O Teorema Fundamental do Cálculo

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

INTEGRAIS

Anteriormente, usamos os problemas de tangente e de velocidade para introduzir a derivada, que é a ideia central do cálculo diferencial.

Neste capítulo, começaremos com os problemas de área e utilizaremos para formular a ideia de integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral .

INTEGRAIS

Integrais podem ser usadas para resolver os problemas relativos a:

- volumes,
- comprimentos de curvas,
- predições populacionais,
- saída de sangue do coração,
- força sobre um dique,
- trabalho,
- excedente de consumo,
- beisebol,
- … entre muitas outras aplicações.

INTEGRAIS

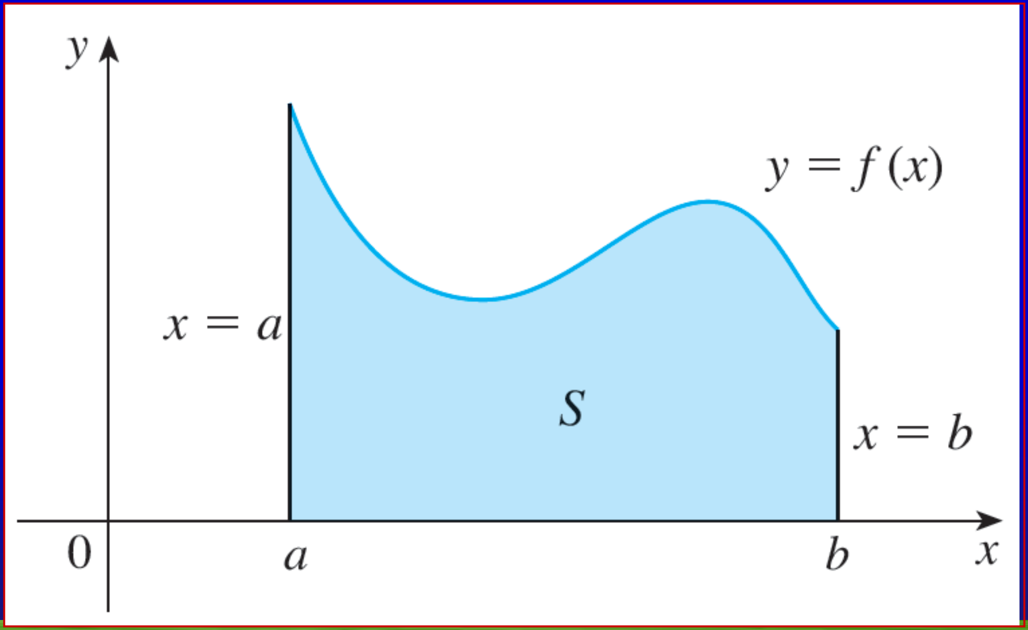
Há uma conexão entre o cálculo integral e o cálculo diferencial.

O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas.

O PROBLEMA DA ÁREA

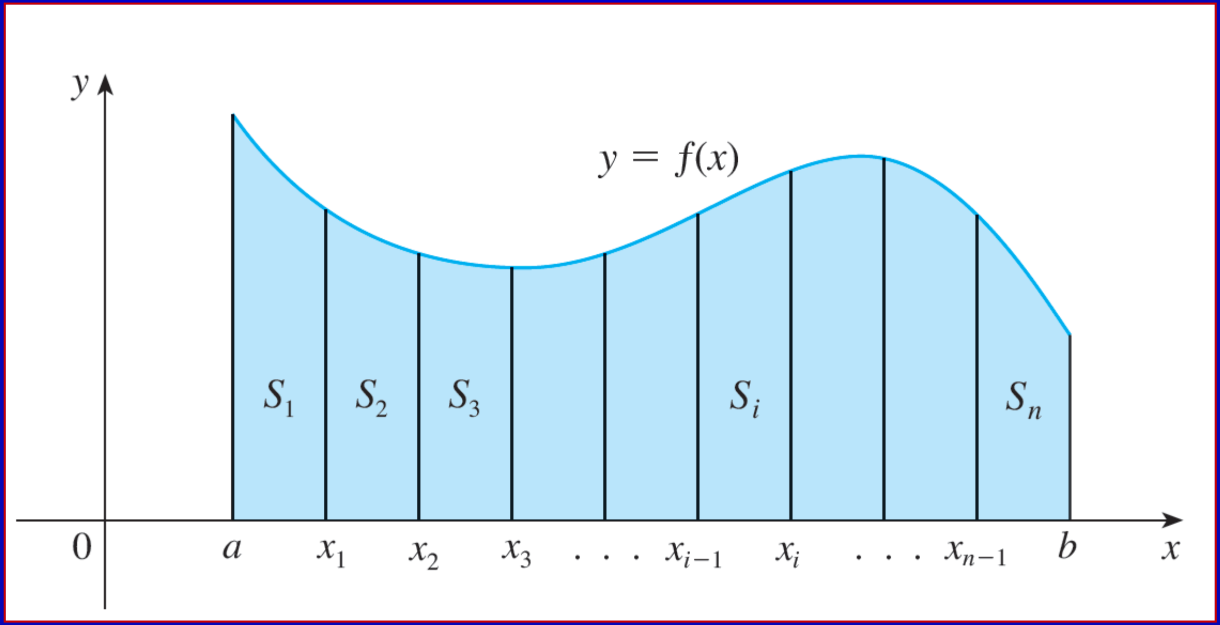
Começamos por tentar resolver o problema da área: achar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

Isso significa que S, ilustrada na Figura, está limitada pelo gráfico de uma função continua f (onde $f(x) \geq 0$), pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.



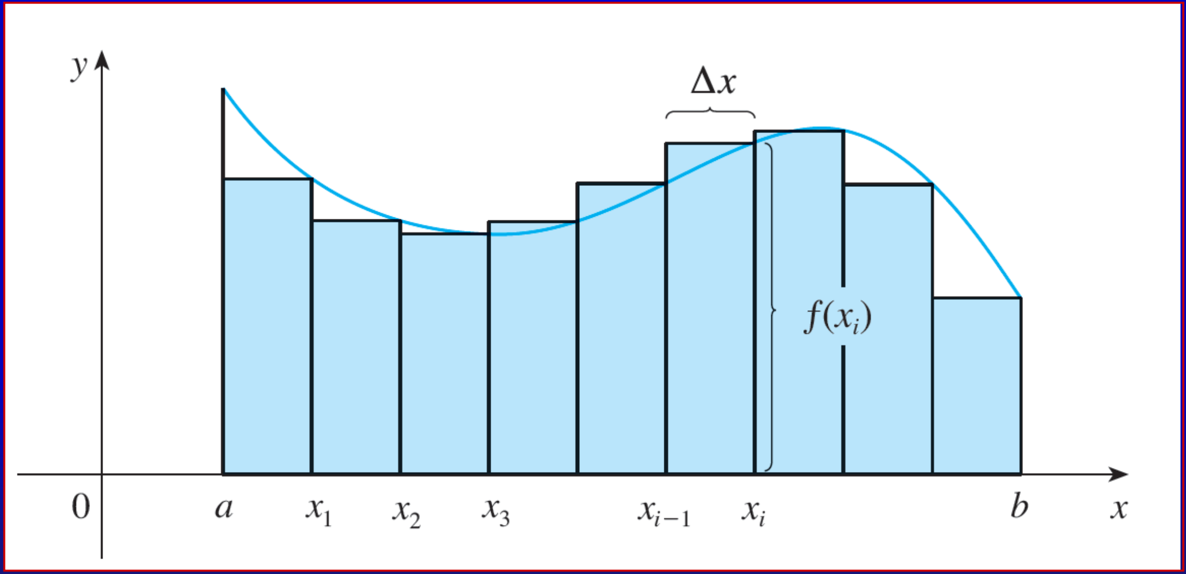
O PROBLEMA DA ÁREA

Começamos por subdividir S em n faixas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual largura, como na figura.



Note que o que consideramos intuitivamente como a área de S *pode ser* aproximado pela soma das áreas dos retângulos de base Δx *e altura* $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, que pode ser escrita como:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



O PROBLEMA DA ÁREA Definição

Portanto, vamos definir a área A da região S da seguinte forma: A **área** da região S que está sob o gráfico de uma função continua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\, f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O nome Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral.

O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados.

Ele percebeu que a derivação e a integração ***são processos inversos***.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral.

Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático.

Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, como fizemos anteriormente.

INTEGRAL DEFINIDA Definição

A integral definida da função *f* de *a* a *b* é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

desde que este limite exista.

Se ele existir, dizemos que *f* é **integrável** em [*a*, *b*].

NOTAÇÃO Obs.

Na notação: $\int_a^b f(x)\,dx$

$f(x)$ é chamado **integrando**, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**, e o símbolo dx indica simplesmente que a variável independente é x.

O processo de calcular uma integral é conhecido como **integração**

A integral definida: $\int_a^b f(x)dx$

é um número, não depende de x.

De fato, em vez de x podemos usar qualquer outra letra sem mudar o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

SOMA RIEMANN Obs.

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

que ocorre na Definição é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann

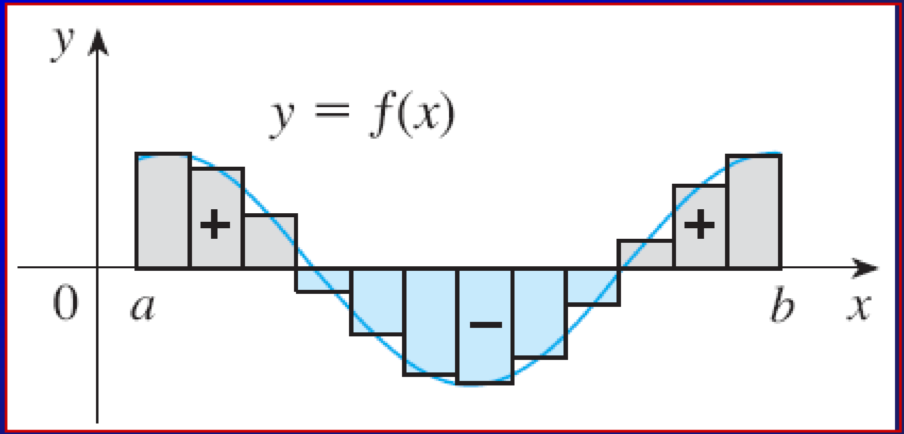
(1826-1866).

SOMA RIEMANN **Obs.**

Se *f* assumir valores positivos e negativos, então a soma de Riemann é:

a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo *x* e do *oposto* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo *x*.

São as áreas dos retângulos cinzas menos as áreas dos retângulos azuis.



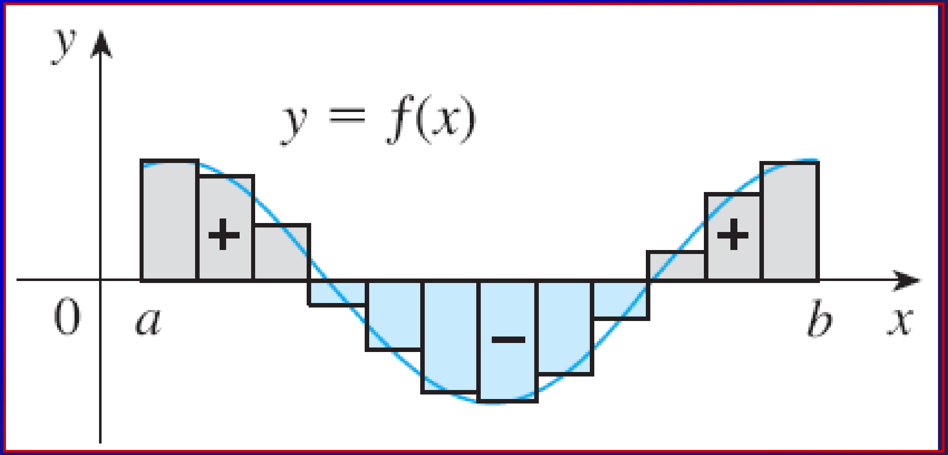
ÁREA RESULTANTE Obs.

Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas:

A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f.

A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

$$A = \int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$



FUNÇÕES INTEGRÁVEIS Obs.

Definimos a integral definida para uma função integrável, mas nem todas as funções são integráveis.

O teorema seguinte mostra que a maioria das funções que ocorrem comumente é de fato integrável.

FUNÇÕES INTEGRÁVEIS **Teorema**

Se *f* for contínua em [*a, b*], ou tiver apenas um número finito de descontinuidades no interval dado, então *f* é integrável em [*a, b*]; ou seja, a integral definida existe.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ou seja, toda função continua num interval *I* é integrável em *I*.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Se f for contínua em $[a, b]$ e F é qualquer primitiva de f, isto é, F é uma função tal que $F' = f$, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

TFC

EXEMPLO

Calcule a integral: $\int_1^3 e^x dx$

- Solução: A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte e sabemos que uma primitiva é $F(x) = e^x$

logo, pelo Teorema Fundamental, temos

$$\int_1^3 e^x dx = F(3) - F(1)$$

$$= e^3 - e$$

EXEMPLO

- Observe que o TFC diz que podemos usar *qualquer* primitiva *F* de *f*.

- Portanto, podemos usar a mais simples, isto é,
- $F(x) = e^x$, em vez de $e^x + 7$ ou $e^x + C$.

TFC

Frequentemente usamos a notação:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ache a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

Solução: Uma primitiva de $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

A área A pedida é encontrada usando-se o Teorema Fundamental:

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

TFC **EXEMPLO**

Calcule: $$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ é $F(x) = \ln|x|$, e, como $3 \le x \le 6$, podemos escrever $F(x) = \ln x$. Logo,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = lnx\,\Big|_3^6 = ln6 - ln3$$

TFC EXEMPLO

Encontre a área sob a curva cosseno para:

$0 \leq x \leq \pi/2$.

Solução: Uma vez que uma primitiva de

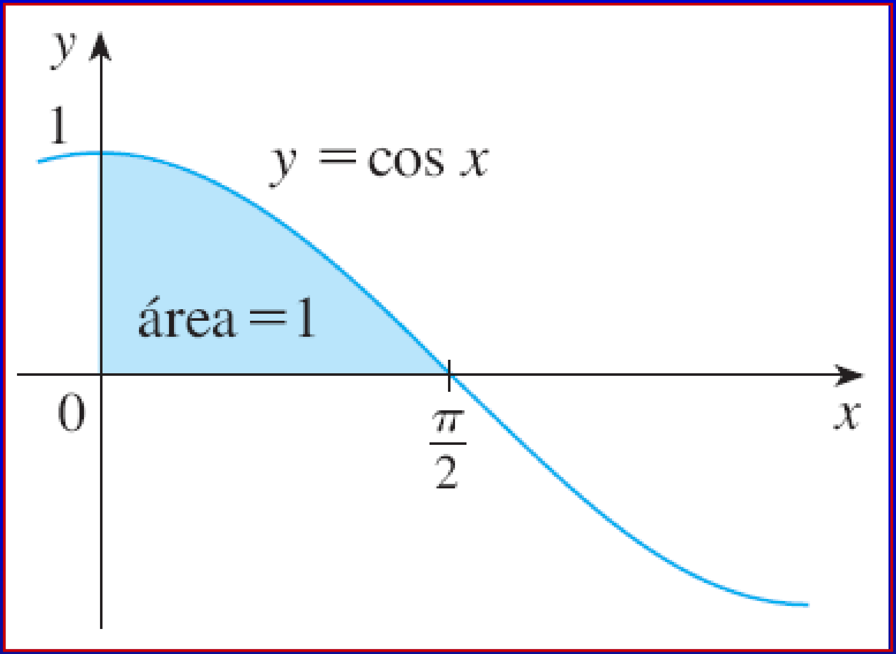
$f(x) = cosx$ é $F(x) = senx$, temos:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = \mathrm{senx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) = 1$$

TFC

EXEMPLO

- Fica demonstrado que a área sob a curva cosseno de 0 até $\pi/2$ é sen $(\pi/2) = 1$. (Veja a figura.)



PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Supondo que f e g sejam funções contínuas num intervalo [a , b], então:

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS EXEMPLO

Use as propriedades das integrais para calcular:

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,dx$$

- Solução: Usando as Propriedades 2 e 3 das integrais, temos

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS EXEMPLO

- Sabemos da Propriedade 1 que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1-0) = 4$$

- Já calculamos

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS
EXEMPLO

- Logo

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 4 + 3\cdot\tfrac{1}{3} = 5$$

PROPRIEDADE 5

A propriedade 5 nos diz como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes:

Sendo $c \in [a, b]$, temos:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS
EXEMPLO

Se

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = 17 \quad \text{e} \quad \int_0^{8} f(x)\,dx = 12$$

encontre: $$\int_8^{10} f(x)\,dx$$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS
EXEMPLO

Pela Propriedade 5 temos:

logo, $\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\int_8^{10} f(x)\,dx &= \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx \\ &= 17 - 12 \\ &= 5\end{aligned}$$

PROPRIEDADES COMPARATIVAS DA INTEGRAL

As propriedades a seguir, nas quais comparamos os tamanhos de funções e os de integrais, são verdadeiras somente se $a \leq b$

//Digite a equação aqui.

$$6.\, Se\ f(x) \geq 0\,, \forall\ x \in [a, b]\,, então{:}\ \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$7.\, Se\ f(x) \geq g(x)\,, \forall x \in [a, b], então{:}\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

INTEGRAIS INDEFINIDAS x DEFINIDAS

Devemos fazer uma distinção entre integral definida e indefinida.

Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número;

Uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma função (ou uma família de funções)

INTEGRAIS INDEFINIDAS EXEMPLO

Calcule

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$$

- Solução: Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, efetuando a divisão:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

INTEGRAIS INDEFINIDAS

$$\int_1^9 \left(2 + t^{\frac{1}{2}} - t^{-2}\right) dt = \left(2t + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^9 =$$

$$= \left(2t + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^9$$

$$= \left(2 \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{9}\right) - \left(2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \frac{1}{9} - 2 - \frac{2}{3} - 1 = \mathbf{\frac{292}{9}}$$