Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

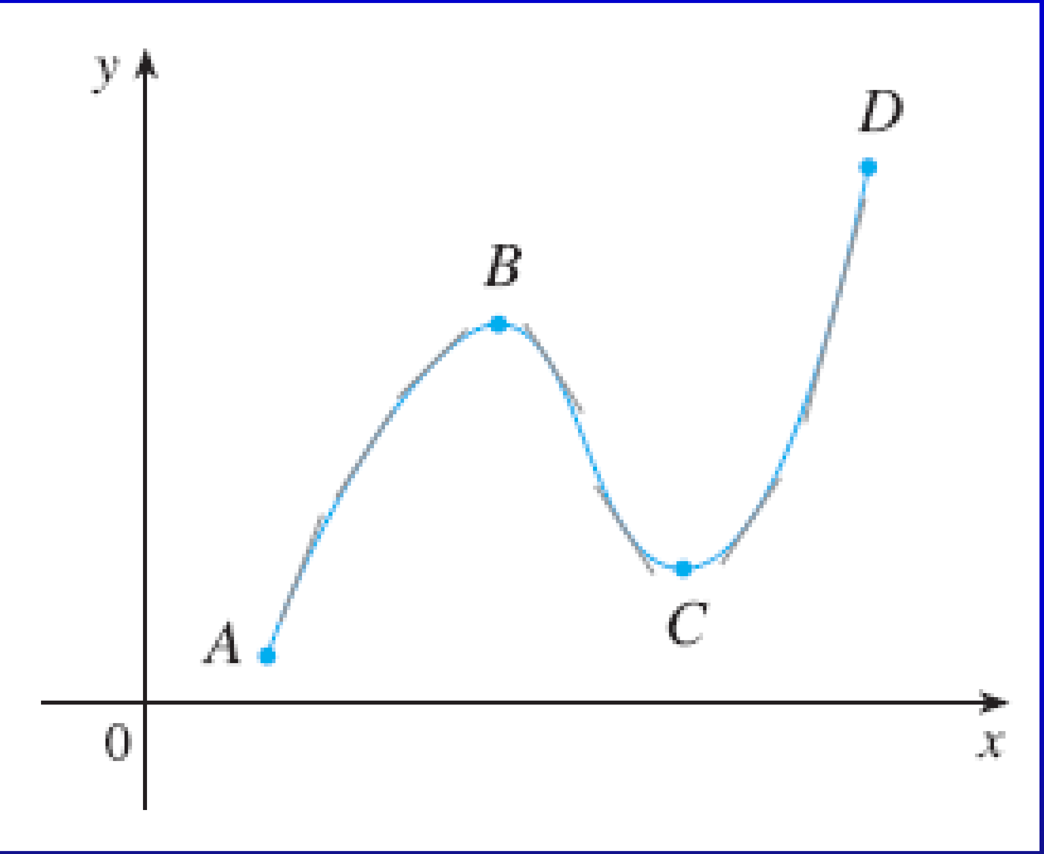
AS DERIVADAS E A FORMA DE UM GRÁFICO

Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto.

Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

- Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura.

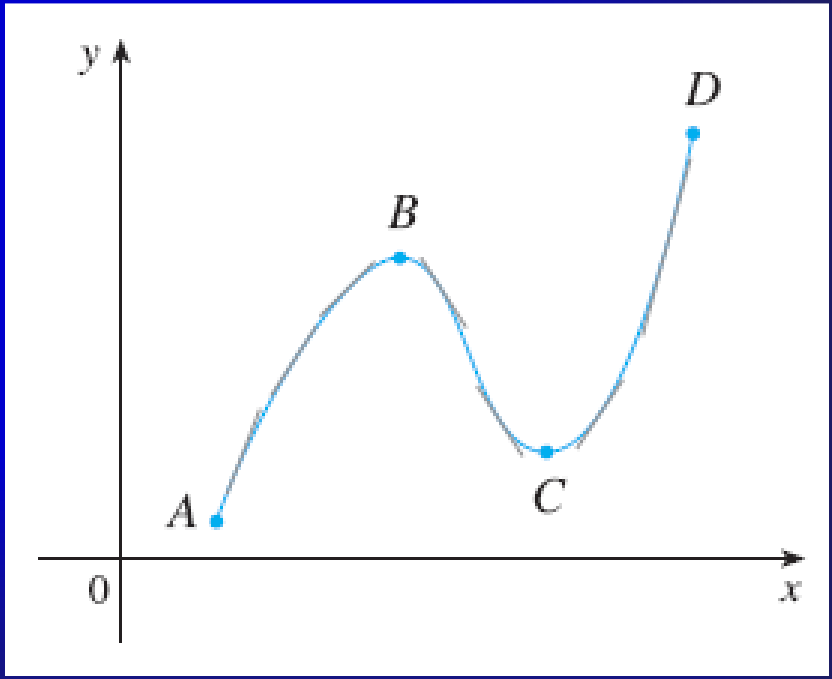


O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Entre A e B e entre C e D as retas tangentes têm inclinação positiva. Logo $f'(x) > 0$.

Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa.

Portanto $f'(x) < 0$.



O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Note que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa.

Ou seja, termos o seguinte resultado importante:

Teste C/D para verificar se uma função é crescente ou decrescente num dado intervalo:

a. Se $f'(x) > 0$ num interval I, então f é crescente em I.

b. Se $f'(x) < 0$ num interval I, então f é decrescente em I.

TESTE C/D

Exemplo 1

Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

é crescente e onde ela é decrescente.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

Para usar o Teste C/D devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x)$.

Isso depende dos sinais dos três fatores, isto é:

$12x\,,\ \ x-2\ \ e\ \ x+1.$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-2)}}{2}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -1$

TESTE CD

Exemplo 1

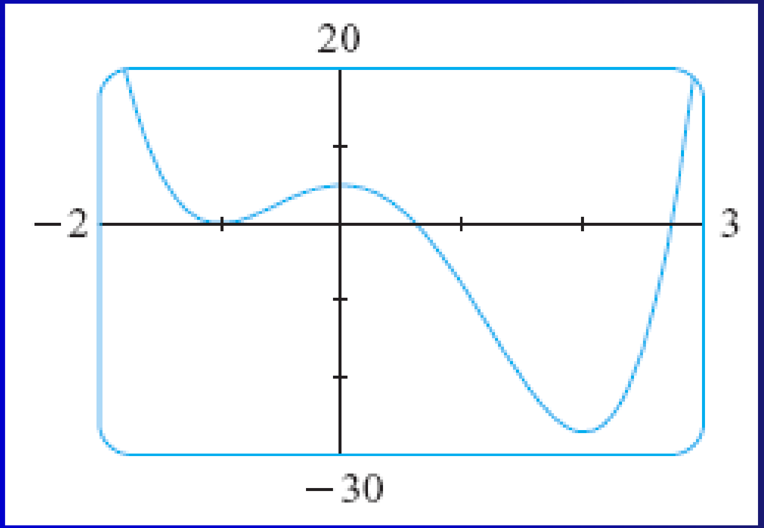
- Dividimos a reta real em intervalos cujas extremidades são os números críticos
  -1, 0, e 2 e dispomos o que fizemos em uma tabela.

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

TESTE C/D

Exemplo 1

- O gráfico de f, mostrado na Figura, confirma a informação dada na tabela.



Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	−	−	−	−	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1<x<0$	−	−	+	+	crescente em $(-1, 0)$
$0<x<2$	+	−	+	−	decrescente em $(0, 2)$
$x>2$	+	+	+	+	crescente em $(2, \infty)$

O QUE $f'(x)$ NOS DIZ SOBRE f?

- Lembre-se de que se f tem um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f (pelo Teorema de Fermat).

  - Mas nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo.

  - Consequentemente, necessitamos de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico.

O QUE $f'(x)$ NOS DIZ SOBRE f ?

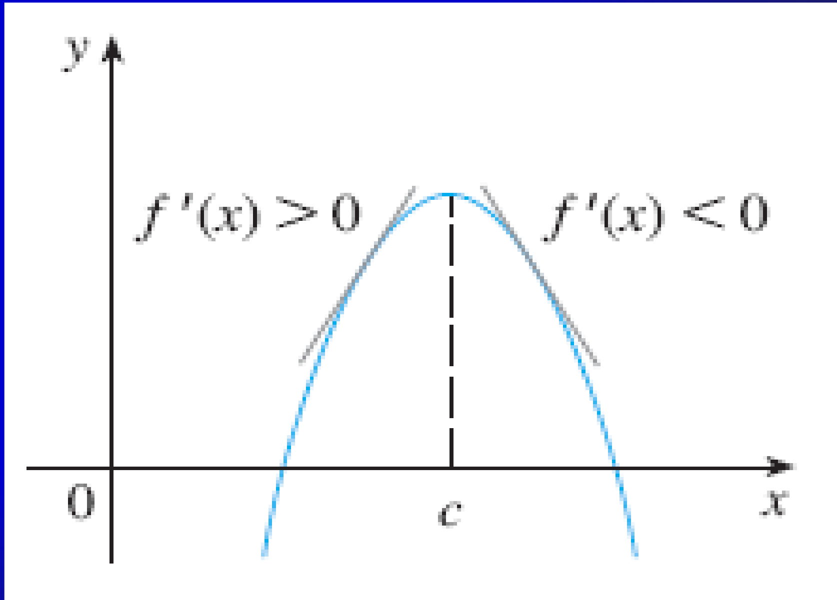
Em outras palavras, o sinal de $f(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

Essa observação é a base do teste a seguir.

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA PARA CLASSIFICAÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

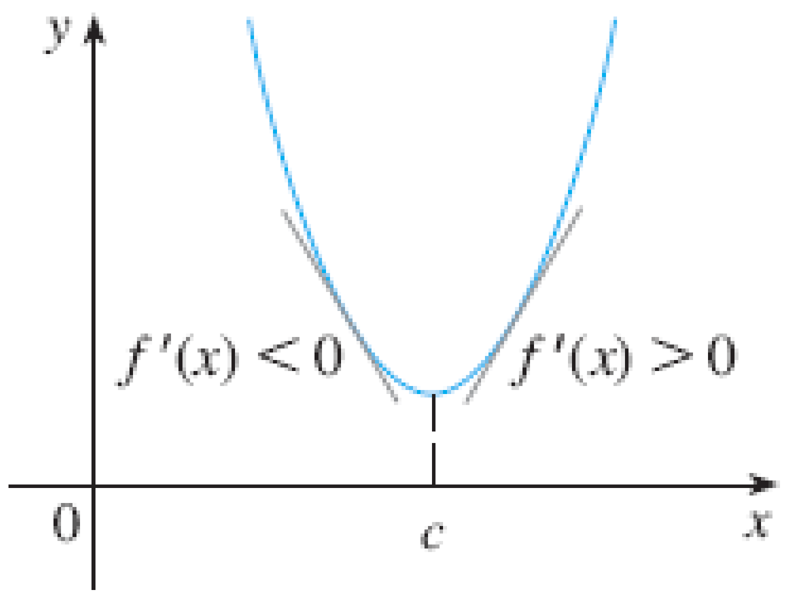
Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.



(a) Máximo local

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA PARA CLASSIFICAÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

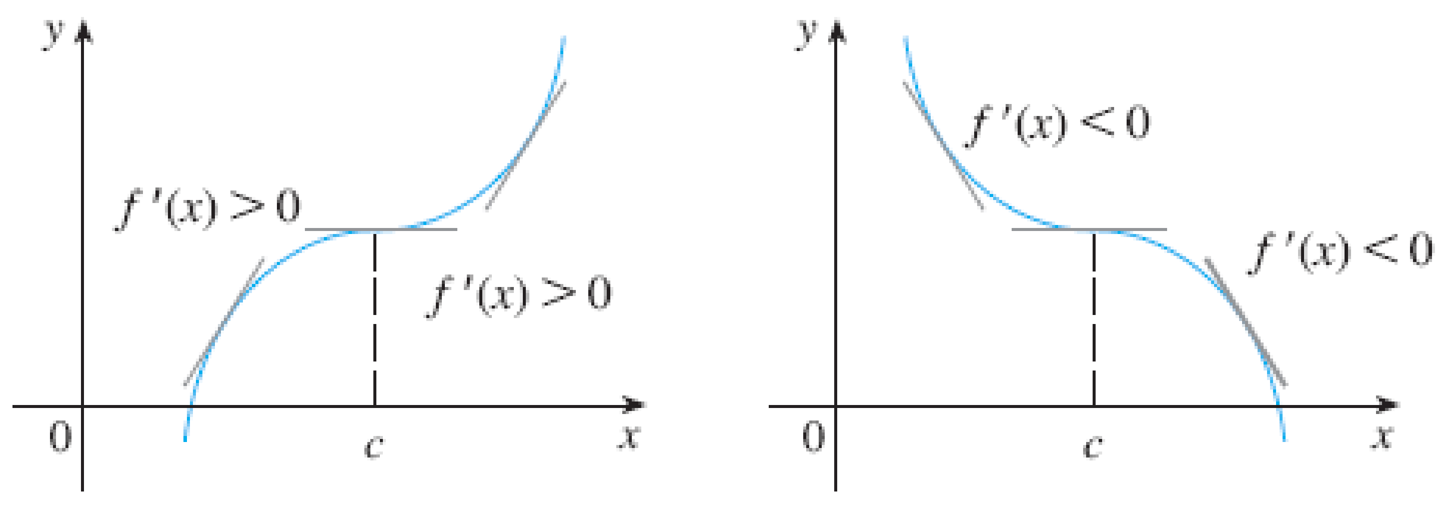
b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.



(b) Mínimo local

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA

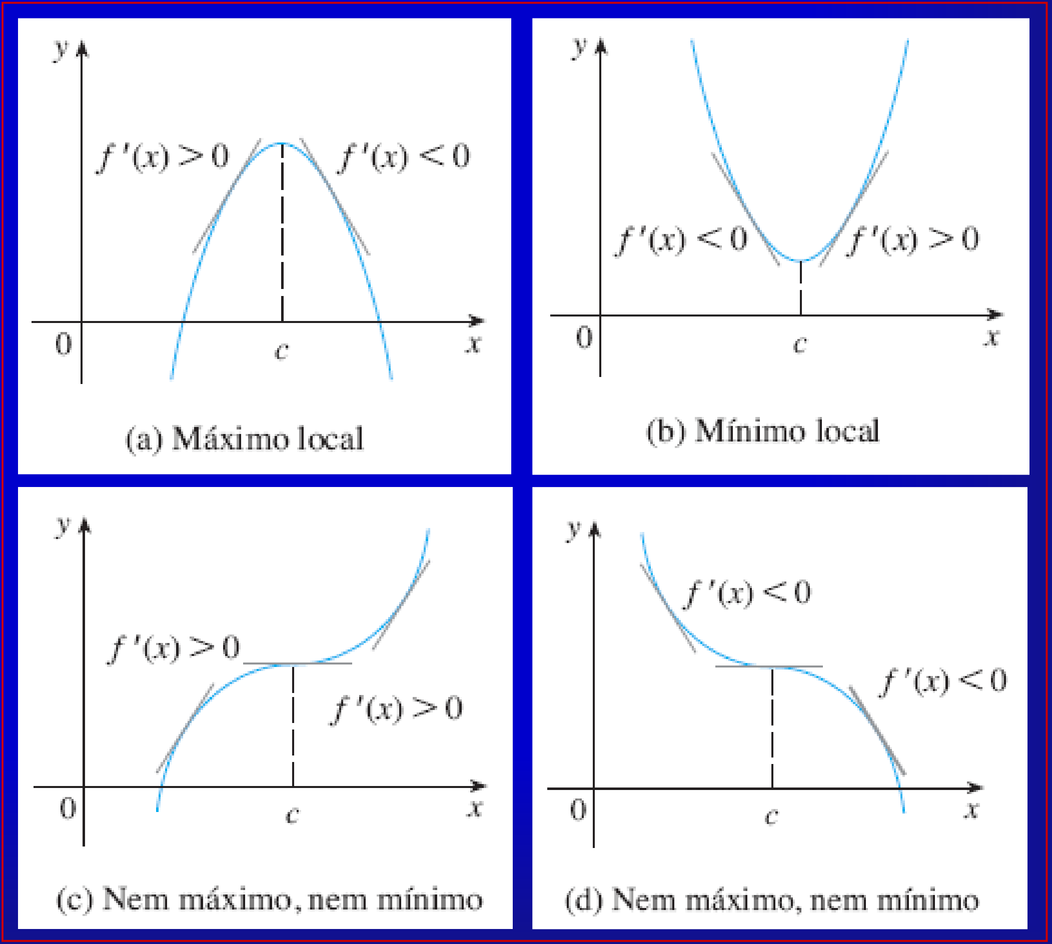
c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c o sinal de f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.



(c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem máximo, nem mínimo

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA

- É fácil memorizar o Teste da Primeira Derivada.



O QUE f' NOS DIZ SOBRE f ?

Exemplo 2

Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função f do Exemplo 1: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Da tabela na solução do Exemplo 1, vemos que o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em -1.

Logo, $f(-1) = 0$ é um valor mínimo local pelo Teste da Primeira Derivada.

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Exemplo 2

Analogamente, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2.

Portanto $f(2) = -27$ é também um valor mínimo local. Como observado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Observe a curva $y = x^4 - 4x^3$, em relação aos mínimos e máximos locais.

Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f ?

Para achar os números críticos fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$.

Para usar o Teste da primeira derivada, fazemos:

$$(-\infty\,;3) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$(3\,;\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$$

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f ?

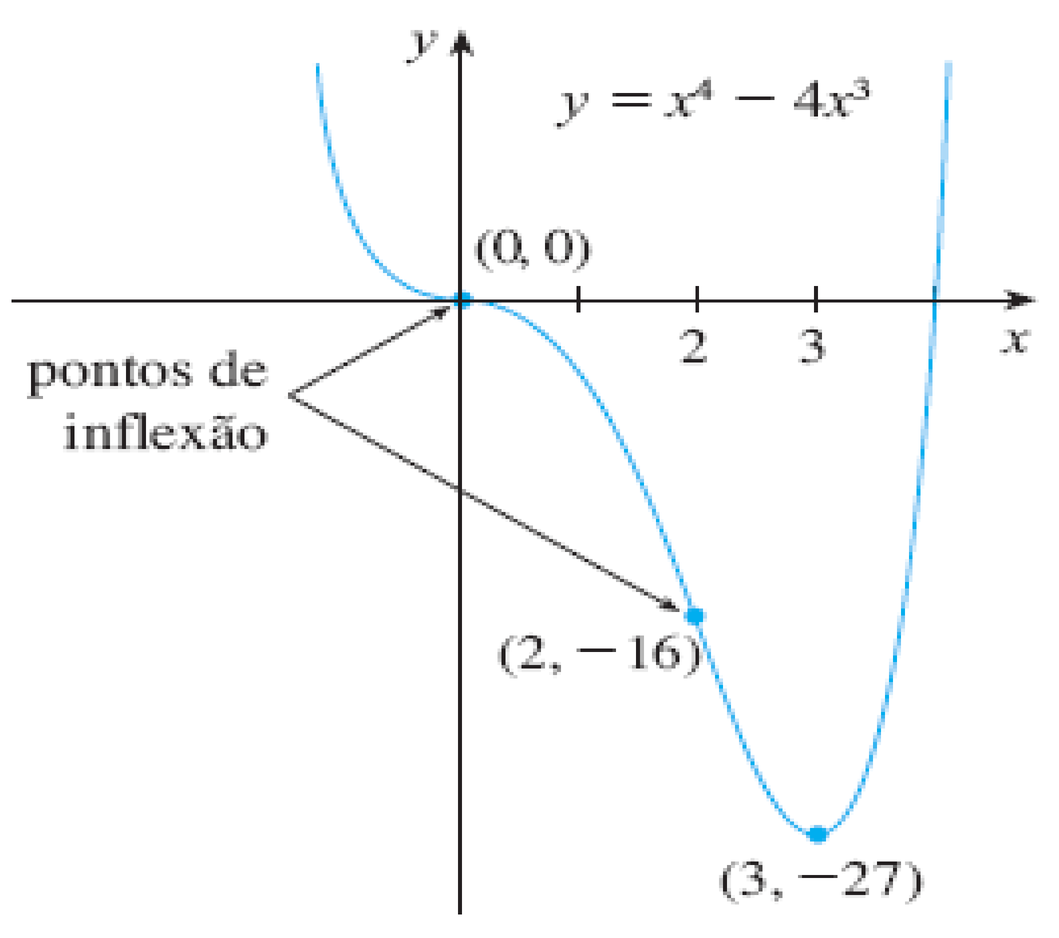
Como $f'(3) = 0$ e o sinal de $f'(x)$ em 3 muda de negativo para positivo, $f(3) = -27$ é um mínimo local.

Uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0.

De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Abaixo temos o gráfico da função $f(x)$:



TESTE DE CONCAVIDADE

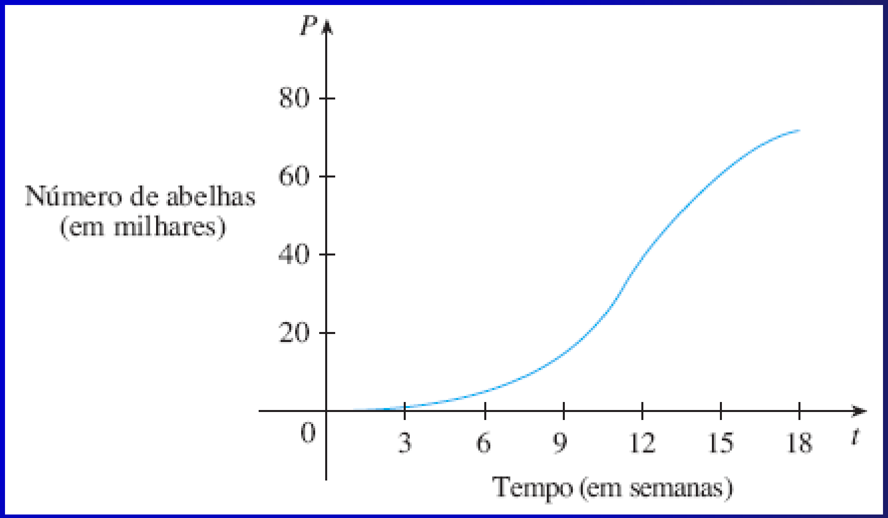
a. Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

b. Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

PONTO DE INFLEXÃO

- No Exemplo, a curva populacional varia de côncava para cima para côncava para baixo aproximadamente no ponto (12, 38.000).

  - Denominado *ponto de inflexão* da curva.



PONTO DE INFLEXÃO

- O significado desse ponto é que a taxa de crescimento populacional tem ali seu valor máximo.

  - Em geral, um ponto de inflexão é aquele em que uma curva muda a direção de sua concavidade.

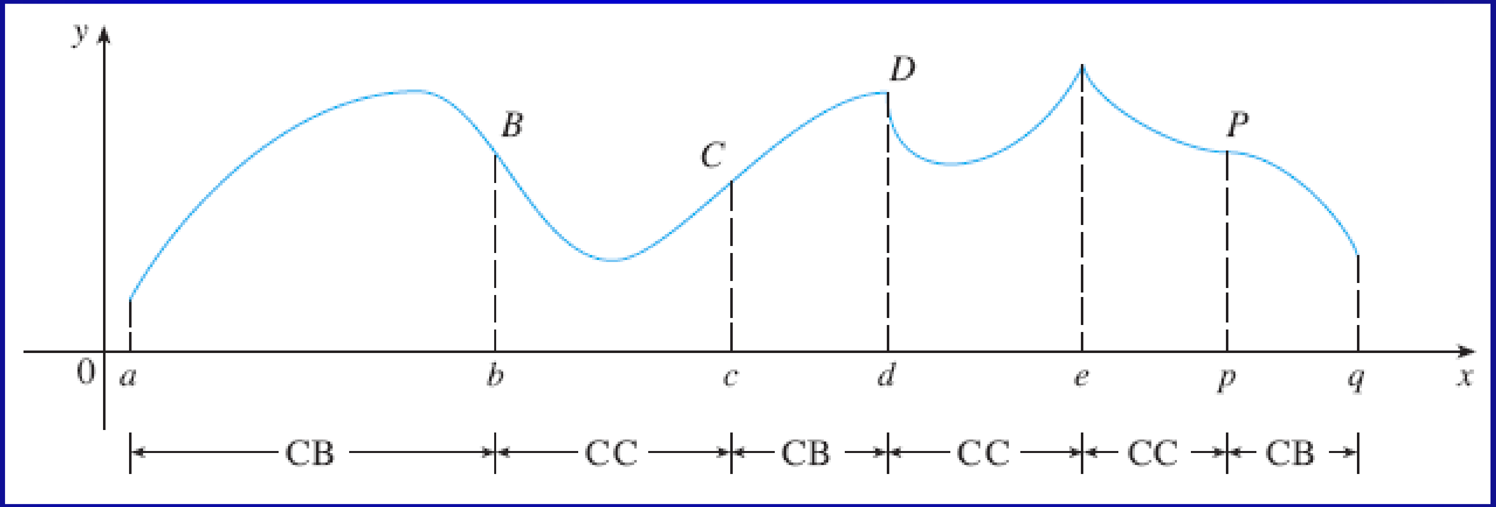
PONTO DE INFLEXÃO - DEFINIÇÃO

- Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

PONTO DE INFLEXÃO

- Por exemplo, na Figura, *B*, *C*, *D* e *P* são os pontos de inflexão.

  - Observe que se uma curva tiver uma tangente em um ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente aí.



PONTO DE INFLEXÃO

- Em vista do Teste da Concavidade, há um ponto de inflexão sempre que a segunda derivada mudar de sinal.

Outra aplicação da segunda derivada é o teste a seguir para classificar os valores máximo e mínimo.

Ele é uma consequência do Teste da Concavidade.

Teste da segunda derivada para classificação de pontos extremos: Suponha que f seja contínua na proximidade de c.

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f ? Exemplo

Estude a curva $y = x^4 - 4x^3$, em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais.

Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Para achar os números críticos fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$.

Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(3) = 36 > 0$$

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

- Como $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local.

- Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0.

- Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0.

- De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

- Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a seguinte tabela.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

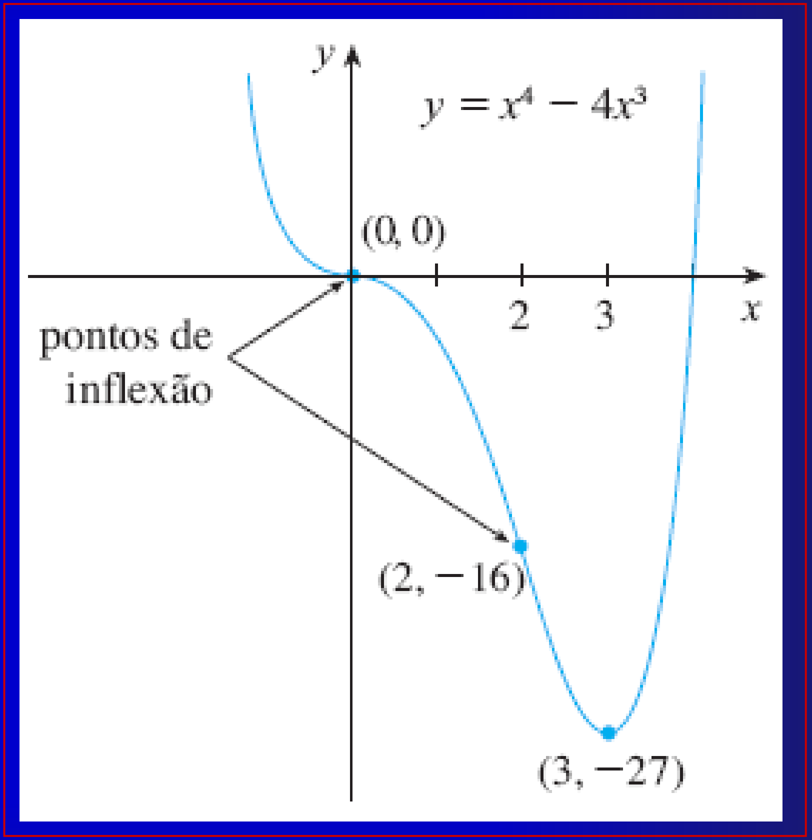
- O ponto (0, 0) é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí.

- Também, (2, -16) um ponto de inflexão, uma vez que é ali que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

O QUE f'' NOS DIZ SOBRE f?

- Usando o mínimo local, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão, esboçamos a curva na Figura.



OBSERVAÇÃO

- O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo quando

$f''(c) = 0.$

Em outras palavras, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois.

OBSERVAÇÃO

- Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe.

- Em tais casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes são aplicáveis, o Teste da Primeira da Derivada é frequentemente mais fácil de aplicar.