Integração por Partes



Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

Integração por Partes

Aprendemos o método mais importante de integração, o Método da Substituição na aula anterior.

A outra técnica geral, **integração por partes**, é apresentada agora.

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração

Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação.

Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada *integração por partes*.

A Regra do Produto afirma que se *f* e g são funções deriváveis, então:

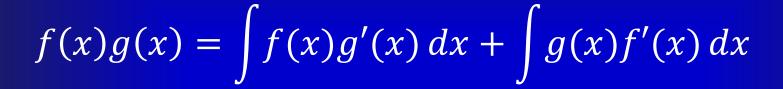
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Integrando dos dois lados, temos:

$$\int \frac{d}{dx} f(x)g(x) = \int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx$$

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx$$

Fórmula 1



Podemos rearranjar essa equação como:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$



A Fórmula 1, denominada **fórmula de integração por partes**, é mais facilmente lembrada com a seguinte notação.

Seja
$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$$
 e seja $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$

Então, a formula:
$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$

Pode ser escrevita como:

$$\int u dv = uv - \int v du$$



1. Calcule: x sen x dx

Solução: u = x e dv = senxdx, logo: du = dx e v = -cosx

E desse modo, temos:

$$\int x \sin x \, dx = \int x \sin x \, dx = x \left(-\cos x \right) - \int \left(-\cos x \right) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

OBSERVAÇÃO



Nosso objetivo ao usar a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida.

Assim, no Exemplo 1 iniciamos com $\int x \operatorname{senx} dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int \cos x \, dx$.

OBSERVAÇÃO

Se tivéssemos escolhido $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x \, dx$, então $du = \cos x \, dx$ e $v = x^2/2$.

Assim, a integração por partes daria:

$$\int x \sin x \, dx = (\sin x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos x dx$ é uma integral mais difícil que a original.

OBSERVAÇÃO



Em geral, ao decidir sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher u = f(x) como uma função que se torna mais simples quando derivada, ou ao menos não mais complicada.

Contanto que dv = g'(x)dx possa ser prontamente integrada para fornecer v.



Não temos aqui muita escolha para u e dv.

Seja
$$u = \ln x$$
 $dv = dx$

Então,
$$du = \frac{1}{x}dx$$
 $v = x$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$
$$= x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x + C$$



3. Calcule:
$$\int te^t dt$$

Note que t se torna mais simples quando derivada. Enquanto e^t permanece inalterada quando a derivamos ou integramos.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Assim escolhemos: u = t e $dv = e^t dt$

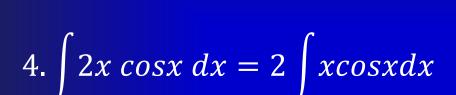
Então,
$$du = dt e v = e^t$$

A integração por partes resulta em:

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

Calcule as integrais:

$$\int u dv = uv - \int v du$$



$$u = x$$
, $dv = cosxdx$

Calcule as integrais:

$$\int udv = uv - \int vdu$$



$$\int 2x \cos x \, dx = 2 \int x \cos x \, dx$$

$$u = x$$
, $dv = cosxdx$, $du = dx e v = senx$

$$2\int x\cos x \, dx = 2\left[x - \int \sin x \, dx\right] = 2\left[x - \int \cos x \, dx\right] + C$$

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com o Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes.

Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre a e b, supondo f e g contínuas e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)\Big]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(x)f'(x) \, dx$$



$$5. \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

Sejan: u = x e dv = cosxdx, então: du = dx e v = senx

$$\int_0^1 x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= cosx(\pi) - cos(0) = -1 - 1 = -2$$