Segundo Trabalho (P2)

1º semestre de 2021

1. A receita anual bruta de uma empresa é $f(t) = \sqrt{40t^2 + 4t + 916}$ milhares de reais t anos após a fundação da empresa, em janeiro de 2010. Determine qual será a taxa de variação da receita anual bruta da empresa em janeiro de 2015.

$$f(t) = \sqrt{40t^2 + 4t + 916} = (40t^2 + 4t + 916)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(40t^2 + 4t + 916)^{-\frac{1}{2}}(80t + 4) = \frac{(40t + 2)}{\sqrt{40t^2 + 4t + 916}}$$

$$f'(5) = \frac{101}{22} = 4{,}590$$

2. A produção de uma fábrica depois de um período de t meses é $N(t)$ mil unidades, em que:

$$N(t) = \sqrt{4t^2 + 12t + 24} = (4t^2 + 12t + 24)^{\frac{1}{2}}$$

A que taxa a produção está variando após dois meses? A produção está aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

Resolução:

$$N'(x) = \frac{1}{2}(4t^2 + 12t + 24)^{-\frac{1}{2}}(8t + 12) = \frac{4t + 6}{\sqrt{4t^2 + 12t + 24}}$$

$N'(2) = 1{,}75$, ou seja: 1750 unidades por mês.

Está aumentando, pois a variação é positiva.

3. Determine os valores extremos absolutos da função:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{em } [-1\,,1]$$

Resolução: $f'(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Pontos extremos: $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow$

$$x = 0 \;\; e \;\; x = 1$$

Como: $f(0) = 1\,; \quad f(-1) = \frac{29}{12} \;\; e \;\; f(1) = \frac{13}{12}$

Resposta. $f(-1) = \frac{29}{12}$ é max , $f(0) = 1$ é min

4. Um fabricante estima que, se x unidades de certa mercadoria forem produzidas, o custo total será C(x) reais, em que:

$$C(x) = x^3 - 24x^2 + 192x + 338$$

Determine qual é o nível de produção que maximiza o custo em [1 , 8]

Resolução: $f'(x) = 3x^2 - 48x + 192 = 0 \;\Rightarrow\; x = 8$

Pontos extremos: $f(1) = 507 \quad e \quad f(8) = 850$

Resposta. $f(8) = 850$ é o máximo global em [1 , 8]

5. Calcule as integrais:

$$\int_1^4 \frac{2x^3 - x^2\sqrt{x} + 4}{3x^2}\,dx$$

$$\int_1^4 \left(\frac{2x^3}{3x^2} - \frac{x^2\sqrt{x}}{3x^2} + \frac{4}{3x^2}\right) dx = \int_1^4 \left(\frac{2x}{3} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{4}{3x^2}\right) dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \left(2x - x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{4}{x}\right)\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\left(16 - \frac{16}{3} - 1 - \left(1 - \frac{2}{3} - 4\right)\right)$$

$$= \frac{40}{9}$$

6. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas no intervalo $-2 \leq x \leq 5$ que satisfazem as equações:

$$\int_{-2}^{5} f(x)dx = 3\,, \qquad \int_{-2}^{5} g(x)dx = -4 \;\; e \;\; \int_{3}^{5} f(x)dx = 7$$

Use essas informações para calcular as seguintes integrais definidas:

$$a) \int_{-2}^{5} [2f(x) - 3g(x)]dx \; =$$

$$\int_{-2}^{5} [2f(x) - 3g(x)]dx \; = 2\int_{-2}^{5} f(x)dx - 3\int_{-2}^{5} g(x)dx = 2\,.\,3 \; - 3\,.\,(-4) = 18$$

$$b)\ \int_{-2}^{3} f(x)dx$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx = \int_{-2}^{5} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{5} f(x)dx - \int_{3}^{5} f(x)dx = 3 - 7 = -4$$

7. Calcule a integral:

$$\int (4x+6)\sqrt{x^2+3x+1}dx$$

Integração por substituição: $u = x^2 + 3x + 1$, $então \ \ du = (2x+3)dx$

$$\int (4x+6)\sqrt{x^2+3x+1}dx = 2\int \sqrt{x^2+3x+1}\,(2x+3)dx$$

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du = 2\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{3}(x^2+3x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{(x^2+3x+1)^3} + C$$

8. Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é dada por $v(t) = 2t^2 - 12t + 10$ (medida em metros por segundo).
Determine o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 5$.

Resolução:

$$s(5) - s(1) = \int_1^5 v(t)dt = \int_1^5 (2t^2 - 12t + 10)dt = \left[\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 10t\right]_1^5 = -\frac{64}{3}$$

Isso significa que a partícula moveu-se $\frac{64}{3}$ m para a esquerda.