



Capítulo 3

Probabilidade

Texto baseado no livro:

Estatística Aplicada - Larson / Farber – Editora Pearson – 2010



Descrição do capítulo

3.1 Conceitos básicos de probabilidade

3.2 Probabilidade condicional e a regra da multiplicação

3.3 A regra da adição

3.4 Tópicos adicionais sobre probabilidade e contagem



Seção 3.1

Conceitos básicos de probabilidade



Objetivos da Seção 3.1

Identificar o espaço amostral de um experimento de probabilidade

Identificar eventos simples

Usar o princípio fundamental da contagem

Distinguir probabilidade clássica, empírica e subjetiva

Determinar a probabilidade dos complementos de um evento

Usar um diagrama de árvore e o princípio fundamental da contagem para encontrar probabilidades

Fenômenos



Determinísticos: previsíveis

Aleatórios: não previsíveis

Experimentos aleatórios: produzidos pelo homem



Exemplos:

lançamento de uma moeda honesta

lançamento de um dado

lançamento de duas moedas

retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas

verificação do tempo de vida útil de um componente eletrônico

Espaço amostral e evento aleatório



Espaço amostral de um experimento aleatório:

Conjunto de todos os possíveis resultados do experimento

Indicação: Ω

Pontos amostrais:

Elementos do espaço amostral

Evento aleatório:

Qualquer subconjunto do espaço amostral

Exemplo 1



Lançamento de um dado honesto com faces numeradas de 1 a 6.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento A: saída de um número par

$$A = \{2, 4, 6\}$$



Evento B: saída de um número maior do que 7

$B = \{ \}$ (conjunto vazio)

Evento C: saída de um número menor do que 7

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ou $C = \Omega$

Exemplo 2



Retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas

Obs: Em um baralho há 4 naipes: Ouros (o), Paus (p), Copas (c) e

Espadas (e) e 13 cartas de cada naipe: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete (V), dama (D) e rei (R).

Espaço amostral:

$$\Omega = \{A_o, 2_o, \dots, R_o, A_p, 2_p, \dots, R_p, A_c, 2_c, \dots, R_c, A_e, 2_e, \dots, R_e\}$$

Evento A: saída de uma carta de copas

$$A = \{A_c, 2_c, 3_c, 4_c, 5_c, 6_c, 7_c, 8_c, 9_c, 10_c, V_c, D_c, R_c\}$$

Evento B: saída de um rei

$$B = \{R_o, R_p, R_c, R_e\}$$

Exemplo 3:



Um experimento de probabilidade consiste em jogar uma moeda e depois rolar um dado de seis lados. Descreva o espaço amostral.



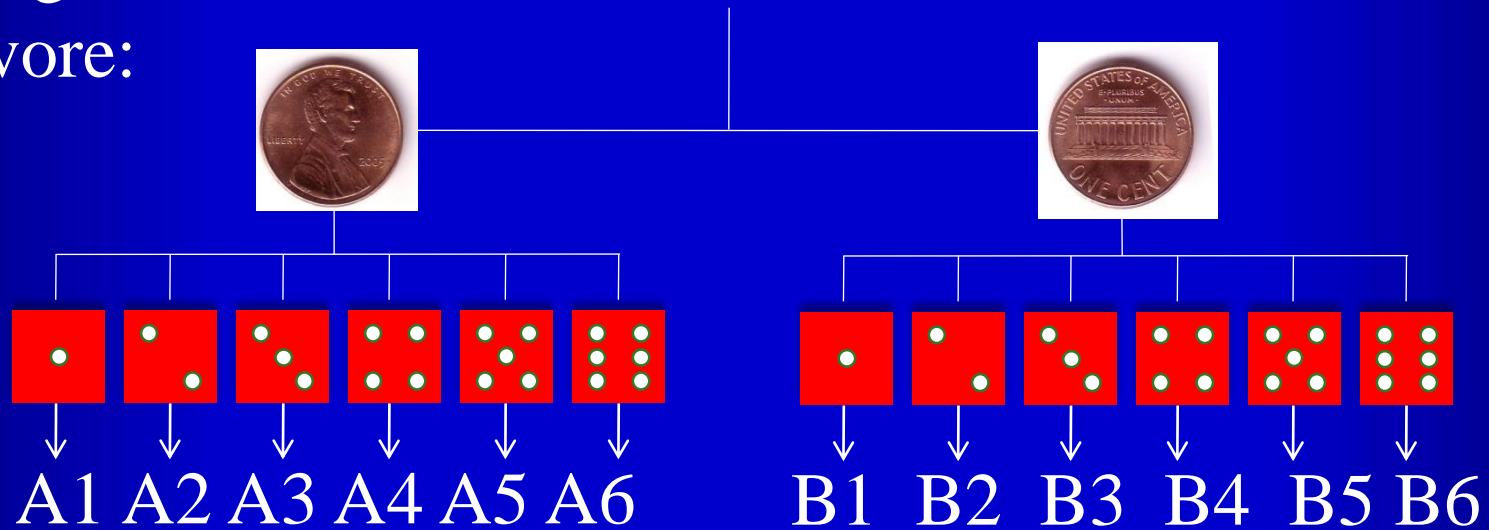
Solução:

Existem dois possíveis resultados quando se joga uma moeda: cara (A) ou coroa (B). Para cada um deles, há mais seis possíveis resultados quando se rola um dado: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Um meio de listar resultados para ações em sequência é usar um **diagrama de árvore**.

Exemplo 3



Diagrama de
árvore:



O espaço amostral possui 12 resultados:

$\{A1, A2, A3, A4, A5, A6, B1, B2, B3, B4, B5, B6\}$



Evento simples

Evento simples

Um evento que consiste de um único resultado

Ex.: “Tirar cara na moeda e rolar um 3” $\{A_3\}$

Um evento que consiste de mais de um resultado não é um evento simples

Ex.: “Tirar cara na moeda e rolar um número par” $\{A_2, A_4, A_6\}$



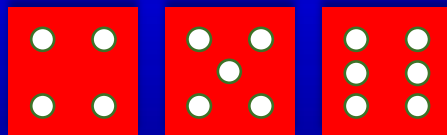
Exemplo: identificando evento simples

Determine se o evento é simples ou não.

Você rola um dado de seis lados. O evento B é rolar pelo menos um 4

Solução:

Não é simples (o evento B tem três possíveis resultados: 4 ou 5 ou 6).





Princípio fundamental da contagem

Princípio fundamental da contagem

Se um evento pode ocorrer de m maneiras e um segundo evento pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras que os dois eventos podem ocorrer em sequência é mn

Pode ser estendido para qualquer número de eventos ocorrendo em sequência



Exemplo: princípio fundamental da contagem

Você está comprando um carro novo. As possíveis montadoras, tamanhos de carro e cores são listadas.

Montadoras: Ford, GM, Honda

Tamanho: compacto, médio

Cores: branco (B), vermelho (V), preto (P), amarelo (A)

De quantos modos diferentes você pode escolher uma montadora, um tamanho de carro e uma cor? Use um diagrama de árvore para verificar seus resultados.



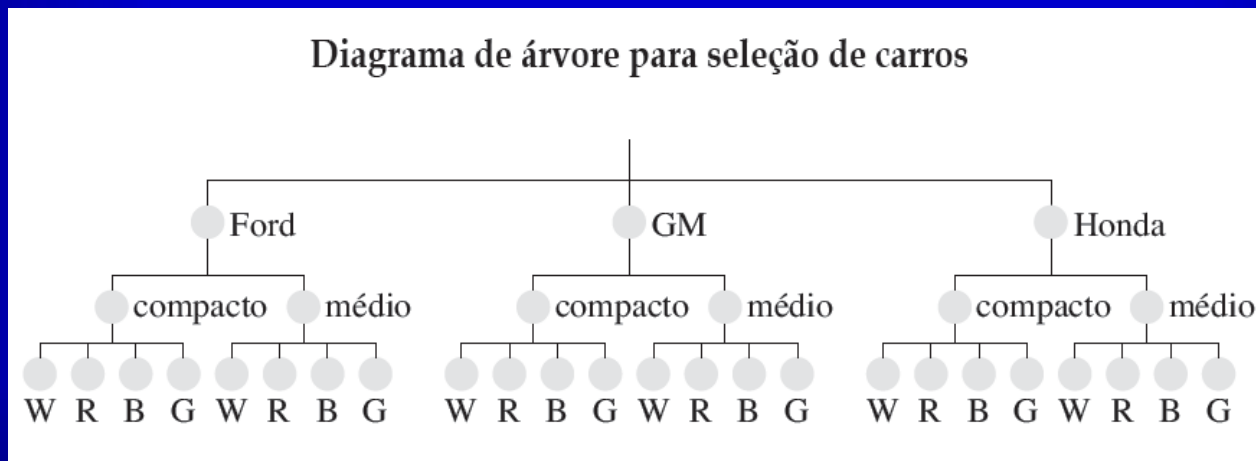


Solução: princípio fundamental da contagem

Há três escolhas de montadoras, dois tamanhos de carro e quatro cores.

Usando o princípio fundamental da contagem:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ maneiras}$$





Tipos de probabilidade

Probabilidade clássica (ou teórica)

Cada resultado em uma amostragem é igualmente provável

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados no evento } E}{\text{Número total de resultados no espaço amostral}}$$



Exemplo: encontrando probabilidades clássicas

Você rola um dado de seis lados. Encontre a probabilidade de cada evento.

Evento A: rolar um 3

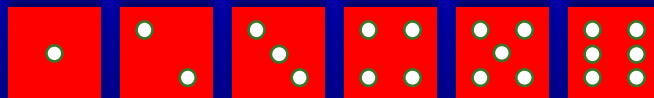
Evento B: rolar um 7

Evento C: rolar um número menor que 5



Solução:

Espaço amostral: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Solução: encontrando probabilidades clássicas



1. Há um resultado no evento $A = \{3\}$. Então,

$$P(\text{rolar um } 3) = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

2. Em razão de 7 não estar no espaço amostral, não há resultados no evento. Então,

$$P(\text{rolar um } 7) = \frac{0}{6} = 0.$$

3. Há quatro resultados no evento $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Então,

$$P(\text{rolar um número menor que } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$



Tipos de probabilidade

Probabilidade empírica (estatística)

Baseado nas observações obtidas de experimentos de probabilidade

Frequência relativa de um evento

$$P(E) = \frac{\text{Frequência do evento } E}{\text{Frequência total}}$$
$$= \frac{f}{n}$$

Exemplo: encontrando probabilidade empírica



Uma empresa está conduzindo uma pesquisa online com indivíduos selecionados aleatoriamente para determinar se o congestionamento no trânsito é um problema em sua comunidade. Até agora, 320 pessoas responderam à pesquisa. A distribuição de frequência mostra os resultados. Qual é a probabilidade de que a próxima pessoa que responda a essa pesquisa diga que o congestionamento é um problema sério em sua comunidade?

Resposta	Número de vezes, f
Problema sério	123
Problema moderado	115
Não é problema	82
	$\Sigma f = 320$



Solução: encontrando probabilidade empírica

	Resposta	Número de vezes, f	
evento →	Problema sério	123	← frequência
	Problema moderado	115	
	Não é problema	82	
		$\Sigma f = 320$	

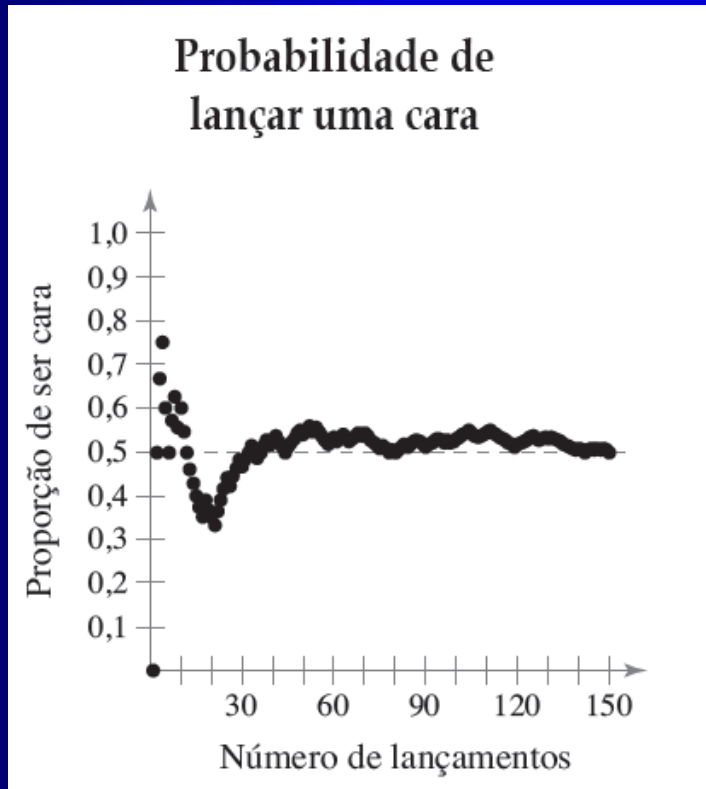
$$P(\text{problema sério}) = \frac{123}{320} \\ = 0,384.$$

Lei dos grandes números



Lei dos grandes números

Conforme um experimento é repetido, a probabilidade empírica de um evento se aproxima da probabilidade clássica (teórica) do evento.





Tipos de probabilidade

Probabilidade subjetiva

Intuição, palpites e estimativas

Ex.: um médico pode achar que um paciente tem 90% de chance de se recuperar completamente.





Exemplo: classificando tipos de probabilidade

Classifique a afirmação como um exemplo de probabilidade clássica, empírica ou subjetiva.

1. A probabilidade que você esteja casado aos 30 anos é 0,50.

Solução:

Probabilidade subjetiva (mais provavelmente um palpite).



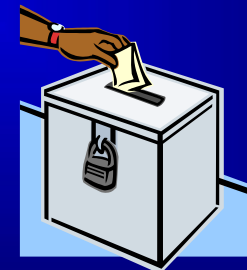


Classifique a afirmação como um exemplo de probabilidade clássica, empírica ou subjetiva.

2. A probabilidade de um votante aleatório escolher certo candidato é 0,45.

Solução:

Probabilidade empírica (mais provavelmente baseado em uma pesquisa).





Classifique a sentença como um exemplo de probabilidade clássica, empírica ou subjetiva.

3. A probabilidade de ganhar em uma rifa com 1.000 bilhetes comprando um bilhete é $\frac{1}{1000}$

· **Solução:**

Probabilidade clássica (resultados igualmente prováveis).



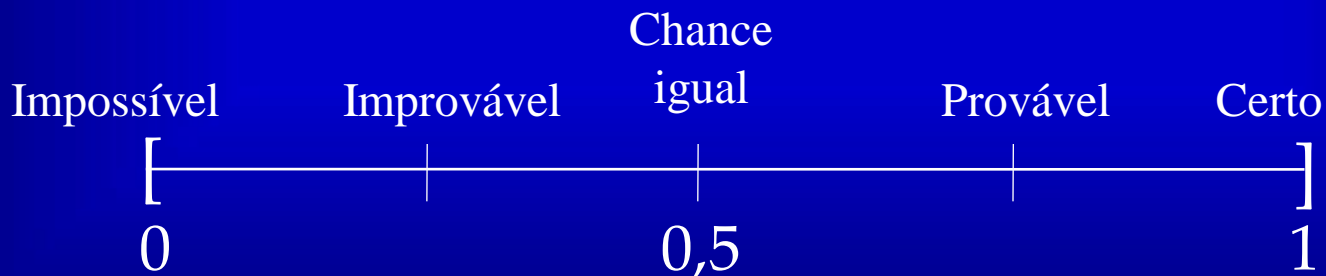


Regra da amplitude das probabilidades

Regra da amplitude das probabilidades

A probabilidade de um evento E ocorrer é um número entre 0 e 1:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$



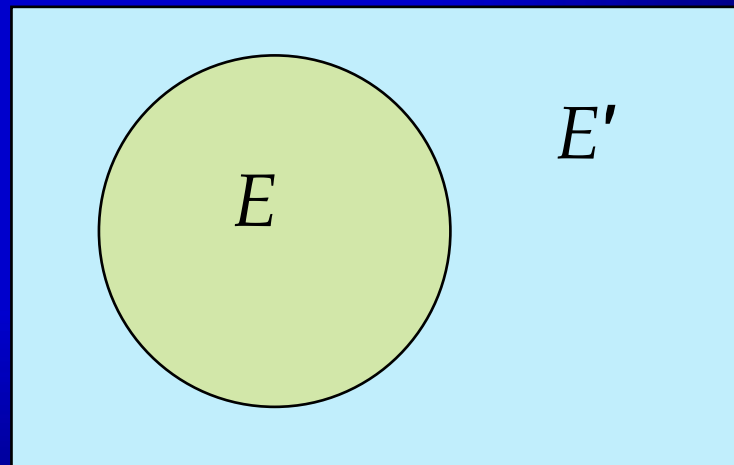


Eventos complementares

Complemento do evento E

O conjunto de todos os resultados em um espaço de amostra que os resultados não estão incluídos no evento E

Denotado E' (complementar)



Exemplo: probabilidade do complemento de um evento



Você pesquisa uma amostra de 1.000 funcionários em uma empresa e registra a idade de cada um. Encontre a probabilidade de escolher aleatoriamente um funcionário que não esteja entre 25 e 34 anos.

Idades	Frequência, f
de 15 a 24	54
de 25 a 34	366
de 35 a 44	233
de 45 a 54	180
de 55 a 64	125
65 ou mais	42
	$\Sigma f = 1.000$



Solução: probabilidade do complemento de um evento

Use a probabilidade empírica para encontrar $P(\text{idades de 25 até 34})$

$$P(\text{idades de 25 até 34 anos}) = \frac{366}{1.000} = 0,366$$

Use a regra do complemento

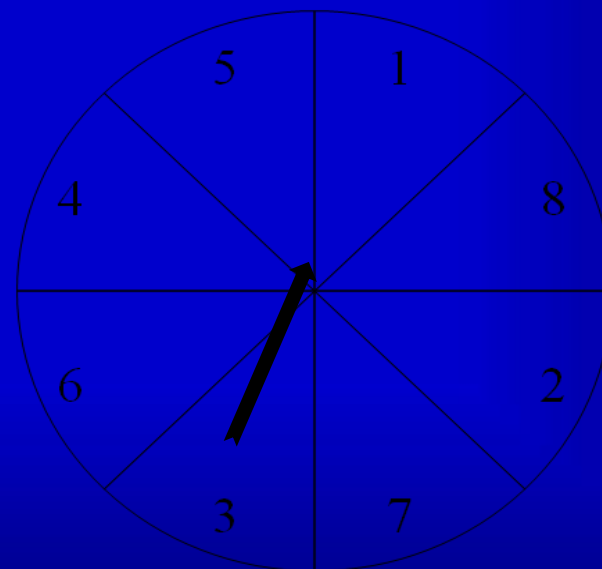
$$\begin{aligned} P(\text{idade que não tenha entre 25 e 34 anos}) &= 1 - \frac{366}{1.000} \\ &= \frac{634}{1.000} \\ &= 0,634. \end{aligned}$$

Idades	Frequência, f
de 15 a 24	54
de 25 a 34	366
de 35 a 44	233
de 45 a 54	180
de 55 a 64	125
65 ou mais	42
	$\Sigma f = 1.000$

Exemplo: probabilidade usando um diagrama de árvore



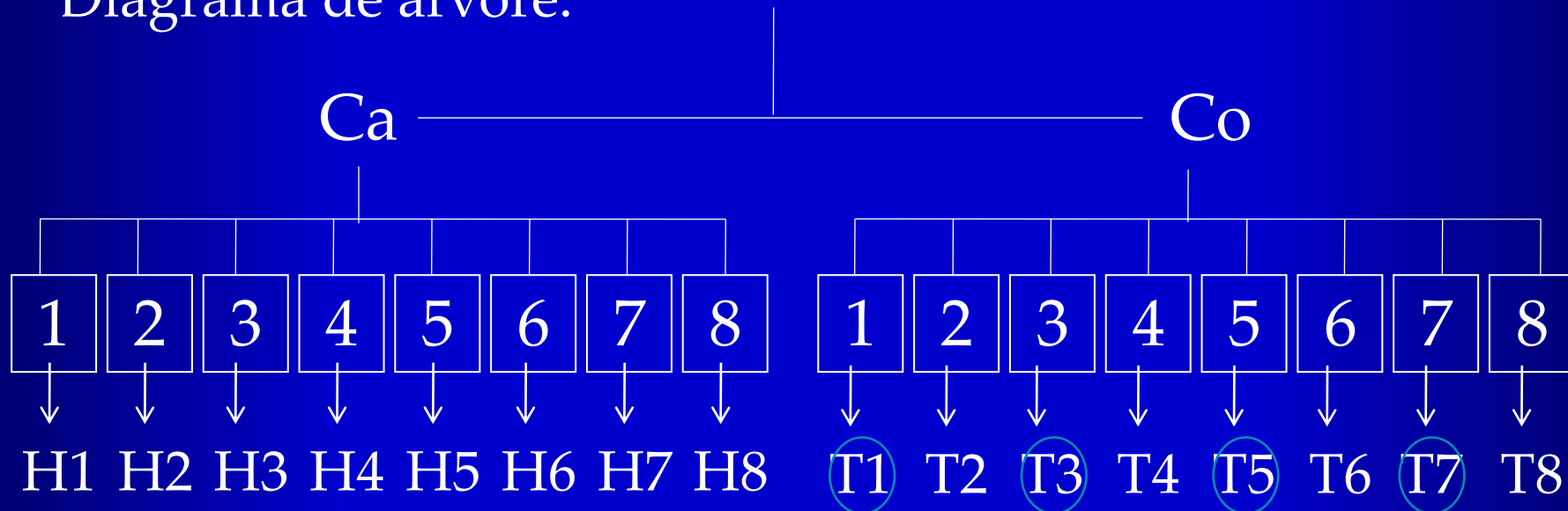
Um experimento de probabilidade consiste em jogar uma moeda e girar a roleta abaixo. A roleta tem probabilidade igual de parar em qualquer número. Use um diagrama de árvore para encontrar a probabilidade de um resultado coroa e da roleta parar em um número ímpar.





Solução: probabilidade usando um diagrama de árvore

Diagrama de árvore:



$$P(\text{tirar coroa e um número ímpar}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Exemplo: probabilidade usando o princípio fundamental da contagem



As identificações da sua faculdade consistem de 8 dígitos. Cada dígito pode ser de 0 a 9 e cada dígito pode ser repetido. Qual é a probabilidade de obter o seu número de identificação gerando aleatoriamente os oito dígitos?

Solução: probabilidade usando o princípio fundamental da contagem



Cada dígito pode ser repetido

Existem 10 escolhas para cada um dos 8 dígitos

Usando o princípio fundamental da contagem, temos que

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$P(\text{sua identificação}) = \frac{1}{100.000.000}$$



Resumo da Seção 3.1

Identificamos o espaço amostral de um experimento de probabilidade

Identificamos eventos simples

Usamos o princípio fundamental da contagem

Diferenciamos probabilidade clássica, empírica e subjetiva

Determinamos a probabilidade dos complementos de um evento

Usamos um diagrama de árvore e o princípio fundamental da contagem para encontrar probabilidades



Seção 3.2

Probabilidade condicional e a
regra da multiplicação



Objetivos da Seção 3.2

Determinar as probabilidades condicionais

Diferenciar eventos dependentes e independentes

Usar a regra da multiplicação para encontrar a probabilidade de dois eventos ocorrerem em sequência

Usar a regra da multiplicação para encontrar probabilidades condicionais



Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

A probabilidade de um evento ocorrer, sendo que outro evento já ocorreu

Denotado $P(B|A)$ (leia “probabilidade de B , dado A ”)



Exemplo: encontrando probabilidades condicionais

Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho padrão. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma dama, dado que a primeira carta é um rei.
(Assuma que o rei não é reintegrado ao baralho – dizemos que é um evento sem reposição)





Exemplo: encontrando probabilidades condicionais

Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho padrão. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma dama, dado que a primeira carta é um rei.
(Assuma que o rei não é reintegrado ao baralho.)

Solução:

Devido ao fato de a primeira carta ser um rei e não ser reintegrado, o baralho agora tem 51 cartas, das quais 4 são damas. Então,



$$P(B|A) = \frac{4}{51} \approx 0,078.$$



A tabela abaixo exhibe os resultados de um estudo no qual pesquisadores examinaram o QI de uma criança e a presença de um gene específico nela. Encontre a probabilidade de a criança ter um QI alto, dado que a criança tenha o gene.

	Gene presente	Gene não presente	Total
QI alto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102



Solução: encontrando probabilidades condicionais

Há 72 crianças que têm o gene. Então, o espaço amostral consiste em 72 crianças.

	Gene presente	Gene não presente	Total
QI adulto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102

Desses, 33 têm o QI alto.

$$P(B|A) = \frac{33}{72} \approx 0,458.$$



Eventos independentes e dependentes

Eventos independentes

A ocorrência de um dos eventos não afeta a probabilidade da ocorrência de outro evento

$$P(B|A) = P(B) \text{ ou } P(A|B) = P(A)$$

Eventos que não são independentes são ditos eventos **dependentes**, ou seja, a ocorrência de um evento afeta a **probabilidade de ocorrência do outro evento**



Exemplo: eventos independentes e dependentes

Decida se os eventos são independentes ou dependentes.

1. Escolher um rei de um baralho padrão (A), não reintegrá-lo ao baralho e, então, tirar uma dama do baralho (B).





Exemplo: eventos independentes e dependentes

Decida se os eventos são independentes ou dependentes.

1. Escolher um rei de um baralho padrão (A), não reintegrá-lo ao baralho e, então, tirar uma dama do baralho (B).

Solução:

$$P(B | A) = \frac{4}{51} \text{ e } P(B) = \frac{4}{52}$$



Dependente (a ocorrência de A altera a probabilidade da ocorrência de B).



Decida se os eventos são independentes ou dependentes.

2. Jogar uma moeda e tirar cara (A) e, então, rolar um dado de seis lados e obter um 6 (B).

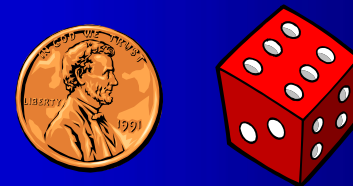




Decida se os eventos são independentes ou dependentes.

2. Jogar uma moeda e tirar cara (A) e, então, rolar um dado de seis lados e obter um 6 (B).

Solução:



$$P(B|A) = \frac{1}{6} \text{ e } P(B|\bar{A}) = \frac{1}{6}$$

Independente (a ocorrência de A não altera a probabilidade da ocorrência de B).

A regra da multiplicação



Regra da multiplicação para probabilidade de A e B

A probabilidade de dois eventos A e B acontecerem em sequência é

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Para eventos independentes a regra pode ser simplificada para

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pode ser estendida para qualquer número de eventos independentes

Exemplo: usando a regra da multiplicação



Duas cartas são selecionadas, sem recolocar a primeira carta no baralho, de um baralho comum. Encontre a probabilidade de escolher o rei e então escolher a dama.



Exemplo: usando a regra da multiplicação



Duas cartas são selecionadas, sem recolocar a primeira carta no baralho, de um baralho comum. Encontre a probabilidade de escolher o rei e então escolher a dama.

Solução:

Devido ao fato de a primeira carta não ser recolocada no baralho, os eventos são dependentes.



$$\begin{aligned} P(K \text{ e } Q) &= P(K) \cdot P(Q|K) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \\ &= \frac{16}{2.652} \\ &\approx 0,006 \end{aligned}$$



Uma moeda é atirada e um dado é jogado. Encontre a probabilidade de tirar cara e então rolar um 6.





Uma moeda é atirada e um dado é jogado. Encontre a probabilidade de tirar cara e então rolar um 6.

Solução:

O resultado da moeda não afeta a probabilidade de rolar um 6 no dado. Os dois eventos são independentes.

$$\begin{aligned} P(H \text{ e } 6) &= P(H) \cdot P(6) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} \\ &\approx 0,083 \end{aligned}$$





A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.





A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.



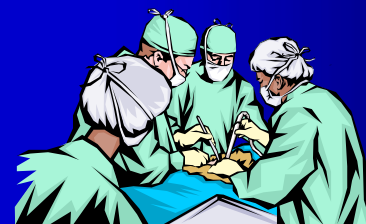
Solução:

A probabilidade de cada cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. A chance de sucesso de uma cirurgia é independente das chances das outras cirurgias.

$$P(3 \text{ cirurgias bem-sucedidas}) = (0,85)(0,85)(0,85) \\ \approx 0,614$$



Encontre a probabilidade que nenhuma das cirurgias seja bem-sucedida.





Encontre a probabilidade que nenhuma das cirurgias seja bem-sucedida.

Solução:



Devido ao fato de a probabilidade de sucesso de uma cirurgia ser de 0,85, a probabilidade de falha de uma cirurgia é $1 - 0,85 = 0,15$

$$\begin{aligned} P(\text{nenhuma das 3 cirurgias ser bem-sucedida}) &= \\ & (0,15)(0,15)(0,15) \\ & \approx 0,003 \end{aligned}$$



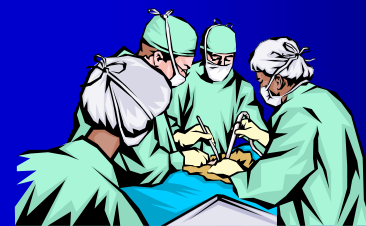
Encontre a probabilidade de que pelo menos uma das três cirurgias de joelho seja bem-sucedida.





Encontre a probabilidade de que pelo menos uma das três cirurgias de joelho seja bem-sucedida.

Solução:



“Pelo menos uma” significa uma ou mais. O complemento do evento “pelo menos uma bem-sucedida” é o evento “nenhuma é bem-sucedida”. Usando a regra dos complementos

$$P(\text{pelo menos 1 é bem-sucedida}) =$$

$$1 - P(\text{nenhuma é bem-sucedida}) \approx 1 - 0,003 = 0,997$$



Resumo da Seção 3.2

Determinamos probabilidades condicionais

Diferenciamos eventos dependentes de independentes

Usamos a regra da multiplicação para encontrar a probabilidade de dois eventos ocorrerem em sequência

Usamos a regra da multiplicação para encontrar probabilidades condicionais



Seção 3.3

A regra da adição



Objetivos da Seção 3.3

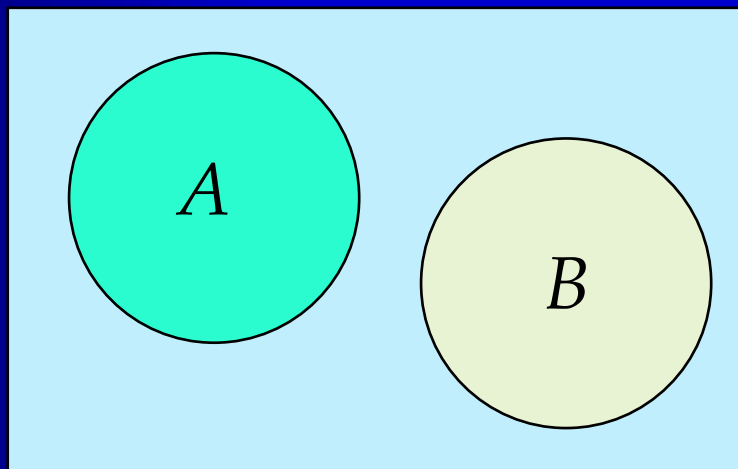
Determinar se dois eventos são mutuamente exclusivos

Usar a regra da adição para encontrar a probabilidade de dois eventos

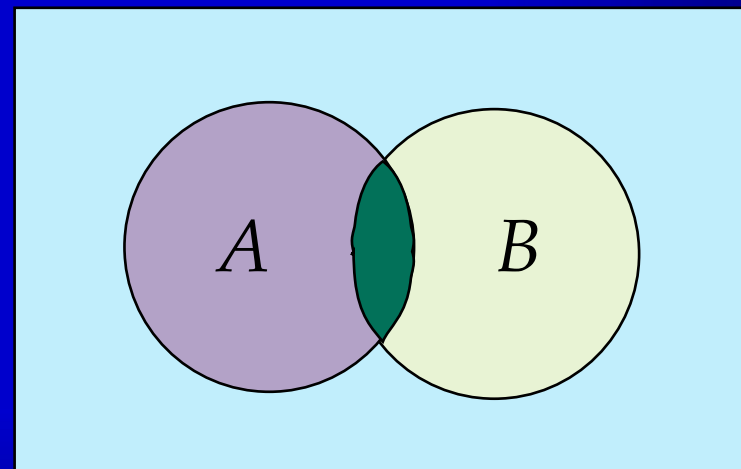
Eventos mutuamente exclusivos



Eventos Mutuamente exclusivos: Quando dois eventos A e B não podem ocorrer ao mesmo tempo



A e B são mutuamente exclusivos



A e B não são mutuamente exclusivos

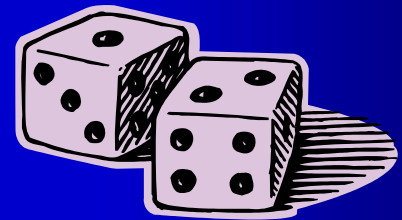
Exemplo: eventos mutuamente exclusivos



Decida se os eventos são mutuamente exclusivos.

Evento A : rolar 3 em um dado.

Evento B : rolar 4 em um dado.



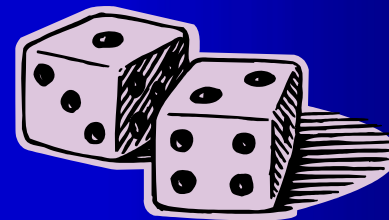
Exemplo: eventos mutuamente exclusivos



Decida se os eventos são mutuamente exclusivos.

Evento *A*: rolar 3 em um dado.

Evento *B*: rolar 4 em um dado.



Solução:

Mutuamente exclusivos (o primeiro evento tem apenas um resultado, 3. O segundo evento também tem apenas um resultado, 4. Esses resultados não podem ocorrer ao mesmo tempo).



Decida se os eventos são mutuamente exclusivos.

Evento *A*: selecionar aleatoriamente um estudante do sexo masculino.

Evento *B*: selecionar aleatoriamente um estudante de enfermagem.





Decida se os eventos são mutuamente exclusivos.

Evento *A*: selecionar aleatoriamente um estudante do sexo masculino.

Evento *B*: selecionar aleatoriamente um estudante de enfermagem.

Solução:

Não são mutuamente exclusivos (o estudante pode ser um homem cursando enfermagem).



A regra da adição



Regra da adição para a probabilidade de A ou B

A probabilidade que o evento A ou B ocorra é

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Note que: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Para eventos mutuamente exclusivos A e B , a regra pode ser simplificada para

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pode ser estendido para qualquer número de eventos mutuamente exclusivos

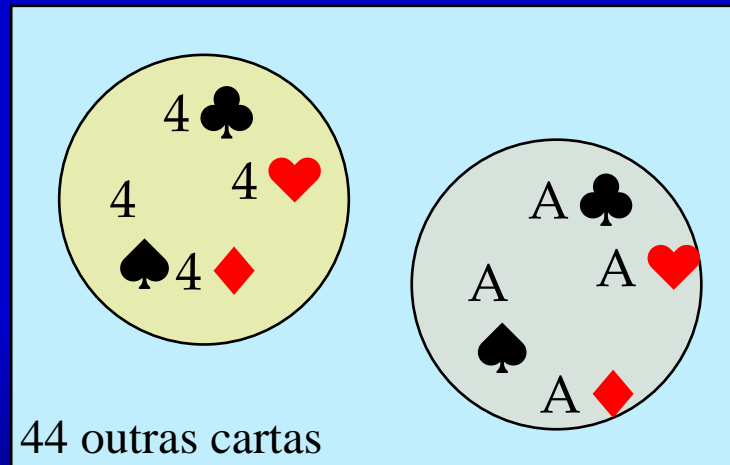
Exemplo: usando a regra da adição



Você escolhe uma carta de um baralho padrão. Encontre a probabilidade que a carta seja um 4 ou um ás.



Baralho de 52 cartas



Exemplo: usando a regra da adição



Você escolhe uma carta de um baralho padrão. Encontre a probabilidade que a carta seja um 4 ou um ás.

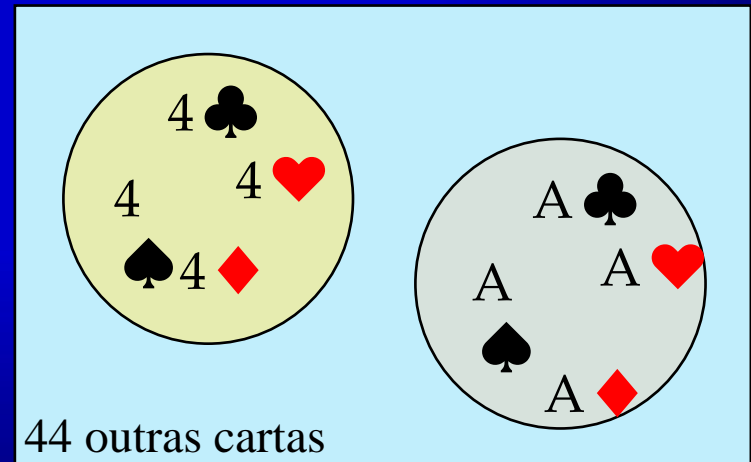
Solução:

Os eventos são mutuamente exclusivos (se a carta for um 4, não pode ser um ás).



Baralho de 52 cartas

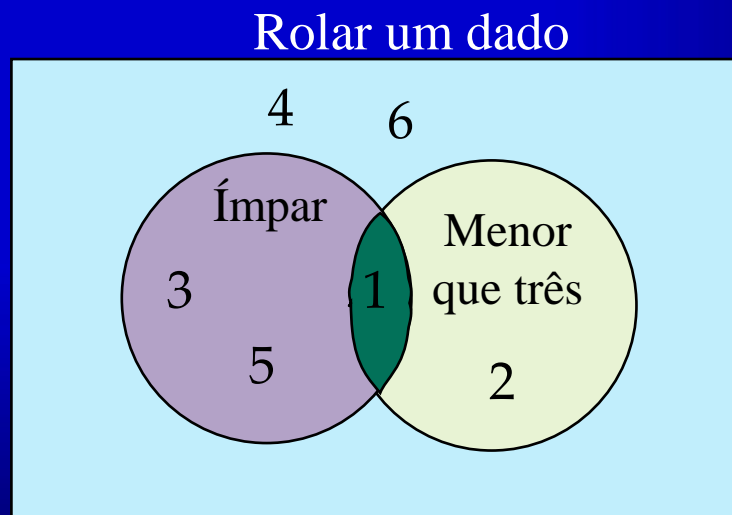
$$P(4 \text{ ou } \text{Ás}) = P(4) + P(\text{Ás}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13} \approx 0,154$$



Você rola um dado. Encontre a probabilidade de rolar um número menor que 3 ou de rolar um número ímpar.

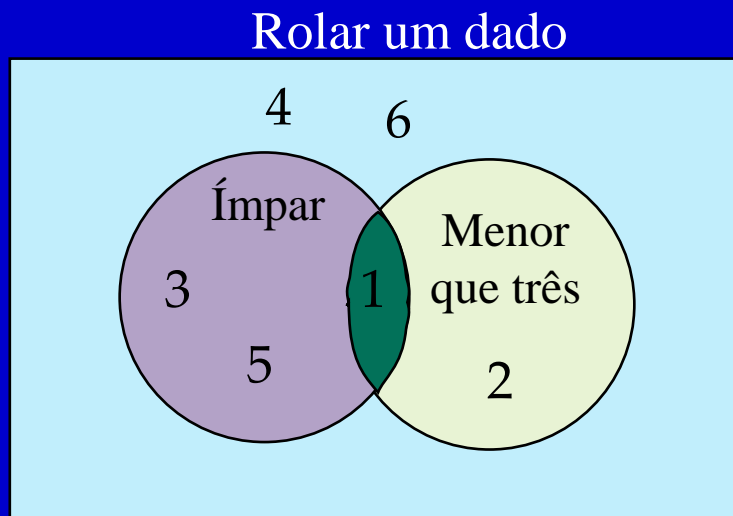
Solução:

Os eventos não são mutuamente exclusivos (1 é um resultado possível para os dois eventos).





Solução: usando a regra da adição



$P(\text{menor que 3 ou ímpar})$

$= P(\text{menor que 3}) + P(\text{ímpar}) - P(\text{menor que 3 e ímpar})$

$= 2/6 + 3/6 - 1/6 = 4/6 \approx 0.667$



Exemplo: usando a regra da adição

A distribuição de frequência mostra o volume de vendas (em dólares) e o número de meses em que um representante de vendas atingiu cada nível de vendas nos últimos três anos. Se esse padrão de vendas continuar, qual a probabilidade de que o representante venda entre \$ 75.000 e \$ 124.999 no próximo mês?

Volume de vendas (US\$)	Meses
0–24.999	3
25.000–49.999	5
50.000–74.999	6
75.000–99.999	7
100.000–124.999	9
125.000–149.999	2
150.000–174.999	3
175.000–199.999	1



Solução: usando a regra da adição

A = vendas mensais entre US\$ 75.000 e US\$ 99.999

B = vendas mensais entre US\$ 100.000 e US\$ 124.999

A e B são mutuamente exclusivos

$$\begin{aligned}P(A \text{ ou } B) &= P(A) + P(B) \\&= \frac{7}{36} + \frac{9}{36} \\&= \frac{16}{36} \\&= \frac{4}{9} \approx 0,444.\end{aligned}$$

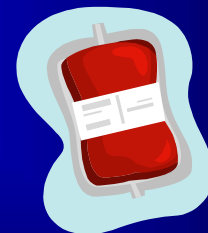
Volume de vendas (US\$)	Meses
0–24.999	3
25.000–49.999	5
50.000–74.999	6
75.000–99.999	7
100.000–124.999	9
125.000–149.999	2
150.000–174.999	3
175.000–199.999	1



Exemplo: usando a regra da adição

Um banco de sangue cataloga os tipos de sangue doados durante os últimos cinco dias. Um doador é selecionado aleatoriamente. Encontre a probabilidade de que o doador tenha tipo sanguíneo O ou A.

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409



Solução: usando a regra da adição



Os eventos são mutuamente exclusivos (um doador não pode ter tipo sanguíneo O e A).

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

$$P(\text{tipo O ou tipo A}) = P(\text{tipo O}) + P(\text{tipo A})$$

$$= \frac{184}{409} + \frac{164}{409}$$

$$= \frac{348}{409}$$

$$\approx 0,851.$$





Exemplo: usando a regra da adição

Encontre a probabilidade de que o doador tenha tipo B ou tenha Rh negativo.

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

Solução:

Os eventos não são mutuamente exclusivos (um doador pode ter tipo B e ter Rh negativo).





Solução: usando a regra da adição

	Tipo O	Tipo A	Tipo B	Tipo AB	Total
Rh positivo	156	139	37	12	344
Rh negativo	28	25	8	4	65
Total	184	164	45	16	409

$$\begin{aligned}P(\text{tipo B ou Rh-}) &= P(\text{tipo B}) + P(\text{Rh-}) - P(\text{tipo B e Rh-}) \\&= \frac{45}{409} + \frac{65}{409} - \frac{8}{409} \\&= \frac{102}{409} \\&\approx 0,249.\end{aligned}$$





Resumo da Seção 3.3

Determinamos se dois eventos são mutuamente exclusivos
Usamos a regra de adição para encontrar a probabilidade de dois eventos



Seção 3.4

Tópicos adicionais sobre probabilidade e
contagem



Objetivos da Seção 3.4

Determinar o número de maneiras que um grupo de objetos pode ser ordenado

Determinar o número de maneiras de se escolher vários objetos de um grupo sem considerar a ordem

Usar os princípios da contagem para encontrar probabilidades



Permutações

O número de permutações diferentes de n objetos distintos é $n!$ (**n fatorial**)

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Exemplos:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Permutações



Permutação de n objetos tomados r de cada vez (**arranjo**)

O número de permutações diferentes de n objetos distintos tomados r de cada vez, considerando a ordem dos objetos, denominado arranjo, é:

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

em que $r \leq n$



Exemplo: Encontrando $A(n, r)$

1. Encontre o número de maneiras de formar códigos de 3 dígitos no qual nenhum dígito seja repetido.

Solução:

Você precisa selecionar 3 dígitos de um grupo de 10

$$n = 10, r = 3$$



$$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 720$$

2. Quarenta e três carros de corrida começaram uma corrida. De quantas maneiras os carros podem terminar em primeiro, segundo e terceiro?





2. Quarenta e três carros de corrida começaram uma corrida. De quantas maneiras os carros podem terminar em primeiro, segundo e terceiro?

Solução: Precisamos escolher 3 carros de um grupo de 43

$$n = 43, r = 3$$

$$A(n, r) = A(43, 3) = \frac{43!}{(43-3)!} = \frac{43!}{40!} = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40!}{40!}$$

$$= 43 \cdot 42 \cdot 41 = 74046$$





Permutações distinguíveis

O número de permutações distinguíveis de n objetos, em que n_1 é de um tipo, n_2 de outro tipo e assim por diante é dado por:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}$$

em que: $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$

Exemplo: permutações distinguíveis



Um empreiteiro planeja desenvolver uma subdivisão da seguinte maneira: 6 casas de um andar, 4 sobrados e duas casas com vários andares. De quantas maneiras distintas as casas podem ser organizadas?

Solução: Há 12 casas ao todo

$$n = 12, \quad n_1 = 6, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 2$$



$$\begin{aligned} \frac{12!}{6! \cdot 4! \cdot 2!} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4! \cdot 2!} \\ &= 13.860 \text{ maneiras distinguíveis} \end{aligned}$$



Combinações

Combinação de n objetos tomados r de cada vez

Uma seleção de r objetos de um grupo de n objetos, não considerando a ordem, denominado combinação, é:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$

Exemplo: combinações

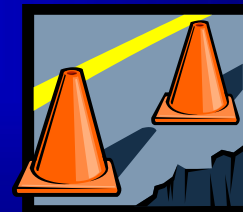


Um departamento estadual de transportes planeja desenvolver uma nova seção de uma rodovia interestadual e recebe 16 ofertas de concorrência para o projeto. O Estado planeja contratar quatro empresas na concorrência. Quantas combinações diferentes de quatro empresas podemos selecionar entre as 16 empresas da concorrência.

Solução: Você precisa escolher 4 empresas de um grupo de 16

$$n = 16, r = 4$$

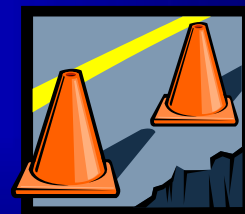
A ordem não importa





Solução: combinações

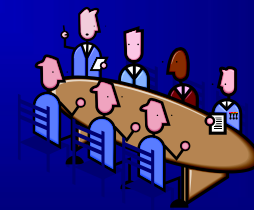
$$\begin{aligned} & \frac{16!}{(16-4)! 4!} \\ = & \frac{16!}{12! 4!} \\ = & \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 4!} \\ = & 1.820 \text{ combinações diferentes.} \end{aligned}$$





Exemplo: encontrando probabilidades

1. Uma junta de conselheiros estudantis consiste em 17 membros. Três membros servem como presidente, secretário e webmaster. Cada membro tem a mesma probabilidade de servir em uma dessas posições. Qual é a probabilidade de selecionar aleatoriamente os três membros que ocupam cada posição?





Solução: encontrando probabilidades

Há apenas um resultado favorável e há

$$\frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4.080.$$

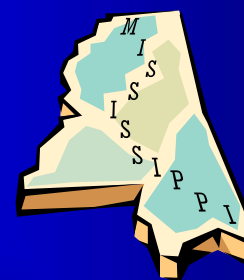
maneiras nas quais as três posições podem ser preenchidas. Então, a probabilidade de selecionarmos corretamente os três membros que têm cada posição é:

$$P(\text{selecionando três membros}) = \frac{1}{4.080} \approx 0,0002.$$



Exemplo: encontrando probabilidades

2. Você tem 11 letras consistindo em um M, quatro I, quatro S e dois P. Se as letras forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade que essa ordem forme a palavra *Mississippi*?





Solução: encontrando probabilidades

Há apenas um resultado favorável e há

$$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34.650 \quad \text{11 letras com 1, 4, 4 e 2 letras iguais,}$$

permutações distinguíveis das letras dadas. Então, a probabilidade de que a ordem forme a palavra *Mississippi* é:

$$P(\text{Mississippi}) = \frac{1}{34.650} \approx 0,000029.$$



Resumo da Seção 3.4

Determinamos o número de maneiras que um grupo de objetos pode ser ordenado

Determinamos o número de maneiras de se escolher vários objetos de um grupo sem considerar a ordem

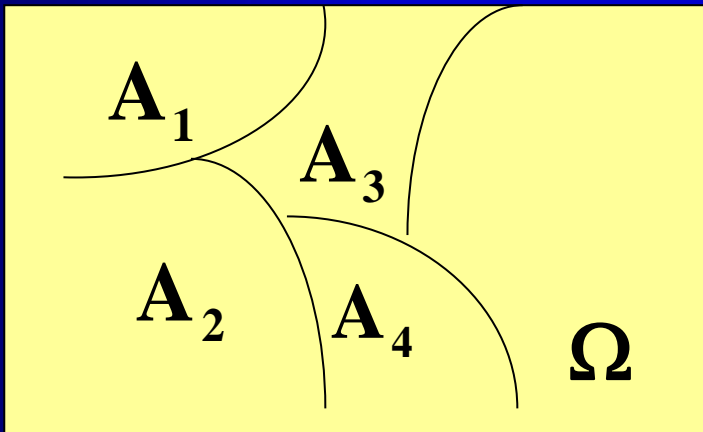
Usamos os princípios da contagem para encontrar probabilidades

PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL



Definição: dizemos que os eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, se:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$



Teorema da Probabilidade Total



Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos que formam uma partição do espaço amostral.

Seja B um evento deste espaço. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Teorema da Probabilidade Total



Exemplo

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

Teorema da Probabilidade Total



Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade que seja branca?

Resp:

$$P(\text{branca}) = \frac{1}{2} * \frac{3}{5} + \frac{1}{2} * \frac{4}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} = \frac{9 + 10}{30} = \frac{19}{30}$$

Teorema de Bayes



Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos que formam uma partição de um espaço amostral. Seja B um evento deste espaço amostral. Sejam conhecidas $P(A_i)$ e $P(B/A_i)$, $i=1, \dots, n$.

Então:

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}, \quad j = 1, \dots, n$$



Num supermercado há 2000 lâmpadas, provenientes de 3 fábricas distintas X, Y e Z. X produziu 500, das quais 400 são boas. Y produziu 700, das quais 600 são boas, e Z as restantes, das quais são 500 boas. Se sortearmos ao acaso uma das lâmpadas nesse supermercado, qual a probabilidade de que:

a) seja boa?

b) seja defeituosa

c) sendo defeituosa, tenha sido fabricada por X?



$$P(X) = 5/20 \text{ e } P(B/X) = 4/5$$

$$P(Y) = 7/20 \text{ e } P(B/Y) = 6/7$$

$$P(Z) = 8/20 \text{ e } P(B/Z) = 5/8$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Boa}) &= P(X \cap B) + P(Y \cap B) + P(Z \cap B) = \\ &= P(X) \cdot P(B/X) + P(Y) \cdot P(B/Y) + P(Z) \cdot P(B/Z) = \\ &= \frac{5}{20} * \frac{4}{5} + \frac{7}{20} * \frac{6}{7} + \frac{8}{20} * \frac{5}{8} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(\text{Defeituosa}) = 1 - P(\text{Boa}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\text{c) } P(X/D) = \frac{P(X \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{5} * \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} * \frac{1}{4} * \frac{4}{1} = \frac{1}{5}$$

Exemplo 2



Uma urna contém 5 bolas brancas, 4 vermelhas e 3 azuis. Extraem-se sucessivamente três bolas, ao acaso e por um processo sem reposição. Determine a probabilidade de que:

a) nenhuma seja vermelha resp. $\frac{14}{55}$

b) exatamente uma seja vermelha resp. $\frac{28}{55}$

c) todas sejam de mesma cor resp. $\frac{3}{44}$

Exemplo 2: Uma urna contém 5 bolas brancas, 4 vermelhas e 3 azuis. Extraem-se sucessivamente três bolas, ao acaso e por um processo sem reposição. Determine a probabilidade de que:



Resolução:

$$\text{a) } P(\text{nenhuma vermelha}) = P(\bar{V} \cap \bar{V} \cap \bar{V}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

$$\text{b) } P(\text{exatamente uma vermelha}) = P(V \cap \bar{V} \cap \bar{V}) \cdot 3 = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot 3 = \frac{28}{55}$$

OBS. quantidade de formas que pode ocorrer $P(V \cap \bar{V} \cap \bar{V})$ é $\left(\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3\right)$

$$\text{c) } P(\text{todas da mesma cor}) = P(B \cap B \cap B) + P(V \cap V \cap V) + P(A \cap A \cap A) =$$
$$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{44}$$

Exemplos 3



As probabilidades de 3 jogadores A, B e C marcarem um gol quando cobram um pênalti são: $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{4}{5}$ e $P(C) = \frac{7}{10}$.

Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que:

a) não saia gol?

b) pelo menos um marque um gol?

Exemplos 3



As probabilidades de 3 jogadores A, B e C marcarem um gol quando cobram um pênalti são: $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{4}{5}$ e $P(C) = \frac{7}{10}$.

Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que:

Resolução:

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{4}{5} \text{ e } P(C) = \frac{7}{10}.$$

$$\text{Então } P(\bar{A}) = \frac{1}{3}, \quad P(\bar{B}) = \frac{1}{5} \text{ e } P(\bar{C}) = \frac{3}{10}$$

$$\text{a) } P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} * \frac{3}{10} = \frac{1}{50}$$

$$\text{b) } P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

Exercícios 4



Da produção de peças de uma determinada máquina, 10% são defeituosas. Retiram-se 5 peças da produção dessa máquina. Qual a probabilidade de que:

- a) no máximo duas sejam boas? **R: 0,00856**
- b) pelo menos quatro sejam boas? **R: 0,91854**
- c) exatamente três sejam boas? **R: 0,0729**
- d) pelo menos uma seja defeituosa? **R: 0,40951**



Da produção diária de peças de uma determinada máquina, 10% são defeituosas. Retiram-se 5 peças da produção dessa máquina. Qual a probabilidade de que:

a) $P(\text{no máximo duas sejam boas}) =$
 $P(0B) + P(1B) + P(2B) = P(DDDDD) + P(BDDDD) \cdot 5 +$
 $+ P(BBDDD) \cdot 10 = (0,1)^5 + 0,9 \cdot (0,1)^4 \cdot 5 + (0,9)^2 \cdot (0,1)^3 \cdot 10 =$
 $0,00001 + 0,00045 + 0,0081 = 0,00856$

b) $P(\text{pelo menos quatro sejam boas}) = P(4B) + P(5B) =$
 $P(BBBBD) \cdot 5 + P(BBBBB) = (0,9)^4 \cdot (0,1) \cdot 5 + (0,9)^5$
 $= 0,32805 + 0,59049 = 0,91854$



Da produção diária de peças de uma determinada máquina, 10% são defeituosas. Retiram-se 5 peças da produção dessa máquina. Qual a probabilidade de que:

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{exatamente três sejam boas}) &= \\ &= P(\text{BBBDD}) \cdot 10 = (0,9)^3 \cdot (0,1)^2 \cdot 10 = 0,0729 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(\text{pelo menos uma seja defeituosa}) &= 1 - P(\text{nenhuma D}) = \\ &= 1 - P(5B) = 1 - (0,9)^5 = 1 - 0,59049 = 0,40951 \end{aligned}$$