Resolva os limites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(5x)}{3x}$

$Resposta: \dfrac{5}{3}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{3x}$

Resolução: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{3x} = \frac{0}{0}$

Usando L'Hospital:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(e^{5x}-1\right)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5e^{5x}}{3} = \frac{5}{3} \,.\, 1 = \frac{5}{3}$ (exponencial de zero é 1)

$Resposta: \dfrac{5}{3}$

3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}{senx} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}{senx} = \lim_{x \to \pi} \frac{3\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(-sen\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{cosx} = \frac{3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$Resposta: 0$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sen(\pi x)}{x - 1}$

$Resposta: -\pi$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{lnx}{x^2 - x}$

$Resposta: 1$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{-x^3 - x^2 - x} = -\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{-x^3 - x^2 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}(2x)}{-3x^2 - 2x - 1} = -\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}(2x)(2x) + e^{x^2}(2)}{-6x - 2} = -\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}(2x)(4x^2) + e^{x^2}(8x) + e^{x^2}(2x)(2)}{-6} = -\infty$$

$Resposta: -\infty$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{e^{2x}}$

$Resposta: 0$

Determine os valores extremos absolutos das funções:

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ em $[-3, 1]$

Resolução: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; pontos\ críticos\!: \; x_1 = 1 \;\; e \;\; x_2 = -2$

$f(-3) = 2 \;;\;\; f(-2) = 13 \;\; e \;\; f(1) = -14$

Resposta: $Máximo\ global\ (-2, 13) \;\; e \;\; Mínimo\ global\ (1, -14)$

2. $f(x) = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 4x$ em $[1, 2]$

Resposta: $Máximo\ global\ \left(1\,,\frac{5}{3}\right)\ \ e\ \ Mínimo\ global\ \left(2\,,\frac{4}{3}\right)$

3. $f(x) = \frac{2x^3}{3} + 5x^2 + 8x + 1$ em $[-4\,,0]$

Resolução: $f'(x) = 2x^2 + 10x + 8 = 0 \Rightarrow\ pontos\ críticos\colon\ x_1 = \ -1\ \ e\ \ x_2 = -4$

$f(-4) = \dfrac{19}{3}\ \ ;\ \ f(-1) = -\dfrac{8}{3}\ \ \ e\ \ f(0) = 1$

Resposta: $Máximo\ global\ \left(-4\,,\frac{19}{3}\right)\ \ e\ \ Mínimo\ global\ \left(-1\,,-\frac{8}{3}\right)$

4. $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 5$ em $[0\,,2]$

Resolução: $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4.12}}{2}\ \ \Rightarrow\ \ x = 1\ \ e\ \ x = 2$

$f(0) = 5\ \ ;\ \ f(1) = \dfrac{21}{4}\ \ \ e\ \ f(2) = 5$

$Mínimo\ global\ (0\,,5)\,,\ \ Máximo\ global\ \left(1\,,\dfrac{21}{4}\right)\ \ e\ \ Mínimo\ global\ (2\,,5)$

5. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ em $[-1\ \,,\ 2]$

   Resolução: $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2) = 0$
   $pontos\ críticos\colon\ x_1 = 0\ \ ;\ \ x_2 = 2\ \ e\ \ x_3 = -1$
   $f(-1) = \dfrac{7}{12}\ \ ;\ \ f(0) = 1\ \ \ e\ \ \ f(2) = -\dfrac{5}{3}$

   Resposta: $Máximo\ global\ (0\ \,,1)\ \ e\ \ Mínimo\ global\ \left(2\,,-\frac{5}{3}\right)$

6. Maximização do Lucro: Um fabricante produz camisetas de propaganda a um custo unitário de R$ 2,00. As camisetas vêm sendo vendidas por R$ 5,00; por esse preço, são vendidas 4.000 camisetas por mês. O fabricante pretende aumentar o preço e calcula que, para cada R$ 1,00 de aumento no preço, menos 400 camisetas serão vendidas por mês. Qual

deve ser o preço de venda das camisetas para que o lucro do fabricante seja o maior possível, considerando que a função lucro é dada por:

Solução

Seja x o novo preço de venda das camisetas e seja $P(x)$ o lucro correspondente. O objetivo é maximizar o lucro. Começamos por expressar o lucro em palavras:

Lucro = (número de camisetas vendidas)*(lucro por camiseta)

Como 4.000 camisetas são vendidas por mês quando o preço é R$ 5,00 e menos 400 camisetas serão vendidas para cada R$ 1,00 de aumento no preço, temos:

Número de camisetas vendidas = 4.000 − 400(número de aumentos de R$ 1,00)

O número de aumentos de R$ 1,00 no preço é a diferença $x - 5$ entre o preço novo e o antigo. Assim,

Números de camisetas vendidas = $4.000 - 400(x - 5)$

$= 400[10 - (x - 5)]$

$= 400(15 - x)$

O lucro por camiseta vendida é simplesmente a diferença entre o preço de venda x e o custo, R$ 2,00. Assim,

Lucro por camiseta = $x - 2$

Combinando as relações anteriores, obtemos:

$P(x) = 400(15 - x)(x - 2)$ em $[5,15]$

Resposta: $Máximo\ \left(\frac{17}{2}, 16900\right)\ e\ \ Mínimo\ (15, 0)$

7. Determinação de um Local em que a Poluição é Mínima: Duas fábricas, A e B, estão situadas a 15 quilômetros de distância uma da outra e emitem 75 ppm (partes por milhão) e 300 ppm de material particulado, respectivamente. Cada fábrica é cercada por uma área de segurança com 1 quilômetro de raio na qual não são permitidas construções residenciais; a concentração de poluentes em qualquer outro ponto Q nas vizinhanças das fábricas é inversamente proporcional à distância entre o ponto Q e a

fábrica considerada. Em que ponto da estrada que liga as duas fábricas deve ser construída uma casa para que a poluição proveniente das duas fábricas seja a menor possível se a concentração total de material particulado que chega a C é dada pela função?

$P(x) = \frac{75}{x} + \frac{300}{15-x} \quad em \quad [1\,,14].$

Resolução: $P(x) = 75x^{-1} + 300(15-x)^{-1}$

$$P'(x) = -75x^{-2} - 300(15-x)^{-2}(-1) = -\frac{75}{x^2} + \frac{300}{(15-x)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{75}{x^2} = \frac{300}{(15-x)^2} \Rightarrow 75(225 - 30x + x^2) = 300x^2 \quad (simplificar)$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4.1.(-75)}}{2} \Rightarrow x = 5 \;\; e \;\; x = -15$$

Pontos críticos: $x = 5$, $x = -15$, $x = 0$ e $x = 15$ (os dois últimos é onde $P'(x)$ não existe)

Mas $x = 0$, $x = 15$ e $x = -15$ $não\ estão\ no\ intervlo$ [1,14]

Resta, portanto, verificar os pontos extremos do intervalo dado e $x = 5$:

Como $P(1) \approx 96{,}4$, $P(5) = 45$ e $P(14) = \frac{4275}{14} \approx 305{,}4$

Resposta: $Mínimo\ (5\,,45)$ e $Máximo\ \left(14\,,\frac{4275}{14}\right)$

8. Maximização de uma Função Receita com Dados Inteiros: Uma empresa de turismo aluga um ônibus com capacidade para 50 pessoas a grupos de 35 ou mais pessoas. No caso de grupos de 35 pessoas, cada pessoa paga R$ 60,00. No caso de grupos maiores, o preço por pessoa é reduzido de R$ 1,00 para cada pessoa que exceder 35. Determine o tamanho do grupo para o qual a receita da empresa é máxima considerando que a função receita é dada por:

$$R(x) = (35 + x)(60 - x) \quad em \quad [0\,,15]$$

Resolução: $R(x) = -x^2 + 25x + 2100$

$R'(x) = -2x + 25 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{25}{2}$ $(unico\ ponto\ crítico)$

$R(0) = 2100 \;\;;\;\; R\left(\dfrac{25}{2}\right) = \dfrac{9025}{4} \approx 2256{,}3 \;\; e \;\; r(15) = 2250$

Resposta: $Mínimo\ \ (0\,,2100)\ \ e\ Máximo\ \left(\frac{25}{2}\,,\frac{9025}{4}\right)$

Pesquise os máximos e mínimos locais das funções:

9. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$

Resolução:

	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
Sinal	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Comportamento	Crescente	Máximo	Decrescente	Mínimo	Crescente

10. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 1$

Resolução:

	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
Sinal	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Comportamento	Decrescente	Mínimo	Crescente	Máximo	Decrescente	Mínimo	Crescente

11. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 3x^3 + 10x^2 + 1$

Resolução:

	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x < \infty$
Sinal	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Comportamento	Decrescente	Mínimo	Crescente	Máximo	Decrescente	Mínimo	Crescente