Ślady
Eliminacja Gaussa

Bartosz Dudek

1. Podstawowe niepodzielne zadania obliczeniowe:

- $\mathbf{A_{k,i}}$ - znalezienie mnożnika ‘m’ między wierszem ‘i’ oraz ‘k’
  $m_{k,i} = M_{k,i} / M_{i,i}$
- $\mathbf{B_{k,j,i}}$ - pomnożenie elementu ‘j’ w wierszu ‘i’ przez mnożnik $m_{k,i}$
  $n_{k,j,i} = m_{k,i} * M_{i,j}$
- $\mathbf{C_{k,j,i}}$ - odjęcie od elementu ‘j’ w wierszu ‘k’ wyliczonego $n_{k,j,i}$
  $M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,j,i}$

2. Ciąg zadań obliczeniowych

Ślad przedstawię w postaci pseudokodu,
gdzie x to rozmiar macierzy:

```
FOR  i = 1, x-1
        FOR k = i, x
                A_k,i
                FOR j = i, x+1
                        B_k,j,i
                        C_k,j,i
```

3. Alfabet w sensie teorii śladów

Niech x oznacza rozmiar macierzy (liczba kolumn, liczba wierszy).

Alfabet w sensie teorii śladów będzie sumą wszystkich zadań obliczeniowych (wartości mogą być większe od macierzy bo mamy jeszcze wektory wyrazów wolnych) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left\{ \mathbf{A}_{k,i} \mid 1 \le i \le x-1,\ i+1 \le k \le x \right\} \cup$$
$$\left\{ \mathbf{B}_{k,j,i} \mid 1 \le i \le x-1,\ i \le j \le x+1,\ i+1 \le k \le x \right\} \cup$$
$$\left\{ \mathbf{C}_{k,j,i} \mid 1 \le i \le x-1,\ i \le j \le x+1,\ i+1 \le k \le x \right\}$$

4. Relacja zależności

Relację zależności możemy przedstawić jako sumę zbiorów między poszczególnymi operacjami:

$D_1 = \{(A_{k,i}, B_{k,j,i}) \mid A_{k,i}, B_{k,j,i} \in \Sigma\}$

$D_2 = \{(B_{k,j,i}, C_{k,j,i}) \mid B_{k,j,i}, C_{k,j,i} \in \Sigma\}$

$D_3 = \{(C_{kc,j,i}, A_{ka,\ j}) \mid C_{k,j,i}, A_{k,\ j} \in \Sigma \wedge (kc = ka \vee kc = j\}$

$D_4 = \{(C_{a,j,b}, B_{k,j,a}) \mid C_{a,j,b}, B_{k,j,a} \in \Sigma\}$

$D_5 = \{(C_{k,j,a}, C_{k,j,b}) \mid C_{k,j,a}, C_{k,j,b} \in \Sigma\}$

$D = \mathrm{sym}\{\{ D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5\}^{+}\} \cup I_\Sigma$

Relację niezależności można obliczyć stosując wzór:

$I = \Sigma^2 - D$

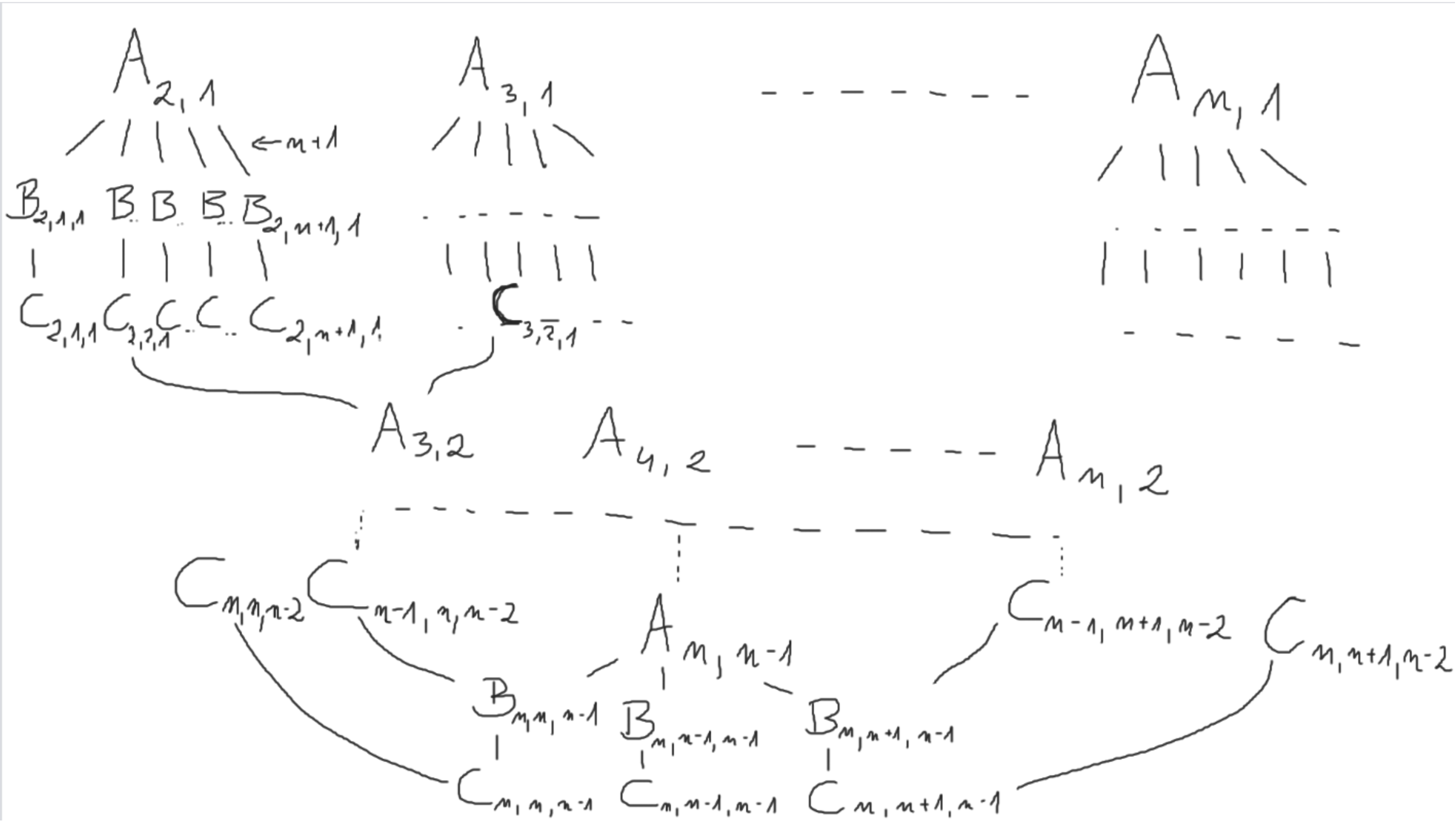
5.Wyprowadzenie grafu Diekerta

Do wyznaczenia grafu Diekerta na podstawie relacji zależności wyznaczam zbiór bezpośrednich zależności:

$E_1 = \{(A_{k,i}, B_{k,j,i}) \mid A_{k,i}, B_{k,j,i} \in \Sigma\}$
$E_2 = \{(B_{k,j,i}, C_{k,j,i}) \mid B_{k,j,i}, C_{k,j,i} \in \Sigma\}$
$E_3 = \{(C_{kc,j,i}, A_{ka,\ j}) \mid C_{k,j,i}, A_{k,\ j} \in \Sigma \wedge (kc = ka \vee kc = j) \wedge i = j\text{-}1\}$
$E_4 = \{(C_{a,j,b}, B_{k,j,a}) \mid C_{a,j,b}, B_{k,j,a} \in \Sigma \wedge a = b + 1\}$
$E_5 = \{(C_{k,j,a}, C_{k,j,b}) \mid C_{k,j,a}, C_{k,j,b} \in \Sigma \wedge b = a + 1\}$

$E = \{ E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5\}$

Można zauważyć na przykładzie małych grafów, że każdy graf układa się warstwami i w każdej warstwie znajduje się jeden rodzaj operacji wykonywany dla wszystkich wierszy w jednej kolumnie. Zatem uogólniając, graf diekerta można przedstawić w ten sposób:



Po każdym wykonaniu operacji A, B oraz C będziemy mieli jedną mniej gałąź z operacjami A, aż dojedziemy do jednej operacji A, 3 operacji B i 3 operacji C.

6. Klasy Foaty

Można zauważyć że graf Diekerta układa się warstwami i każda taka warstwa będzie klasą Foaty, tzn. jeden rodzaj operacji dla jednej kolumny to klasa Foaty. Wszystkich klas będzie 3 * (n-1), gdzie n to wielkość macierzy.

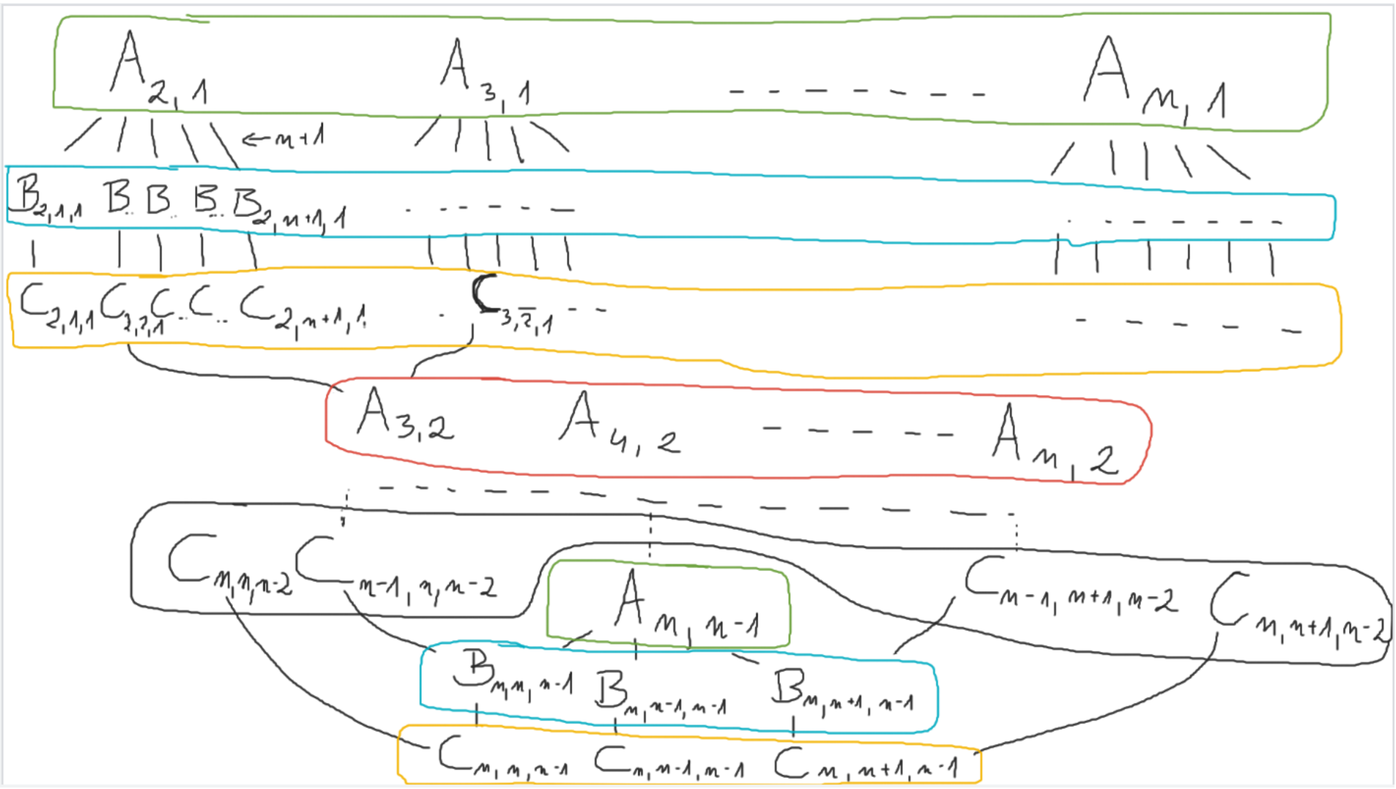
wszystkich klas: 3n - 3

FOR x = 1, n-1:

$F_{Ax} = [\ A_{k,\,x} \ \mid x < k \leq n\ ]$

$F_{Bx} = [\ B_{k,\,j,\,x} \ \mid x < k \leq n \ \wedge \ x < j \leq n+1\ ]$

$F_{Cx} = [\ C_{k,\,j,\,x} \ \mid x < k \leq n \ \wedge \ x < j \leq n+1\ ]$



Wszystkie klasy Foaty można zapisać w porządku rosnącym:

$[F_{A1}][F_{B1}][F_{C1}]$ ……. $[F_{An-1}][F_{Bn-1}][F_{Cn-1}]$