Exercício 1: Calcule, sabendo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 5,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -3\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = -2\ e\ \lim_{x\to\infty} g(x) = 4$$

a) $\lim_{x\to a}[2f(x) - 3g(x)]$ resposta: 16

b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ resposta: -10

c) $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x) + g(x)}$ resposta: $\sqrt{3}$

d) $\lim_{x\to a} f(x)\ [g(x) - 3]$ resposta: -25

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{2f(x)+g(x)}{x+f(x)}$ resposta: 0

f) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{g(x)}$ resposta: 2

Exercício 2: Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 1}(5x^2 - 3x - 7)$ resposta: - 5

b) $\lim_{x\to 0}(x^5 + 3x^2 + 1)$ resposta: 1

c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(1 - 16x^3)$ resposta: 3

d) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ resposta: - 2

e) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$ resposta: - 2

f) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^4-1}{x-1}\right)$ resposta: -∞

g) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right)$ resposta: +∞

Exercício 3: Juros capitalizados continuamente:

Considere um capital de R$ 5.500,00 aplicado a juros compostos a taxa de 11% ao ano pelo prazo de 5 anos.

a) Determine o montante ao final dos 5 anos

b) Quanto tempo é necessário para dobrar o montante ?

Respostas:

a) R$ 9.532,90
b) $\approx 6{,}4$ anos

Exercício 4: Juros capitalizados continuamente:

Considere um capital de R$ 15.000,00 aplicado a juros compostos a taxa de 9% ao ano, pelo prazo de 20 anos.

a) Determine o montante ao final dos 20 anos

b) Quanto tempo é necessário para triplicar o montante ?

Respostas:

a) R$ 90.744,71
b) $\approx 12{,}3$ anos

Exemplo 5: O departamento de RH de uma fábrica de eletrodomésticos observou que um empregado novo é capaz de montar *n* torradeiras por hora após *t* semanas de treinamento, em que:

$$n(t) = 70 - \frac{150}{t+4}$$

Os empregados recebem 20 centavos por torradeira montada.

a) Escreva uma expressão para a quantia *A*(*t*) que um empregado com *t* semanas de experiência recebe por hora.

b) Quanto recebe por hora um empregado com muito tempo de experiência (ou seja, quando $t \to \infty$)?

a) $A(t) = 0{,}20\left(70 - \frac{150}{t+4}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} A(t) = \lim\limits_{x\to\infty} 0{,}20\left(70 - \frac{150}{t+4}\right) = 0{,}20 * \lim\limits_{x\to\infty}\left(70 - \frac{150}{t+4}\right) =$

$0{,}20 * (70 \; - 0) = 14$

Um funcionário com muita experiência receberá R$ 14,00 por hora.

Exemplo 6: Um planejador urbano, modela a população $P(t)$ de certo bairro daqui a t anos (em milhares de moradores) por meio da função:

$$P(t) = \frac{40t}{t^2 + 10} - \frac{50}{t + 1} + 70$$

a) Qual é a população atual do bairro?

b) Qual é variação da população durante o terceiro ano? A população está aumentando ou diminuindo durante esse período?

c) O que acontece com a população a longo prazo (isto é, quando $t \to \infty$)?

a) $P(t) = \frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70$

$P(0) = \frac{40*0}{0+10} - \frac{50}{0+1} + 70 = -50 + 70 = 20$ (população atual: 20 mil)

b) $P(2) = \frac{40*2}{2^2+10} - \frac{50}{2+1} + 70 \approx 59{,}05$

$$P(3) = \frac{40 * 3}{3^2 + 10} - \frac{50}{3 + 1} + 70 \approx 63{,}86$$

$63{,}86 - 59{,}05 = 4{,}81$

Ou seja: a população está aumentou 4,81 mil no 3º ano.

c) O que acontece com a população a longo prazo (isto é, quando $t \longrightarrow \infty$)?

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70 \right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{40t}{t^2\left(1+\frac{10}{t^2}\right)} - \frac{50}{t+1} + 70 \right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{40}{t\left(1+\frac{10}{t^2}\right)} - \frac{50}{t+1} + 70 \right) = 0 - 0 + 70 = 70$$

A longo prazo a população se aproxima de 70 mil moradores.

Exemplo 7: A concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas após uma injeção é $C(t)$ miligramas por mililitro, em que:

$$C(t) = \frac{0{,}4}{t^{1{,}2} + 1} + 0{,}013$$

a) Qual é a concentração do medicamento imediatamente após a injeção (ou seja, para $t = 0$)?

b) Qual é a variação da concentração do medicamento durante a 5ª hora? A concentração aumenta ou diminui durante esse período?

c) Qual é a concentração residual do medicamento, ou seja, a concentração “a longo prazo” (quando $t \to \infty$)?

a) $C(t) = \frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013$

$C(0) = \frac{0,4}{0+1} + 0,013 = 0,413$ mg / ml

b) $C(5) - C(4) = \frac{0,4}{5^{1,2}+1} + 0,013 - \left(\frac{0,4}{4^{1,2}+1} + 0,013\right) \approx -0,0131$

Ou seja, a variação da concentração do medicamento decresce de 0,0131 mg /ml ao longo na 5ª hora

c) $\lim_{x \to \infty} C(t) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013\right) = 0,013$ mg /ml é a

concentração residual a longo prazo.

Exemplo 8: Para estudar o aprendizado em animais, um estudante de psicologia realizou um experimento no qual um rato teve de percorrer várias vezes o mesmo labirinto. Suponha que o tempo que o rato levou para atravessar o labirinto na enésima tentativa tenha sido em minutos da ordem de:

$$T(n) = \frac{5n + 17}{n}$$

O que acontece com esse tempo quando o número *n* de tentativas aumenta indefinidamente? Interprete o resultado

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5n + 17}{n} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{n(5 + \frac{17}{n}}{n} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(5 + \frac{17}{n}}{1} \right) = 5 \;\; minutos$$

O limite nos diz que, à medida que mais ensaios são realizados, o tempo de travessia do rato se aproxima de um tempo mínimo de 5 minutos.

Exemplo 9: A gerente de uma fábrica, estima que, se $x\%$ da capacidade da fábrica estiver sendo utilizada, o custo total de operação será *C* centenas de reais, em que:

$$C(x) = \frac{5(x^2 - 49x - 50)}{x^2 - 51x + 50}$$

A empresa adota uma política de manutenção rotativa que procura manter a fábrica operando o tempo todo com aproximadamente 50% da capacidade máxima. Que custo a gerente deve esperar quando a fábrica estiver operando com essa capacidade ideal?

$$\lim_{x\to 50} C(x) = \lim_{x\to 50} \frac{5(x^2-49x-50)}{x^2-51x+50} = \frac{0}{0}$$

Precisamos fatorar os polinômios.

$$\lim_{x\to 50} \frac{5(x+1)(x-50)}{(x-1)(x-50)} = \lim_{x\to 50} \frac{5(x+1)}{(x-1)} = \frac{5*51}{49} \approx 5{,}2$$

O custo de operação será $R\$$ 520

Exemplo 10: Em algumas espécies de animais, a ingestão de alimentos é afetada pelo grau de vigilância que o animal precisa manter enquanto está comendo. Em outras palavras, é difícil se alimentar adequadamente se você tem de estar em guarda o tempo todo para não ser comido por um predador. Em um modelo proposto recentemente, se o animal se alimenta de plantas que permitem uma mordida de tamanho S, a ingestão de alimentos, $I(S)$, é dada por uma função da forma:

$$I(S) = \frac{aS}{S+c}\ , \qquad onde\ \ a\ e\ c\ são\ constantes\ positivas$$

O que acontece com a ingestão $I(S)$ se o tamanho S da mordida aumenta indefinidamente? Interprete o resultado.

$$\lim_{S\to\infty} I(S) = \lim_{S\to\infty} \frac{aS}{S+c} = \lim_{S\to\infty} \frac{aS}{S\left(1+\frac{c}{S}\right)} =$$

$$\lim_{S\to\infty} \frac{a}{1+\frac{c}{S}} = a$$

À medida que o tamanho da mordida aumenta indefinidamente, a ingestão se aproxima de um limite a. Isso significa que o animal tem um limite de quanto pode consumir, não importa o tamanho de suas mordidas.