Integração por Substituição

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

INTRODUÇÃO

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas.

Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

INTRODUÇÃO

Para encontrar essa integral usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra*.

Aqui o “alguma coisa extra” é uma nova variável; mudamos da variável x para uma nova variável u.

INTRODUÇÃO

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Suponha que façamos u igual à quantidade sob o sinal de raiz, ou seja: $u = 1 + x^2$.

Se $u = 1 + x^2$, então: $u' = \dfrac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$

Então a diferencial de u é $du = 2x\,dx$.

Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá na integral dada;

INTRODUÇÃO

Portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever: $u = 1 + x^2 \ \ e \ \ du = 2xdx$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{\underbrace{1+x^2}_{u}}\ \underbrace{2xdx}_{du} = \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$$

INTRODUÇÃO
Equação 3

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx\,.$$

(Note que se $F' = f$, então)

Pois, pela Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

INTRODUÇÃO

Se fizermos a “mudança de variável” ou “substituição” u $= g(x)$, então $du = g'(x)dx$ e da equação anterior, temos

$$\int F'(g(x))g'(x)dx =$$

$$= \int F'(u)du = F(u) + C$$

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO EXEMPLO 1

$Calcule$: $\int 4x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$

Solução: Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3 dx$, que ocorre na integral. Então:

$$\int 4x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \int \cos(\underbrace{x^4 + 2}_{u})\, \underbrace{4x^3 dx}_{\mathrm{d}u} =$$

$$= \int cosu\, du = senu + C = sen(x^4 + 2)\; + C$$

Note que no final retornamos para a variável original x.

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO

A ideia por trás da Regra da Substituição é substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples.

Isso é obtido mudando-se da variável original x para uma nova variável u, que é uma função de x.

Dessa forma, no Exemplo 1 substituímos a integral

$$\int 4x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$$

por uma mais simples: $\int cosu\ du$

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO

O desafio principal no uso da Regra da Substituição é descobrir uma substituição apropriada.

- Você deve tentar escolher *u* como uma função no integrando cuja diferencial também ocorra na integral (exceto por um fator constante).

- Foi isso que aconteceu no Exemplo 1.

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO

Se isso não for possível, tente escolher *u* como alguma parte complicada do integrando.

É normal errar na escolha da substituição; se sua primeira tentativa não funcionar, tente outra substituição.

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO EXEMPLO

$Voltando\ ao\ exemplo\ 1, se\ tívessemos$: $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$

Fazemos a mesma substituição: $u = x^4 + 2$ e sua diferencial é $du = 4x^3dx \Rightarrow \frac{1}{4}du = x^3dx$. Então:

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \int \cos(\underbrace{x^4+2}_{u})\,\underbrace{x^3dx}_{\frac{1}{4}du} =$$

$$= \int cosu\left(\frac{1}{4}du\right) = \frac{1}{4}\int cosu\,du = \frac{1}{4}senu + C$$

$$= \frac{1}{4}sen(x^4+2) + C$$

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO
EXEMPLO 2

Calcule: $\int \sqrt[3]{2x+1}\,dx$

Solução: Seja $u = 2x + 1$. Então $du = 2\,dx$, logo

$dx = \frac{1}{2}$ du. Nesse caso, a Regra da Substituição dá

$$\int \sqrt[3]{2x+1}\,dx = \int \sqrt[3]{u}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} + C = \frac{3}{8}\,\sqrt[3]{(2x+1)^4} + C$$

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO
EXEMPLO 2

Encontre: $$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\ xdx$$

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO
EXEMPLO 2

Encontre: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\ xdx$

Seja $u = 1 - 4x^2$. Então: $du = -8xdx$. Logo: $xdx = -\frac{1}{8}du$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\ xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}\ du\right)$$

$$-\frac{1}{8}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Exercícios: Calcule a integral:

1. $\int x \, sen(3x^2 + 5)dx = \int sen(3x^2 + 5) \, xdx$

Resposta: $\frac{1}{6}\cos(3x^2 + 5) + C$

2. $\int 3xe^{x^2-1} \, dx = 3\int e^{x^2-1} \; xdx$

Resposta: $= \frac{3}{2}e^{x^2-1} + C$

Exercícios

Resolução:

$$1.\ \int x\, sen(3x^2+5)dx = \int sen(3x^2+5)\, xdx$$

$$u = 3x^2+5 \quad \Rightarrow \quad du = 6x\, dx \quad \Rightarrow \quad xdx = \frac{1}{6}du$$

$$\int sen(3x^2+5)\, xdx = \int senu \left(\frac{1}{6}\, du\right) = \frac{1}{6}\int senu\, du$$

$$= -\frac{1}{6}\cos(u) + C = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+5) + C$$

$$2. \int 3xe^{x^2-1}\,dx = 3\int x\,e^{x^2-1}\,dx$$

$$u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dx = \frac{1}{2}du$$

$$3\int x\,e^{x^2-1}\,dx = 3\int e^u \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int e^u\,du = \frac{3}{2}e^u + C$$

$$= \frac{3}{2}e^{x^2-1} + C$$