**Алгоритм 8**

В работе [1] был представлен итеративный метод уточнения сингулярного разложения [1, алгоритм 8]. Основной подход метода заключается в преобразовании сингулярного разложения в спектральное.

Исходная задача формулируется следующим образом: дана матрица , для нее ищется полное сингулярное разложение, то есть разложение вида

и ортогональные матрицы, и – сингулярные числа матрица . Столбцы матрицы являются левыми сингулярными векторами матрицы , столбцы матрицы – правыми сингулярными векторами матрицы .

Введем некоторые обозначения. За обозначим нулевую матрицу размером . За обозначим единичную квадратную матрицу размером Для обозначения приближенного значения некоторой величины используется запись ; уточнение аппроксимации записывается как . Запись означает, что операции в скобках выполняются с высокой точностью, запись – вычисления с низкой точностью. За обозначается квадратная матрица . В тексте также используется разбиение матрицы на две подматрицы следующим образом: - матрица, столбцами которой являются первые столбцов матрицы ; - матрица, столбцами которой являются оставшиеся столбцов матрицы .

Из [2] известно, что собственными числами матрицы , определенной как

являются числа . Также, для справедливо разложение

Тогда задачу поиска сингулярного разложения матрицы можно свести к задаче поиска спектрального разложения . Для уточнения последнего используется алгоритм [1, алгоритм 3]. Для уменьшения числа ненужных вычислений используется алгоритм [1, алгоритм 5]. Пусть были получены аппроксимация матрицы - и уточнение аппроксимации матрицы - :

Тогда можно получить следующие соотношения:

Тогда

где

Введем матрицу :

где

Теперь определим матрицу ошибок для матрицы аналогично [1, алгоритм 3]:

где . Введем разбиение матрицы на подматрицы следующим образом. Пусть матрицы такие, что

Тогда справедливо равенство

где

- матрицы поправок. Теперь с помощью данных матриц можно обновить значения матриц и :

Таким образом был получен алгоритм повышения точности аппроксимации сингулярных векторов A. Псевдокод алгоритма приведен на рисунке 1.

|  |
| --- |
| **Вход:**,  **Выход:**  ,  1: # определяем матрицы невязок  2: for do  3: # матрица корректировки ортогональности матриц и  4:  5: for do  6: # вспомогательная матрица  7: for do  8: # расчет приблизительных сингулярных значений  9: ;  10: ; ;  11: ;  12: ; ;  13: ; ;  # расчет матриц ошибок  14: for do  15: if do  16:  17: else do  18:  19: for do  20:  21: ; ;  # обновляем значения матриц и  22:  23:  24: |

Рисунок 1. Псевдокод алгоритма итеративного уточнения полного сингулярного разложения.

Строки 1-8 приведенного на рисунке 1 псевдокода взяты из реализации алгоритма уточнения сингулярного разложения [1, алгоритм 5]. Строки 9-24 адаптированы из алгоритма [1, алгоритм 3] уточнения спектрального разложения, но в терминах приведенных ранее выкладок связи сингулярных чисел матрицы и собственных чисел матрицы .

Сходимость описанного алгоритма совпадает со сходимостью базового алгоритма [1, алгоритм 4], то есть является квадратичной. Вычислительная стоимость данного алгоритма, то есть количество необходимых операций, для входных данных варьируется от до . Это выражение больше, чем для базового алгоритма [1, алгоритм 4], но при требуемой большой точности операций необходимо меньше [1].

## **Тестирование**

Для анализа работы полученного алгоритма был проведен ряд экспериментов по уточнению сингулярного разложения матриц различных размеров. Для матрицы фиксированного размера генерировалось некоторое точное сингулярное разложение, из которого строилась матрица , затем к матрицам добавлялась некоторая ошибка: отклонение от начального значения на или . Также сингулярные числа варьировались в интервале или . Для каждого эксперимента выводятся входные данные: размер матрицы; интервал значений сингулярных чисел; добавляемая ошибка; число итераций для уточнения. После эксперимента выводятся следующие данные: норма разницы исходной и восстановленной матриц в пространствах и , то есть нормы и соответственно; нормы разниц изначальных и уточненных матриц ; время на выполнение алгоритма.

Чтобы избежать накопления ошибки при большом числе итераций и таким образом сохранить необходимую ортогональность матриц , на каждой итерации проводилась процедура реортогонализации этих матриц с помощью QR-разложения. Результаты экспериментов представлены в файле *alg8\_test\_results\_reortogonalized.csv*.

# Список литературы

1. Uchino Y., Terao T., Ozaki K.: Acceleration of iterative refinement for singular value decomposition / Numerical Algorithms. — 2024. — № 95. — С. 979–1009.
2. Golub, G.H., Kahan, W.M.: Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix / Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis. — 1965. — №2. — С. 205-224.