇÃO

- Outras aplicações das taxas de variação:

  - Em física, a taxa de variação do trabalho com relação ao tempo é chamada de potência.

  - Os químicos que estudam reações químicas estão interessados na taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo (chamada taxa de reação).

  - Um biólogo está interessado na taxa de variação da população de uma colônia de bactérias em relação ao tempo.

TAXAS DE VARIAÇÃO

- Na realidade, o cálculo das taxas de variação é importante em todas as ciências naturais, na engenharia e mesmo nas ciências sociais.

- Todas essas taxas de variação são derivadas e podem, portanto, ser interpretadas como inclinações das tangentes.
  - Isto dá importância extra à solução de problemas envolvendo retas tangentes.

TAXAS DE VARIAÇÃO

- Sempre que resolvemos um problema envolvendo retas tangentes, não estamos resolvendo apenas um problema geométrico.

  - Estamos também resolvendo implicitamente uma grande variedade de problemas envolvendo taxas de variação nas ciências e na engenharia.

A DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

- Se substituirmos *a* na Equação definida como derivada por uma variável *x*, obteremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

- Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$.
  - Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de $\boldsymbol{f(x)}$**.
  - Sabemos que o valor de f' em x, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.
- A função f' é denominada derivada de f, pois foi "derivada" a partir de f pela operação-limite.
  - O domínio da f' é o conjunto $\{x \,/\, f' \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

OUTRAS NOTAÇÕES

- Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto y é a variável dependente, então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Outras notações

- Os símbolos D e d/dx são chamados **operadores diferenciais**, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.
- O símbolo dy/dx, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora).
  - Trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$.
  - Todavia, essa notação é muito útil e proveitosa, especialmente quando usada em conjunto com a notação de incremento.

Outras notações

- Podemos reescrever a definição de derivada como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

OUTRAS NOTAÇÕES

- Diz-se então que uma função f é **derivável ou diferenciável em** $\boldsymbol{a}$ se $f'(a)$ existir.

- $f(x)$ é **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** ou **derivada de ordem dois** de f.

Usando a notação de Leibniz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

- Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação.
  - O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:
- Se s(t) for a função posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $y(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

- A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto.
  - Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

  - Ou, na notação de Leibniz:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

- A **terceira derivada** (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada:

$$(f'')' = f'''$$

  - Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação de $f''(x)$.
  - Se $y = f(x)$, então as notações alternativas são:

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

- O processo pode continuar.

  - A quarta derivada f'''' usualmente denotada por $f^{(4)}$.
  - Em geral, a *n*-ésima derivada de f é denotada por $f^{(n)}$ e é obtida a partir de f derivado *n* vezes.
  - Se $y = f(x)$, escrevemos:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

- Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta.
- Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada ***jerk***:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

- Assim, o *jerk j* é a taxa de variação da aceleração.

  - O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um *jerk* grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.