Valores Máximo e Mínimo de Funções

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

APLICAÇÕES DA DERIVAÇÃO

Aqui, aprenderemos como as derivadas afetam o formato do gráfico de uma função e, em particular, como nos ajudam a localizar os valores máximos e mínimos de funções.

Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação.

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*.

Neles devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa.

EXEMPLOS

A seguir, listamos alguns dos problemas de otimização que resolveremos neste capítulo:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração.)
- Qual o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia espendida pelo coração no bombeamento do sangue?

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Definição 1**

Uma função f tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se:

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{para todo } x \; no \text{ domínio de } f.$$

O número $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Definição 1**

Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em c se:

$f(c) \leq f(x)$ para todo x *no domínio de* f

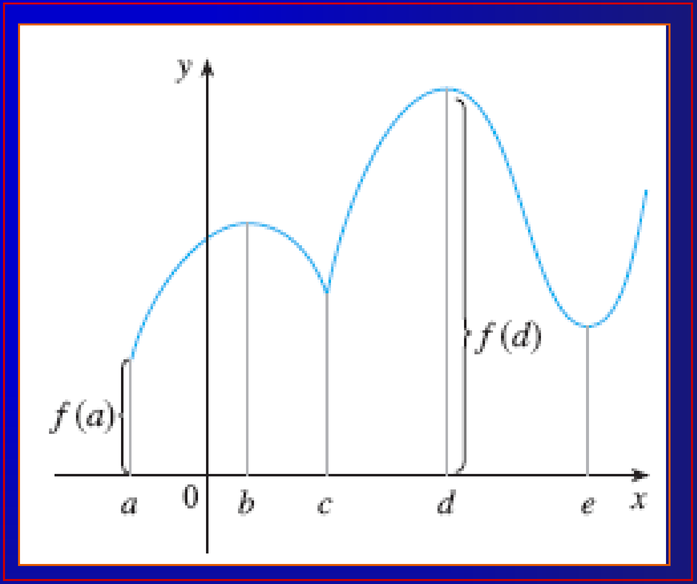
e o número $f(c)$ é denominado **valor mínimo** de f em D.

Os valores máximo e mínimo de f são chamados **valores extremos** de f.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

A Figura mostra o gráfico de uma função f com um máximo absoluto em d e um mínimo absoluto em a.

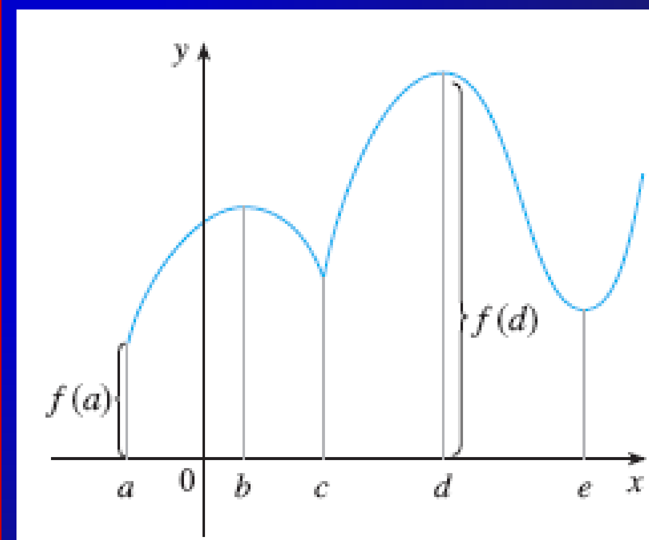
- Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto do gráfico, enquanto $(a, f(a))$ é o ponto mais baixo.



VALOR MÁXIMO LOCAL

Se considerarmos somente os valores de x próximos de b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c)], então $f(b)$ é o maior desses valores de $f(x)$

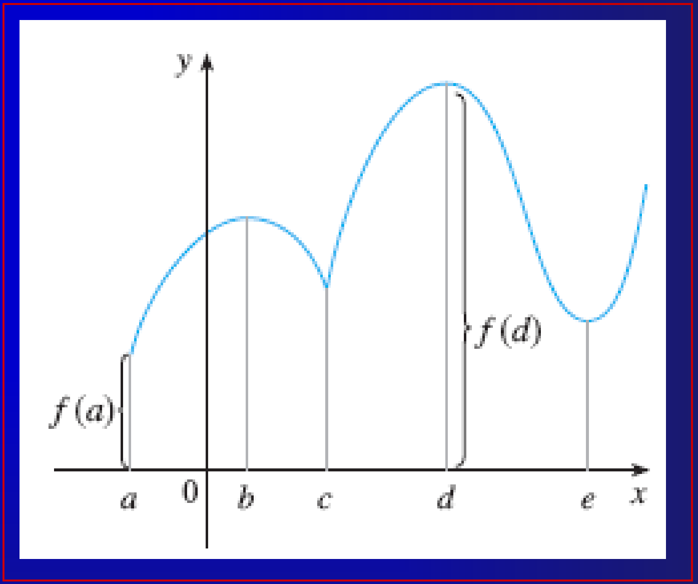
Ele é chamado *valor máximo local* de f.



VALOR MÍNIMO LOCAL

Da mesma forma, $f(c)$ é denominado *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leq f(x)$ para x nas proximidades de c [no intervalo (b, d), por exemplo].

A função f tem também um mínimo local em e.



VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Definição 2**

Em geral, temos a seguinte definição.

Uma função f tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c.

- Isso significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.
- Analogamente, f tem um **mínimo local** em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x estiver próximo de c.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Exemplo 1

A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) 1 um número infinito de vezes, uma vez que $\cos 2n\pi = 1$ para todo inteiro n e $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x.

Da mesma forma, $\cos (2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer inteiro.

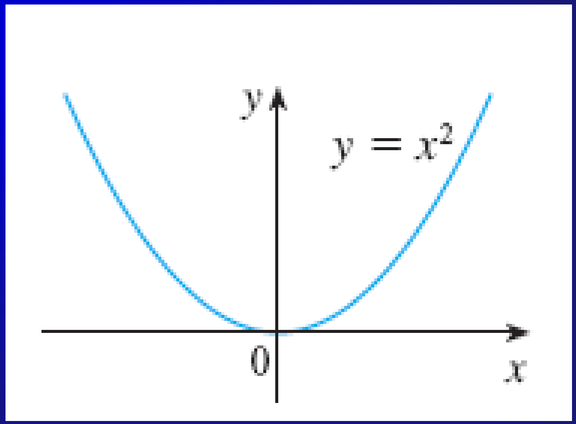
VALORES MÁXIMO E MÍNIMO Exemplo 2

Se $f(x) = x^2$, então $f(x) \geq f(0)$ pois $x^2 \geq 0$ para todo x.

- Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f.

Isso corresponde ao fato de que a origem é o ponto mais baixo sobre a parábola $y = x^2$.

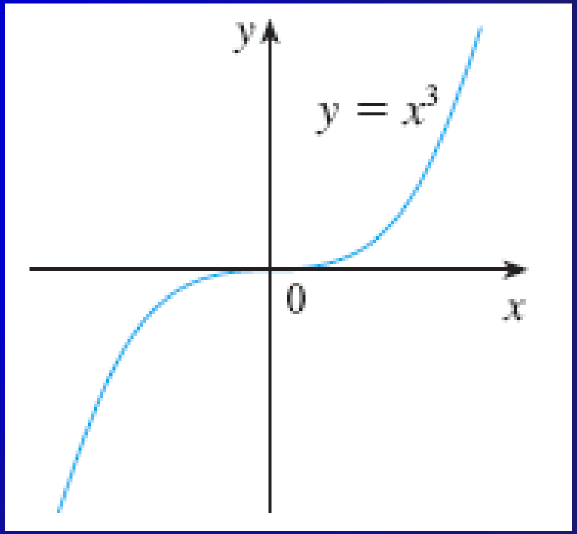
- Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.



## VALORES MÁXIMO E MÍNIMO		Exemplo 3

Do gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrado na Figura, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto.

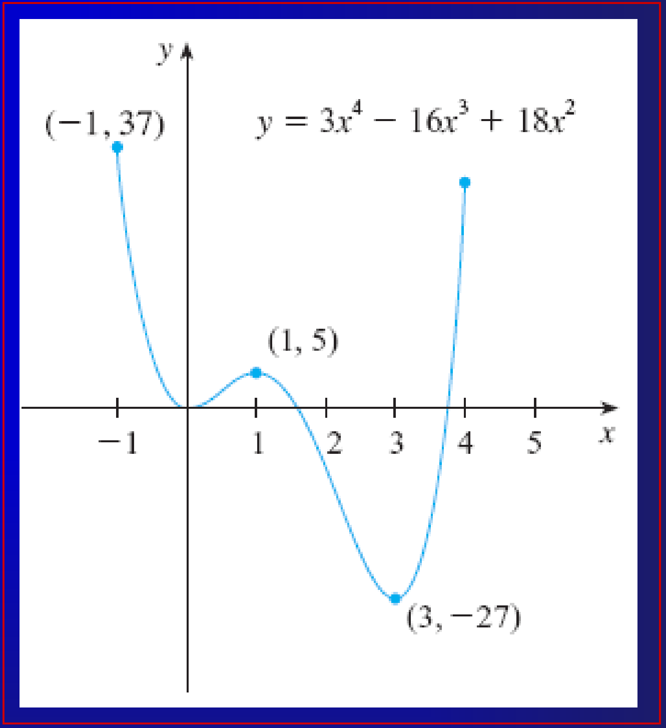
- De fato, ela também não tem nenhum valor extremo local.



VALORES MÁXIMO E MÍNIMO Exemplo 4

O gráfico da função $f(x) = 3x^4 – 16x^3 + 18x^2 \quad -1 \leq x \leq 4$

é mostrado na figura:



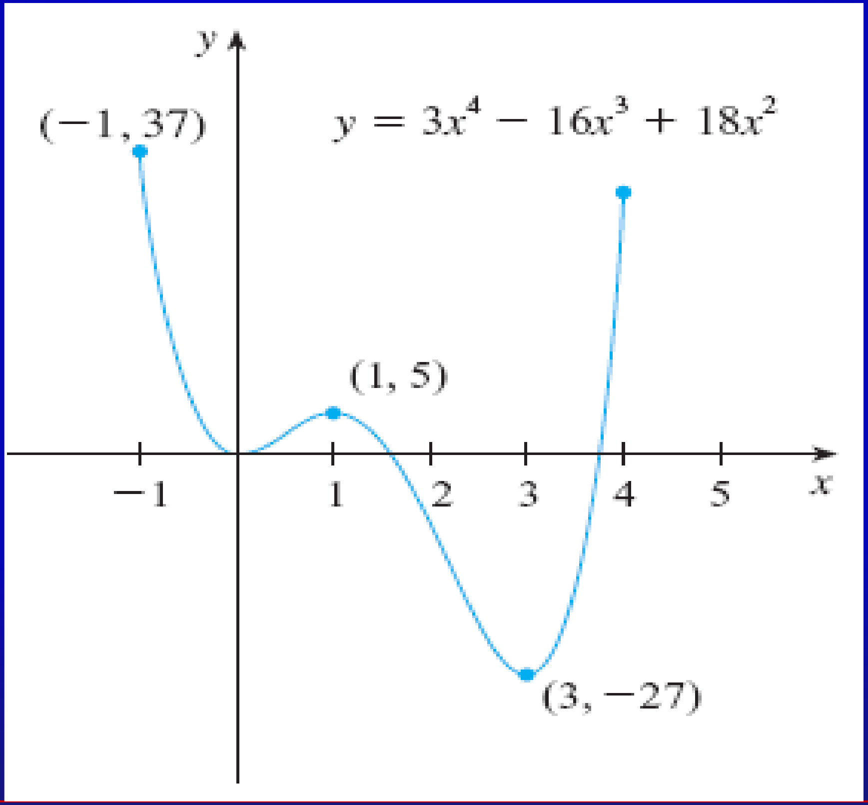
Você pode ver que

$f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto o máximo absoluto é $f(-1) = 37$.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Exemplo 4

Também, $f(0) = 0$ é um mínimo local, e $f(3) = -27$ é tanto um mínimo local e um mínimo absoluto.



VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Vimos que algumas funções têm valores extremos, enquanto outras não têm.

O teorema a seguir dá condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

O TEOREMA DO VALOR EXTREMO

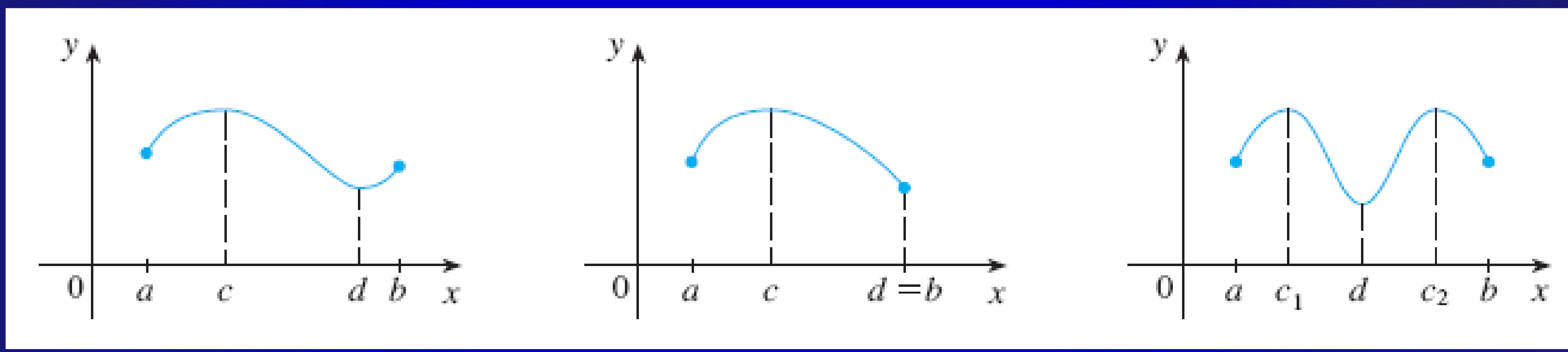
Teorema

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

TEOREMA DO VALOR EXTREMO

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura.

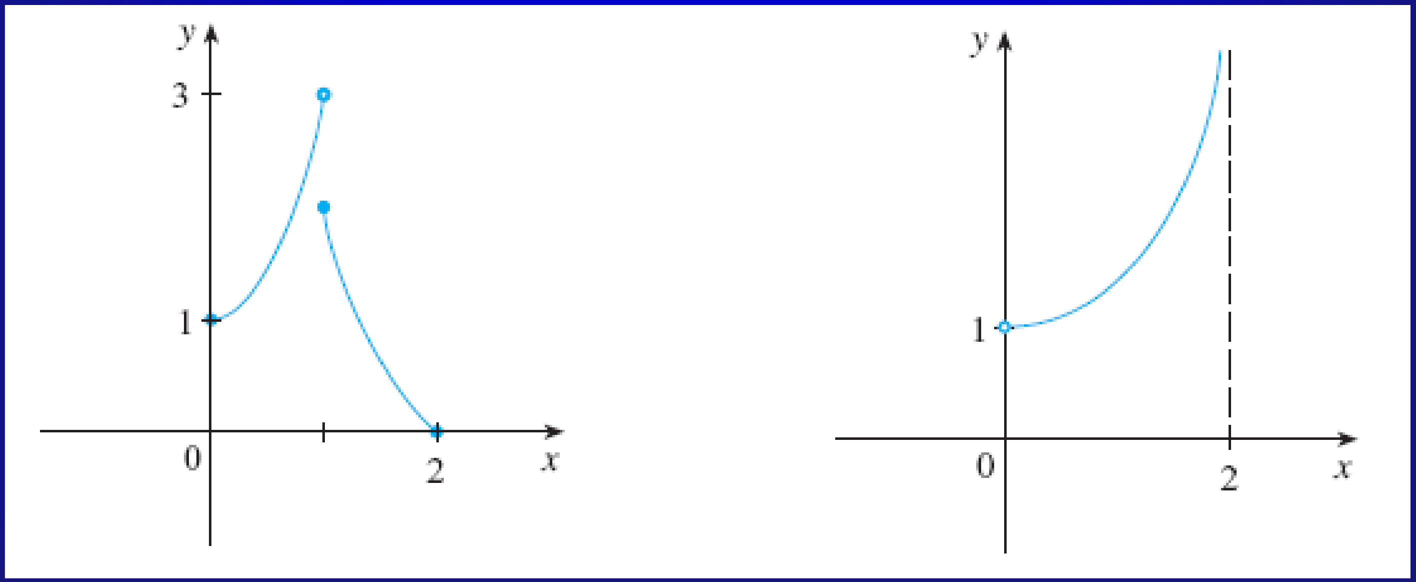
- Observe que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez.



- Embora o Teorema do Valor Extremo seja intuitivamente muito plausível, ele é difícil de ser demonstrado.

TEOREMA DO VALOR EXTREMO

As Figuras mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.



TEOREMA DO VALOR EXTREMO

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo;

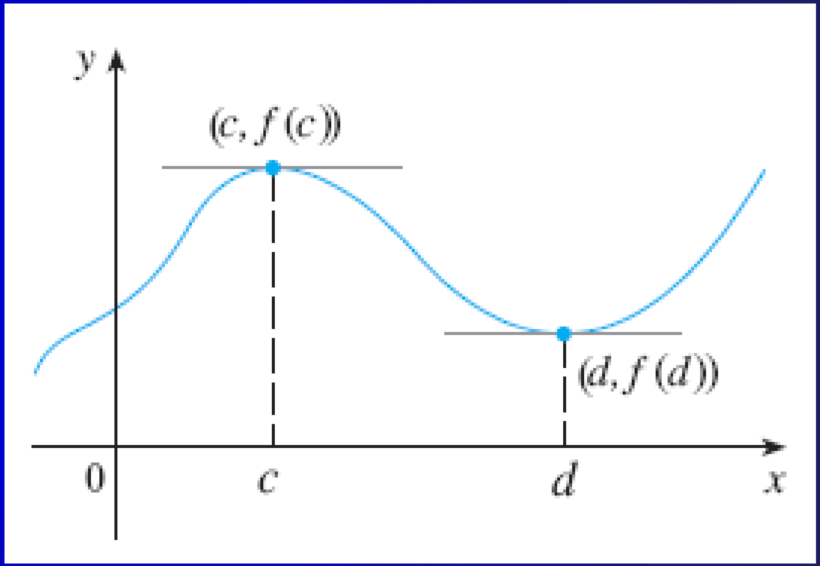
Contudo, não diz como encontrar esses valores extremos.

- Vamos começar procurando os valores extremos locais.

VALORES LOCAIS EXTREMOS

A Figura mostra o gráfico de uma função f com um máximo local em c e um mínimo local em d.

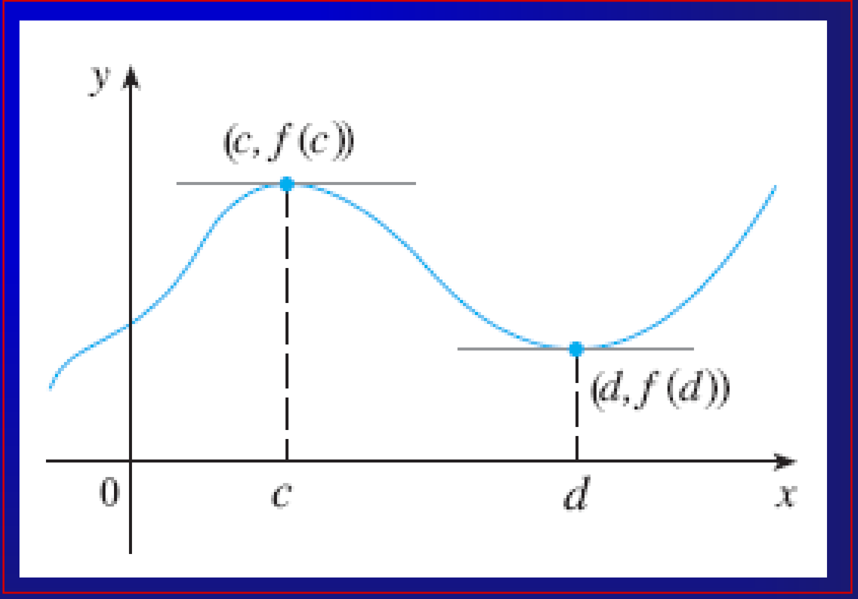
Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0.



VALORES LOCAIS EXTREMOS

Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente.

Parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$.



TEOREMA DE FERMAT

Teorema

O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

TEOREMA DE FERMAT

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde:

$$f'(c) = 0 \text{ ou onde } f'(c) \text{ não existe.}$$

Esses números têm um nome especial.

Definição: Um **número (ponto) crítico** de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

NÚMERO CRÍTICO

Exemplo

Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

- A Regra do Produto nos dá que:

$$f\,'(x) = x^{3/5}(-1) + (4-x)\left(\tfrac{3}{5}\,x^{-2/5}\right)$$

$$= -x^{3/5} + \frac{3(4-x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4-x)}{5x^{2/5}} = \frac{12-8x}{5x^{2/5}}$$

NÚMERO CRÍTICO

Exemplo

- Portanto, $f\,'(x) = 0$, se $12 - 8x = 0$.
- Isto é, $x = \frac{3}{2}$, ou se $f\,'(x)$ não existe quando $x = 0$.
- Assim, os números críticos são $\frac{3}{2}$ e 0.

NÚMERO CRÍTICO

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir:

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

INTERVALOS FECHADOS

Para encontrar um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observamos que ou ele é local.

Nesse caso ocorre em um número crítico;

Ou acontece em uma extremidade do intervalo.

Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

MÉTODO DO INTERVALO FECHADO

Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua *f* em um intervalo fechado [*a*, *b*]:

1. Encontre os valores de *f* nos números críticos de *f* em (*a*, *b*).

2. Encontre os valores de *f* nas extremidades do intervalo.

3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

INTERVALO FECHADO

Exemplo

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

Uma vez que f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

INTERVALO FECHADO

Exemplo

Uma vez que $f(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$.

Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

INTERVALO FECHADO Exemplo

Os valores de f nesses números críticos são: $f(0) = 1$ e $f(2) = -3$

Os valores de f nas extremidades do intervalo são: $f(-½) = 1/8$ $f(4) = 17$

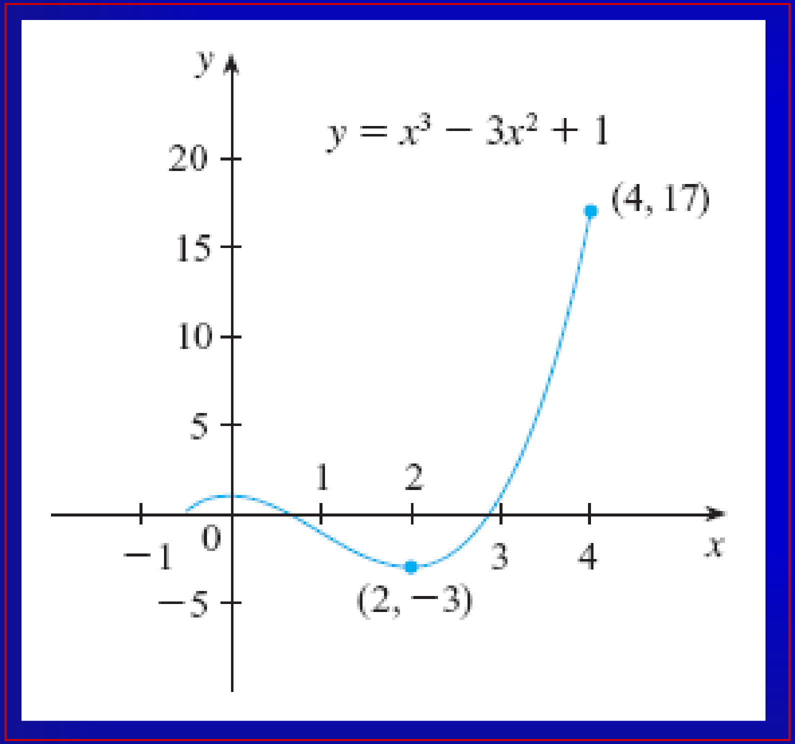
Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$

Observe que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em uma extremidade, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico.

INTERVALO FECHADO

Exemplo

O gráfico de f está esboçado na Figura.



VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Exemplo**

O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Exemplo**

Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por:

$$v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083$$

(em metros/segundo).

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Exemplo**

Usando esse modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da *aceleração* do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

São pedidos os valores extremos não da função velocidade dada, mas em vez disso, da função aceleração.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO Exemplo

Assim, precisamos primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$a(t) = v'(t)$$

$$= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2$$

$$+ 23.61t - 3.083)$$

$$= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61$$

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Exemplo**

$$a'(t) = 0{,}007812t - 0{,}18058$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO **Exemplo 10**

Calculando o valor de $a(t)$ no número crítico e nas extremidades do interval $0 \leq t \leq 126$.

$a(0) = 23{,}61 \qquad a(23{,}12) \approx 21{,}52 \qquad a(126) \approx 62{,}87$

- A aceleração máxima é cerca de 62,87 m/s^2.
- A aceleração mínima é cerca de 21,52 m/s^2.