**Алгоритм 8**

В работе [1] был представлен итеративный метод уточнения сингулярного разложения [1, алгоритм 8]. Основной подход метода заключается в преобразовании сингулярного разложения в спектральное.

Исходная задача формулируется следующим образом: дана матрица , для нее ищется полное сингулярное разложение, то есть разложение вида

и ортогональные матрицы, и – сингулярные числа матрица . Столбцы матрицы являются левыми сингулярными векторами матрицы , столбцы матрицы – правыми сингулярными векторами матрицы .

Введем некоторые обозначения. За обозначим нулевую матрицу размером . За обозначим единичную квадратную матрицу размером Для обозначения приближенного значения некоторой величины используется запись ; уточнение аппроксимации записывается как . Запись означает, что операции в скобках выполняются с высокой точностью, запись – вычисления с низкой точностью. За обозначается квадратная матрица . В тексте также используется разбиение матрицы на две подматрицы следующим образом: - матрица, столбцами которой являются первые столбцов матрицы ; - матрица, столбцами которой являются оставшиеся столбцов матрицы .

Из [2] известно, что собственными числами матрицы , определенной как

являются числа . Также, для справедливо разложение

Тогда задачу поиска сингулярного разложения матрицы можно свести к задаче поиска спектрального разложения . Для уточнения последнего используется алгоритм [1, алгоритм 3]. Для уменьшения числа ненужных вычислений используется алгоритм [1, алгоритм 5]. Пусть были получены аппроксимация матрицы - и уточнение аппроксимации матрицы - :

Тогда можно получить следующие соотношения:

Тогда

где

Введем матрицу :

где

Теперь определим матрицу ошибок для матрицы аналогично [1, алгоритм 3]:

где . Введем разбиение матрицы на подматрицы следующим образом. Пусть матрицы такие, что

Тогда справедливо равенство

где

- матрицы поправок. Теперь с помощью данных матриц можно обновить значения матриц и :

Таким образом был получен алгоритм повышения точности аппроксимации сингулярных векторов A. Псевдокод алгоритма приведен на рисунке 1.

|  |
| --- |
| **Вход:**,  **Выход:**  ,  1: # определяем матрицы невязок  2: for do  3: # матрица корректировки ортогональности матриц и  4:  5: for do  6: # вспомогательная матрица  7: for do  8: # расчет приблизительных сингулярных значений  9: ;  10: ; ;  11: ;  12: ; ;  13: ; ;  # расчет матриц ошибок  14: for do  15: if do  16:  17: else do  18:  19: for do  20:  21: ; ;  # обновляем значения матриц и  22:  23:  24: |

Рисунок 1. Псевдокод алгоритма итеративного уточнения полного сингулярного разложения.

Строки 1-8 приведенного на рисунке 1 псевдокода взяты из реализации алгоритма уточнения сингулярного разложения [1, алгоритм 5]. Строки 9-24 адаптированы из алгоритма [1, алгоритм 3] уточнения спектрального разложения, но в терминах приведенных ранее выкладок связи сингулярных чисел матрицы и собственных чисел матрицы .

Сходимость описанного алгоритма совпадает со сходимостью базового алгоритма [1, алгоритм 4], то есть является квадратичной. Вычислительная стоимость данного алгоритма, то есть количество необходимых операций, для входных данных варьируется от до . Это выражение больше, чем для базового алгоритма [1, алгоритм 4], но при требуемой большой точности операций необходимо меньше [1].

## **Тестирование**

Для анализа работы полученного алгоритма был проведен ряд экспериментов по уточнению сингулярного разложения, полученного алгоритмами Якоби и BDCSVD в библиотеке *EIGEN*, матриц различных размеров. Для каждого уточнения проводилась одна итерация. За **Norm**будем обозначать норму Фробениуса разницы исходной матрицы и восстановленной.

Таблица 1. Сравнение точности сингулярного разложения до и после уточнения алгоритмом.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Размер матрицы | **Norm** (BDCSVD) | **Norm (**BDCSVD + Ogita-Aishima**)** | **Time (**BDCSVD + Ogita-Aishima**), sec** | **Norm (**Jacobi**)** | **Norm** (Jacobi+ Ogita-Aishima) | **Time (**Jacobi+ Ogita-Aishima**), sec** |
|  | 6.9025e-06 | 8.1842e-06 | 0.0035981 | 6.90247e-06 | 8.18417e-06 | 0.001725 |
|  | 1.9306e-05 | 1.2246e-05 | 0.0192709 | 4.37044e-05 | 1.22459e-05 | 0.016756 |
|  | 5.4206e-05 | 2.7983e-05 | 0.0758986 | 1.00878e-04 | 2.79826e-05 | 0.089339 |
|  | 4.0938e-05 | 4.4161e-05 | 0.283003 | 0.000223648 | 4.41608e-05 | 0.223819 |
|  | 3.58e-05 | 3.5886e-05 | 0.222803 | 0.000230734 | 3.58864e-05 | 0.213923 |

Из результатов видно, что уже после первой итерации разложение стало более точным.

# Список литературы

1. Uchino Y., Terao T., Ozaki K.: Acceleration of iterative refinement for singular value decomposition / Numerical Algorithms. — 2024. — № 95. — С. 979–1009.
2. Golub, G.H., Kahan, W.M.: Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix / Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis. — 1965. — №2. — С. 205-224.