Домашнє завдання

26.01.25

2.7. $f(n) = 3n^2 - n + 4$, $g(n) = n\log n + 5$

1) Якщо $f_1 = O(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 + f_2 = O(\max(g_1, g_2))$

$n\log n + 5 \le Cn^2$, $C = 6$

$n\log n + 5 \le 6n^2$

$\log n + 5/n \le 6n$, $\forall n \ge 1$, Отже $n\log n + 5 = O(n^2)$

$3n^2 - n + 4 \le Cn^2$, $C = 6$.

$3n^2 - n + 4 \le 6n^2$

$4 - n \le 3n^2$ $\forall n \ge 1$, Отже $3n^2 - n + 4 = O(n^2)$

Ну і з (1) $\Rightarrow f(n) + g(n) = O(\max(n^2, n^2)) = O(n^2)$

2.13. a), d), g), h)

a) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0 \\ T(n-1) + O(1) \end{cases}$

$T(n) = C + T(n-1) = \ldots = n \cdot C = O(n)$

d) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \le a, a > 1 \\ aT(n-a) + O(1), & n > a \end{cases}$

Нехай $n = k \cdot a$

$T(ka) = a \cdot T((k-1)a) + C = a^2 T((k-2)a) + aC + C = \ldots = C \cdot \sum_{j=0}^{k} a^k = C \cdot \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} = O(a^{[\frac{n}{a}]}) = O(a^n)$

g) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ aT([n/a]) + O(1), & n \ge 2, a \ge 2 \end{cases}$

$T(n) = aT([n/a]) + C = a^2 T([n/a^2]) + aC + C = C\sum_{k=0}^{[\log_a n]} a^k = C(a^{[\log_a n] + 1} - 1) = O(a^{[\log_a n]}) = O(n)$

h) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \le 1 \\ aT([n/a]) + O(n), & n \ge 2, a \ge 2 \end{cases}$

$T(n) = aT([n/a]) + C \cdot n = a^2 T([n/a^2]) + aC(n-1) + Cn = C\sum_{k=0}^{[\log_a n]} a^k (n-k) = C[\log_a n](n - \frac{[\log_a n] + 1}{2}) =$

$= O(n\log n)$

2.11. У програмі будуть суми такого вигляду

$([1] + [1]) + ([2] + [1+2]) + ([3] + [1+2+3]) + \ldots =$

$\frac{n(n+1)}{2} + n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + 2(n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} +$

$+ \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n - (k-1))$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

Тоді загальна сума:

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^3 + 6n^2 + 5n}{6}$$