Limites

Texto baseado nos livros:

Cálculo - vol 1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

O conceito de limite de funções tem grande utilidade no estudo das funções.

No comportamento de funções nas vizinhanças de um ponto dentro ou fora de seu domínio

No comportamento de funções quando x aumenta muito (tende para infinito) ou diminui muito (tende para menos infinito).

Além disso, o conceito de limite é utilizado em derivadas e integrais que são os assuntos que abordaremos nas próximas aulas.

- Em termos simples, calcular um limite é investigar de que modo uma função $f(x)$ se comporta quando a variável independente x se aproxima de determinado número a, que não pertence necessariamente ao domínio de f. Os limites estão presentes em um grande número de situações da vida real. Assim, por exemplo, podemos nos aproximar do zero absoluto a uma temperatura T_c, na qual não existe nenhuma agitação molecular, mas jamais conseguimos atingi-lo. Os economistas que falam do lucro de um investimento em um mercado ideal e os engenheiros que calculam a eficiência de um motor em condições ideais também estão trabalhando com situações limite.

O Conceito de Limite:

Para ilustrar o conceito de limite, suponha que um corretor de imóveis estime que, daqui a *t* anos, *S* terrenos de certo bairro serão vendidos, em que:

$$S(t) = \frac{-2t^3 + 19t^2 - 8t - 9}{-t^2 + 8t - 7}$$

Quantas vendas de terreno são esperadas daqui a, digamos, 5 anos?

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

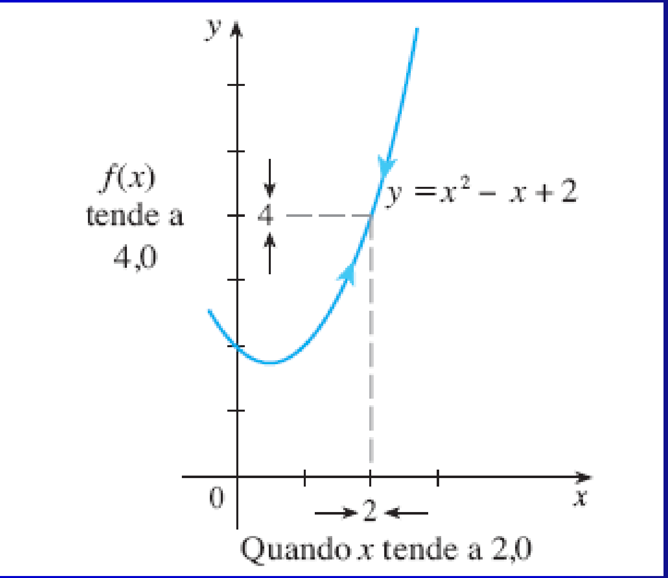
- Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2.
- A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- Da tabela e do gráfico de $f(x)$ (uma parábola) mostrado na Figura vemos que quando *x* estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tende a 4.
- De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos tornando *x* suficientemente próximo de 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001



O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- Expressamos isso dizendo que “o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4”.
  - A notação para isso é:

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - x + 2 \right) = 4$$

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Definição 1

Em geral, usamos a seguinte notação:

1 DEFINIÇÃO Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L",

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tomando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- Informalmente, isso significa que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$.

- Uma definição mais precisa será dada posteriormente.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é $f(x) \to L$ quando $x \to a$

que deve ser lida assim: "$f(x)$ tende a *L* quando *x* tende a a".

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- Preste atenção na frase "mas x $\neq$ a" na definição de limite.

Isso significa que ao procurar o limite de $f(x)$ quando *x* tende a a nunca consideramos *x* = a.

Na realidade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida para *x* = a.

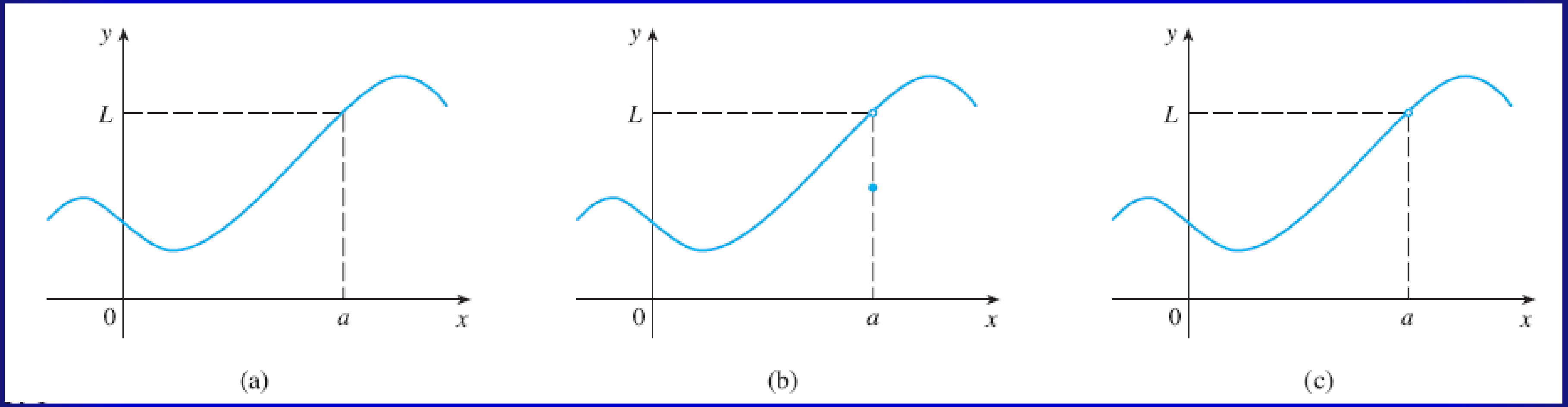
A única coisa que importa é como $f(x)$ está definida *próximo de* a.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A Figura mostra os gráficos de três funções.

- Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$
- Mas em cada caso, não importando o que acontece em a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



O LIMITE DE UMA FUNÇÃO Exemplo

Vamos estimar o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

Observe que a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ não está definida quando $x = 1$.

Mas isso não importa, pois a definição de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não iguais a a.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- As tabelas dão os valores de $f(x)$ (corretos até a sexta casa decimal) para os valores de *x* que tendem a 1 (mas não são iguais a 1).

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0.999	0,500250
0,9999	0,500025

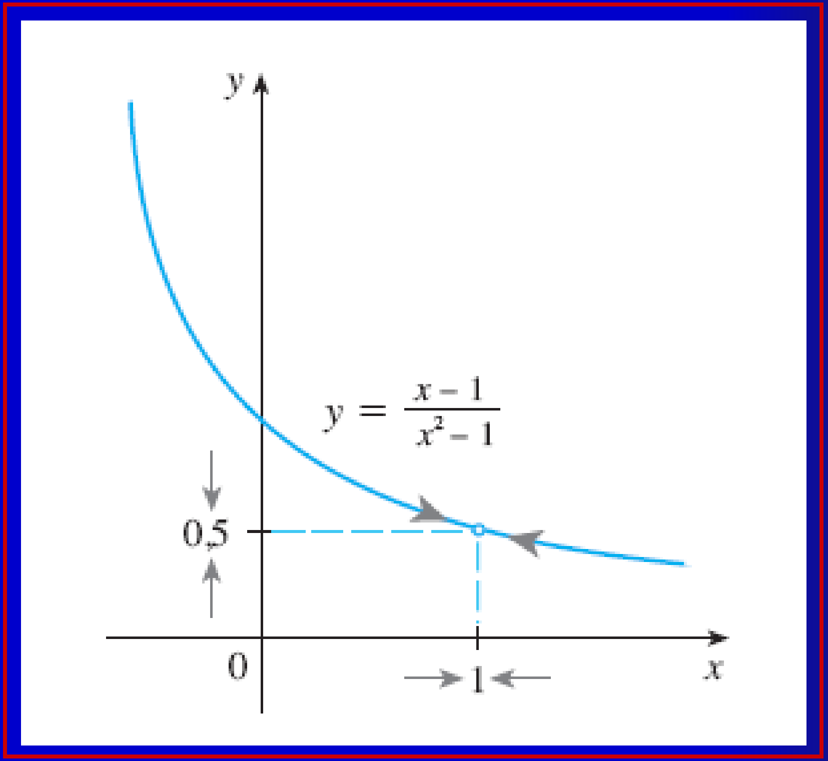
$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

- Com base nesses valores podemos supor que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de *f* na Figura.

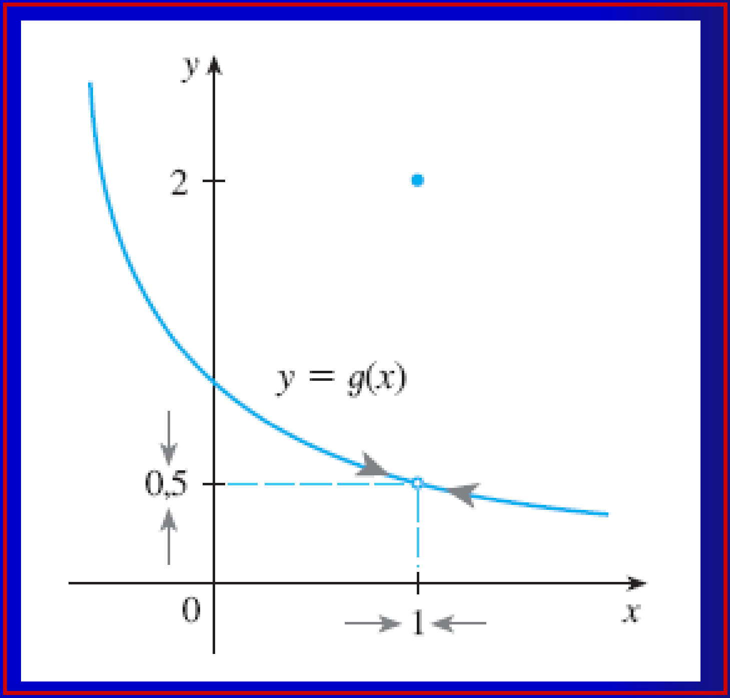


O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Vamos agora mudar ligeiramente $f(x)$ definindo seu valor como 2 quando *x*=1 e chamando a função resultante de *g*:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função *g* tem o mesmo limite quando *x* tende a 1 (veja a Figura), pois como dito, não consideramos $x = 1$, mas apenas valores próximos de 1.



O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Exemplo

- Encontre $$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000} \right)$$

- Como antes, construímos uma tabela de valores. Da tabela parece que:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000} \right) = 0$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- Mas, se continuarmos com os valores ainda menores de *x*, a segunda tabela sugere que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10,000}\right)=0.000100=\frac{1}{10,000}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

- Mais tarde, veremos que $\lim\limits_{x\to 0}\cos(5x) = 1$

e então segue que o limite é 0,0001.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Exemplo

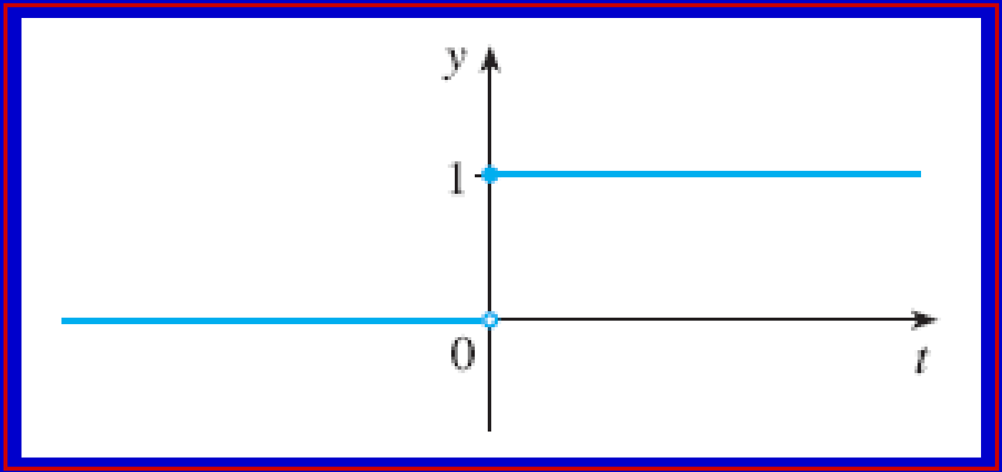
A função de Heaviside, $H(t)$, é definida por:

$$\boldsymbol{H(t) = \begin{cases} 0, & se\ t < 0 \\ 1, & se\ t \geq 0 \end{cases}}$$

Essa função, cujo nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850 1925), pode ser usada para descrever uma corrente elétrica que é ligada em $t = 0$.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

- O gráfico da função está na figura abaixo.
  - Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0.
  - Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1.
  - Ou seja, não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0.
  - Portanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.



LIMITES LATERAIS

Vimos no Exemplo 6 que *H*(*t*) tende a 0 quando *t* tende a 0 pela esquerda, e tende a 1 quando *t* tende a 0 pela direita.

Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo:

$$\lim_{t\to 0-} H\left(t\right) = 0 \qquad \lim_{t\to 0+} H\left(t\right) = 1$$

O símbolo $t \to 0^-$ indica que estamos considerando somente valores de *t* menores que 0 (t tende a 0 pela esquerda).

Da mesma forma, $t \to 0^+$ indica que estamos considerando somente valores de *t* maiores que 0 (t tende a 0 pela direita).

LIMITES LATERAIS

Definição

- Escrevemos $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Dizemos que o **limite à esquerda de *f*(*x*) quando *x* tende a a** [ou o **limite de *f*(*x*) quando *x* tende a a pela esquerda**] é igual a *L* se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de *L*, para *x* suficientemente próximo de a e *x* menor que a.

LIMITES LATERAIS

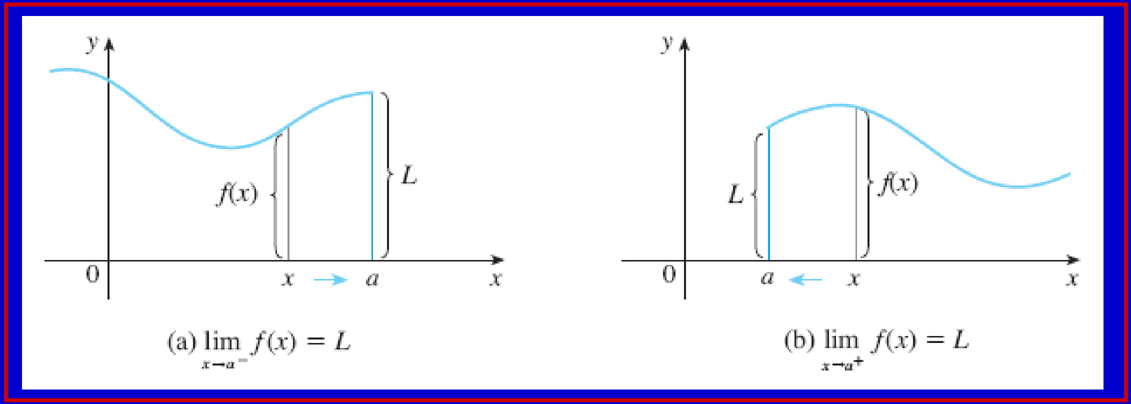
- Observe que a Definição 2 difere da Definição 1 pelo fato de exigirmos que *x* seja menor que *a.*

  - Analogamente, se for exigido que *x* seja maior que a, obteremos "o **limite à direita de $f(x)$ quando *x* tende a a** é igual a *L*", e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

  - Dessa forma, o símbolo ' $x \to a^+$ ' indica que estamos considerando somente $x > a$.

LIMITES LATERAIS

- Essas definições estão ilustradas nas Figuras:



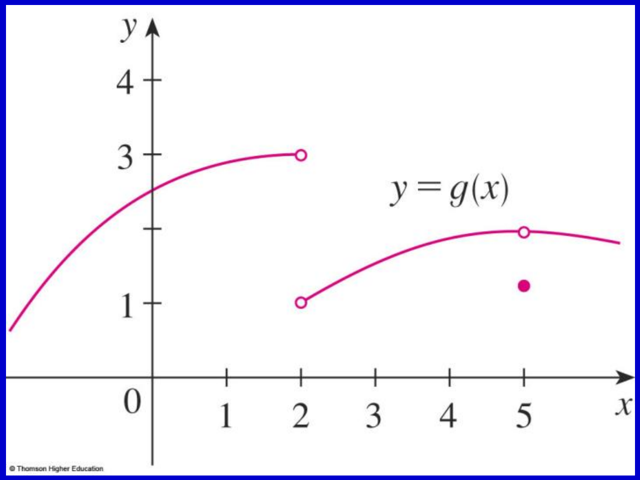
- Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

LIMITES LATERAIS **Definição**

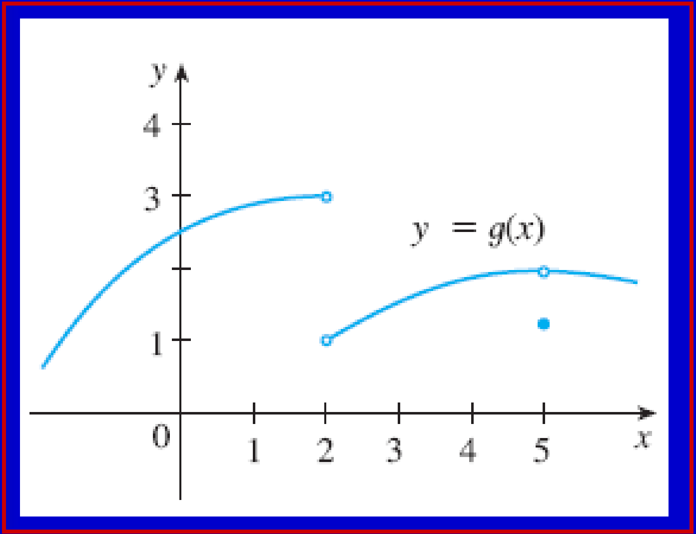
- O gráfico de uma função *g* está na Figura. Use-o para dizer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$	(b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$	(c) $\lim_{x \to 2} g(x)$
(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$	(e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$	(f) $\lim_{x \to 5} g(x)$



LIMITES LATERAIS **Exemplo**

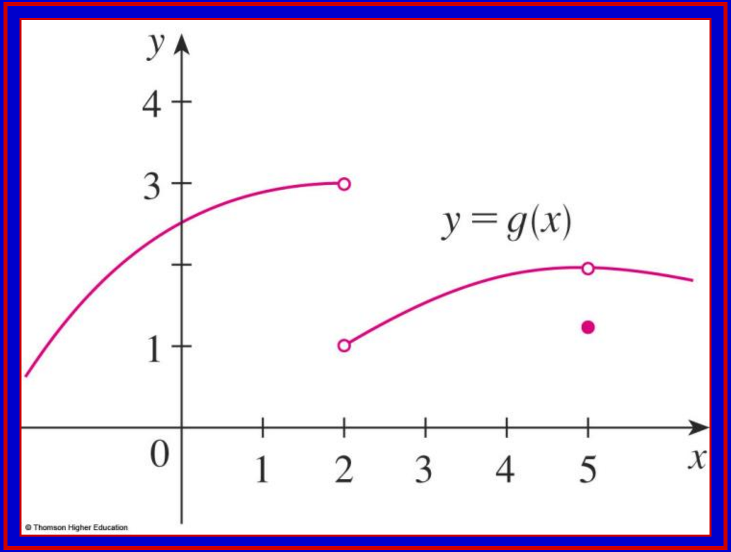
- A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas se aproximam de 1 quando x tende a 2 pela direita.
- Logo (a) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$ e (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$.



LIMITES LATERAIS

Exemplo

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de (3) que o $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.



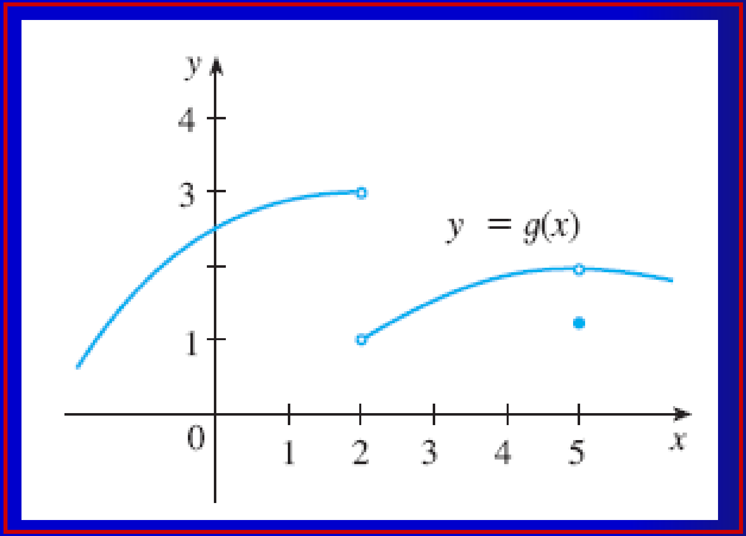
LIMITES LATERAIS

Exemplo

- O gráfico mostra também que $\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5^+} g(x) = 2$.

- Segue que $\lim_{x\to 5} g(x) = 2$.

- Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.



LIMITES INFINITOS

Exemplo

Encontre, se existir o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

À medida que *x* se aproxima de 0, x^2 também se aproxima de 0, e $1/x^2$ fica muito grande.

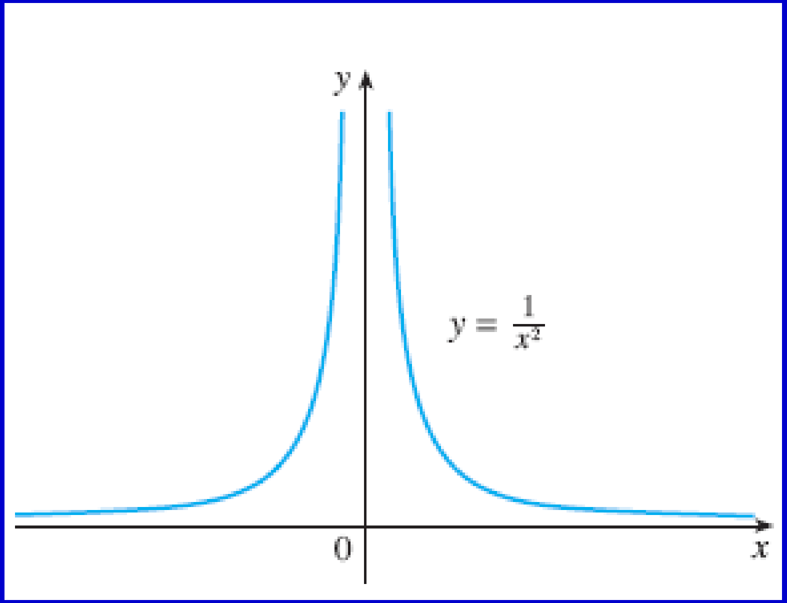
x	$\frac{1}{x^2}$
±1	1
±0,5	4
±0,2	25
±0,1	100
±0,05	400
±0,01	10 000
±0,001	1 000 000

LIMITES INFINITOS

Exemplo

- De fato, a partir do gráfico, parece que a função $f(x) = 1/x^2$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tomarmos os valores de x suficientemente próximos de 0.
- Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}.$$



x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0,5$	4
$\pm 0,2$	25
$\pm 0,1$	100
$\pm 0,05$	400
$\pm 0,01$	10 000
$\pm 0,001$	1 000 000

LIMITES INFINITOS

Exemplo

Para indicar o tipo de comportamento exibido no Exemplo 8 usaremos a notação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe.

É simplesmente uma maneira de expressar uma forma particular da não existência do limite: $1/x^2$ pode assumir valores tão grandes quanto quisermos.

Basta para isso escolhermos valores de *x* suficientemente próximos de 0.

LIMITES INFINITOS **Exemplo**

Em geral, escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$$

para indicar que os valores de $\boldsymbol{f(x)}$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou “a crescer ilimitadamente”), à medida que *x* se tornar cada vez mais próximo de a.

LIMITES INFINITOS Definição

- Seja $\boldsymbol{f(x)}$ uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em *a*. Então $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que podemos fazer os valores de $\boldsymbol{f(x)}$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando *x* suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

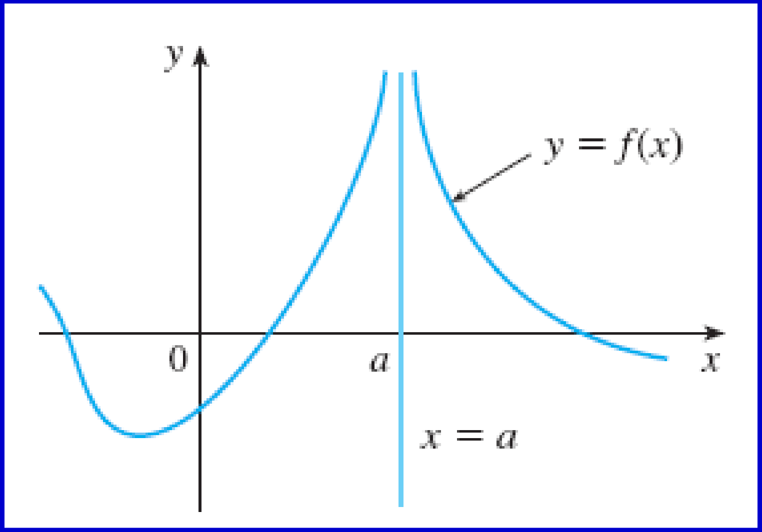
LIMITES INFINITOS

- Outra notação para: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- é: $\boxed{f(x) \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to a}$

  - Novamente, o símbolo ∞ não é um número.
  - A expressão $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ deve ser lida como:
    - ✓ "o limite de *f* (*x*), quando *x* tende a a, é infinito"
    - ✓ ou "$\boldsymbol{f(x)}$ torna-se infinita quando *x* tende a a"
    - ✓ ou ainda "$\boldsymbol{f(x)}$ cresce ilimitadamente quando *x* tende a a"

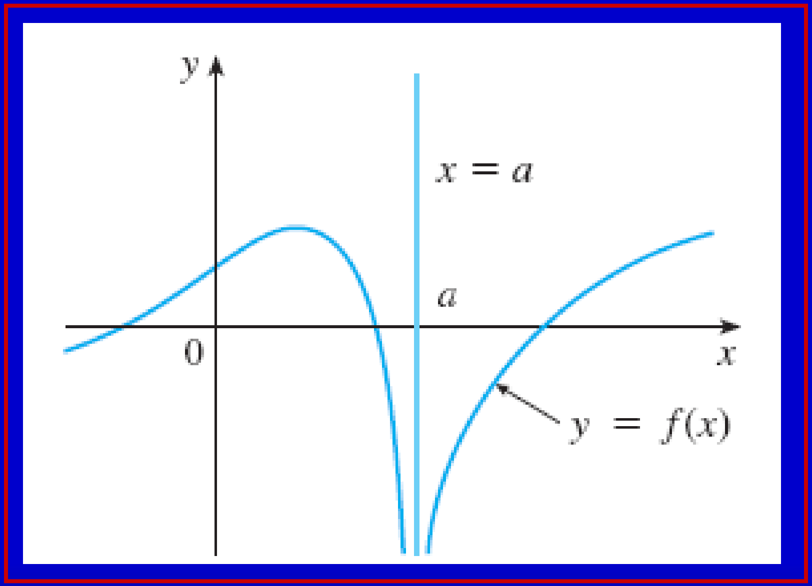
LIMITES INFINITOS

- Essa definição está ilustrada na Figura:



LIMITES INFINITOS

Um tipo análogo de limite, para funções que se tornam grandes em valor absoluto, porém negativas, quando x se aproxima de a, está ilustrado abaixo:



LIMITES INFINITOS

Definição

- Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tomarmos valores de x suficientemente próximos de a, mas não iguais a a.

LIMITES INFINITOS

- O símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: "o limite de $\boldsymbol{f(x)}$ é menos infinito quando *x* tende a a", ou "$\boldsymbol{f(x)}$ decresce ilimitadamente quando *x* tende a a".
  - Por exemplo, temos: $\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

LIMITES INFINITOS

- Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

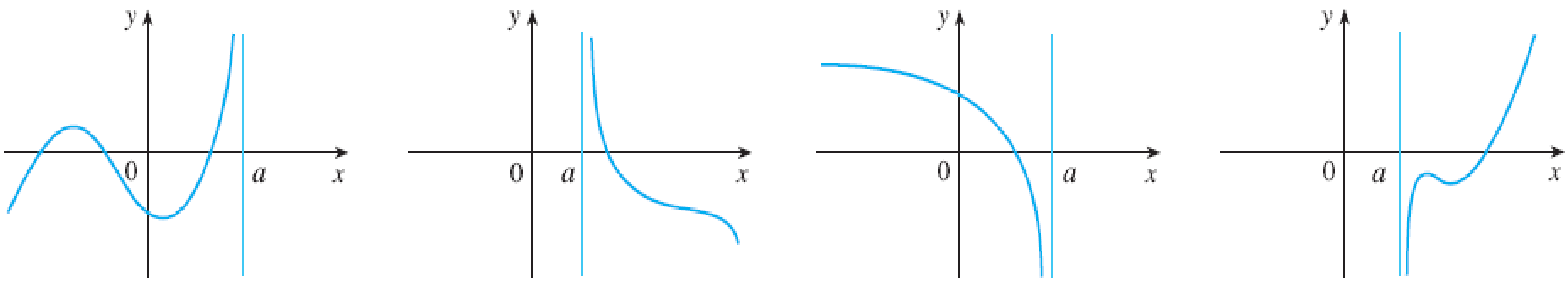
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Lembrando que ‘ $x \to a^-$ ’ significa considerar somente os valores de *x* menores que a

Ao passo que, ‘ $x \to a^+$ ’ significa considerar somente valores de $x > a$.

LIMITES INFINITOS

- Veja as ilustrações para os quatro casos na Figura:



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

LIMITES INFINITOS

Definição 6

- A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

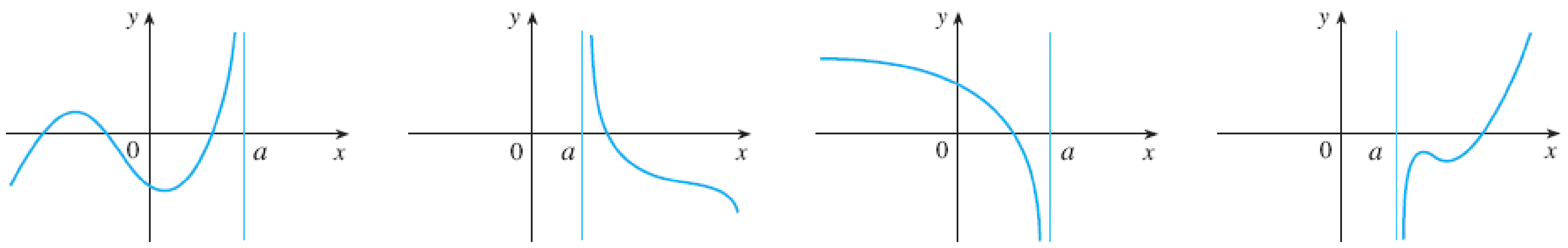
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

  - Por exemplo, o eixo *y* é uma assíntota vertical da curva $y = \frac{1}{x^2}$ pois $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$.

LIMITES INFINITOS

- Na Figura a reta $x = a$ é uma assíntota vertical em cada um dos quatro casos considerados.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Em geral, o conhecimento de assíntotas verticais é muito útil no esboço de gráficos.

LIMITES INFINITOS

Exemplo

- Encontre $\displaystyle \lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\displaystyle \lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

- Se *x* está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador *x* - 3 é um número positivo pequeno e 2*x* está próximo a 6. Portanto, o quociente 2*x*/(*x* 3) é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, temos:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

- Analogamente, se *x* está próximo a 3 mas é menor que 3, então *x* - 3 é um número negativo pequeno, mas 2*x* ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, 2*x*/(*x* 3) é um número *negativo* grande. Então:

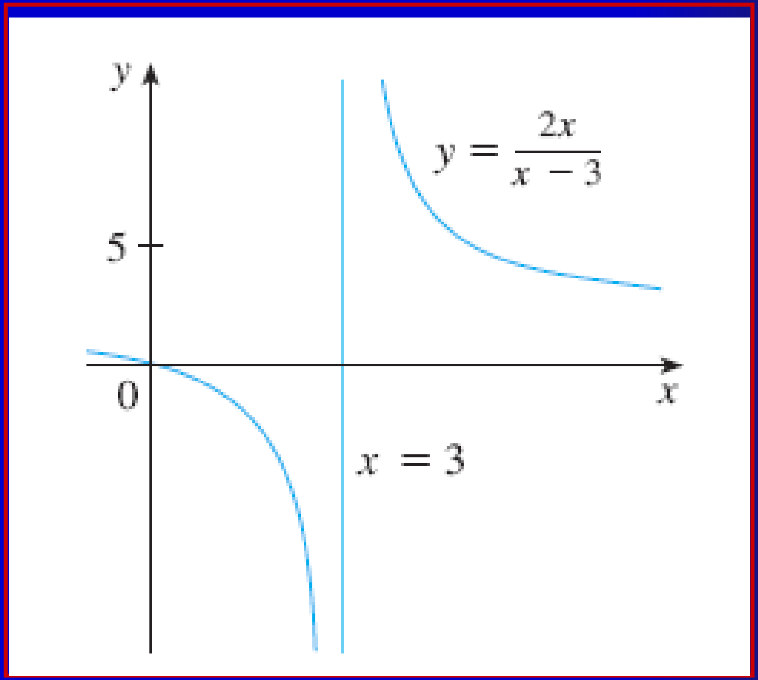
- $$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

LIMITES INFINITOS

Exemplo

Ao lado temos o gráfico da curva:

$$y = \frac{2x}{x-3}$$



A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

PROPRIEDADES DOS LIMITES

Seja *c* uma constante e suponha que existam os limites: $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$. Então:

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

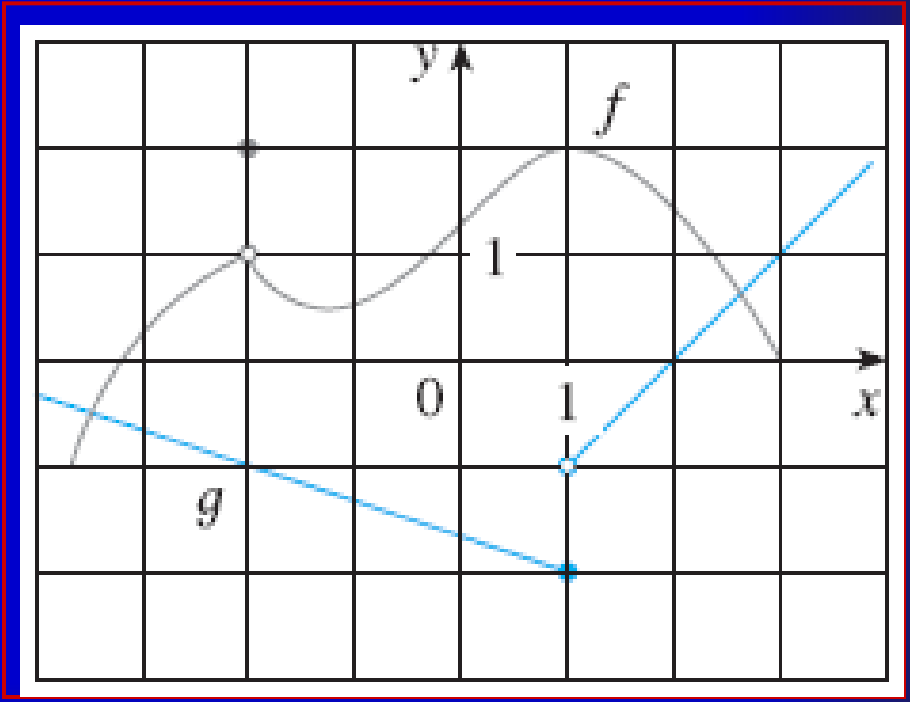
USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES **Exemplo**

- Use as Propriedades do Limite e os gráficos de *f* e g na Figura para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

a. $$\lim_{x\to -2}\left[f(x)+5g(x)\right]$$

b. $$\lim_{x\to 1}\left[f(x)g(x)\right]$$

c. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$$



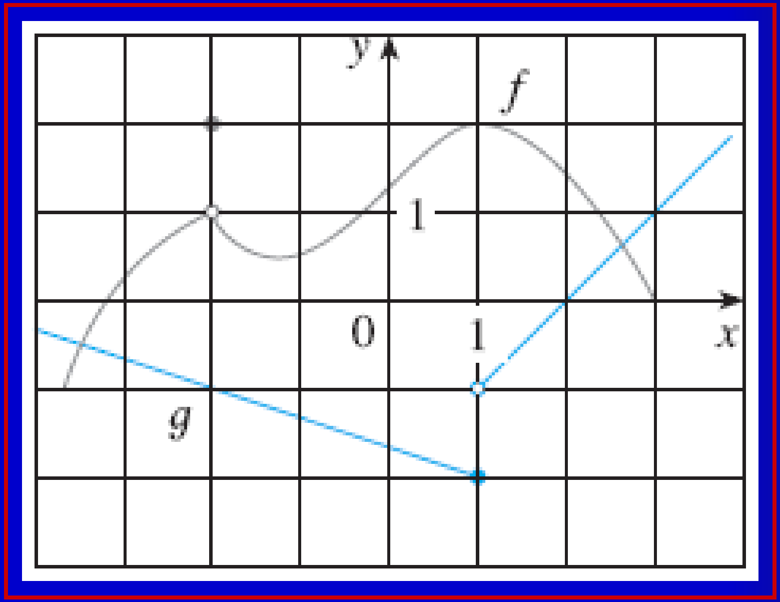
USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

(a) Dos gráficos de *f* e *g* vemos que

$\lim_{x \to -2} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to -2} g(x) = -1$.

- Portanto, temos:

$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$$
$$= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)]$$
$$= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} [g(x)]$$
$$= 1 + 5(-1) = -4$$



USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

- Mas $\lim_{x\to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e
- à direita são diferentes:
- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2$ $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$
- Assim, não podemos usar a Propriedade do Produto para o limite solicitado.

$\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 2\cdot(-2) = -4$ $\lim_{x\to 1^+} [f(x)g(x)] = 2\cdot(-1) = -2$

- Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo
- $\lim_{x\to 1} \left[f(x)g(x)\right]$ não existe.

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

Os gráficos mostram que $\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4$ e $\lim_{x \to 2} g(x) = 0$.

- Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Propriedade do Quociente.

- O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0.

PROPRIEDADE DA POTÊNCIA

- Usamos a Propriedade do Produto repetidamente com $f(x) = g(x)$, para obter a seguinte equação

$$6. \quad \lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

onde *n* é um inteiro positivo.

PROPRIEDADE DA POTÊNCIA

- Para aplicar essas seis Propriedades, vamos precisar usar dois limites especiais:
  - Esses limites são óbvios do ponto de vista intuitivo

$$\textbf{7.}\ \lim_{x \to a} c = c$$

$$\textbf{8.}\ \lim_{x \to a} x = a$$

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Se pusermos agora $f(x) = x$ nas Propriedades 6 e 8, vamos obter outro limite especial útil

$$\textbf{9.}\ \lim_{x \to a} x^n = a^n$$

onde n é um inteiro positivo.

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Um limite similar é válido para as raízes da forma a seguir

$$\mathbf{10.}\ \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

onde *n* é um inteiro positivo

- Se *n* for par, supomos que *a* > 0.

PROPRIEDADE DA RAIZ

- De forma mais geral, temos a seguinte Propriedade da Raiz

$$11.\ \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

onde *n* é um inteiro positivo.

  - Se *n* for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES Exemplo

- Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

a. $\lim\limits_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4)$

b. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

$$\lim_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4)$$

$$= \lim_{x \to 5}(2x^2) - \lim_{x \to 5} 3x + \lim_{x \to 5} 4 \quad \text{(Pelas Propriedades 1 e 2)}$$

$$= 2\lim_{x \to 5} x^2 - 3\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \quad \text{(Pela Propriedade 3)}$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \quad \text{(Pelas Propriedades 9, 8 e 7)}$$

$$= 39$$

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Começamos aplicando a Propriedade do Quociente, mas seu uso só ficará completamente justificado no último passo, quando virmos que os limites do numerador e do denominador existem e o do denominador não é 0.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)}$$

(Pela Propriedade 5)

$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x}$$

(Pelas Propriedades 1, 2 e 3)

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

(Pelas Propriedades 9, 8 e 7)

Observação

Se tomarmos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$.

- Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo x por 5.
- Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b).
- As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente.
- O uso similar das Propriedades do Limite demonstra que a substituição direta sempre funciona para essas funções.

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES Observação

- Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de *f*, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em* a, serão estudadas posteriormente. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES **Exemplo**

Encontre $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

- Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$.
- Não podemos encontrar o limite substituindo $x = 1$, pois $f(1)$ não está definida.
- Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente porque o limite do denominador é 0.
- De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas.

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

  - O numerador e o denominador têm um fator comum, *x* - 1.
  - Ao tomarmos o limite quando *x* tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim $x-1 \neq 0$.

USANDO AS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Portanto, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite, como segue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

- Observamos anterior que o limite de uma função quando *x* tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando-se o valor da função em a.

As funções com essa propriedade são chamadas *contínuas em a*.

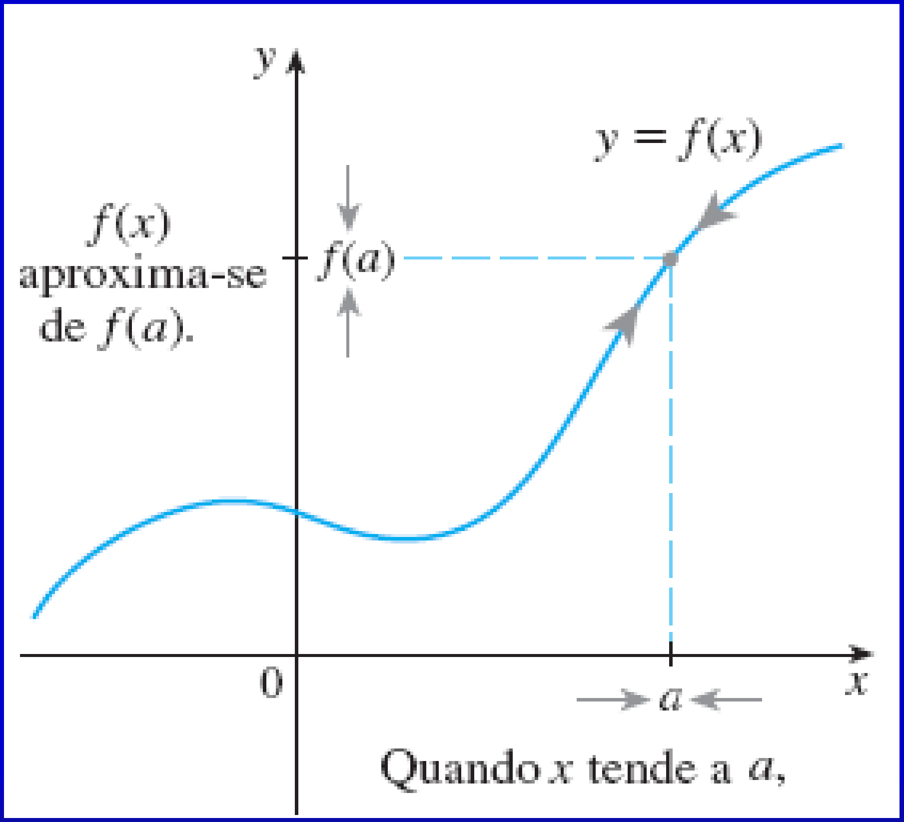
Definição

- Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.
- Uma função *f* é **contínua em um número** $\boldsymbol{a}$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

CONTINUIDADE

- A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tender a $f(a)$ quando x tender a a.



CONTINUIDADE

- Se *f* está definida próximo de a (em outras palavras, *f* está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que *f* é **descontínua em a**, ou que *f* tem uma **descontinuidade** em a, se *f* não é contínua em a.
- Os fenômenos físicos são geralmente contínuos.

CONTINUIDADE

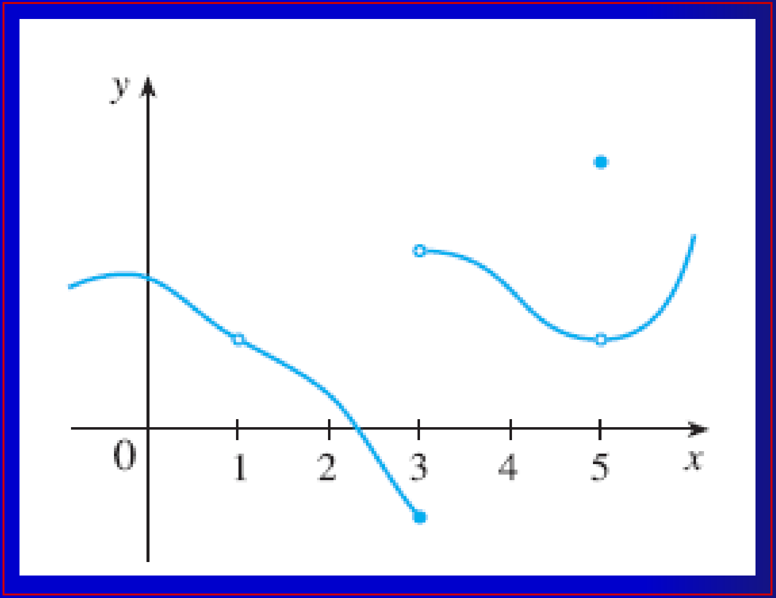
- Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica.

- Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se “quebra”.
    - O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

CONTINUIDADE

Exemplo

- A Figura mostra o gráfico de uma função *f*.
- Em quais números *f* é descontínua? Por quê?
- Parece haver uma descontinuidade quando *a* = 1, pois aí o gráfico tem um buraco.
  - A razão oficial para *f* ser descontínua em 1 é que *f* (1) não está definida.

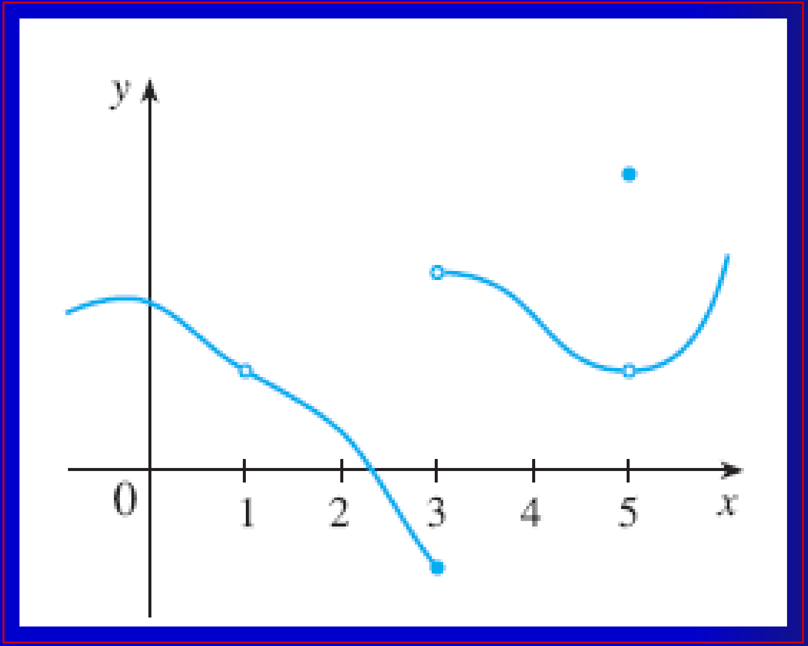


CONTINUIDADE

Exemplo

- O gráfico também tem uma quebra em a = 3, mas a razão para a Descontinuidade é $\lim_{x \to 3} f(x)$ diferente de f(3). Aqui, f (3) está definida, mas não existe (pois o limite esquerdo e o direito são diferentes).

- Logo f é descontínua em 3.



CONTINUIDADE

Exemplo

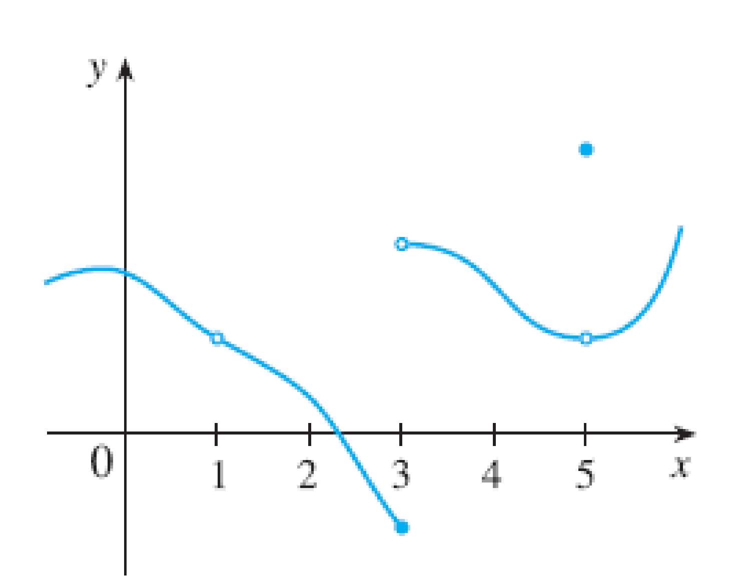
E sobre *a* 5?

Aqui, *f* (5) está definida e $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais). Mas:

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Logo *f* é descontínua

em 5.



Teorema 4

- Se *f* e g forem contínuas em a e se *c* for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. *f + g*
2. *f - g*
3. *cf*
4. *fg*
5. *f / g , se* $g(a) \neq 0$

CONTINUIDADE

- O conhecimento de quais funções são contínuas nos permite calcular muito rapidamente alguns limites, como no exemplo a seguir.

Exemplo

- Encontre

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

  - A função f(x) é racional.
  - Assim, f(x) é contínua em seu domínio:
  - Então,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

CONTINUIDADE

- Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:
    - Polinômio
    - Funções racionais
    - Funções raízes
    - Funções trigonométricas
    - Funções trigonométricas inversas
    - Funções exponenciais
    - Funções logarítmicas

Limites no Infinito

Assíntotas Horizontais

LIMITES E DERIVADAS

- Já estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais.

  - Lá tomávamos *x* tendendo a um número.

  - Como resultado, os valores de *y* ficavam arbitrariamente grandes (positivo ou negativo).

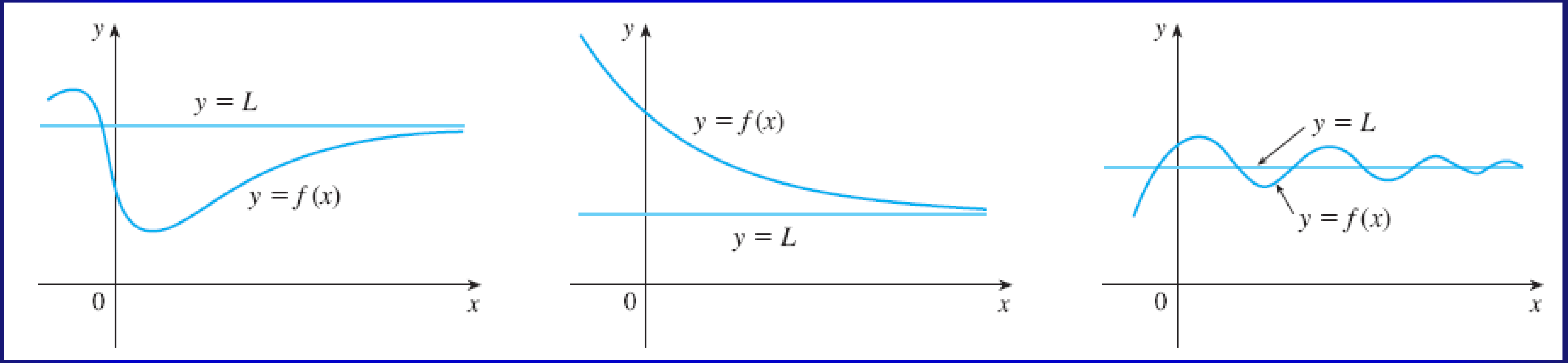
ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Definição

- Seja *f* uma função definida em algum intervalo (a, ∞) .
- Então, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
- significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de *L* tomando x suficientemente grande.

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

- As ilustrações geométricas da Definição estão nas Figuras.
  - Observe que existem muitas formas de o gráfico de *f* aproximar-se da reta *y* = *L* (chamada *assíntota horizontal*) quando fazemos *x* ir para a extremidade direita.



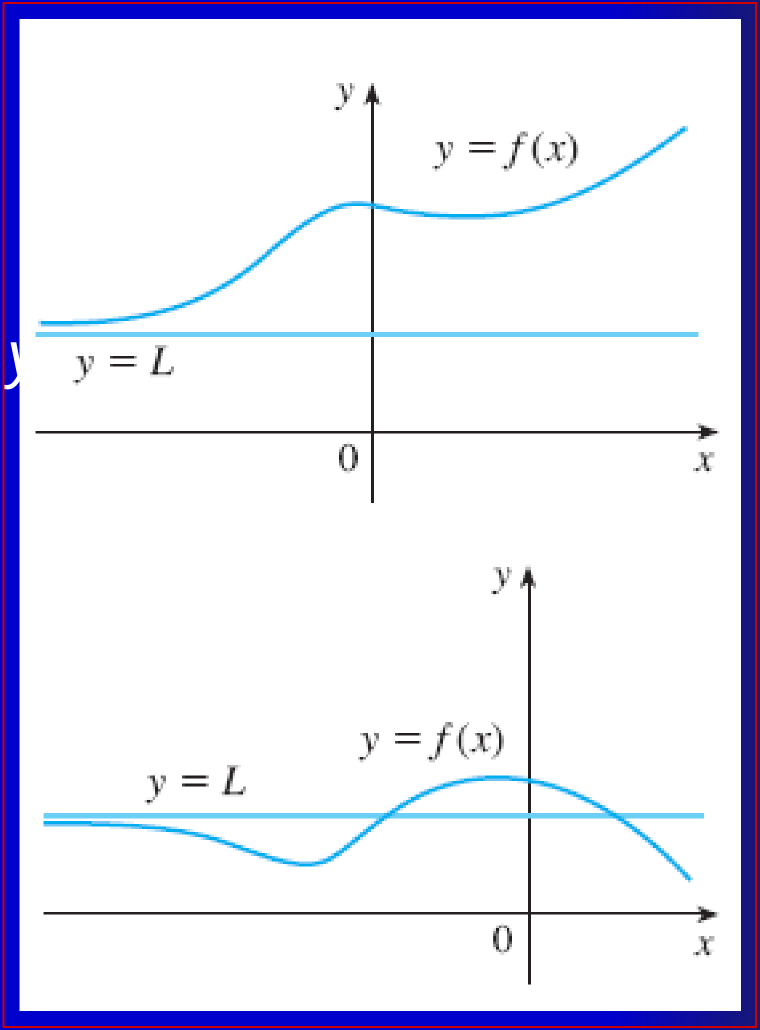
ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Definição

- Seja *f* uma função definida em algum intervalo (- ∞, a).
- Então $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
- significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de *L*, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

- A Definição está ilustrada na Figura.
  - Observe que o gráfico aproxima-se da reta y quando olhamos para a extremidade esquerda.



ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Definição

- A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $f(x)$, se:

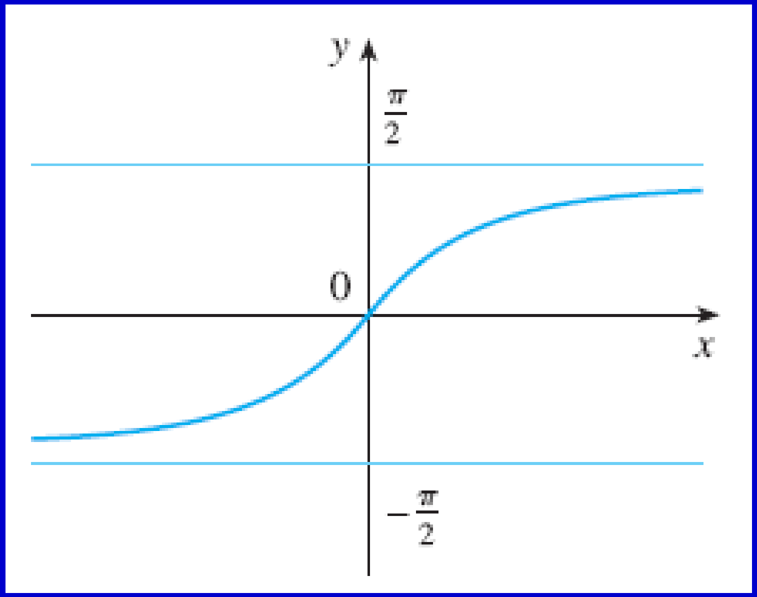
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

- Um exemplo de curva com duas assíntotas horizontais é $y = \text{tg}^{-1}x$.



ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Exemplo

- Encontre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$
  - Observe que quando *x* é grande, 1/*x* é pequeno.
  - Por exemplo:

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$$

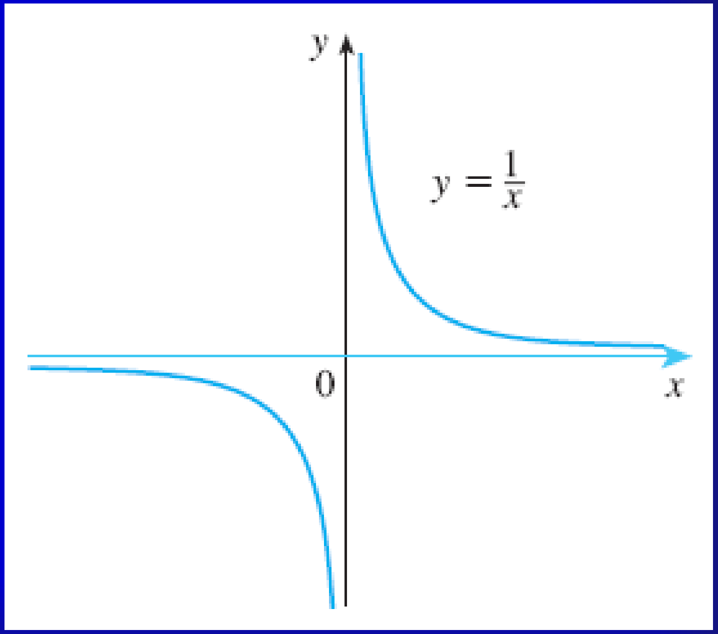
  - De fato, tomando *x* grande o bastante, podemos fazer 1/*x* tão próximo de 0 quanto quisermos.
  - Portanto, temos .

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS **Exemplo**

Um raciocínio análogo mostra que quando *x* é grande em valor absoluto (porém negativo), 1/*x* é pequeno em valor absoluto (mas negativo);

Logo temos também $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



segue que a reta *y* = 0 (o eixo *x*) é uma assíntota horizontal da curva *y* = 1/*x*.

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Exemplo

- Calcule $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

  e indique quais propriedades de limites foram usadas em cada etapa.

  - Quando *x* cresce, ambos, o numerador e o denominador, também crescem
  - Logo não é nada óbvio o que ocorre com a razão entre eles.
  - Para eliminar essa indeterminação, precisaremos antes manipular algebricamente a expressão.

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Exemplo

- Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador.
  - Podemos assumir que $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de x.
  - Nesse caso a maior potência de x no denominador é x^2. Então temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Exemplo

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

(Pela Propriedade dos Limites 5)

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}$$

(Por Propriedades 1, 2 e 3)

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$

$$= \frac{3}{5}$$

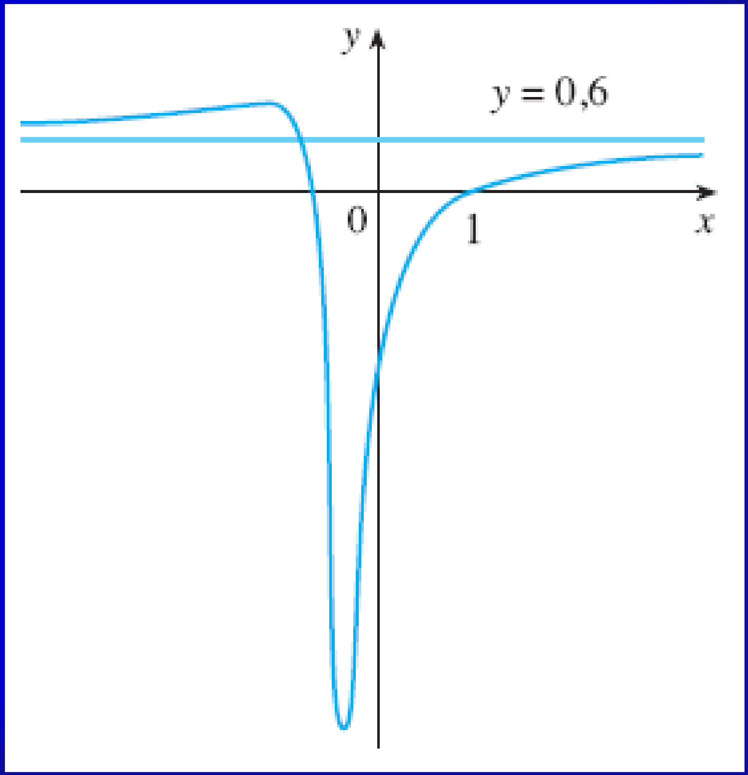
(Por Propriedade 7 e pelo Teorema 5)

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS **Exemplo**

Um cálculo análogo mostra que o limite quando $x \to -\infty$ também é $\frac{3}{5}$.

A Figura ilustra o resultado destes cálculos mostrando como o gráfico da função racional dada aproxima-se da assíntota horizontal

$$y = \frac{3}{5}$$



ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

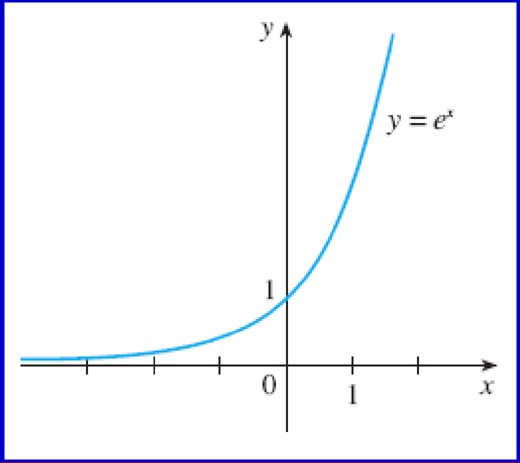
Definição

O gráfico da função exponencial natural $y = e^x$ tem a reta $y = 0$ (o eixo x) como uma assíntota horizontal.

Observe que os valores de e^x tendem a 0 muito rapidamente.

De fato, da Figura e da tabela dos valores correspondentes vemos que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

- Observe que os valores de e^x tendem a 0 muito rapidamente.



x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Exemplo

- Calcule $\boxed{\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x}$.

  - Quando *x* cresce, os valores de sen *x* oscilam entre -1 e 1 um número infinito de vezes.
  - Logo, eles não tendem a qualquer número definido.
  - Portanto, $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ não existe.

LIMITES INFINITOS NO INFINITO

- A notação $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ é usada para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quanto x se torna grande.
  - Significados análogos são dados aos seguintes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Chamamos de **indeterminações** as formas abaixo, se aplicando diretamente os teoremas sobre limites, chegarmos a um dos símbolos:

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$

$$0 * \infty$$

$$0^0$$

- Considere o limite:
- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

E a tabela ao lado que mostra os cálculos feitos numa calculadora.

Note que parece que podemos afirmar (e de fato é verdade) que:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
2	2,250000
5	2,488320
10	2,593742
20	2,653298
50	2,691588
100	2,704814
200	2,711517
500	2,715569
1.000	2,716924
5.000	2,718010
50.000	2,718255
100.000	2,718268
1.000.000	2,718280

Uma forma equivalente de escrever o limite é:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

O matemático suiço Leonardo Euler (1707–1783) parece ter sido o primeiro a perceber a importância dessa função. Além disso, ele demonstrou que o limite dessa função para x tendendo a infinito era um número irracional compreendido entre 2 e 3, simbolizado por e (chamado número de Euler).

$$x \to \infty \;\Rightarrow \frac{1}{x} \to 0.\ Ou\ seja\colon x \to 0 \;\Rightarrow \frac{1}{x} \to \infty$$

Exemplo: Juros capitalizados continuamente:

Consideremos um capital de R$ 1.000,00 aplicado a juros compostos a taxa de 12% ao ano, pelo prazo de 2 anos.

Se os juros forem capitalizados anualmente, o montante será

$$M = 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{1}\right)^2 = 1.254{,}40$$

Se os juros forem capitalizados semestralmente a uma taxa semestral proporcional a 12% ao ano, a taxa semestral será de $\frac{12\%}{2} = 6\%$ ao semestre, e o montante será:

$$M = 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^4 = 1262{,}48.$$

Se os juros forem capitalizados mensalmente a uma taxa mensal proporcional a 12% ao ano, taxa mensal será $\frac{12\%}{12} = 1\%$ ao mês e o montante será: $M = 1.000\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{24} = 1269,73$

Se os juros forem capitalizados diariamente a uma taxa diária proporcional a 12% ao ano, (considerando um ano de 360 dias), será de $\frac{12\%}{360}$ ao dia, e o montante será:

$$M = 1.000\left(1 + \frac{0,12}{360}\right)^{720} = 1271.20$$

Poderíamos pensar em capitalização por hora, por minuto, por segundo etc. Cada vez que diminui o prazo de capitalização, o número de capitalizações (*k*) em um ano aumenta, de modo que a taxa proporcional a 12% ao ano, nesse período de capitalização, é igual a $\frac{12\%}{k}$ e o prazo de aplicação de 2 anos expresso de acordo com o prazo de capitalização vale 2*k*. Conseqüentemente, o montante é dado por:

$$M = 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{k}\right)^{2k}$$

Dizemos que o capital é *capitalizado continuamente*, quando o montante *M* é dado por:

$$M = \lim_{k \to \infty} 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{k}\right)^{2k}$$

Para calcular o limite, fazemos $\frac{0,12}{k} = \frac{1}{x}$ e então $x = \frac{k}{0,12}$ e $k = 0,12x$. Note que quando *k* tende a infinito, *x* também tende a infinito, de modo que o limite pode ser expresso por:

$$M = \lim_{x\to\infty} 1.000\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2(0,12)x} = 1.000 * \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{0,24x}$$

$$= 1.000\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{e}\right)^{0,24} = 1.000e^{0,24} \approx 1271,25$$

Em geral, se um capital *C* é capitalizado continuamente a uma taxa proporcional a uma taxa anual i, pelo prazo de n anos, o montante é dado por:

$$\boxed{M = Ce^{in}}$$

Exercício: Juros capitalizados continuamente:

Considere um capital de R$ 15.000,00 aplicado a juros compostos a taxa de 9% ao ano, pelo prazo de 20 anos.

a) Determine o montante ao final dos 20 anos

b) Quanto tempo demorará para triplicar o investimento?

Respostas:

a) R$ 90.744,71

$b)\ 12{,}21\ anos$

$a)\quad M = 15000 * e^{1,8}$ =90.744,71

$b)\quad 15000 * e^{0,09n} = 45000,$

$$e^{0,09n} = \frac{45000}{15000} = 3$$

$e^{0,09n} = 3,$

$\ln(e^{0,09n}) = ln3$ mas : $\ln(e^{0,09n}) = 0,09n$

$0,09n = ln3,$

$$n = \frac{ln3}{0,09} \approx 12,21\ anos$$

Exemplo 1: Um fabricante estima que, se produzir e vender x centenas de unidades de certo produto, terá um lucro dado por:

$$LM(x) = \frac{4x - \sqrt{x}}{x} = 4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

reais por cem unidades. Para determinar qual é o lucro médio para uma produção muito pequena, calculamos o limite de $LM(x)$ quando x tende a 0:

$$\lim_{x \to 0} LM(x) = \lim_{x \to 0} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$$

Interpretamos esse limite como significando que, quanto menos unidades são produzidas, maior é o prejuízo médio. Isso faz sentido, pois, quando apenas umas poucas unidades são produzidas, os custos fixos são muito maiores que a receita das vendas.

$$\frac{4x-\sqrt{x}}{x} = \frac{4x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{4}{1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = 4 - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \qquad x > 0 \; então\text{:} \;\; x = \sqrt{x}\,\sqrt{x}$$

Exemplo 2: Estudos mostram que, daqui a *t* anos, a população de certo país será *p* = 0,2*t* + 1.500 milhares de pessoas e a renda bruta do país será *E* milhões de dólares, em que

$$E(t) = \sqrt{9t^2 + 0{,}5t + 179}$$

a) Expresse a renda *per capita* do país $P = \frac{E}{p}$ em função do tempo *t*.

b) O que acontecerá com a renda *per capita* a longo prazo (ou seja, para $t \to \infty$) ?

Solução: Sendo: $p = 0{,}2t + 1500$ e $E(t) = \sqrt{9t^2 + 0{,}5t + 179}$

a) $P(t) = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{9t^2+0{,}5t+179}}{0{,}2t+1500}$

b) $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{9t^2+0{,}5t+179}}{0{,}2t+1500} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2\left(9+\frac{0{,}5t}{t^2}+\frac{179}{t^2}\right)}}{t\left(0{,}2+\frac{1500}{t}\right)}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\left(\sqrt{\left(9+\frac{0{,}5}{t}+\frac{179}{t^2}\right)}\right)}{t\left(0{,}2+\frac{1500}{t}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\sqrt{\left(9+\frac{0{,}5}{t}+\frac{179}{t^2}\right)}\right)}{\left(0{,}2+\frac{1500}{t}\right)} =$$

$\frac{\sqrt{9+0+0}}{0{,}2+0} = \frac{3}{0{,}2} = 15$ mil dólares per capta.

Exemplo 3: O gerente de uma empresa observa que, *t* meses após começar a fabricação de um novo produto, serão fabricadas *P* milhares de unidades, em que:

$$P(t) = \frac{6t^2 + 5t}{(t+1)^2}$$

O que acontecerá com a produção a longo prazo (ou seja, para $t \longrightarrow \infty$)?

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{6t^2 + 5t}{t^2 + 2t + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{t^2\left(6 + \frac{5t}{t^2}\right)}{t^2\left(1 + \frac{2t}{t^2} + \frac{1}{t^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(6+\frac{5}{t}\right)}{\left(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{6+0}{1+0+0} = 6$$ unidades serão produzidas.

Exemplo 4: O organizador de um evento esportivo estima que, se começar a anunciar o evento com x dias de antecedência, a receita obtida será $\mathrm{R}(x)$ mil reais, em que:

$$R(x) = 400 + 120x - x^2$$

O custo para anunciar o evento durante x dias é $C(x)$ mil reais, em que:

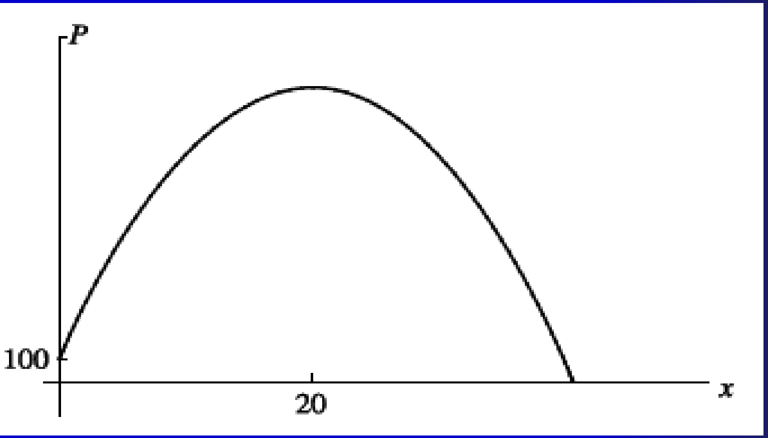
$$C(x) = 2x^2 + 300$$

a) Determine a função lucro $L(x) = R(x) - C(x)$ e plote a curva associada.

b) Com que antecedência o evento deve ser anunciado para que o lucro seja máximo? Qual é o lucro máximo?

$a)\ L(x) = R(x) - C(x) = 400 + 120x - x^2 - (2x^2 + 300)$

$L(x) = -3x^2 + 120x + 100$



b) O lucro máximo ocorre quando $x = 20$ (pelo gráfico) e esse lucro será:

$\lim\limits_{x \to 20} L(x) = \lim\limits_{x \to 20} (-3x^2 + 120x + 100) = 1300$ reais.

Exemplo 5: O departamento de RH de uma fábrica de eletrodomésticos observou que um empregado novo é capaz de montar *n* torradeiras por hora após *t* semanas de treinamento, em que:

$$n(t) = 70 - \frac{150}{t+4}$$

Os empregados recebem 20 centavos por torradeira montada.

a) Escreva uma expressão para a quantia $A(t)$ que um empregado com *t* semanas de experiência recebe por hora.

b) Quanto recebe por hora um empregado com muito tempo de experiência (ou seja, quando $t \to \infty$)?

a) $A(t) = 0{,}20\left(70 - \frac{150}{t+4}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty} A(t) = \lim_{x\to\infty} 0{,}20\left(70 - \frac{150}{t+4}\right) = 0{,}20 * \lim_{x\to\infty}\left(70 - \frac{150}{t+4}\right) =$

$0{,}20 * (70\ - 0) = 14$

Um funcionário com muita experiência receberá R$ 14,00 por hora.

Exemplo 6: Um planejador urbano, modela a população *P*(*t*) de certo bairro daqui a *t* anos (em milhares de moradores) por meio da função:

$$P(t) = \frac{40t}{t^2 + 10} - \frac{50}{t+1} + 70$$

a) Qual é a população atual do bairro?

b) Qual é variação da população durante o terceiro ano? A população está aumentando ou diminuindo durante esse período?

c) O que acontece com a população a longo prazo (isto é, quando $t \to \infty$)?

a) $P(t) = \frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70$

$P(0) = \frac{40*0}{0+10} - \frac{50}{0+1} + 70 = -50 + 70 = 20$ (população atual: 20 mil)

b) $P(2) = \frac{40*2}{2^2+10} - \frac{50}{2+1} + 70 \approx 59{,}05$

$$P(3) = \frac{40 * 3}{3^2 + 10} - \frac{50}{3 + 1} + 70 \approx 63{,}86$$

$63{,}86 - 59{,}05 = 4{,}81$

Ou seja: a população está aumentou 4,81 mil no 3º ano.

c) O que acontece com a população a longo prazo (isto é, quando $t \to \infty$)?

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{40t}{t^2\left(1+\frac{10}{t^2}\right)} - \frac{50}{t+1} + 70\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{40}{t\left(1+\frac{10}{t^2}\right)} - \frac{50}{t+1} + 70\right) = 0 - 0 + 70 = 70$$

A longo prazo a população se aproxima de 70 mil moradores.

Exemplo 7: A concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas após uma injeção é $C(t)$ miligramas por mililitro, em que:

$$C(t) = \frac{0,4}{t^{1,2} + 1} + 0,013$$

a) Qual é a concentração do medicamento imediatamente após a injeção (ou seja, para $t = 0$)?

b) Qual é a variação da concentração do medicamento durante a 5ª hora? A concentração aumenta ou diminui durante esse período?

c) Qual é a concentração residual do medicamento, ou seja, a concentração "a longo prazo" (quando $t \to \infty$)?

a) $C(t) = \frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013$

$C(0) = \frac{0,4}{0+1} + 0,013 = 0,413$ mg / ml

b) $C(5) - C(4) = \frac{0,4}{5^{1,2}+1} + 0,013 - \left(\frac{0,4}{4^{1,2}+1} + 0,013\right) \approx -0,0131$

Ou seja, a variação da concentração do medicamento decresce de 0,0131 mg /ml ao longo na 5ª hora

c) $\lim_{x \to \infty} C(t) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013\right) = 0,013$ mg /ml é a

concentração residual a longo prazo.

Exemplo 8: Para estudar o aprendizado em animais, um estudante de psicologia realizou um experimento no qual um rato teve de percorrer várias vezes o mesmo labirinto. Suponha que o tempo que o rato levou para atravessar o labirinto na enésima tentativa tenha sido em minutos da ordem de:

$$T(n) = \frac{5n + 17}{n}$$

O que acontece com esse tempo quando o número *n* de tentativas aumenta indefinidamente? Interprete o resultado

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5n + 17}{n} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{n(5 + \frac{17}{n}}{n} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(5 + \frac{17}{n}}{1} \right) = 5 \;\; minutos$$

O limite nos diz que, à medida que mais ensaios são realizados, o tempo de travessia do rato se aproxima de um tempo mínimo de 5 minutos.

Exemplo 9: A gerente de uma fábrica, estima que, se $x\%$ da capacidade da fábrica estiver sendo utilizada, o custo total de operação será *C* centenas de reais, em que:

$$C(x) = \frac{5(x^2 - 49x - 50)}{x^2 - 51x + 50}$$

A empresa adota uma política de manutenção rotativa que procura manter a fábrica operando o tempo todo com aproximadamente 50% da capacidade máxima. Que custo a gerente deve esperar quando a fábrica estiver operando com essa capacidade ideal?

$$\lim_{x\to 50} C(x) = \lim_{x\to 50} \frac{5(x^2-49x-50)}{x^2-51x+50} = \frac{0}{0}$$

Precisamos fatorar os polinômios.

$$\lim_{x\to 50} \frac{5(x+1)(x-50)}{(x-1)(x-50)} = \lim_{x\to 50} \frac{5(x+1)}{(x-1)} = \frac{5*51}{49} \approx 5{,}2$$

O custo de operação será $R\$$ 520

Exemplo 10: Em algumas espécies de animais, a ingestão de alimentos é afetada pelo grau de vigilância que o animal precisa manter enquanto está comendo. Em outras palavras, é difícil se alimentar adequadamente se você tem de estar em guarda o tempo todo para não ser comido por um predador. Em um modelo proposto recentemente, se o animal se alimenta de plantas que permitem uma mordida de tamanho *S*, a ingestão de alimentos, $I(S)$, é dada por uma função da forma:

$$I(S) = \frac{aS}{S+c} \;, \qquad onde\;\; a \; e \; c \; são \; constantes \; positivas$$

O que acontece com a ingestão $I(S)$ se o tamanho S da mordida aumenta indefinidamente? Interprete o resultado.

$$\lim_{S\to\infty} I(S) = \lim_{S\to\infty} \frac{aS}{S+c} = \lim_{S\to\infty} \frac{aS}{S\left(1+\frac{c}{S}\right)} =$$

$$\lim_{S\to\infty} \frac{a}{1+\frac{c}{S}} = a$$

À medida que o tamanho da mordida aumenta indefinidamente, a ingestão se aproxima de um limite a. Isso significa que o animal tem um limite de quanto pode consumir, não importa o tamanho de suas mordidas.

Calce os limites:

a) $\lim_{x\to 1}(5x^2 - 3x - 4)$ resposta: -2

b) $\lim_{x\to 0}(x^5 + 3x^2 + 1)$ resposta: 1

c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(1 - 8x^3)$ resposta: 2

d) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ resposta: - 2

e) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$ resposta: -2

f) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^4-1}{x-1}\right)$ resposta: -∞

g) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right)$ resposta: +∞

Resolução

e) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$

$$f)\ \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^4-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right) = -\infty$$

$$g)\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right) = \infty$$

Calcule, sabendo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 5, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x\to a} g(x) = -2 \; e \; \lim_{x\to\infty} g(x) = 4$$

a) $\lim_{x\to a}[2f(x) - 3g(x)]$ resposta: 16

b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ resposta: -10

c) $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x) + g(x)}$ resposta: $\sqrt{3}$

d) $\lim_{x\to a} f(x)\;[g(x) - 3]$ resposta: -25

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{2f(x)+g(x)}{x+f(x)}$ resposta: 0

f) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{g(x)}$ resposta: 2