Capítulo 8

Testes de Hipóteses
Duas Amostras

Texto baseado no livro:

Estatística Aplicada - Larson / Farber – Editora Pearson – 2010

Seção 8.1

Testando a diferença entre médias (amostras grandes e independentes)

Teste de hipótese de duas amostras

Compara dois parâmetros de duas populações.

Métodos de amostragem:

- **Amostras independentes**
  - A amostra selecionada de uma população não tem relação com a amostra selecionada da segunda população.
- **Amostras dependentes** (amostras pareadas ou combinadas)
  - Cada membro de uma amostra corresponde a um membro da outra amostra.

Testes de hipótese de duas amostras com amostras independentes

1. Hipótese nula H_0

Uma hipótese estatística que geralmente declara que não há diferença entre os parâmetros de duas populações.

Sempre contém os símbolos: $\leq$, $=$, ou $\geq$

2. Hipótese alternativa H_a

Uma hipótese estatística que é verdadeira quando H_0 é falsa.

Sempre contém os símbolos: $>$, $\neq$, ou $<$

Testes de hipótese de duas amostras com amostras independentes

$$\begin{cases} H_0\colon \mu_1 = \mu_2 \\ H_a\colon \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0\colon \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_a\colon \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0\colon \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_a\colon \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

Independentemente de cada hipótese que você usar, você sempre presumirá que não existe diferença entre a média populacional, ou seja: $\mu_1 = \mu_2$.

Teste z de duas amostras para a diferença entre médias

Três condições são necessárias para desempenhar um teste z para a diferença de duas médias populacionais, μ_1 e μ_2.

1. As amostras precisam ser aleatoriamente selecionadas.
2. As amostras precisam ser independentes.
3. Cada amostra precisa ter um tamanho de pelo menos 30, caso contrário, cada população precisa ter uma distribuição normal com desvio padrão conhecido.

Teste z de duas amostras para a diferença entre médias

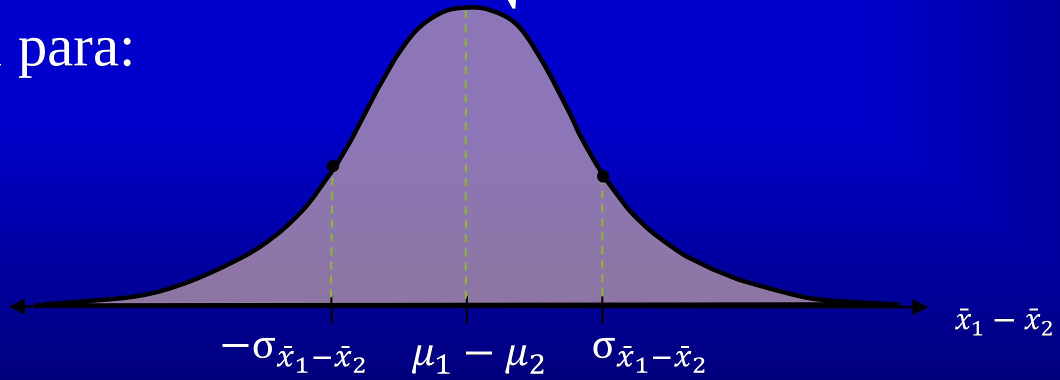
Se esses requisitos forem preenchidos, a distribuição das amostras para $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ (a diferença das médias amostrais) é uma distribuição normal com

Média: $\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$

Erro padrão: $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2} = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Distribuição amostral para:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$



Teste z de duas amostras para a diferença entre médias

O **teste estatístico** é: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

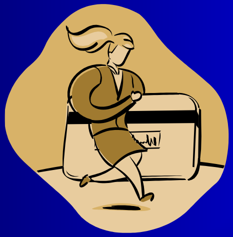
O **teste estatístico padronizado** é

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}, \text{ onde } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

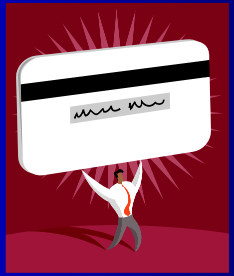
Quando as amostras são grandes, você pode usar s_1 e s_2 no lugar de σ_1 e σ_2. Se as amostras não são grandes, você ainda pode um teste-z de duas amostras, contanto que as populações sejam distribuídas normalmente e os desvios padrões populacionais sejam conhecidos.

Exemplo: teste-z de duas amostras para a diferença entre médias

Uma organização de educação de consumidores afirma que há uma diferença entre a média da dívida do cartão de crédito de homens e mulheres nos Estados Unidos. Os resultados de uma pesquisa aleatória de 200 indivíduos de cada grupo são mostrados a seguir. As duas amostras são independentes. Os resultados apoiam a afirmação da organização? Use $\alpha = 0{,}05$.



Mulheres (1)	**Homens (2)**
$\bar{x}_1 = \$2290$	$\bar{x}_2 = \$2370$
$s_1 = \$750$	$s_2 = \$800$
$n_1 = 200$	$n_2 = 200$



Solução: teste-*z* de duas amostras para a diferença entre médias

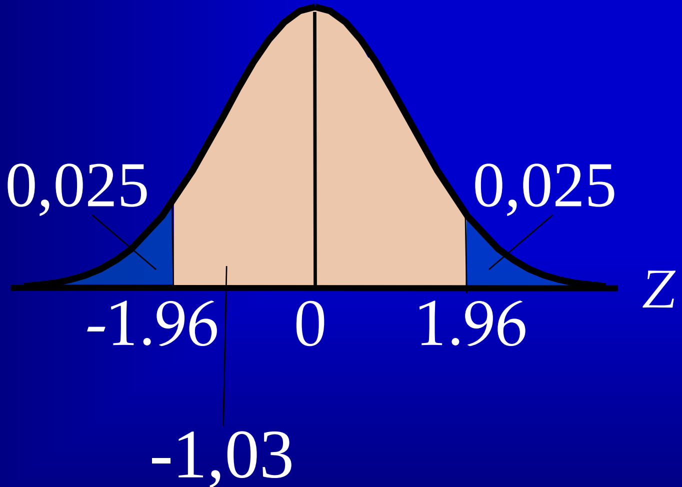
H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 0{,}05$

$n_1 = 200$, $n_2 = 200$

Região de rejeição:



Teste estatístico:

$$z = \frac{(2290 - 2370) - 0}{\sqrt{\frac{750^2}{200} + \frac{800^2}{200}}} = -1.03$$

Decisão: Falha em rejeitar H_0

No nível de significância de 5%, não há evidência suficiente para apoiar a afirmação da organização de que existe uma diferença na média da dívida do cartão de crédito entre homens e mulheres.

Seção 8.2

Testando a diferença entre médias (amostras pequenas e independentes)

Teste t de duas amostras para a diferença entre médias

Se amostras de tamanho menor que 30 são tomadas de populações normalmente distribuídas, um teste *t* pode ser usado para testar a diferença entre as médias populacionais μ_1 e μ_2.

Três condições são necessárias para usar um teste-*t* para amostras pequenas e independentes.

1. As amostras precisam ser selecionadas aleatoriamente.
2. As amostras precisam ser independentes.
3. Cada população precisa ter uma distribuição normal.

Teste t de duas amostras para a diferença entre médias

O **teste padronizado** é:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

O erro padrão e os graus de liberdade da distribuição amostral dependem se as variâncias das populações σ_1^2 e σ_2^2 são iguais.

Variâncias são iguais

Informação das duas amostras é combinada para calcular uma **estimativa conjunta do desvio padrão**

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

O erro padrão para a distribuição amostral de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ é:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

gl= $n_1 + n_2 - 2$

Variâncias não são iguais

Se as variâncias das populações não são iguais, então o erro padrão é:

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

gl = menor entre $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$

Normal ou distribuição t?

Ambas amostras têm tamanho mínimo 30?

Sim → Use o teste z.

Não ↓

Ambas populações são normalmente distribuídas?

Não → Você não pode usar o teste z ou teste t.

Sim ↓

Ambos desvios padrão das populações são conhecidos?

Sim ↓ Use o teste z.

Não → As variâncias populacionais são iguais?

Sim → Use o teste t com

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

gl = $n_1 + n_2 - 2$.

Não ↓

Use o teste t com

gl = menor entre $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ e $\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

Exemplo: teste t de duas amostras para a diferença entre as médias

As distâncias de frenagem de 8 Volkswagen GTIs e 10 Ford Focus foram testadas enquanto viajavam a 60 milhas por hora em pista seca. Os resultados são mostrados abaixo. Você pode concluir que existe uma diferença na média da distância de frenagem dos dois tipos de carro? Use $\alpha = 0{,}01$. Assuma que as populações são distribuídas normalmente e as variâncias da população não são iguais. *(Adaptado de Consumer Reports)*

GTI (1)	**Focus (2)**
$\bar{x}_1 = 134$	$\bar{x}_2 = 143$
$s_1 = 6.9$	$s_2 = 2.6$
$n_1 = 8$	$n_2 = 10$

Solução: teste t de duas amostras para a diferença entre as médias

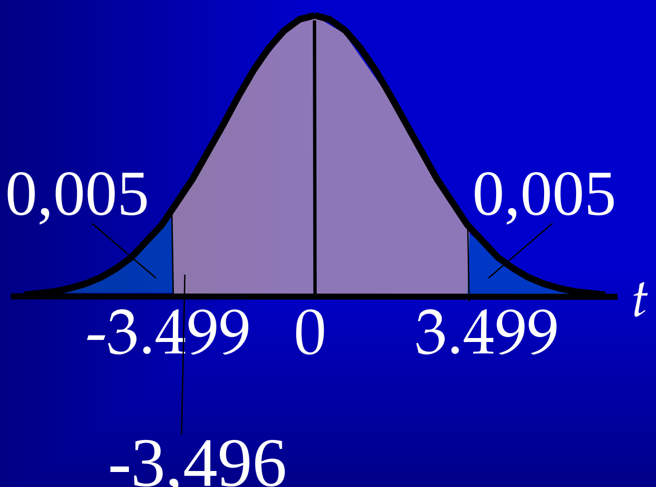
H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha =$ 0,01

gl = 8 – 1 = 7

Região de rejeição:



Teste estatístico:

$$t = \frac{(134 - 143) - 0}{\sqrt{\frac{(6.9)^2}{8} + \frac{(2.6)^2}{10}}} = -3.496$$

Decisão: **Falha em rejeitar H_0**

No nível de significância 1%, não há evidência suficiente para concluir que as médias das distâncias de frenagem dos carros são diferentes.

Exemplo: teste t de duas amostras para a diferença entre as médias

Um fabricante afirma que o alcance de chamada do seu telefone sem fio 2,4 GHz é maior do que o do seu principal concorrente. Você realiza um estudo usando 14 telefones selecionados aleatoriamente deste fabricante e 16 telefones similares — do concorrente — selecionados aleatoriamente. Os resultados são mostrados abaixo. Em $\alpha = 0{,}05$, você pode apoiar a afirmação do fabricante? Assuma que as populações são normalmente distribuídas e as variâncias populacionais são iguais.

Fabricante (1)	Concorrente (2)
$\bar{x}_1 = 1275$ $s_1 = 45$ $n_1 = 14$	$\bar{x}_2 = 1250$ $s_2 = 30$ $n_2 = 16$

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1-1){s_1}^2+(n_2-1){s_2}^2}{n_1+n_2-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(14-1)(45)^2+(16-1)(30)^2}{14+16-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{16}} \approx 13.8018$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(1275-1250)-0}{13.8018} \approx 1.811$$

Solução: teste t de duas amostras para a diferença entre as médias

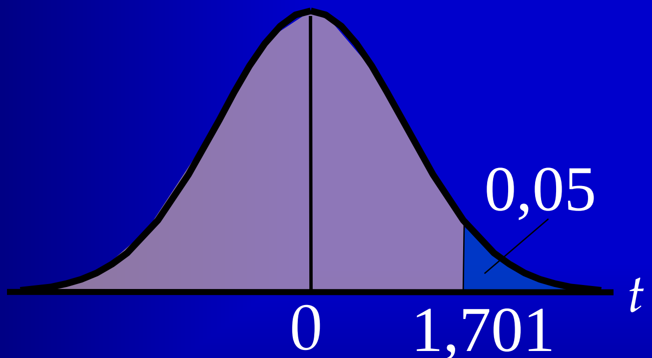
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$

H_a: $\mu_1 > \mu_2$

$\alpha =$ 0,05

gl = 14 + 16 – 2 = 28

Região de rejeição:



1,811

Teste estatístico:

$$t = 1.811$$

Decisão: **Rejeitar H_0**

No nível de significância 5%, há evidência suficiente para apoiar a afirmação do fabricante de que o seu telefone tem um alcance de chamada maior do que o do concorrente.

Seção 8.3

Testando a diferença entre as médias (amostras dependentes)

Teste t para a diferença entre médias

Para realizar um teste de hipótese de duas amostras, a diferença entre cada dado emparelhado é encontrada primeiro:

$d = x_1 - x_2$: Diferença entre as entradas para dados emparelhados.

O teste estatístico é a media $\bar{d}$ dessas diferenças.

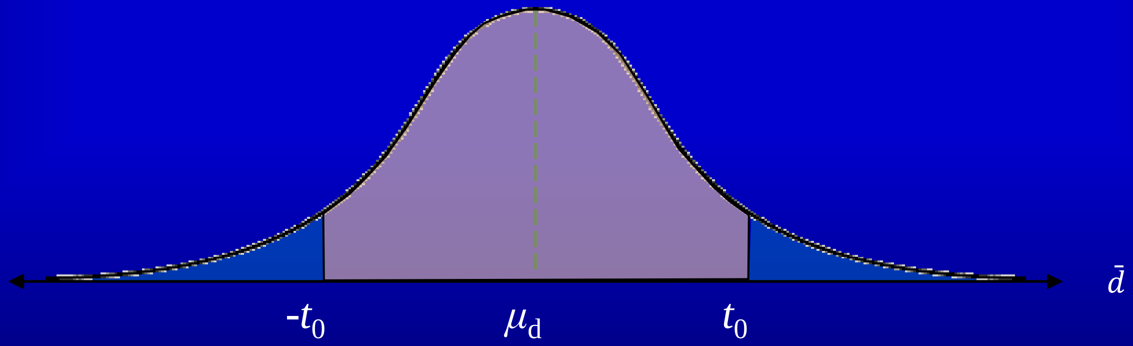
$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$$

Média das diferenças entre entradas de dados emparelhados nas amostras dependentes.

Três condições são necessárias à realização do teste:

1. As amostras devem ser selecionadas aleatoriamente.
2. As amostras devem ser dependentes (emparelhadas).
3. Ambas as populações devem ser normalmente distribuídas.

Se esses requisitos são alcançados, então a distribuição amostral para $\bar{d}$ é aproximada por uma distribuição t com $n - 1$ graus de liberdade, onde n é o número de dados emparelhados.



Símbolos usados para o teste t para μ_d

Símbolo	Descrição
n	O número de dados emparelhados
d	A diferença entre entradas para dados emparelhados, $d = x_1 - x_2$
μ_d	A média hipotética das diferenças de dados emparelhados na população

Símbolo	Descrição
$\bar{d}$	A média das diferenças entre as entradas de dados emparelhados nas amostras dependentes $\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$
s_{d}	O desvio padrão das diferenças entre as entradas de dados emparelhados nas amostras dependentes $s_d = \sqrt{\frac{\Sigma(d-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 - \frac{(\Sigma d)^2}{n}}{n-1}}$

Teste t para a diferença entre médias

O **teste estatístico** é: $\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$

O **teste estatístico padronizado** é: $t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$

Os graus de liberdade são: gl = n – 1

Exemplo: teste t para a diferença entre médias

Um fabricante de tacos de golfe afirma que os golfistas podem melhorar seus placares usando os tacos de golfe recém-projetados por ele. Oito jogadores de golfe são escolhidos aleatoriamente e é pedido a cada um que forneça seu mais recente placar. Após usar os novos tacos por um mês, é pedido novamente aos jogadores que forneçam seus placares mais recentes. Os placares para cada um são mostrados na tabela. Assumindo que os placares de golfe são distribuídos normalmente, existe evidência suficiente para apoiar a afirmação do fabricante para $\alpha = 0.10$?

Golfista	1	2	3	4	5	6	7	8
Placar (antigo)	89	84	96	82	74	92	85	91
Placar (novo)	83	83	92	84	76	91	80	91

d = (placar antigo) – (placar novo)

Antigo	Novo	*d*	d^2
89	83	6	36
84	83	1	1
96	92	4	16
82	84	–2	4
74	76	–2	4
92	91	1	1
85	80	5	25
91	91	0	0
		$\Sigma = 13$	$\Sigma = 87$

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{\left(\sum d\right)^2}{n}}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{87 - \frac{(13)^2}{8}}{8-1}}$$

$$\approx 3.0677$$

d = (placar antigo) – (placar novo)

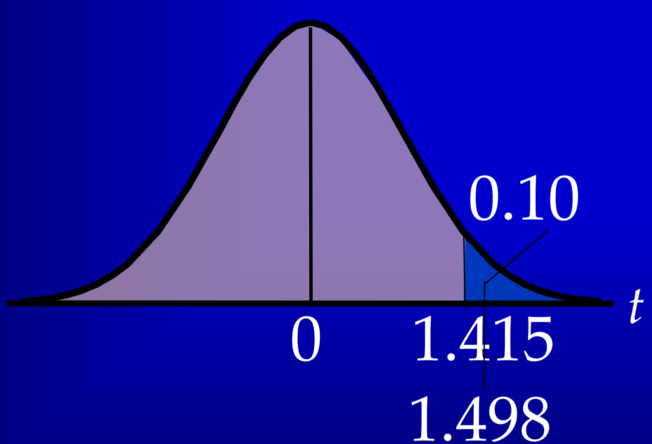
H_0: $\mu_d \leq 0$

H_a: $\mu_d > 0$

$\alpha = 0.10$

gl = $8 - 1 = 7$

Região de rejeição:



Teste estatístico:

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \approx \frac{1.625 - 0}{\frac{3.0677}{\sqrt{8}}} \approx 1.498$$

Decisão: Rejeitar H_0

No nível de significância de 10%, os resultados deste teste indicam que depois de os jogadores de golfe usarem os novos tacos, seus placares foram significativamente menores.

Seção 8.4

Testando a diferença entre proporções

Testes z de duas amostras para proporções

Usado para testar a diferença entre duas proporções populacionais, p_1 e p_2.

Três condições são necessárias para conduzir o teste:

1. As amostras devem ser selecionadas aleatoriamente.

2. As amostras devem ser independentes.

3. As amostras devem ser grandes o bastante para usar uma distribuição amostral normal. Isto é, $n_1p_1 \geq 5$, $n_1q_1 \geq 5$, $n_2p_2 \geq 5$, e $n_2q_2 \geq 5$.

Testes z de duas amostras para a diferença entre proporções

Se essas condições são alcançadas, então a distribuição amostral para $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ é uma distribuição normal

Média:

Uma estimativa ponderada de p_1 e p_2 é dada por:

$$\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$$

Erro padrão: $\bar{p} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$, onde $x_1 = n_1\hat{p}_1$ e $x_2 = n_2\hat{p}_2$

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\bar{p}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \qquad onde\text{: } \bar{q} = 1 - \bar{p}$$

Testes *z* de duas amostras para a diferença entre proporções

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\bar{p}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \quad \text{e} \quad \bar{q} = 1 - \bar{p}$$

Exemplo: testes z de duas amostras para a diferença entre proporções

Em um estudo com 200 mulheres adultas selecionadas aleatoriamente e 250 homens adultos, ambos usuários de Internet, 30% das mulheres e 38% dos homens disseram que planejam comprar on-line ao menos uma vez ao longo do mês seguinte. Com $\alpha = 0{,}10$, teste a afirmação de que há uma diferença entre a proporção de mulheres e a proporção de homens, usuários de Internet, que planejam comprar on-line.

Solução:

1 = mulheres

2 = homens

$$x_1 = n_1\hat{p}_1 = 60 \quad ; \quad x_2 = n_2\hat{p}_2 = 95$$

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{60 + 95}{200 + 250} \approx 0.3444$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.3444 = 0.6556$$

Note:

$$n_1\bar{p} = 200(0.3444) \geq 5 \quad n_1\bar{q} = 200(0.6556) \geq 5$$

$$n_2\bar{p} = 250(0.3444) \geq 5 \quad n_2\bar{q} = 250(0.6556) \geq 5$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\bar{p}\bar{q} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx \frac{(0.30 - 0.38) - (0)}{\sqrt{(0.3444) \cdot (0.6556) \cdot \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{250}\right)}}$$

$$\approx -1.77$$

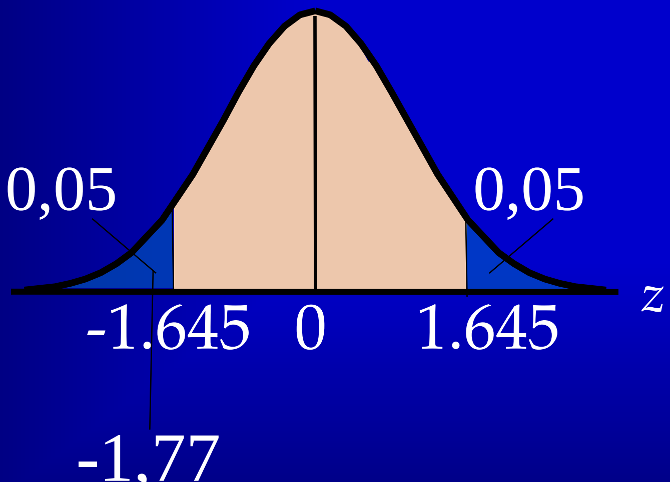
H_0: $p_1 = p_2$

H_a: $p_1 \neq p_2$

$\alpha =$ **0,10**

$n_1 = 200$, $n_2 = 250$

Região de rejeição:



Teste estatístico:

$$z = -1.77$$

Decisão: Rejeite H_0

Você tem evidência suficiente no nível de significância 10% para concluir que existe uma diferença entre a proporção de mulheres e a proporção de homens, usuários de Internet, que planejam comprar on-line.

Exemplo: testes z de duas amostras para a diferença entre proporções

Uma equipe de pesquisa médica conduziu um estudo para testar o efeito de um medicamento na redução de colesterol. Ao final do estudo, os pesquisadores descobriram que dos 4.700 sujeitos selecionados aleatoriamente que tomaram o medicamento, 301 morreram de doenças do coração. Dos 4.300 sujeitos selecionados aleatoriamente que tomaram um placebo, 357 morreram de doenças do coração. Em $\alpha = 0{,}01$, você pode concluir que a taxa de mortalidade por doenças do coração é menor para aqueles que tomaram a medicação do que para aqueles que tomaram o placebo?

(Adaptado de New England Journal of Medicine)

Solução: 1 = Medicação 2 = Placebo

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{301}{4700} = 0.064 \quad ; \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{357}{4300} = 0.083$$

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{301 + 357}{4700 + 4300} \approx 0.0731$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.0731 = 0.9269$$

$$n_1\bar{p} = 4700(0.0731) \geq 5 \quad n_1\bar{q} = 4700(0.9269) \geq 5$$

$$n_2\bar{p} = 4300(0.0731) \geq 5 \quad n_2\bar{q} = 4300(0.9269) \geq 5$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\bar{p}\bar{q} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx \frac{(0.064 - 0.083) - (0)}{\sqrt{(0.0731) \cdot (0.9269) \cdot \left(\frac{1}{4700} + \frac{1}{4300}\right)}}$$

$$\approx -3.46$$

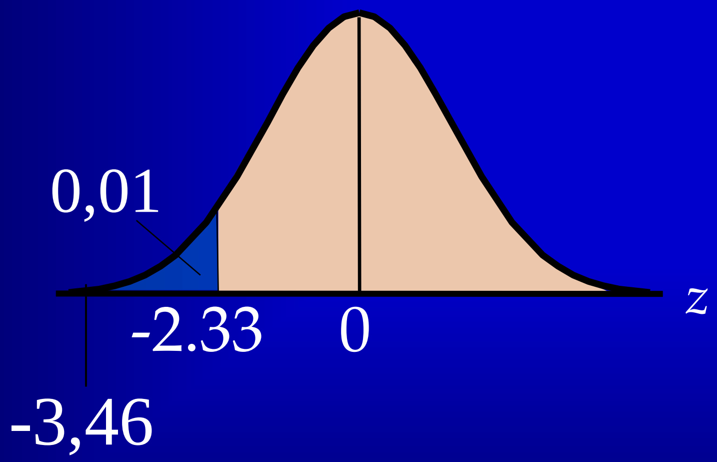
H_0: $p_1 \geq p_2$

H_a: $p_1 < p_2$

$\alpha =$ 0,01

$n_1 = 4700$, $n_2 = 4300$

Região de rejeição:



Teste estatístico:

$z = -3.46$

Decisão: **Rejeite H_0**

No nível de significância de 1%, há evidência suficiente para concluir que a taxa de mortalidade por doenças do coração é menor para aqueles que tomaram a medicação do que para aqueles que tomaram o placebo.