Lista 2

Aluno: Lucas Lopes Amorim

Resolva os seguintes problemas usando o computador.

QUESTÃO 1

Uma empresa de transporte italiana deve transportar alguns contêineres vazios de suas 6 lojas (em Verona, Perugia, Roma, Pescara, Taranto e Lamezia) para os principais portos nacionais (Gênova, Veneza, Ancona, Nápoles, Bari). Os estoques de contêineres nas lojas são os seguintes:

	Contêineres vazios
Verona	10
Perugia	12
Roma	20
Pescara	24
Taranto	18
Lamezia	40

As demandas nos portos são as seguintes:

	Demanda de Contêineres
Gênova	30
Veneza	15
Ancona	25
Nápoles	33
Bari	21

O transporte é realizado por uma frota de caminhões. O custo de transporte de cada contêiner é proporcional à distância percorrida pelo caminhão, e equivale a 30 € /km. As distâncias são as seguintes:

	Gênova	**Veneza**	**Ancona**	**Nápoles**	**Bari**
Verona	290 km	115 km	355 km	715 km	810 km
Perugia	380 km	340 km	165 km	380 km	610 km
Roma	505 km	530 km	285 km	220 km	450 km
Pescara	655 km	450 km	155 km	240 km	315 km
Taranto	1010 km	840 km	550 km	305 km	95 km
Lamezia	1072 km	1097 km	747 km	372 km	333 km

Formule o problema e encontre o menor custo total do transporte e a distribuição de contêineres de cada loja para cada porto.

Resposta:

Essa questão foi resolvida tanto no Python quanto no Excel

$C_{\,i\,\times\,j}$ = custo de transporte por contêiner da cidade i para a cidade j

C_T = custo total de transporte

$X_{\,i\,\times\,j}$ = quantidade de contêineres que vai da cidade i para a cidade j

$$C_{6\times5} = \begin{bmatrix} 8700 & 3450 & 10650 & 21450 & 24300 \\ 11400 & 10200 & 4950 & 11400 & 18300 \\ 15150 & 15900 & 8550 & 6600 & 13500 \\ 19650 & 13500 & 4650 & 7200 & 9450 \\ 30300 & 25200 & 16500 & 9150 & 2850 \\ 32160 & 32910 & 22410 & 11160 & 9990 \end{bmatrix}$$

$$X_{6\times5} = \begin{bmatrix} x_{1\times1} & x_{1\times2} & x_{1\times3} & x_{1\times4} & x_{1\times5} \\ x_{2\times1} & x_{2\times2} & x_{2\times3} & x_{2\times4} & x_{2\times5} \\ x_{3\times1} & x_{3\times2} & x_{3\times3} & x_{3\times4} & x_{3\times5} \\ x_{4\times1} & x_{4\times2} & x_{4\times3} & x_{4\times4} & x_{4\times5} \\ x_{5\times1} & x_{5\times2} & x_{5\times3} & x_{5\times4} & x_{5\times5} \\ x_{6\times1} & x_{6\times2} & x_{6\times3} & x_{6\times4} & x_{6\times5} \end{bmatrix}$$

Função Objetivo:

$$\min C_T = \sum C_{6\times5} \times X_{6\times5}$$

Restrições:

Não podem sair mais contêineres que disponíveis:

(cada elemento é uma restrição)

$$I_{6\times1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j} x_{1\times j} \\ \sum_{j=1}^{j} x_{2\times j} \\ \sum_{j=1}^{j} x_{3\times j} \\ \sum_{j=1}^{j} x_{4\times j} \\ \sum_{j=1}^{j} x_{5\times j} \\ \sum_{j=1}^{j} x_{6\times j} \end{bmatrix}$$

É preciso atender a demanda:

(cada elemento é uma restrição)

$$D_{6\times1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i} x_{i\times 1} \\ \sum_{i=1}^{i} x_{i\times 2} \\ \sum_{i=1}^{i} x_{i\times 3} \\ \sum_{i=1}^{i} x_{i\times 4} \\ \sum_{i=1}^{i} x_{i\times 5} \\ \sum_{i=1}^{i} x_{i\times 6} \end{bmatrix}$$

Não é possível fracionar contêineres:

$$x_{i\times j} \in \mathbb{Z}_+$$

In [4]:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from ortools.sat.python import cp_model
```

In [111…

```
distances = [
    [290, 115, 355, 715, 810],
    [380, 340, 165, 380, 610],
    [505, 530, 285, 220, 450],
    [655, 450, 155, 240, 315],
    [1010, 840, 550, 305, 95],
    [1072, 1097, 747, 372, 333]
]

transport_cost = np.array(distances)*30
```

In [112…

```
transport_cost
```

Out[112…

```
array([[ 8700,  3450, 10650, 21450, 24300],
       [11400, 10200,  4950, 11400, 18300],
       [15150, 15900,  8550,  6600, 13500],
       [19650, 13500,  4650,  7200,  9450],
       [30300, 25200, 16500,  9150,  2850],
       [32160, 32910, 22410, 11160,  9990]])
```

In [125…

```
# Definindo modelo
model = cp_model.CpModel()
```

In [126…

```
# Número de contêineirs armazenados em cada uma das 6 cidades
# As cidades que armazenam os contêineres são representadas
# pelas linhas
inventory = {
    1: 10,
    2: 12,
    3: 20,
    4: 24,
    5: 18,
    6: 40
}
```

In [127…

```
# Número de contêineirs demandados em cada uma das 6 cidades
# As cidades que demandam os contêineres são representadas
# pelas colunas
demand = {
    1: 30,
    2: 15,
    3: 25,
    4: 33,
    5: 21
}
```

In [128…

```
# Criando variáveis
variables = np.array([[model.NewIntVar(0, inventory[i], f'x{i}{j}') for j in range(1, 6)]
variables
```

Out[128…

```
array([[x11(0..10), x12(0..10), x13(0..10), x14(0..10), x15(0..10)],
       [x21(0..12), x22(0..12), x23(0..12), x24(0..12), x25(0..12)],
       [x31(0..20), x32(0..20), x33(0..20), x34(0..20), x35(0..20)],
       [x41(0..24), x42(0..24), x43(0..24), x44(0..24), x45(0..24)],
       [x51(0..18), x52(0..18), x53(0..18), x54(0..18), x55(0..18)],
       [x61(0..40), x62(0..40), x63(0..40), x64(0..40), x65(0..40)]],
      dtype=object)
```

In [129…

```
# Adicionando restrições
# Todos os contêineres das cidades precisam ser deslocados
for i in range(6):
    model.Add(sum(variables[i]) == inventory[i+1])
```

In [130…

```
# Adicionando restrições
# É preciso atender a demanda
for j in range(5):
    model.Add(sum([variables[i][j] for i in range(6)]) <= demand[j+1])
```

In [131…

```
# Adicionando função objetivo
model.Minimize((transport_cost * variables).sum())
```

In [132…

```
# Buscando solução
solver = cp_model.CpSolver()
status = solver.Solve(model)
status
```

Out[132…

```
4
```

In [133…

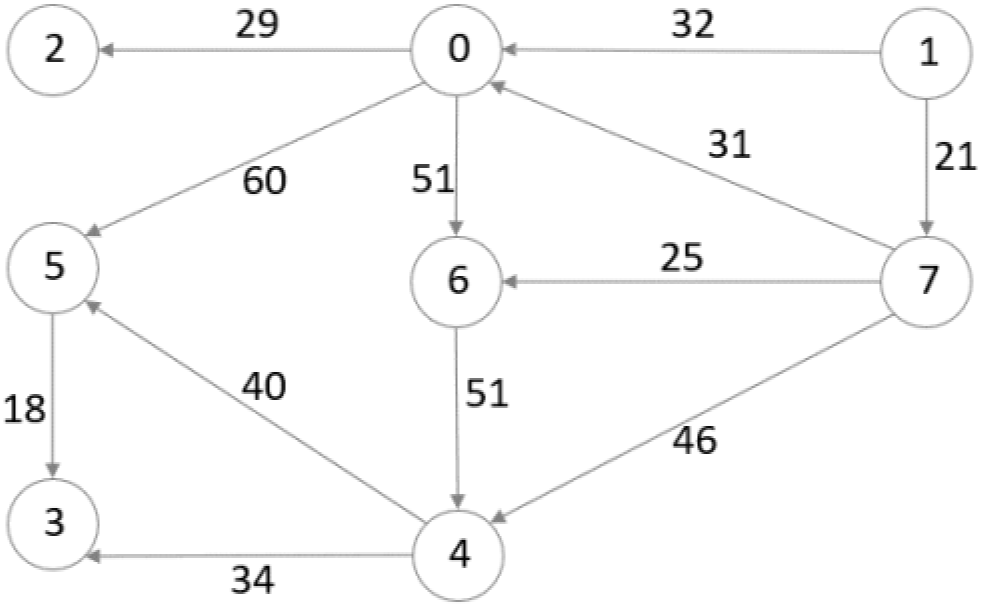
```
if status == cp_model.OPTIMAL or status == cp_model.FEASIBLE:
    print(f'Custo mínimo = $ {solver.ObjectiveValue():,.2f}')
    print()
    print('Quantidade de contêineres que vai da cidade j para a cidade j:')
    print(np.array([list(map(lambda x: solver.Value(x), sublist)) for sublist in variables
else:
    print('Nenhuma solução encontrada.')
```

```
Custo mínimo = $ 1,148,340.00

Quantidade de contêineres que vai da cidade j para a cidade j:
[[ 0 10  0  0  0]
 [ 7  5  0  0  0]
 [20  0  0  0  0]
 [ 0  0 24  0  0]
 [ 0  0  0  0 18]
 [ 3  0  1 33  3]]
```

QUESTÃO 2

Desenvolva um programa de computador para aplicar o algoritmo de Dijkistra para encontrar a menor distância entre os nós 1 e 3 no grafo abaixo.



Resposta:

In [3]:

```
import networkx as nx
```

In [4]:

```
nodes_pos = {
    2: (0, 2),
    0: (1, 2),
    1: (2, 2),
    5: (0, 1),
    6: (1, 1),
    7: (2, 1),
    3: (0, 0),
    4: (1, 0)
}
edges_weights = {
      (0, 2): 29,
      (0, 5): 60,
      (0, 6): 51,
      (1, 0): 32,
      (1, 7): 21,
      (5, 3): 18,
      (6, 4): 51,
      (7, 0): 31,
      (7, 6): 25,
      (7, 4): 46,
      (4, 3): 34,
      (4, 5): 40
}
```

In [5]:

```
G = nx.DiGraph()

for node, pos in nodes_pos.items():
    G.add_node(node, pos=pos)

for nodes, weight in edges_weights.items():
    G.add_edge(nodes[0], nodes[1], weight=weight)
```

In [6]:

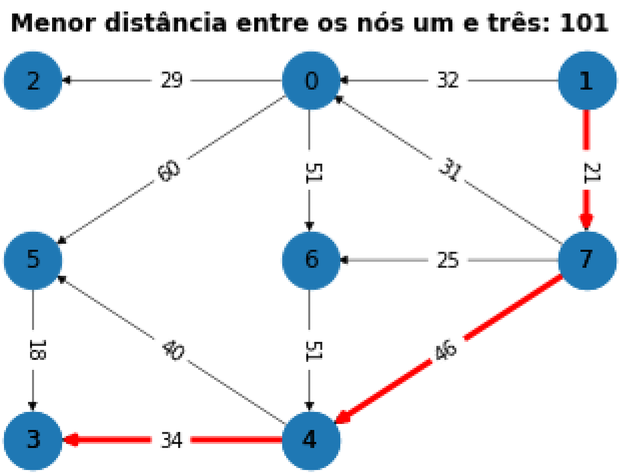
```
dij_dist = nx.dijkstra_path_length(G, source=1, target=3)
print(f'A menor distância entre os nós um e três é: {dij_dist}')
```

```
A menor distância entre os nós um e três é: 101
```

In [7]:
```python
plt.figure()
plt.title(f"Menor distância entre os nós um e três: {dij_dist}", weight='bold')
# Encontra os nós do melhor caminho
dij = nx.dijkstra_path(G,source=1,target=3)

dijkstra = G.subgraph(dij)  # Obtém o subgrafo dos nós
pos_ = nx.get_node_attributes(G,'pos')  # Obtém as posições de todos os nós
labels = nx.get_edge_attributes(G,'weight') # Obtém os pesos dos vértices

# Constrói um grafo com todos os nós
nx.draw(G,pos_,with_labels=True, node_size=800, width=0.5)
# Colore os nós do caminho de vermelho
nx.draw(dijkstra,pos_,with_labels=True, edge_color="red", width=3, node_size=800)
# Adiciona rótulos aos vértices
nx.draw_networkx_edge_labels(G,pos_,edge_labels=labels)
plt.show()
```



QUESTÃO 3

Resolva o seguinte problema de programação linear inteira:

$$\begin{gathered}\max 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+\end{gathered}$$

Resposta:

Essa questão foi resolvida tanto no Python quanto no Excel

In [135…
```python
from ortools.linear_solver import pywraplp
```

In [9]:
```python
# Cria um solver usando o SCIP
solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('SCIP')
```

In [10]:
```python
infinity = solver.infinity()
# cria as variáveis INTEIRAS x e y como não-negativas
```

```
x1 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x1')
x2 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x2')
```

In [11]:
```
# Adicionando restrições
solver.Add(x1 + 2*x2 <= 3)
solver.Add(6*x1 + 8*x2 <= 15);
```

In [12]:
```
# Definindo função objetivo
solver.Maximize(2*x1 + 3*x2)
```

In [15]:
```
# Executando o solver
status = solver.Solve()
status
```

Out[15]:
```
0
```

In [16]:
```
if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
    print('Solução:')
    print('Valor da função objetivo =', solver.Objective().Value())
    print('x1 =', x1.solution_value())
    print('x2 =', x2.solution_value())
else:
    print('O problema não tem uma solução ótima.')
```

```
Solução:
Valor da função objetivo = 5.0
x1 = 1.0
x2 = 1.0
```

QUESTÃO 4

Um banco de investimento tem um orçamento total de 14 milhões de euros, podendo fazer 4 tipos de investimentos (numerados 1,2,3,4). As tabelas a seguir especificam o valor a ser investido e a receita líquida de cada investimento. Cada investimento, se feito, deve ser feito integralmente

Investimento	**1**	**2**	**3**	**4**
Valor investido	5	7	4	3
Receita líquida	16	22	12	8

Formule e resolva um programa para maximizar a receita líquida total, respeitando a restrição de orçamento.

Resposta:

`weights` : Vetor contendo o valor a ser investido em nada investimento

`values` : Vetor contendo a receita líquida de cada investimento

`capacities` : Vetor contendo o orçamento total do banco para investimento.

In [20]:
```
from ortools.algorithms import pywrapknapsack_solver
```

In [19]:
```
values = [16, 22, 12, 8]
```

```python
weights = [[5, 7, 4, 3]]

capacities = [14]
```

In [21]:

```python
# Declarando o Solver
solver = pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver(
    pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver.
    KNAPSACK_MULTIDIMENSION_BRANCH_AND_BOUND_SOLVER, 'Investimento')
```

In [31]:

```python
solver.Init(values, weights, capacities)
computed_value = solver.Solve()
packed_items = []
packed_weights = []
total_weight = 0
print('Receita líquida total =', computed_value, 'milhões de euros')
for i in range(len(values)):
    if solver.BestSolutionContains(i):
        packed_items.append(i)
        packed_weights.append(weights[0][i])
        total_weight += weights[0][i]
print('Valor investido total =', total_weight, 'milhões de euros')
print('Investimentos realizados:', list(np.array(packed_items)+1))
print('Valor dos investimentos realizados:', packed_weights)
```

```
Receita líquida total = 42 milhões de euros
Valor investido total = 14 milhões de euros
Investimentos realizados: [2, 3, 4]
Valor dos investimentos realizados: [7, 4, 3]
```