



Объектно-ориентированное программирование

Петрусович Денис Андреевич

Доцент кафедры Проблем управления

petrusevich@mirea.ru



Тема 8. Гамильтонов цикл

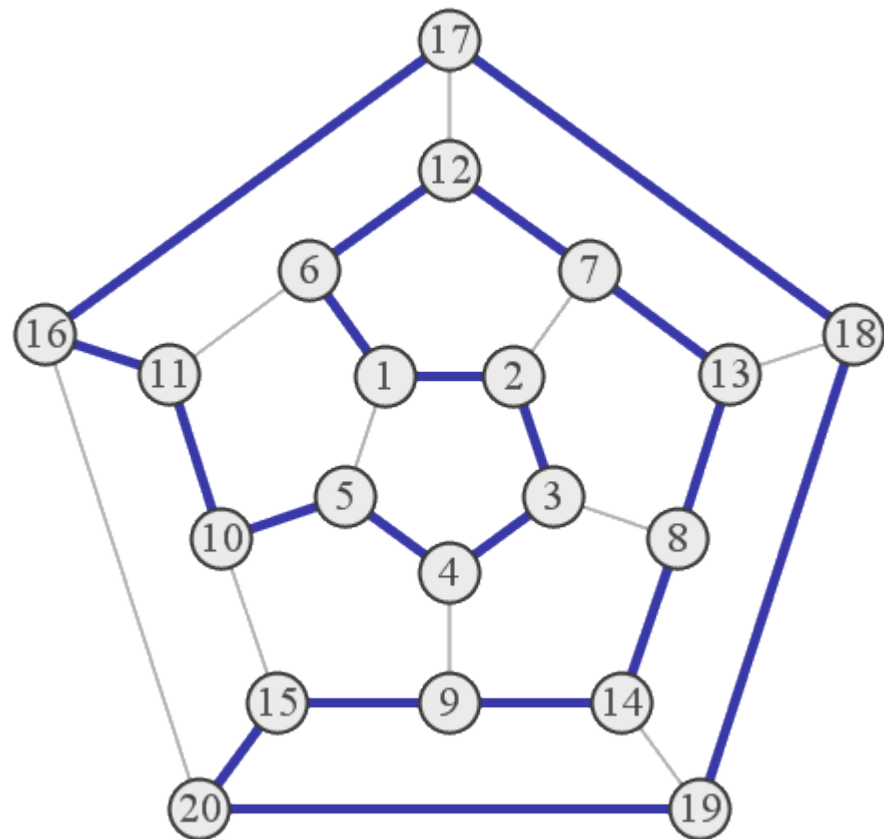
Гамильтонов цикл содержит все вершины графа один раз. Начинается и заканчивается на одной и той же вершине (аналогично можно рассматривать эйлеров цикл, граф и т.д.)

Гамильтонов путь содержит все вершины графа один раз, но не замыкается

Перебор всех последовательностей вершин =
числу перестановок $1 \dots n$

Перебор всех путей с помощью алгоритма в глубину
не уменьшает сложность на порядок

Сложность поиска цикла – $O(n!)$



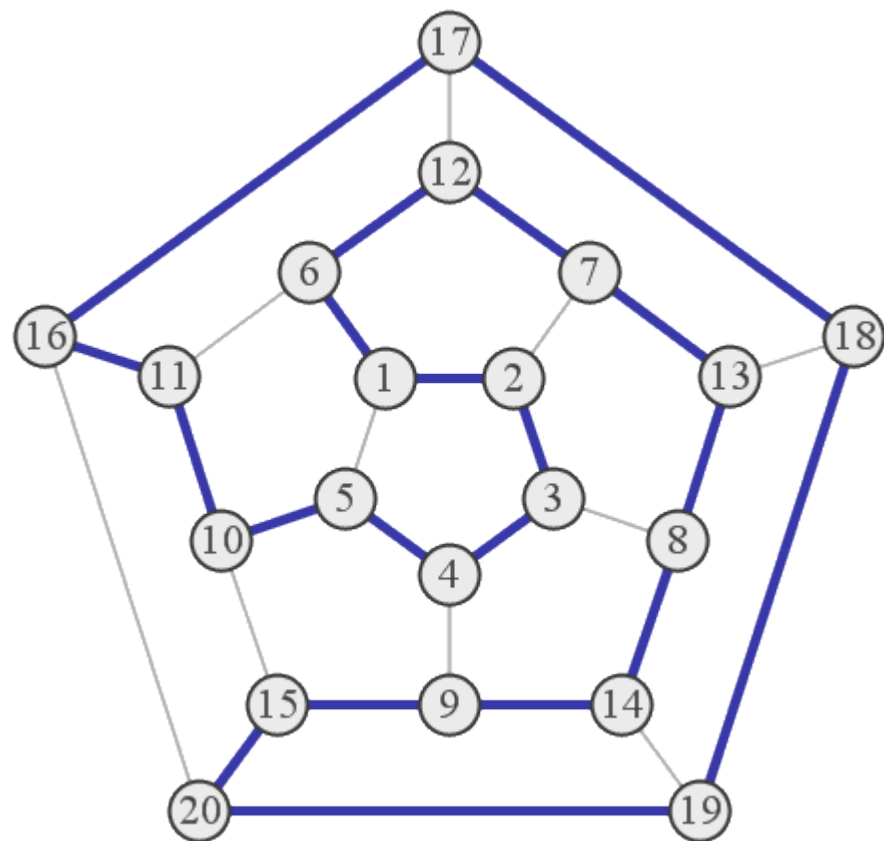


Тема 8. Гамильтонов цикл

Близкие задачи

Задача коммивояжёра: поиск цикла минимальной стоимости

Задача о 7 мостах Кёнигсберга





Тема 8. Гамильтонов цикл

Необходимого и достаточного условия существования цикла нет

Достаточные условия: Оре, Дирака, Бонди-Хватала, Поша

Условие Оре: пусть $V > 2$ — количество вершин в данном графе. Если для любой пары несмежных вершин x, y выполнено неравенство

$$\deg x + \deg y \geq V,$$

то данный граф — гамильтонов

(сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше общего числа вершин в графе)



Тема 8. Гамильтонов цикл

Достаточные условия: условие Дирака

Условие Дирака: пусть V — число вершин в данном графе и $V > 3$.

Если степень каждой вершины не меньше, чем $V/2$, то данный граф — гамильтонов.

Для всех вершин x : $\deg x \geq V/2$,

то данный граф — гамильтонов

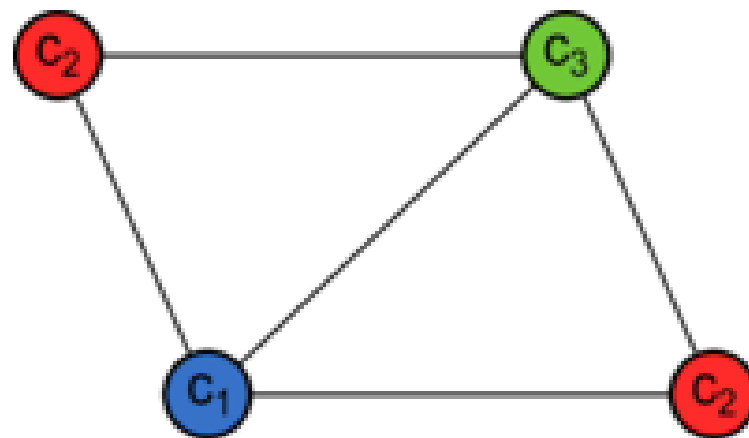


Тема 8. Раскраска графа

Закрасить вершины графа так, чтобы ни одна пара смежных вершин не имела одинаковый цвет

Сколько красок надо?

Задача встречается при раскраске карт
(соседние области или государства должны получить различные цвета)



Определение хроматического числа (min числа красок) в общем случае не разрешима за полиномиальное время

Двудольный граф: две краски

Полный граф из V вершин: V красок

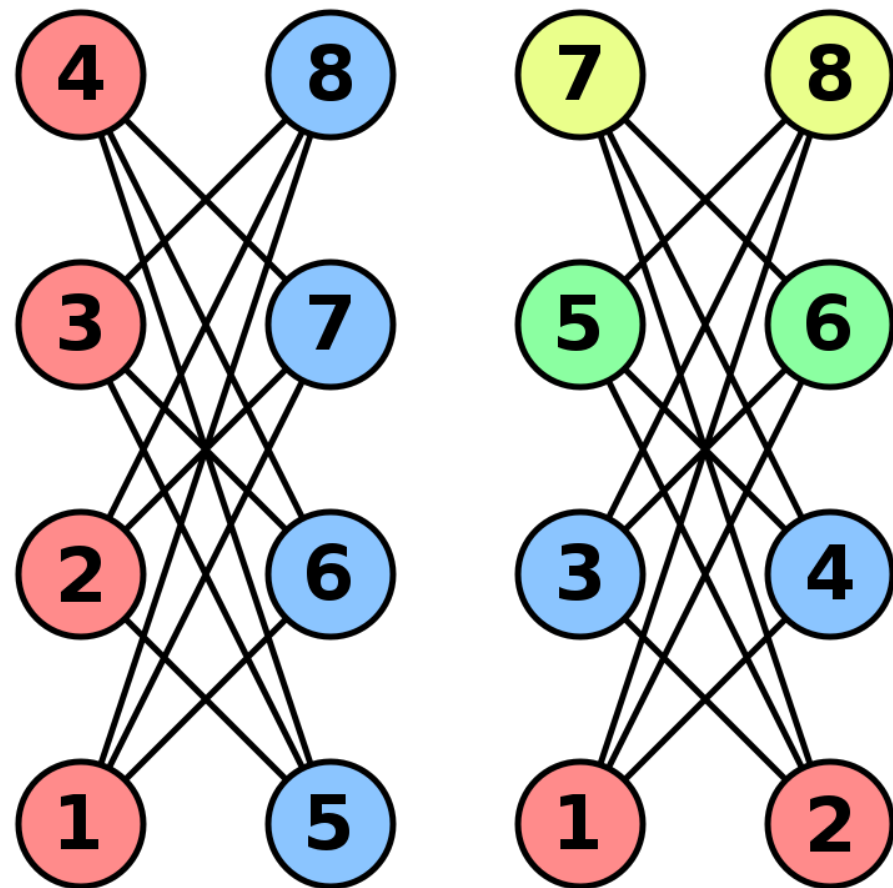


Тема 8. Раскраска графа

Жадная раскраска

Результат может зависеть от порядка
перебора вершин

На изображении указан порядок перебора





Тема 8. Раскраска графа

Теорема о 4 красках: всякую расположенную на плоскости (планарный граф) или на сфере карту можно раскрасить не более чем четырьмя разными цветами (красками) так, чтобы любые две области с общим участком границы были раскрашены в разные цвета. При этом области должны быть односвязными, а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке не считаются общей границей для них.





Тема 8. Раскраска графа

Теорема о 4 красках: всякую расположенную на плоскости или на сфере карту можно раскрасить не более чем четырьмя разными цветами (красками) так, чтобы любые две области с общим участком границы были раскрашены в разные цвета. При этом области должны быть односвязными, а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке не считаются общей границей для них.

Существует определённый набор из 1936 карт, ни одна из которых не может содержать карту меньшего размера, которая опровергала бы теорему (примеры проверялись с помощью специальной компьютерной программы)

Не существует наименьшего контрпримера к теореме, потому что иначе он должен бы содержать какую-нибудь из этих 1936 карт, чего нет. Это противоречие говорит о том, что контрпримера нет вообще



Литература

Гамильтонов цикл

Кормен. Часть VI

<https://foxford.ru/wiki/informatika/postroenie-gamiltonova-tsikla>



Литература

Задача о раскраске графа

Кормен. Часть VI

<https://habr.com/ru/post/346710/>



Литература

Поиск клик в графе

Кормен. Часть VI

<https://medium.com/nuances-of-programming/%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%8B-%D0%B8-%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%B8-%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC-%D0%B1%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B0-%D0%BA%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D1%88%D0%B0-%D0%BC%D0%B0%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%B8-857d7b7e829d>

https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Брона_—_Кербоша

https://ru.qaz.wiki/wiki/Bron-Kerbosch_algorithm



Спасибо за внимание!

Петрусович Денис Андреевич

Доцент Кафедры Проблем управления

petrusevich@mirea.ru