Projet PEPS : Rendu Bêta - Groupe Diamant

Léa ANGLES
Alix BRUCKERT
Paul DUDNIC
Lance GIRODON
Valérian THOMAS

22 Janvier 2021

Table des matières

1 Introduction

Ce document constitue une analyse de la version Bêta du projet PEPS pour le produit Diamant. Dans un premier temps, nous avons étudié les mathématiques derrière le calcul des deltas lors de la constitution du portefeuille de couverture. Puis, notre rapport dresse l'état des lieux de notre implémentation.

2 Analyse mathématique

On considère :

- N actions indicées : $S_i(t)$ le prix de l'action i au temps t dans sa monnaie locale.
- k devises indicées : $X_i(t)$ le taux de change (prix d'une unité de devise i en euros)
- une fonction α qui associe l'indice d'un actif à l'indice de sa devise, définie par :

$$\alpha : \begin{cases} [\![1, N]\!] \to [\![1, k]\!] \\ i \to \alpha(i) \end{cases}$$

2.1 Cas où les taux de change sont constants

Le prix de notre produit Diamant peut être considéré comme une fonction des prix des actifs dans leur monnaie : $D(t) = G(S_1, .., S_N, t)$. On peut poser $\overline{S_i} = X_{\alpha(i)} S_i$ pour i=1,..,N, qui est le prix en euro de l'actif i et qui ne dépend que de S_i car X_i est constant. On peut alors aussi dire $D(t) = F(\overline{S_1}, .., \overline{S_N}, t)$.

On considère l'opération suivante à la date t :

- Vente d'un produit Diamant
- Achat d'une certaine quantité Δ_i de chaque action S_i.

On appelle V notre portefeuille ainsi constitué par cette opération. On peut alors écrire :

$$V(t) = D(t) - \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \overline{S_i}$$

Calculons dV(t) entre t et t + dt :

- Premier terme :

$$dD(t) = \partial_t F dt + \sum_{i=1}^{N} F d\overline{S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} F_{\overline{S_i S_j}} d < \overline{S_i}, \overline{S_j} >_t$$

- Second terme :

$$d\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i \overline{S_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i d\overline{S_i}$$

On obtient finalement :

$$dP(t) = \text{ termes en dt } * \sum_{i=1}^{N} (F_{\overline{S_i}} - \Delta_i) d\overline{S_i}$$

A la date t, on connaît avec certitude dV(t) si on choisit les Δ_i tels que les termes en $d\overline{S_i}$ disparaissent. On choisit donc :

$$\Delta_i = F_{\overline{S_i}} = \frac{G_{S_i}}{X_{\alpha(i)}} \text{ pour i = 1,...N}$$

Dans ce cas, le portefeuille V est sans risque : il rapportera le taux sans risque, i.e $dV(t) = rV(t)dt$.

2.2 Cas général : taux de change non constants

Le prix de notre produit Diamant peut être considéré comme une fonction des prix des actifs dans leur monnaie locale et des taux de change : $D(t) = F(\overline{S_1},..,\overline{S_N},X_1,...,X_k,t)$, avec $\overline{S_i} = X_{\alpha(i)}S_i$ pour i = 1,...N.

On considère l'opération suivante à la date t :

- Vente d'un produit Diamant
- Achat d'une certaine quantité Δ_i de chaque actif $\overline{S_i}$ et d'une quantité δ_i de chaque devise X_j.

On appelle V notre portefeuille ainsi constitué par cette opération. On peut alors écrire :

$$V(t) = D(t) - \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \overline{S_i} - \sum_{j=1}^{k} \delta_j X_j$$

Calculons dV(t) entre la date t et t + dt :

- Pour le premier terme D(t) :

$$\begin{aligned} dD(t) = F_t dt + \sum_{i=1}^{N} F_{\overline{S_i}} d\overline{S_i} + \sum_{j=1}^{k} F_{X_j} dX_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} F_{\overline{S_i}X_j} d < \overline{S_i}, X_j >_t ... \\ ... + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F_{\overline{S_i S_j}} d < \overline{S_i}, \overline{S_j} >_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} F_{X_i X_j} d < X_i, X_j >_t \quad (1) \end{aligned}$$

Puis en appliquant la formule d'Ito qui donne $d\overline{S_i} = X_{\alpha(i)}dS_i + S_i dX_{\alpha(i)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} dD(t) = F_t dt + \sum_{i=1}^{N} F_{\overline{S_i}} X_{\alpha(i)} dS_i + \sum_{i=1}^{N} F_{\overline{S_i}} S_i dX_{\alpha(i)} + \sum_{j=1}^{k} F_{X_j} dX_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} F_{\overline{S_i}X_j} d < \overline{S_i}, X_j >_t ... \\ ... + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F_{\overline{S_i S_j}} d < \overline{S_i}, \overline{S_j} >_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} F_{X_i X_j} d < X_i, X_j >_t \quad (2) \end{aligned}$$

- Pour le second terme appelé $P(t) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \overline{S_i} - \sum_{j=1}^{k} \delta_j X_j$:

$$\begin{aligned} dP(t) &= \sum_{i=1}^{N} \Delta_i d(S_i X_{\alpha(i)}) + \sum_{j=1}^{k} \delta_j dX_j \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Delta_i S_i dX_{\alpha(i)} + \sum_{i=1}^{N} \Delta_i X_{\alpha(i)} dS_i + \sum_{i=1}^{N} \Delta_i d < X_{\alpha(i)}, S_i >_t + \sum_{j=1}^{k} \delta_j dX_j \end{aligned}$$

Finalement, en rassemblant les deux termes, on obtient :

$$dV(t) = dD(t) - dP(t) = Cste * dt + \sum_{i=1}^{N}(F_{\overline{S_i}} - \Delta_i)X_{\alpha(i)}dS_i...$$

$$... + \sum_{j=1}^{k}\left(F_{X_j} - \delta_j - \sum_{\text{r tel que } \alpha(r)=j}(\Delta_r - F_{\overline{S_r}})S_r\right)dX_j \quad (3)$$

A la date t, on connaît avec certitude dV(t) si on choisit les Δ_i et δ_j tels que les termes en dS_i et dX_j disparaissent. On choisit donc :

$$\Delta_i = F_{\overline{S_i}} \text{ pour i = 1,...N}$$

et

$$\delta_j = F_{X_j} - \sum_{\text{r tel que } \alpha(r)=j}\overbrace{(\Delta_r - F_{\overline{S_r}})}^{=0}S_r = F_{X_j} \text{ pour j = 1,...k}$$

Dans ce cas, le portefeuille V est sans risque : il rapportera le taux sans risque, i.e $dV(t) = rV(t)dt$.

3 État des lieux de l'implémentation

3.1 Diagramme de classes

3.1.1 Zoom sur le projet PEPS C#

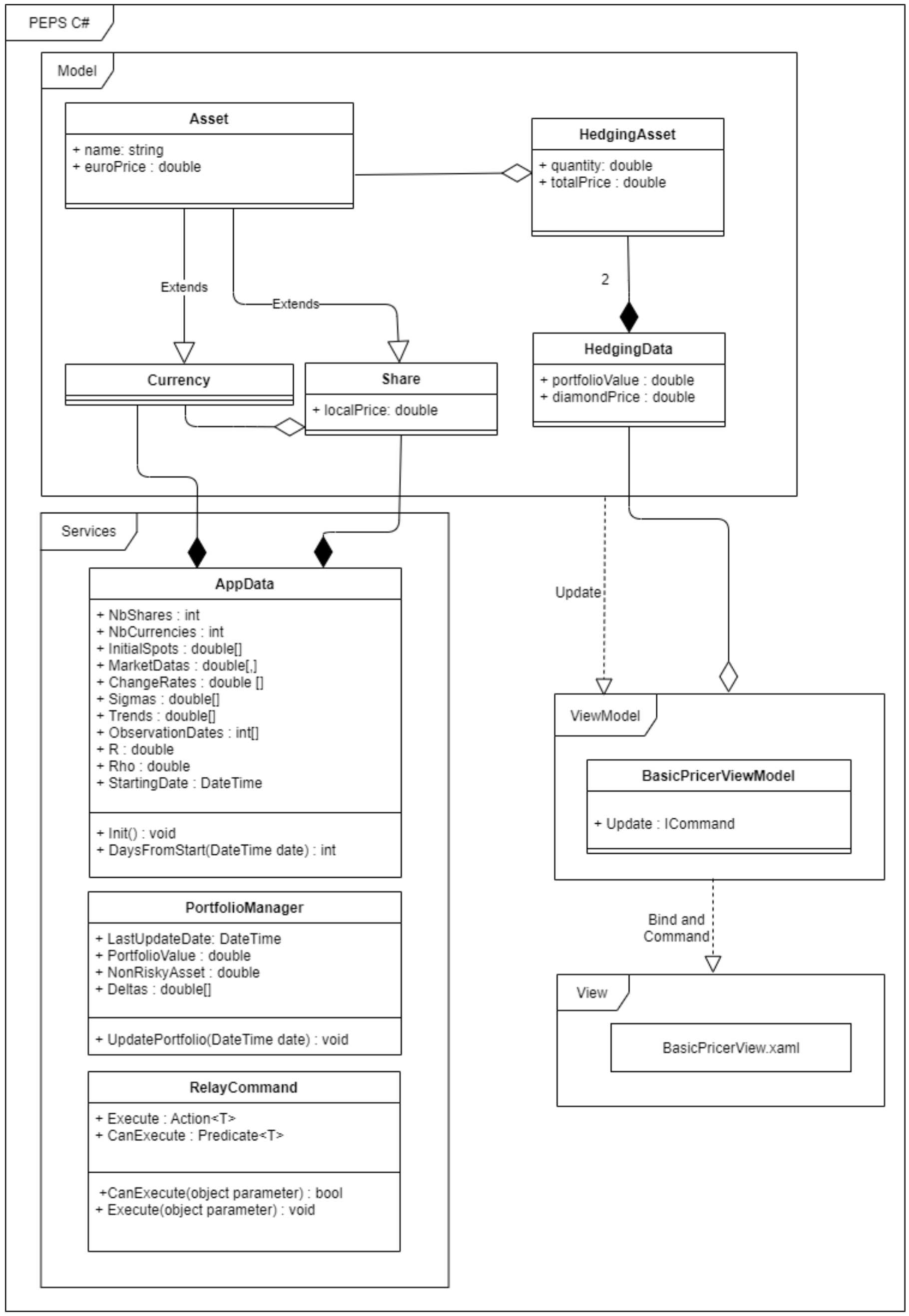

FIGURE 1 – Diagramme de classe du projet C PEPS

3.2 Incréments implémentés

Dans ce rendu, notre produit test possède les caractéristiques suivantes :

- 24 actions
- 2 devises : l'euro et le dollar
- le prix d'un dollar en euros est fixé à 0.8

- R = 0.01
- la matrice de corrélation est la matrice identité
- 12 dates de constatation, une fois par an
- on simule sur 12 ans, à partir de 2005.

Notre application simule les trajectoires des 24 actifs tous les jours pendant 12 ans. Puis on calcule le payoff selon les modalités du contrat.
Nous affichons à la date choisie le prix du FCP Diamant ainsi que le détail du portefeuille de couverture : le montant total du portefeuille, la quantité et le prix de chaque action (tableau de gauche sur figure 2) et devise (tableau de droite sur figure 2) dans le portefeuille.

3.3 Aperçu de l'application actuelle

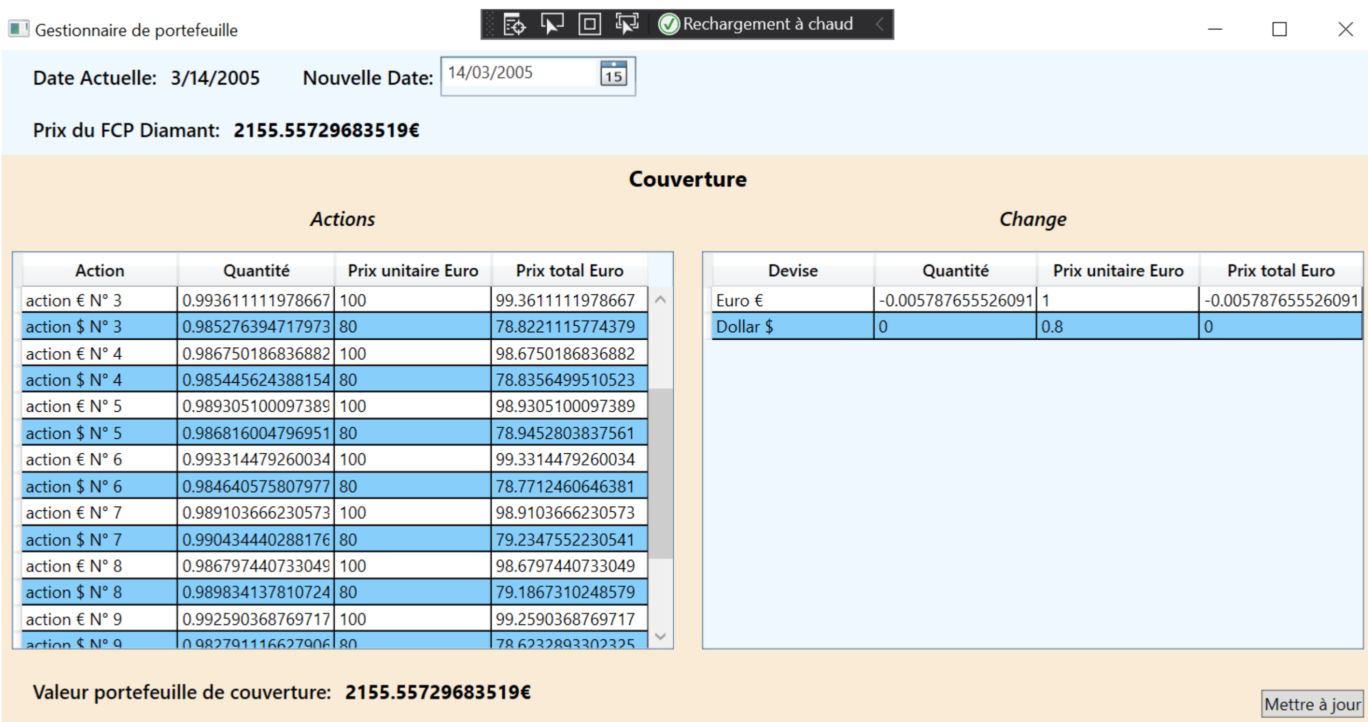

FIGURE 2

4 Suite du projet

Le Pricer est implémenté pour des taux de change constants. Nous allons à présent le modifier pour des taux de change non constants et travailler avec les véritables cours des actifs et des taux de change, et mettre en place une interface pour le gestionnaire de Portefeuille.