Primitivas

Texto baseado nos livros:

Cálculo - v1 - James Stewart (Editora Cengage Learning)

Introdução ao Cálculo – Pedro Morettin et al. (Editora Saraiva)

Cálculo – v1 – Laurence D. Hoffmann et al. (Editora LTC)

Motivação

Um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante.

Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante um certo período.

Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento futuro.

PRIMITIVAS

Em cada caso, o problema é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f.

Se a função F existir, ela é chamada *primitiva* de f.

Definição: Uma função F é denominada uma **primitiva** de f em um intervalo I se:

$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \text{ em } I.}$$

PRIMITIVAS

Por exemplo, seja $f(x) = x^2$.

Não é difícil descobrir uma primitiva de f se tivermos em mente a Regra da Potência.

De fato, se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, então $F'(x) = x^2 = f(x)$.

Mas a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também satisfaz $G'(x) = x^2$.

Consequentemente, F e G são primitivas de f.

PRIMITIVAS

Na verdade, qualquer função da forma:

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

em que C é uma constante, é uma primitiva de f.

Então, a questão que se levanta é: existem outras?

PRIMITIVAS

Teorema 1

Se F for uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é:

$$F(x) + C,$$

em que C é uma constante arbitrária.

PRIMITIVAS

Voltando à função $f(x) = x^2$, vemos que a primitiva geral de f é:

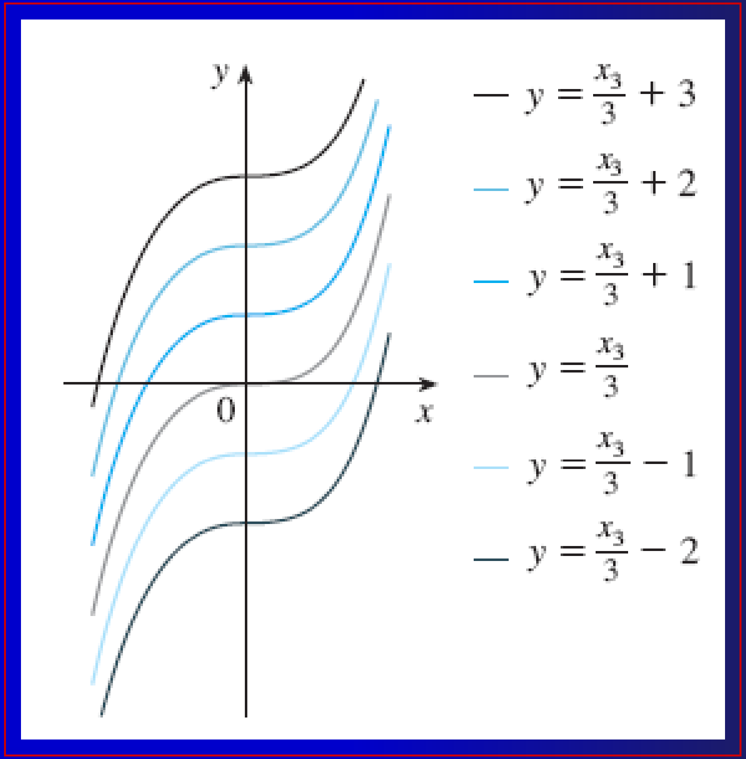
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

em que C é uma constante arbitrária.

FAMÍLIA DE FUNÇÕES

Atribuindo valores específicos para a constante *C* obtemos uma família de funções cujos gráficos são translações verticais uns dos outros.

- Isto faz sentido, pois cada curva deve ter a mesma inclinação em qualquer valor dado de *x*.



PRIMITIVAS

Exemplo 1

Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções:

$$a)\ f(x) = cosx$$

$$b)\ f(x) = \frac{1}{x}$$

$$c)\ f(x) = x^n, \qquad n \neq -1$$

PRIMITIVAS

Exemplo 1 a

Se $F(x) = senx$, então $F'(x) = cosx$.

Logo uma primitiva de $cosx$ é o $senx$.

Pelo Teorema 1, a primitiva mais geral é:

$$G(x) = senx + C$$

PRIMITIVAS

Exemplo 1 b

Lembre-se que:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

- Logo, no intervalo (0, ∞), a primitiva geral de $\frac{1}{x}$ é
- $F(x) = ln|x| + C$

PRIMITIVAS

Exemplo 1 c

Usamos a Regra da Potência para descobrir uma primitiva de x^n

De fato, se $n \neq -1$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{(n+1)x^n}{n+1}=x^n$$

PRIMITIVAS

Exemplo 1 c

Assim, a primitiva geral de $f(x) = x^n$, é:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Isso é válido para todo $n \geq 0$ uma vez que $f(x) = x^n$ está definida em um intervalo.

Se n for negativo (mas $n \neq -1$), é válido em qualquer intervalo que não contenha 0.

PRIMITIVAS - FÓRMULA

Tabela

Na Tabela listamos algumas primitivas particulares.

Função	Primitiva particular	Função	Primitiva particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\text{sen}\, x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\text{tg}\, x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \,\text{tg}\, x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\text{tg}^{-1} x$
$\cos x$	$\text{sen}\, x$		

PRIMITIVAS - FÓRMULA

Cada fórmula na tabela é verdadeira, pois a derivada da função na coluna direita aparece na coluna esquerda.

Em particular, a primeira fórmula diz que a primitiva de uma constante vezes uma função é a constante vezes a primitiva da função.

A segunda fórmula afirma que a primitiva de uma soma é a soma das primitivas.

PRIMITIVAS - FÓRMULA

Exemplo 2

Encontre todas as funções *g* de tais que:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

PRIMITIVAS - FÓRMULA

Exemplo 2

Queremos achar uma primitiva de:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim, queremos descobrir a primitiva de:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

PRIMITIVAS - FÓRMULA

Exemplo 2

Usando as fórmulas da Tabela junto com o Teorema 1 obtemos:

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -4cosx + \frac{2}{5}x^5 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4cox + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

Calcule as primitivas:

1. $f(x) = x - 4x^3 + \sqrt{x}$

2. $f(x) = \frac{2}{x} - 5e^x + 4$

3. $f(x) = 3secxtgx - 3\sec^2(x) + 1$

4. $f(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$

Resolução:

$$1.\ f(x) = x - 4x^3 + \sqrt{x} = x - 4x^3 + x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$2.\ f(x) = \frac{2}{x} - 5e^x + 4$$

$$F(x) = 2lnx - 5e^x + 4x + C\ , \qquad C \in \mathbb{R}$$

3. $f(x) = 3secxtgx - 3\sec^2(x) + 1$

$F(x) = 3secx - 3tgx + x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$

4. $f(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$

$$F(x) = 2arctgx - 3arcsenx - \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

PS. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$