APLICAÇÕES DA DERIVAÇÃO

Formas Indeterminadas e a Regra de L’Hospital

- Texto baseado nos livros:
- Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)
- Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)
- Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

Regra de L'HOSPITAL

- Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a).
- Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

Regra de L’HOSPITAL

Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou - ∞).

OBSERVAÇÃO 1

A Regra de L'Hospital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas.

É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de f e g antes de usar a Regra de L'Hospital.

REGRA DE L'HOSPITAL **Exemplo 1**

- Encontre $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

- Podemos aplicar a Regra de L'Hôspital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

REGRA L'HOSPITAL

Exemplo 2

- Encontre $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

- Temos $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

- Logo, a Regra de L'Hôspital fornece:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$$

REGRA L'HOSPITAL   Exemplo 2

- Uma vez que $e^{x} \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, o limite do lado direito também é indeterminado.

- Mas uma segunda aplicação da Regra de L'Hôspital fornece:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

REGRA L'HOSPITAL

Exemplo 3

- Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

  - Uma vez que $\ln x \to \infty$ e $\sqrt[3]{x} \to \infty$ quando $x \to \infty$, a Regra de L'Hôspital pode ser aplicada

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

  - Observe que o limite do lado direito é agora indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$

REGRA L'HOSPITAL **Exemplo 3**

- Mas em vez de aplicar a Regra de L'Hôspital uma segunda vez, como fizemos no Exemplo 2, simplificamos a expressão e vemos que é desnecessária uma segunda aplicação da regra:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x \ast x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

REGRA L'HOSPITAL

Exemplo 5

- Encontre: $\lim_{x \to \pi} \frac{senx}{1-cosx}$

  - Se tentarmos usar cegamente a Regra de L'Hôspital, obteremos:

  - $\lim_{x \to \pi} \frac{senx}{1-cosx} = \lim_{x \to \pi} \frac{cosx}{senx} = -\infty$

REGRA L'HOSPITAL **Exemplo 5**

Isso está **errado!**

Embora o numerador sen $x \to 0$ quando $x \to \pi^-$, perceba que o denominador (1 - cos x) não tende a zero.

Logo, não podemos aplicar aqui a Regra de L'Hôspital

REGRA L'HOSPITAL

- O limite pedido é na verdade fácil de ser encontrado, pois a função é contínua em p e o denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{senx}{1 - cosx} = \frac{sen\pi}{1 - cos\pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0$$