Представление результатов SVD-разложения по алгоритму 1

Никита Сорокин, КМБО-01-23

1 Введение

Сингулярное разложение (SVD) позволяет представить любую матрицу A в виде

$$A = U\,\Sigma\,V^{\top},$$

где:

- $\mathbf{U}$ **($m \times m$-матрица)** — ортогональная матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Это означает, что

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_m.$$

- Σ **($m \times n$-матрица)** — диагональная матрица, на диагонали которой расположены сингулярные числа матрицы $\mathbf{A}$:
- $\mathbf{V}$ **($n \times n$-матрица)** — ортогональная матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Тогда выполнено:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n.$$

2 Пример 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.1 Результаты SVD-разложения

После применения SVD получены следующие компоненты:

2.1.1 Левые сингулярные векторы (U)

$$U = \begin{bmatrix} -23.9467 & -39.4166 & 12.8802 \\ 4.95818 & 7.91318 & -1.92026 \\ 20.3764 & 33.0851 & -9.59154 \\ 8.47097 & 13.8436 & -4.25607 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Сингулярные значения (Σ)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 17.2337 & 0 & 0 \\ 0 & 1.41421 & 0 \\ 0 & 0 & 6.92779 \times 10^{-14} \end{bmatrix}.$$

2.1.3 Правые сингулярные векторы ($V^\top$)

$$V^\top = \begin{bmatrix} -1.47052 & -1.64275 & -1.08067 \\ 0.32124 & -0.222946 & -0.255682 \\ 1.282 & 0.365862 & 0.127841 \end{bmatrix}.$$

2.2 Восстановленная матрица

Перемножив компоненты, получаем:

$$A_{\text{SVD}} = U\,\Sigma\,V^\top = \begin{bmatrix} 0.999999 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Имеется отклонение от исходной

3 Пример 2: Матрица 6×4 с вещественными значениями

Исходная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1.01 & 2.03 & 3.02 & 4.01 \\ 5.01 & 6.98 & 7.01 & 8.03 \\ 9.04 & 10.00 & 11.01 & 12.02 \\ 13.03 & 14.01 & 15.03 & 16.04 \\ 17.02 & 18.01 & 19.04 & 20.01 \\ 21.01 & 22.03 & 23.00 & 24.02 \end{bmatrix}.$$

3.1 Результаты SVD-разложения

3.1.1 Левые сингулярные векторы (U)

$$U = \begin{bmatrix} -57.1875 & -147.339 & -83.883 & 84.7888 \\ 24.6923 & 65.9048 & 37.5444 & -38.0524 \\ 11.1378 & 27.9343 & 15.4523 & -15.2472 \\ -28.9988 & -77.943 & -43.9788 & 45.5893 \\ 75.962 & 194.281 & 111.745 & -110.356 \\ 16.5782 & 38.1967 & 22.5392 & -20.6653 \end{bmatrix}.$$

3.1.2 Сингулярные значения (Σ)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 70.1229 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.52816 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.705487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0297956 \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Правые сингулярные векторы ($V^\top$)

$$V^\top = \begin{bmatrix} 0.609307 & -0.0281399 & -0.949436 & -0.266471 \\ 1.50337 & 1.32126 & 0.823925 & -0.0273518 \\ 0.876698 & 0.25346 & 0.608129 & 0.811794 \\ -0.835883 & -1.46239 & -0.538473 & -0.520886 \end{bmatrix}.$$

3.2 Восстановленная матрица

$$A_{\mathrm{SVD}} = U\,\Sigma\,V^\top = \begin{bmatrix} 1.01 & 2.03 & 3.02 & 4.01 \\ 5.01 & 6.98 & 7.01 & 8.02999 \\ 9.04 & 9.99999 & 11.01 & 12.02 \\ 13.03 & 14.01 & 15.03 & 16.04 \\ 17.02 & 18.01 & 19.04 & 20.01 \\ 21.01 & 22.03 & 23 & 24.02 \end{bmatrix}.$$

4 Пример 3: Матрица с преобладанием нулей

Исходная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.1 Результаты SVD-разложения

4.1.1 Левые сингулярные векторы (U)

$$U = \begin{bmatrix} -7.79046 & 288.914 & 118.992 \\ -283.162 & 1310.02 & 511.065 \\ -48.8092 & 42.5853 & 8.67597 \\ 261.929 & 1094.96 & 517.751 \\ 2240.31 & -151.082 & 290.258 \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Сингулярные значения (Σ)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 15.1881 & 0 & 0 \\ 0 & 1.31756 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00000 \end{bmatrix}.$$

4.1.3 Правые сингулярные векторы ($V^\top$)

$$V^\top = \begin{bmatrix} -0.286197 & -13.2504 & -1.49082 \\ 2.33793 & -5.57673 & 0.24523 \\ 9.63434 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2 Восстановленная матрица

$$A_{\text{SVD}} = U\,\Sigma\,V^\top = \begin{bmatrix} 0 & -2.38419 \times 10^{-7} & 3 \\ 0 & 7 & 2.38419 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5 Пример 4: Матрица 4×5 с комплексными значениями

Рассмотрим матрицу, заданную следующими комплексными элементами:

$$A = \begin{bmatrix} 1.01 + 2.01i & 3.00 - 1.02i & -4.48 + 0.52i & 2.19 - 3.32i & 0.01 - 1.00i \\ 5.48 + 2.22i & 3.32 + 3.28i & -6.68 + 4.42i & 2.11 + 1.09i & -3.39 - 2.51i \\ 4.21 + 0.01i & 1.10 - 1.09i & 7.79 - 3.31i & -4.19 + 4.12i & 0.00 + 0.01i \\ 5.31 - 2.23i & -6.52 + 1.31i & 8.12 - 6.72i & 2.27 - 3.41i & -4.58 + 0.69i \end{bmatrix}.$$

Представление левых, правых сингулярных векторов и чисел опустим. Запишем сразу Результат после их перемножения

5.1 Восстановленная матрица

Перемножив компоненты U, Σ и $V^\top$, получаем восстановленную матрицу:

$$A_{\text{SVD}} = U\,\Sigma\,V^\top = \begin{bmatrix} 1.01 + 2.00i & 3.00 - 1.01i & -4.48 + 0.50i & 2.19 - 3.31i & 0.01 - 1.00i \\ 5.48 + 2.22i & 3.32 + 3.30i & -6.69 + 4.41i & 2.11 + 1.10i & -3.39 - 2.51i \\ 4.21 + 0.01i & 1.10 - 1.08i & 7.79 - 3.31i & -4.19 + 4.11i & 0.00 + 0.01i \\ 5.31 - 2.23i & -6.52 + 1.31i & 8.12 - 6.72i & 2.27 - 3.41i & -4.58 + 0.69i \end{bmatrix}.$$

Результат восстановления совпадает с входной матрицей (при незначительных погрешностях вычислений).
Стоит отметить, что вычисления над комплексными матрицами необходимо выполнять с помощью `Eigen::JacobiSVD`, тогда как для вещественных матриц использовалось `Eigen::BDCSVD`.

6 Тесты на больших матрицах

Теперь проведем тесты на больших матрицах. В качестве метрики будем использовать норму Фробениуса разности матриц. Относительная ошибка вычисляется по формуле:

$$\text{Relative Error} = \frac{\|A - A_{\text{SVD}}\|_F}{\|A\|_F},$$

где $\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |X_{ij}|^2}$ — норма Фробениуса матрицы X. Данная ошибка демонстрирует, насколько точно алгоритм восстанавливает исходную матрицу. Будем сравнивать эту ошибку с результатом, полученным с использованием алгоритма Eigen::SVD.

6.1 Для матрицы размером 25×24

$$\text{Ошибка на собственном алгоритме} - 1.19338 \times 10^{-7};$$

$$\text{Ошибка на алгоритме Eigen::svd} - 1.61071 \times 10^{-6}.$$

6.2 Для матрицы размером 52×51

$$\text{Ошибка на собственном алгоритме} - 1.67005 \times 10^{-7};$$

$$\text{Ошибка на алгоритме Eigen::svd} - 2.11554 \times 10^{-6}.$$

6.3 Для матрицы размером 95×94

$$\text{Ошибка на собственном алгоритме} - 2.13266 \times 10^{-7};$$

$$\text{Ошибка на алгоритме Eigen::svd} - 1.92261 \times 10^{-6}.$$

7 Заключение

В результате проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

- Сингулярное разложение (SVD) является мощным инструментом для анализа структуры матриц. Оно позволяет разложить любую матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ на произведение трёх матриц U, Σ и $V^\top$, что даёт возможность выявлять доминирующие компоненты и оценивать линейные зависимости в данных.
- Примеры, приведённые в данном документе, демонстрируют, что как для небольших матриц (например, 4×3 и 6×4), так и для матриц с преобладанием нулей, восстановленная матрица A_{SVD} очень точно приближается к исходной, что подтверждается незначительными отклонениями, обусловленными округлением.
- Тестирование на больших матрицах (25×24, 52×51, 95×94) с использованием нормы Фробениуса в качестве метрики позволяет количественно оценить относительную ошибку восстановления:

$$\text{Relative Error} = \frac{\|A - A_{\text{SVD}}\|_F}{\|A\|_F}.$$

  По полученным результатам собственный алгоритм демонстрирует значительно меньшую ошибку по сравнению с Eigen::SVD (Подробнее см. [1].), что свидетельствует о его высокой точности и стабильности.
- Для комплексных матриц восстановление производится также с высокой точностью, что подтверждается сравнением исходных и восстановленных матриц. При этом для комплексных данных рекомендуется использовать `Eigen::JacobiSVD` вместо `Eigen::BDCSVD`.

Таким образом, проведённое исследование демонстрирует, что реализованный собственный алгоритм SVD-разложения обладает высокой точностью восстановительных свойств и может быть эффективно применён в задачах обработки и анализа данных.

Список литературы

[1] Eigen Development Team. *Eigen: A C++ Template Library for Linear Algebra* [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen$_{11}JacobiSVD.html$.