



Seção 2.4

Medidas de variação



Objetivos da Seção 2.4

- Determinar a amplitude de um conjunto de dados
- Determinar a variância e o desvio padrão da população e da amostra
- Usar a Regra Empírica e o Teorema de Chebychev para interpretar o desvio padrão
- Aproximar o desvio padrão da amostra para dados agrupados



Variância

Variação

- A diferença entre as entradas máxima e mínima em um conjunto de dados
- Os dados precisam ser quantitativos
- $\text{Variação} = (\text{Entrada máx.}) - (\text{Entrada mín.})$



Exemplo: encontrando a variação

Uma corporação contratou 10 graduados. Os salários iniciais de cada um são demonstrados abaixo. Encontre a variação dos salários iniciais.

Salários iniciais (milhares de dólares)

41 38 39 45 47 41 44 41 37 42

A variação dos salários iniciais é igual a 10.

Desvio, variância e desvio padrão



Desvio

- A diferença entre a entrada de dados, x , e a média do conjunto de dados
- Conjunto de dados da população:
 - Desvio populacional: $x - \mu$
- Conjunto de dados da amostra:
 - Desvio amostral: $x - \bar{x}$

Exemplo: encontrando o desvio



Uma corporação contratou 10 graduados. Os salários iniciais de cada um são demonstrados abaixo. Encontre a variação dos salários iniciais.

Salários iniciais (milhares de dólares)

41 38 39 45 47 41 44 41 37 42

Solução:

- Primeiro, determine a média dos salários iniciais.

$$\mu = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{415}{10} = 41.5$$

Solução: encontre o desvio amostral



Determine o desvio
para cada entrada.

Salário (\$ 1.000s), x	Desvio: $x - \mu$
41	$41 - 41,5 = -0,5$
38	$38 - 41,5 = -3,5$
39	$39 - 41,5 = -2,5$
45	$45 - 41,5 = 3,5$
47	$47 - 41,5 = 5,5$
41	$41 - 41,5 = -0,5$
44	$44 - 41,5 = 2,5$
41	$41 - 41,5 = -0,5$
37	$37 - 41,5 = -4,5$
42	$42 - 41,5 = 0,5$

$$\Sigma x = 415$$

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

Variância e Desvio Padrão



Variância da população

- $$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{N}$$
 ← Soma dos quadrados, SQ_x

Desvio padrão da população

- $$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \mu)^2}{N}}$$

Encontrando a variância populacional e o desvio padrão



Em palavras

1. Encontre a média do conjunto de dados da população.
2. Encontre o desvio de cada entrada.
3. Eleve os desvios ao quadrado.
4. Some para obter a soma dos quadrados.

Em símbolos

$$\mu = \frac{\Sigma x}{N}$$

$$x - \mu$$

$$(x - \mu)^2$$

$$SQ_x = \Sigma(x - \mu)^2$$



Em palavras

5. Divida por N para obter a **variância populacional**.
6. Encontre a raiz quadrada para obter o **desvio padrão populacional**.

Em símbolos

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \mu)^2}{N}}$$

Exemplo: encontrando o desvio padrão da população



Uma corporação contratou 10 graduados. Os salários iniciais de cada um são demonstrados abaixo. Encontre a variação dos salários iniciais.

Salários iniciais (milhares de dólares)

41 38 39 45 47 41 44 41 37 42

Lembrar $\mu = 41,5$.

Solução: encontrando o desvio padrão da população



Salário, x	Desvio: $x - \mu$	Quadrados: $(x - \mu)^2$
41	$41 - 41,5 = -0,5$	$(-0,5)^2 = 0,25$
38	$38 - 41,5 = -3,5$	$(-3,5)^2 = 12,25$
39	$39 - 41,5 = -2,5$	$(-2,5)^2 = 6,25$
45	$45 - 41,5 = 3,5$	$(3,5)^2 = 12,25$
47	$47 - 41,5 = 5,5$	$(5,5)^2 = 30,25$
41	$41 - 41,5 = -0,5$	$(-0,5)^2 = 0,25$
44	$44 - 41,5 = 2,5$	$(2,5)^2 = 6,25$
41	$41 - 41,5 = -0,5$	$(-0,5)^2 = 0,25$
37	$37 - 41,5 = -4,5$	$(-4,5)^2 = 20,25$
42	$42 - 41,5 = 0,5$	$(0,5)^2 = 0,25$

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

$$SQ_x = 88,5$$



Variância da população

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{N} = \frac{88.5}{10} \approx 8.9$$

Desvio padrão da população

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8.85} \approx 3.0$$

O desvio padrão da população é cerca de 3,0 ou \$ 3.000.

Desvio, variância e desvio padrão



Variância da amostra

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Desvio padrão da amostra

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Encontrando a variância e o desvio padrão da amostra



Em palavras

1. Encontre a média do conjunto de dados da amostra.
2. Encontre o desvio de cada entrada.
3. Eleve cada desvio ao quadrado.
4. Some-os para obter a soma dos quadrados.

Em símbolos

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$x - \bar{x}$$

$$(x - \bar{x})^2$$

$$\sum (x - \bar{x})^2$$



Em palavras

5. Divida por $n - 1$ para obter **a variância da amostra.**
6. Encontre a raiz quadrada para obter **o desvio padrão da amostra.**

Em símbolos

$$s^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$



Exemplo: encontre o desvio padrão da amostra

Os salários iniciais são para uma filial da empresa em Chicago. A empresa tem várias outras filiais e você planeja usar os salários iniciais de Chicago para estimar os salários iniciais da população maior. Encontre o desvio padrão dos salários iniciais da amostra.

Salários iniciais (milhares de dólares)

41 38 39 45 47 41 44 41 37 42

Solução: encontrando o desvio padrão da população



Salário, x	Desvio: $x - \mu$	Quadrados: $(x - \mu)^2$
41	$41 - 41,5 = -0,5$	$(-0,5)^2 = 0,25$
38	$38 - 41,5 = -3,5$	$(-3,5)^2 = 12,25$
39	$39 - 41,5 = -2,5$	$(-2,5)^2 = 6,25$
45	$45 - 41,5 = 3,5$	$(3,5)^2 = 12,25$
47	$47 - 41,5 = 5,5$	$(5,5)^2 = 30,25$
41	$41 - 41,5 = -0,5$	$(-0,5)^2 = 0,25$
44	$44 - 41,5 = 2,5$	$(2,5)^2 = 6,25$
41	$41 - 41,5 = -0,5$	$(-0,5)^2 = 0,25$
37	$37 - 41,5 = -4,5$	$(-4,5)^2 = 20,25$
42	$42 - 41,5 = 0,5$	$(0,5)^2 = 0,25$

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

$$SQ_x = 88,5$$



Variância da amostra

- $$s^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{88.5}{10 - 1} \approx 9.8$$

Desvio padrão da amostra

- $$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{88.5}{9}} \approx 3.1$$

O desvio padrão da amostra é de aproximadamente 3,1 ou \$ 3.100.

Exemplo: usando tecnologia para encontrar o desvio padrão



A amostra dos aluguéis de escritórios (em dólares por metro quadrado ao ano) no distrito comercial central de uma cidade é exibida na tabela. Use uma calculadora ou um computador para encontrar a média dos aluguéis e o desvio padrão da amostra.

Preço dos aluguéis		
35,00	33,50	37,00
23,75	26,50	31,25
36,50	40,00	32,00
39,25	37,50	34,75
37,75	37,25	36,75
27,00	35,75	26,00
37,00	29,00	40,50
24,50	33,00	38,00



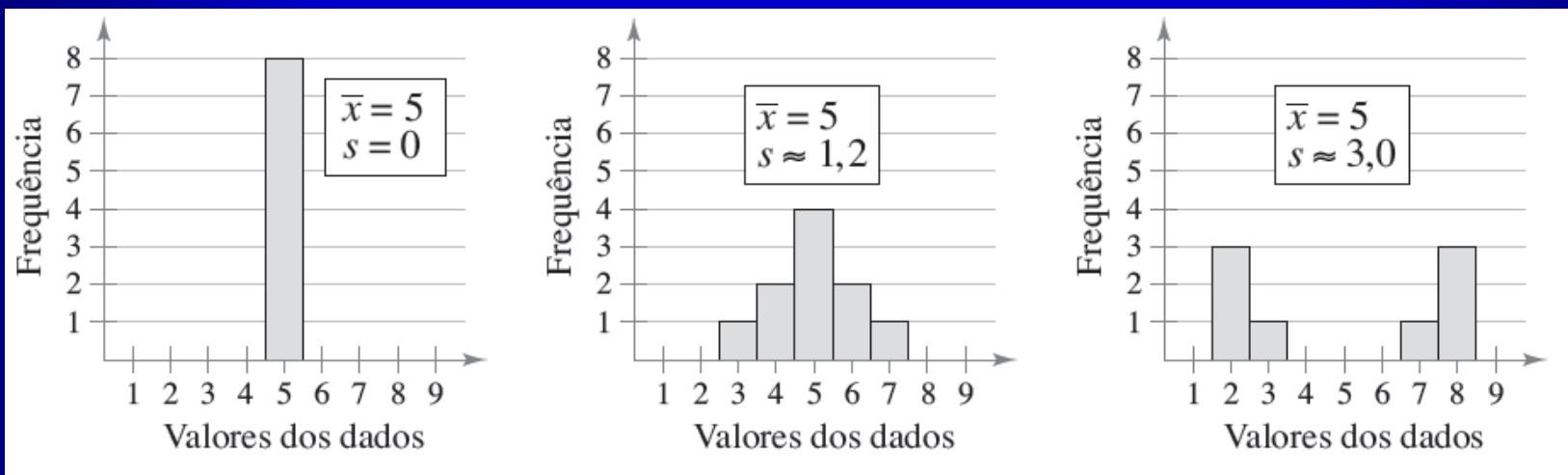
Solução: usando tecnologia para encontrar o desvio padrão

EXCEL		
	A	B
1	Média	33,72917
2	Erro padrão	1,038864
3	Média	35,375
4	Moda	37
5	Desvio padrão	5,089373
6	Variância da amostra	25,90172
7	Kurtosis	-0,74282
8	Skewness	-0,70345
9	Extensão	16,75
10	Mínimo	23,75
11	Máximo	40,5
12	Soma	809,5
13	Conta	24



Interpretando o desvio padrão

- Desvio padrão é a medida do valor típico que uma entrada desvia da média
- Quanto mais as entradas estão espalhadas, maior o desvio padrão

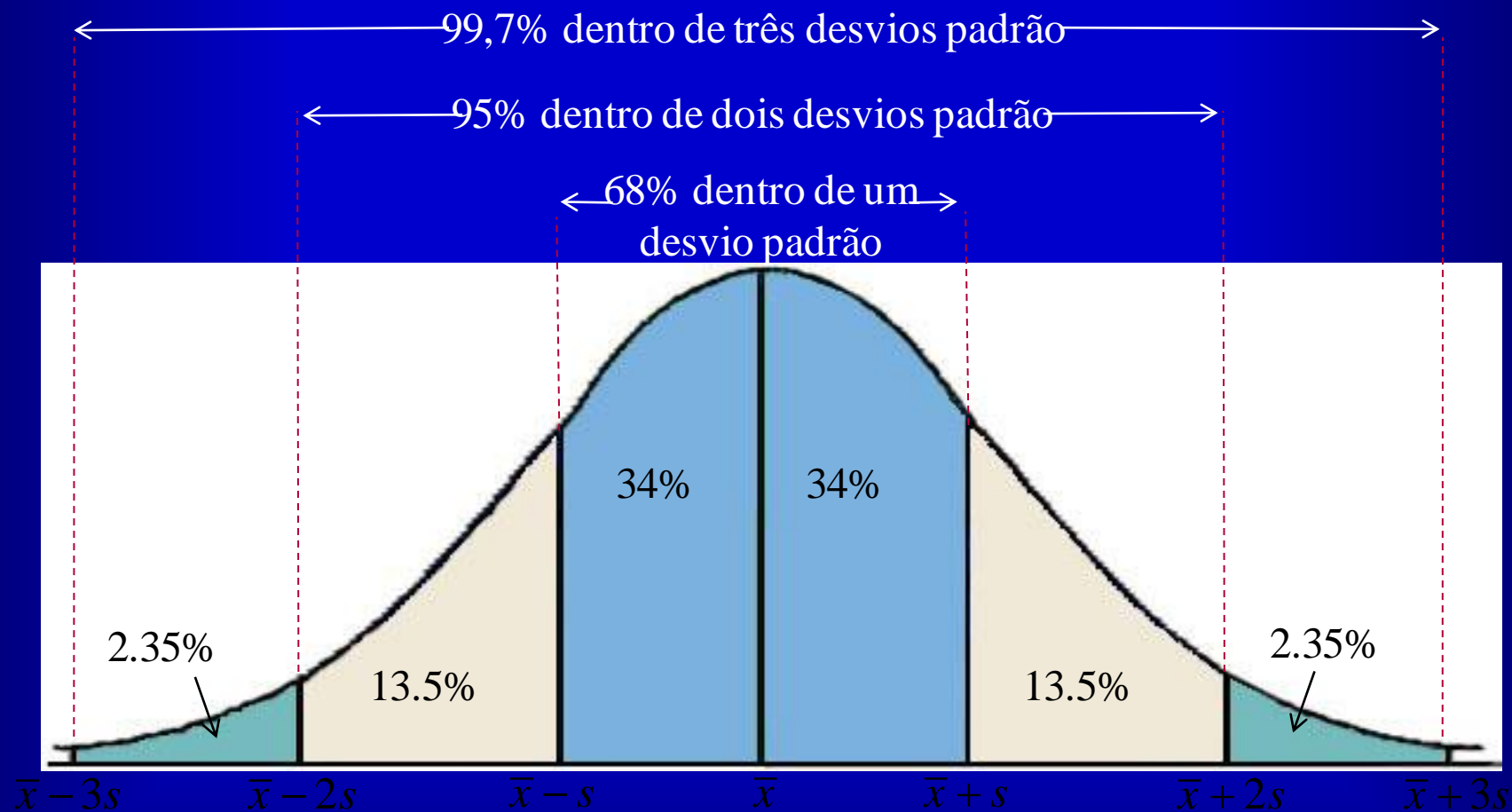


Interpretando desvio padrão: Regra Empírica (Regra 68 – 95 – 99.7)



Para dados com uma distribuição em formato de sino (simétrico), o desvio padrão tem as seguintes características:

- Cerca de **68%** dos dados estão dentro de um desvio padrão da média
- Cerca de **95%** dos dados estão dentro de dois desvios padrão da média
- Cerca de **99,7%** dos dados estão dentro de três desvios padrão da média





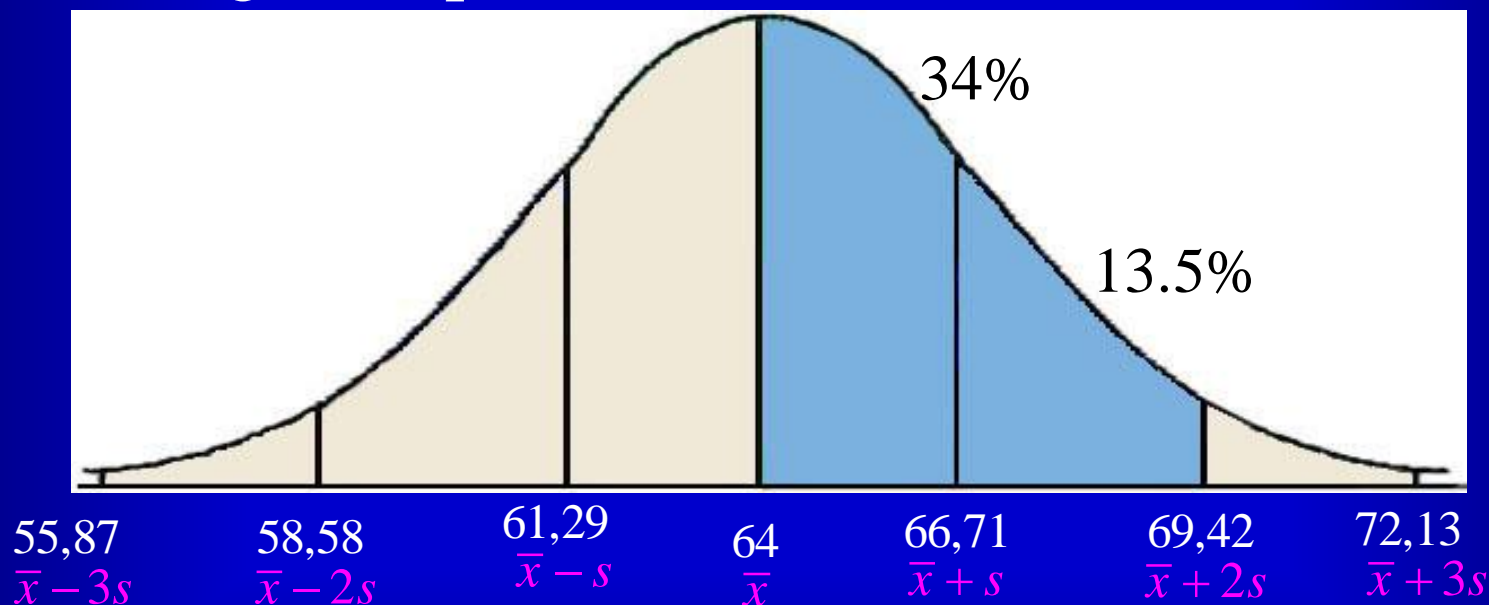
Exemplo: usando a Regra Empírica

Em uma pesquisa conduzida por uma Instituto de Saude, a amostragem média da altura de mulheres nos Estados Unidos (20-29 anos) era de 64 polegadas ($\sim 1,62\text{ m}$), com um desvio padrão da amostragem de 2,71 polegadas. Estime a porcentagem de mulheres que estão entre 64 e 69,42 polegadas.



Solução: usando a Regra Empírica

- Porque a distribuição tem formato de sino, você pode usar a Regra Empírica.



$34\% + 13,5\% = 47,5\%$ das mulheres estão entre 64 e 69,42 polegadas.

Teorema de Chebychev



- A porção de qualquer conjunto de dados postos dentro de k desvios padrão ($k > 1$) da média é no mínimo:

$$1 - \frac{1}{k^2}$$

- $k = 2$: Em qualquer conjunto de dados, pelo menos

$$1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \text{ or } 75\%$$

75% dos dados estão dentro de dois desvios padrão da média.

- $k = 3$: Em qualquer conjunto de dados, pelo menos

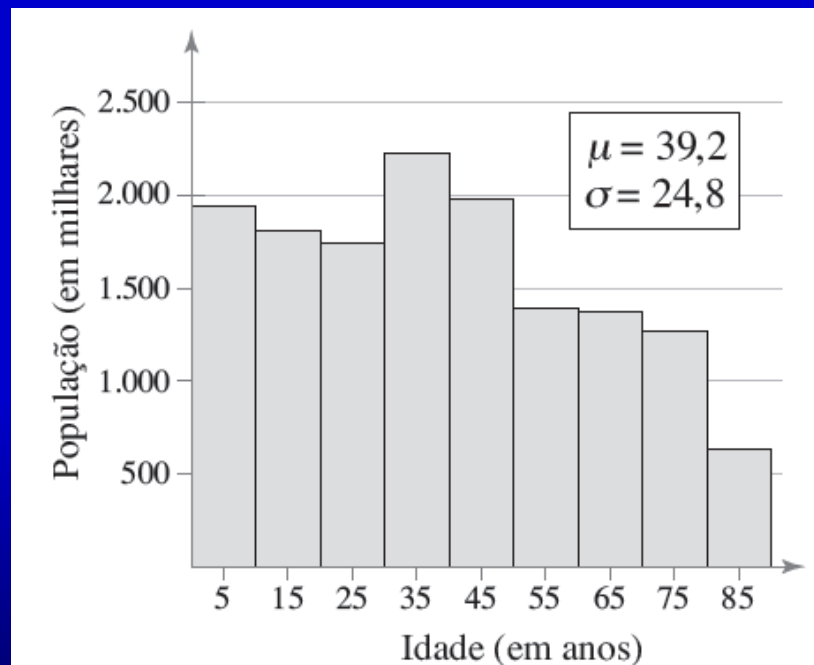
$$1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} \text{ or } 88.9\%$$

88,9% dos dados estão dentro de três desvios padrão da média.

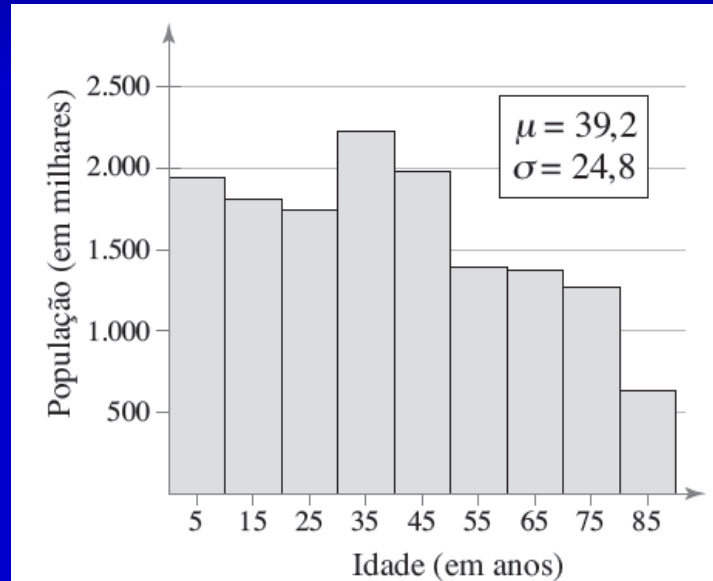
Exemplo: usando o Teorema de Chebychev



A distribuição de idades numa cidade é mostrada no histograma. Aplique o Teorema de Chebychev aos dados usando $k = 2$. O que se pode concluir?



Solução: usando o Teorema de Chebychev



$$k = 2: \mu - 2\sigma = 39,2 - 2(24,8) = -10,4$$

(use 0 já que idade não pode ser negativa)

$$\mu + 2\sigma = 39,2 + 2(24,8) = 88,8$$

Pelo menos 75% da população da cidade está entre 0 e 88,8 anos de idade.

Desvio padrão para dados agrupados



Desvio padrão de uma amostra para uma distribuição de frequência

- $$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n - 1}}$$
 em que $n = \sum f$ (o número de entradas no conjunto de dados)
- Quando uma distribuição de frequência tem classes, estime a média da amostra e o desvio padrão usando o ponto médio de cada classe.



Exemplo: encontrando o desvio padrão para dados agrupados

Você coleta uma amostragem aleatória do número de crianças por casa em uma região. Encontre a média da amostra e o desvio padrão da amostra do conjunto de dados.

Número de crianças em 50 casas				
1	3	1	1	1
1	2	2	1	0
1	1	0	0	0
1	5	0	3	6
3	0	3	1	1
1	1	6	0	1
3	6	6	1	2
2	3	0	1	1
4	1	1	2	2
0	3	0	2	4



Solução: encontrando o desvio padrão para dados agrupados

- Primeiro, construa a distribuição da frequência

- Encontre a média da distribuição da frequência

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{n} = \frac{91}{50} \approx 1.8$$

A média da amostra é de cerca de 1,8 criança.

x	f	xf
0	10	$0(10) = 0$
1	19	$1(19) = 19$
2	7	$2(7) = 14$
3	7	$3(7) = 21$
4	2	$4(2) = 8$
5	1	$5(1) = 5$
6	4	$6(4) = 24$

$$\Sigma f = 50 \quad \Sigma(xf) = 91$$



Determine a soma dos quadrados.

x	f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
0	10	$0 - 1,8 = -1,8$	$(-1,8)^2 = 3,24$	$3,24(10) = 32,40$
1	19	$1 - 1,8 = -0,8$	$(-0,8)^2 = 0,64$	$0,64(19) = 12,16$
2	7	$2 - 1,8 = 0,2$	$(0,2)^2 = 0,04$	$0,04(7) = 0,28$
3	7	$3 - 1,8 = 1,2$	$(1,2)^2 = 1,44$	$1,44(7) = 10,08$
4	2	$4 - 1,8 = 2,2$	$(2,2)^2 = 4,84$	$4,84(2) = 9,68$
5	1	$5 - 1,8 = 3,2$	$(3,2)^2 = 10,24$	$10,24(1) = 10,24$
6	4	$6 - 1,8 = 4,2$	$(4,2)^2 = 17,64$	$17,64(4) = 70,56$

$$\Sigma(x - \bar{x})^2 f = 145.40$$



Encontre o desvio padrão da amostra.

$$\begin{array}{ccc} x - \bar{x} & (x - \bar{x})^2 & (x - \bar{x})^2 f \end{array}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2 f}{n - 1}} = \sqrt{\frac{145.40}{50 - 1}} \approx 1.7$$

O desvio padrão é de cerca de 1,7 criança.



Sumário da Seção 2.4

- Determinamos a amplitude de um conjunto de dados
- Determinamos a variância e o desvio padrão da população e da amostra
- Usamos a Regra Empírica e o Teorema de Chebychev para interpretar o desvio padrão
- Aproximamos o desvio padrão da amostra para dados agrupados



Seção 2.5

Medidas de posição



Objetivos da Seção 2.5

- Determinar os quartis de um conjunto de dados
- Determinar a amplitude interquartil de um conjunto de dados
- Criar um gráfico de caixa-e-bigodes
- Interpretar outros fractis, como percentis
- Determinar e interpretar o escore padrão (escore z)



Quartilhos

- **Fractis** são números que particionam (dividem) um conjunto de dados ordenados em partes iguais
- **Quartis** dividem dados ordenados em quatro partes aproximadamente iguais
 - **Primeiro quartil, Q_1** : Cerca de um quarto dos dados cai em ou abaixo de Q_1
 - **Segundo quartil, Q_2** : Cerca de metade dos dados caem em ou abaixo de Q_2 (mediana)
 - **Terceiro quartil, Q_3** : Cerca de três quartos dos dados caem em ou abaixo de Q_3



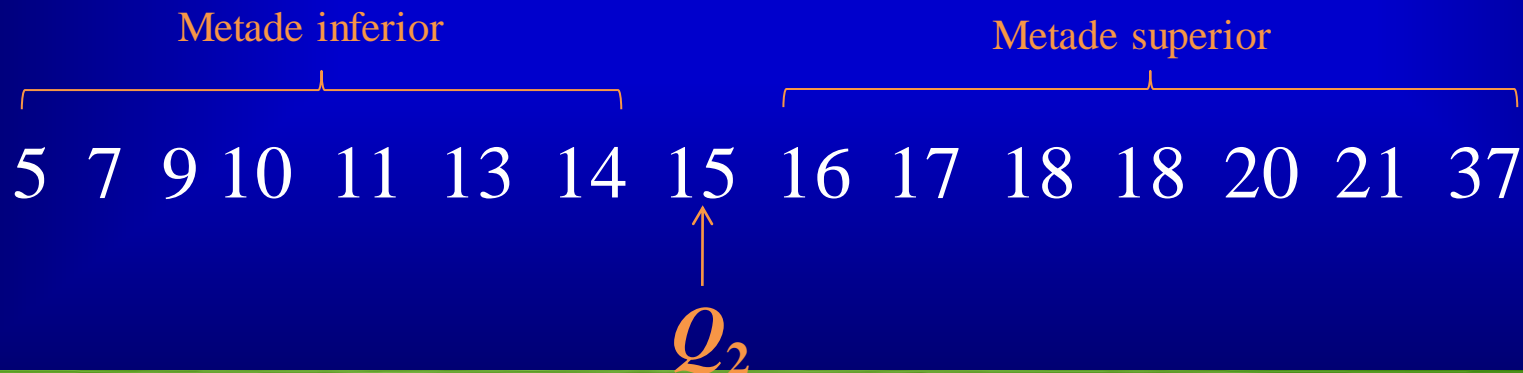
Exemplo: encontrando quartis

As pontuações dos testes de 15 empregados matriculados em um curso de primeiros socorros são listadas. Encontre o primeiro, o segundo e o terceiro quartil das pontuações dos testes.

13 9 18 15 14 21 7 10 11 20 5 18 37 16 17

Solução:

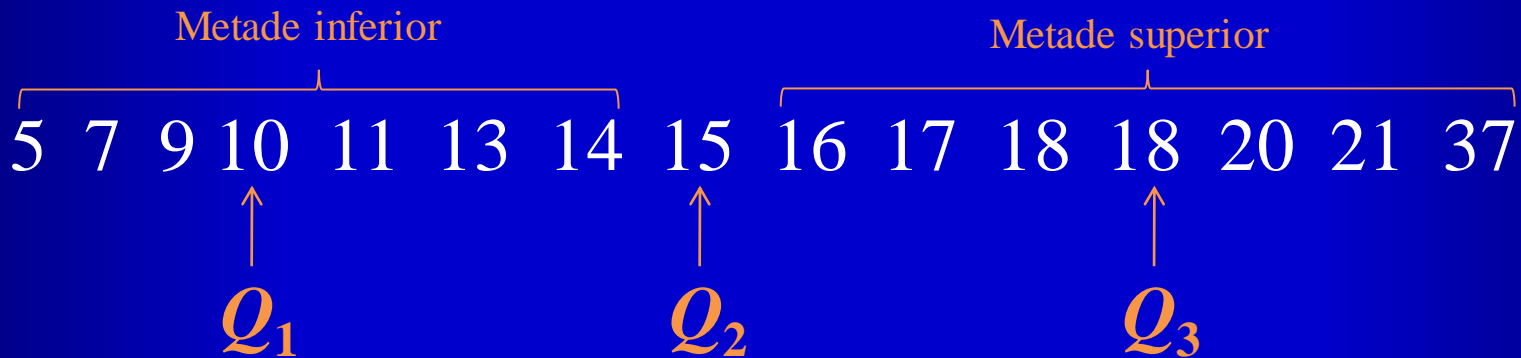
- Q_2 divide o conjunto de dados em duas metades





Solução: encontrando quartis

- O primeiro e o terceiro quartis são as medianas das metades inferior e superior do conjunto de dados



Cerca de um quarto dos funcionários obteve nota 10 ou menor; cerca de metade deles obteve 15 ou menor; e cerca de três quartos obteve 18 ou menor.



Amplitude interquartil

Encontrando a amplitude interquartil (VIQ)

- A diferença entre o terceiro e o primeiro quartis
- $VIQ = Q_3 - Q_1$



Exemplo: encontrando a amplitude interquartil

Encontre a amplitude interquartil das notas dos testes.

Lembre-se: $Q_1 = 10$, $Q_2 = 15$ e $Q_3 = 18$

Solução:

- $VIQ = Q_3 - Q_1 = 18 - 10 = 8$

As notas dos testes na porção do meio do conjunto de dados variam no máximo em 8 pontos.



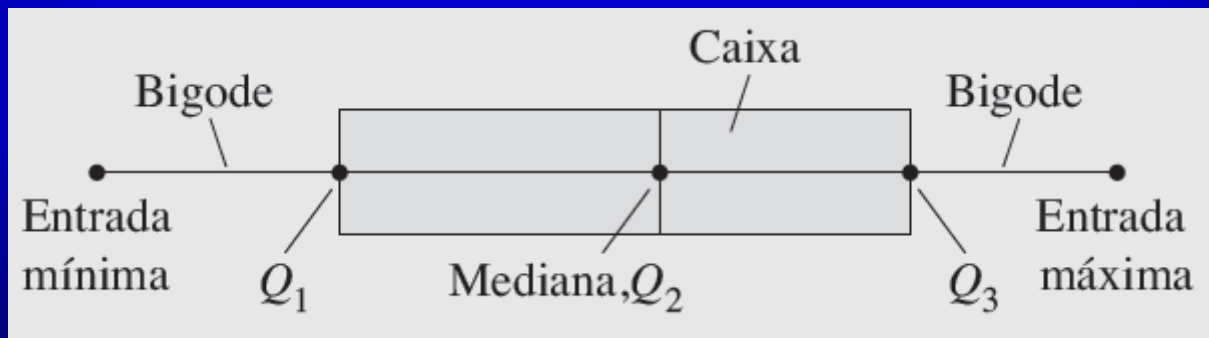
Gráfico de caixa-e-bigodes

- Ferramenta exploratória de análise de dados
- Destaca qualidades importantes do conjunto de dados
- Requer (**sumário de cinco números**):
 - Entrada mínima
 - Primeiro quartil Q_1
 - Mediana Q_2
 - Terceiro quartil Q_3
 - Entrada máxima

Desenhando um gráfico de caixa-e-bigodes



1. Encontre o sumário dos cinco números do conjunto de dados.
2. Construa uma escala horizontal que cubra a variância dos dados.
3. Ponha os cinco números acima da escala horizontal.
4. Desenhe uma caixa acima da escala horizontal de Q_1 até Q_3 e desenhe uma linha vertical na caixa em Q_2 .
5. Desenhe bigodes saindo da caixa para as entradas mínima e máxima.





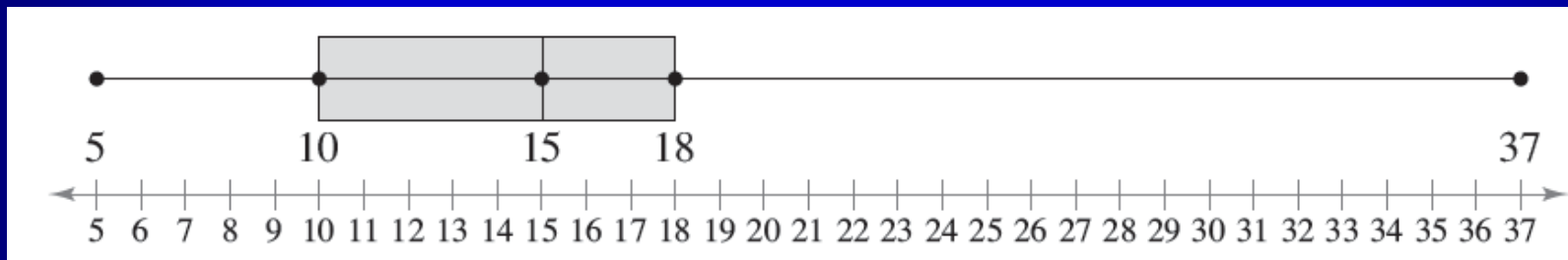
Exemplo: desenhando um gráfico de caixa-e-bigodes

Desenhe um gráfico de caixa-e-bigodes que represente as 15 pontuações dos testes.

Lembre-se: Mín. = 5 $Q_1 = 10$ $Q_2 = 15$ $Q_3 = 18$

Máx. = 37

Solução:



Cerca de metade das notas estão entre 10 e 18. Olhando para o comprimento do bigode direito, pode-se concluir que 37 é um possível valor discrepante.



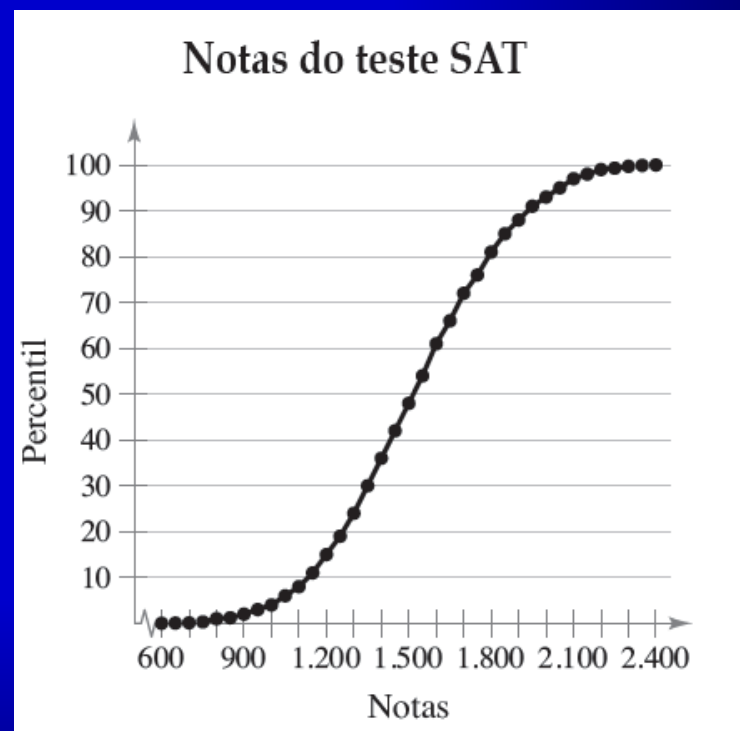
Percentis e outros fractis

Fractis	Sumário	Símbolos
Quartis	Divide os dados em 4 partes iguais	Q_1, Q_2, Q_3
Decis	Divide os dados em 10 partes iguais	$D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$
Percentis	Divide os dados em 100 partes iguais	$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$



Exemplo: interpretando percentis

A ogiva representa a distribuição de frequência cumulativa para as provas do SAT (vestibular dos EUA) de estudantes em uma ano recente. Qual nota representa o 72º percentil? Como você deve interpretar isso? (*Fonte: College Board Online.*)

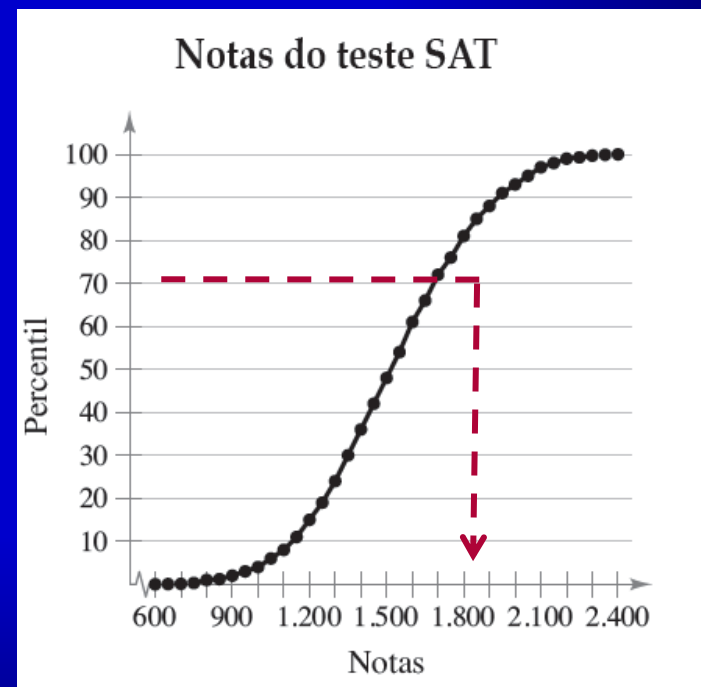




Solução: interpretando percentis

O 72º percentil corresponde à nota 1.700.

Isso significa que 72% dos alunos obtiveram resultados de 1.700 ou menos.





O escore padrão

Escore padrão (escore z)

- Representa o número de desvios padrão que um dado valor x está da média μ .

$$z = \frac{\text{valor } x - \text{média}}{\text{desvio padrão}} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Exemplo: comparando escores z de diferentes conjuntos de dados



Em 2007, o ator Forest Whitaker ganhou o Oscar de melhor ator, aos 45 anos de idade, por sua atuação no filme *O Último Rei da Escócia*. A atriz Helen Mirren ganhou o prêmio de melhor atriz aos 61 anos por seu papel em *A Rainha*. A idade média para todos os vencedores do prêmio de melhor ator é 43,7, com desvio padrão de 8,8. A idade média para as vencedoras do prêmio de melhor atriz é 36, com desvio padrão de 11,5. Encontre o escore z que corresponda à idade de cada ator ou atriz. Depois, compare os resultados.





Solução: comparando escores z de diferentes conjuntos de dados

- Forest Whitaker:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 43,7}{8,8} \approx 0,15$$

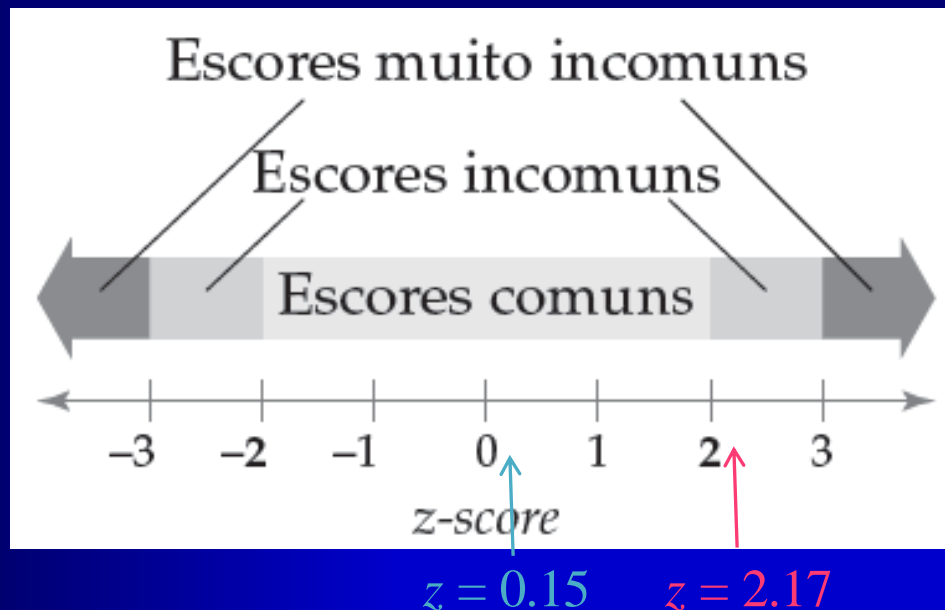
Desvio padrão 0,15
acima da média

- Helen Mirren:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{61 - 36}{11,5} \approx 2,17$$

Desvio padrão 2,17
acima da média





Escores muito incomuns

Escores incomuns

Escores comuns

Escore z

O escore z correspondente à idade de Helen Mirren é mais de dois desvios padrão da média, então é considerado incomum. Comparado a outras vencedoras do prêmio de melhor atriz, ela é relativamente mais velha, enquanto a idade de Forest Whitaker é pouco acima da média dos ganhadores do prêmio de melhor ator.





Sumário da Seção 2.5

- Determinamos os quartis de um conjunto de dados
- Determinamos a amplitude interquartil de um conjunto de dados
- Criamos gráfico de caixa-e-bigodes
- Interpretamos outros fractis, como percentis
- Determinamos e interpretamos o escore padrão (escore z)