Integração por Partes

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

Integração por Partes

Aprendemos o método mais importante de integração, o Método da Substituição na aula anterior.

A outra técnica geral, **integração por partes**, é apresentada agora.

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração

Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação.

Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada ***integração por partes***.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

A Regra do Produto afirma que se *f* e g são funções deriváveis, então:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Integrando dos dois lados, temos:

$$\int \frac{d}{dx} f(x)g(x) = \int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx$$

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Fórmula 1

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

Podemos rearranjar essa equação como:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

A Fórmula 1, denominada **fórmula de integração por partes**, é mais facilmente lembrada com a seguinte notação.

Seja $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ e seja $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$

Então, a formula: $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$

Pode ser escrevita como:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

1. $Calcule$: $\displaystyle\int x\ senx\ dx$

Solução: $u = x \quad e \quad dv = senxdx\ ,\ \ logo{:}\ du = dx \quad e \quad v = -cosx$

E desse modo, temos:

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\, \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

OBSERVAÇÃO

Nosso objetivo ao usar a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida.

Assim, no Exemplo 1 iniciamos com $\int x\, senx\, dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int cosx\, dx$.

OBSERVAÇÃO

Se tivéssemos escolhido $u = \text{sen}\, x$ e $dv = x\, dx$, então $du = \cos x\, dx$ e $v = x^2/2$.

Assim, a integração por partes daria:

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = (\text{sen}\, x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int \boldsymbol{x^2 cosxdx}$ é uma integral mais difícil que a original.

OBSERVAÇÃO

Em geral, ao decidir sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher $u = f(x)$ como uma função que se torna mais simples quando derivada, ou ao menos não mais complicada.

Contanto que $dv = g'(x)dx$ possa ser prontamente integrada para fornecer v.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

2. $\int lnx \, dx$

Não temos aqui muita escolha para u e dv.

Seja $u = \ln x \qquad dv = dx$

Então, $du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

3. $Calcule$: $\int te^t \, dt$

Note que t se torna mais simples quando derivada.
Enquanto e^t permanece inalterada quando a derivamos ou integramos.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Assim escolhemos: $u = t \;\; e \;\; dv = e^t dt$

Então, $du = dt \;\; e \;\; v = e^t$

A integração por partes resulta em:

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t\, dt = te^t - e^t + C$$

Calcule as integrais:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

4. $\int 2x \cos x \, dx = 2 \int x \cos x \, dx$

$u = x$, $\quad dv = \cos x \, dx$

Calcule as integrais:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int 2x\cos x\,dx = 2\int x\cos x\,dx$$

$$u = x\,,\qquad dv = \cos x\,dx,\qquad du = dx\ \ e\ \ v = \operatorname{sen} x$$

$$2\int x\cos x\,dx = 2\left[x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right] = 2[x\operatorname{sen} x + \cos x] + C$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com o Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes.

Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre *a* e *b*, supondo *f* e *g* contínuas e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

5. $\int_0^\pi xcosxdx$

Sejan: $u = x \quad e \quad dv = cosxdx,$ então: $du = dx \quad e \quad v = senx$

$$\int_0^1 xcosxdx = x\ senx \,\Big|_0^\pi - \int_0^\pi senx\ dx = x\ senx \,\Big|_0^\pi + \cos x \,\Big|_0^\pi$$

$$= cosx(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2$$