Métodos numéricos para equações diferenciais e aplicações.

Hévilla Nobre Cezar

Objetivo

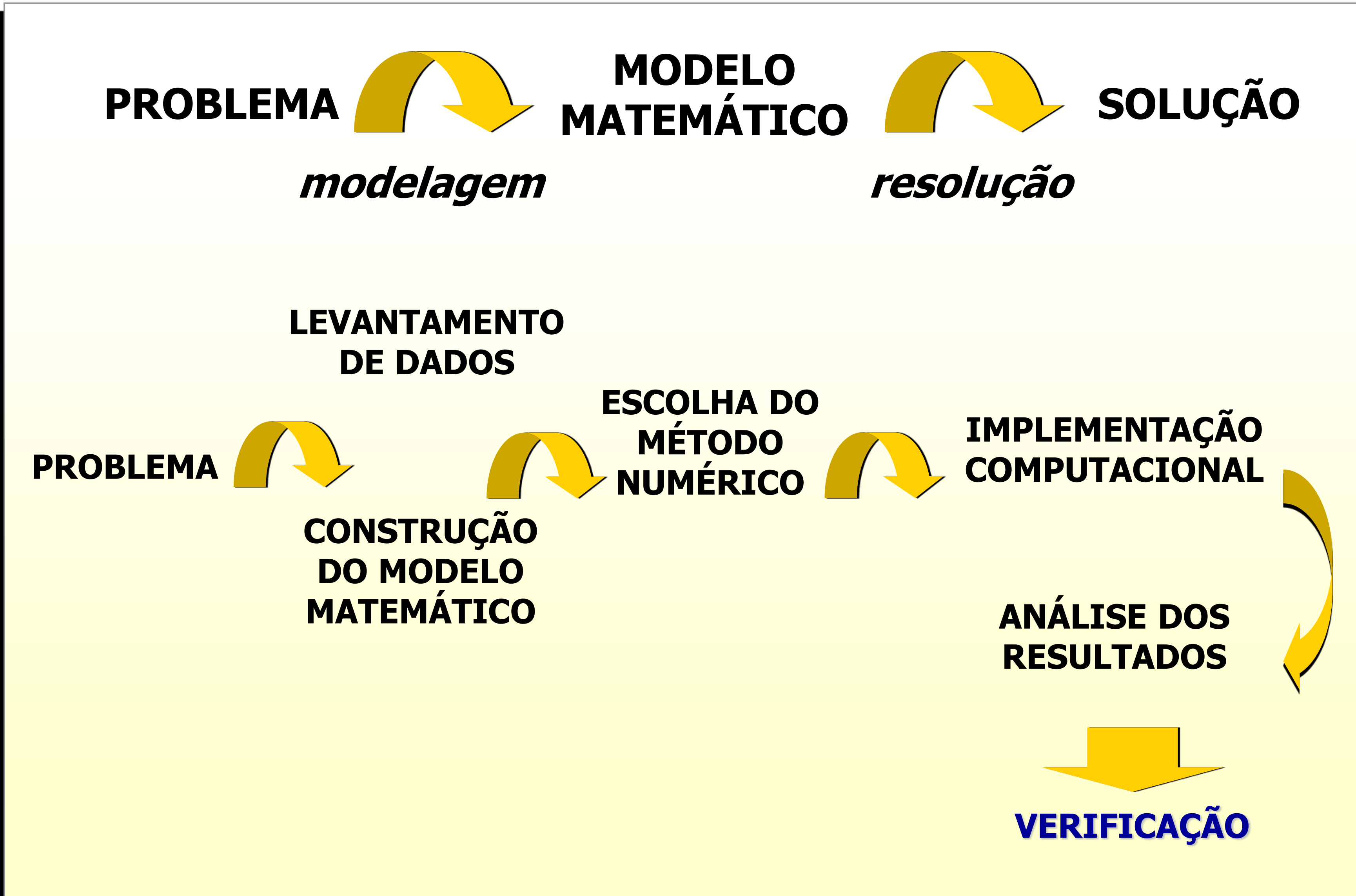
Dar uma visão geral da área de métodos numéricos para resolução de equações diferenciais

Conteúdo

- Introdução.
- Métodos numéricos.
- Aplicações.

Introdução

- Muitos problemas de engenharia e outras ciências podem ser modelados por equações diferenciais.
- Aplicabilidade em processos industriais
  - Diminui custos em projetos
  - Facilita o desenvolvimento de projetos automobilísticos, aeroespaciais, estruturais,...


PROBLEMA
MODELO MATEMÁTICO
SOLUÇÃO
modelagem
resolução
LEVANTAMENTO DE DADOS
PROBLEMA
CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO
ESCOLHA DO MÉTODO NUMÉRICO
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL
ANÁLISE DOS RESULTADOS
VERIFICAÇÃO

Modelagem:Alguns tipos e equações.

- Equações diferenciais ordinárias
- Equações diferenciais parciais

Resolução das equações

- Métodos analíticos
- Métodos Numéricos
- Métodos Qualitativos

Métodos Numéricos

- A solução numérica encontra uma solução particular do modelo matemático.
  - Problema de Valor Inicial
  - Problema de Valor de Contorno

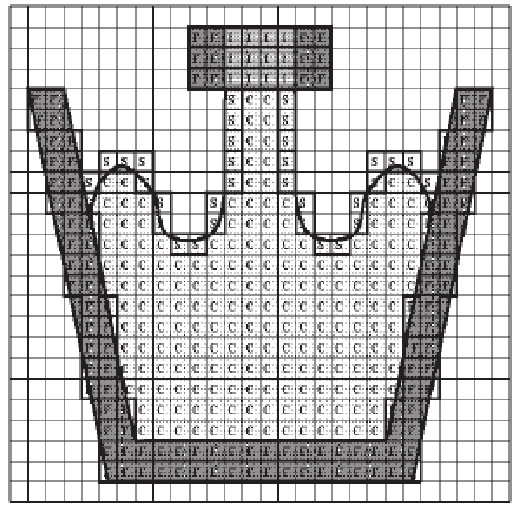
Principal característica do método numérico

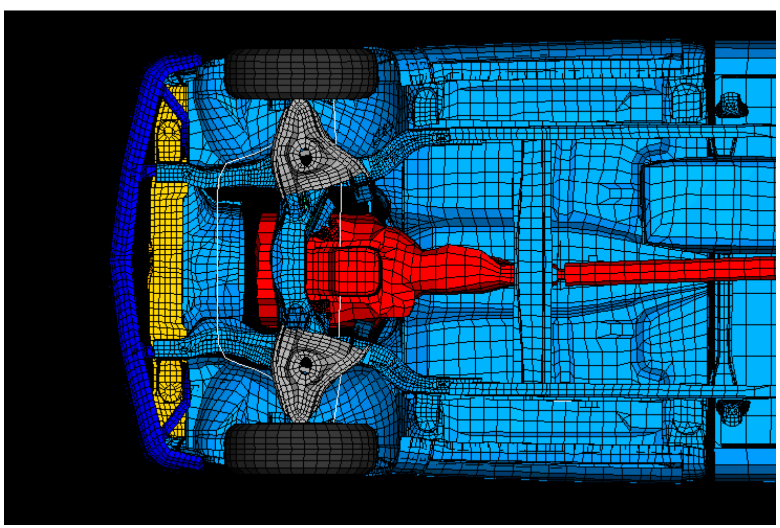
- <u>Discretização,</u> consiste em obter a solução aproximada do Problema não em um intervalo contínuo [a,b], mas sim num conjunto discreto de pontos

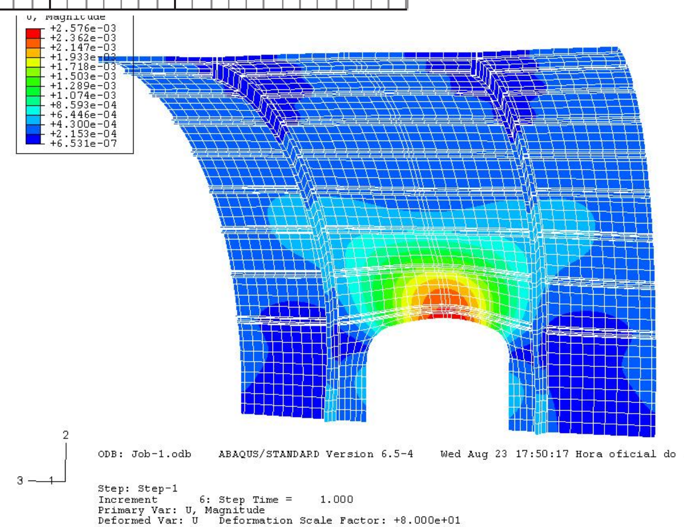
$$\{x_n / \ n = 0, \ldots , N\}$$

Discretização do Domínio.

- Malha







Equação Diferencial Ordinária

- Forma geral :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

- Ela é uma equação ordinária porque há somente uma variável independente, x. E de n-ésima ordem porque a maior derivada é de ordem n.

Principais Métodos

- Método de Euler
- Método de Taylor
- Métodos de Runge-Kutta
- Métodos Previsor-Corretor
- Métodos obtidos de Integração Numérica.

Exemplo: Sistema Massa-Mola

- O sistema massa mola livre de forças é modelado por uma EDO de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Sistema Massa-Mola

- euler

Equações Diferenciais Parciais

Forma Geral:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

$$\text{onde } u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x};\quad \cdots$$

$\nabla^2 \varphi = 0$	(Laplace)	elíptica :	$ac - b^2 > 0$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	(Onda)	hiperbólica :	$ac - b^2 < 0$
$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \nabla^2 T$	(Calor)	parabólica :	$ac - b^2 = 0$

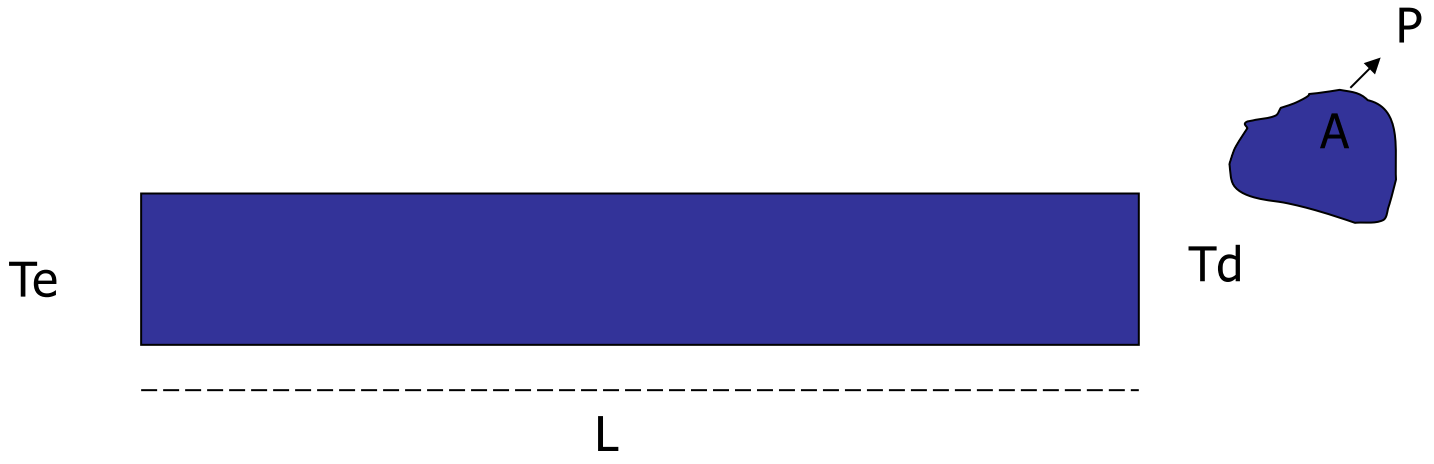
Principais Métodos

- Diferenças Finitas
  - Explicito
  - Implícito
- Elementos Finitos

Problema 1

Distribuição de temperatura para o caso de condução unidimensional em regime não permanente.

Domínio unidimensional.



Corpo isolado termicamente nas laterais, e nas pontas são mantidas as temperaturas Te e Td.
Secção transversal de área A.

Dados do Problema

- Corpo tem comprimento L=1 m,
- Difusividade térmica $\alpha = 0{,}01 m/s$
- Área da secção $A = 0{,}1 m^2$
- Perímetro P=0,05 m
- Isolado termicamente nas laterais

Equações do problema.

- Equação diferencial: $$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
- Condição inicial: $$Ti = 100 \cos\left(\frac{\pi x i}{2L}\right)$$
- Condições de contorno: $$Te = 120t$$ $$Td = 200 + 0{,}5t$$

Método de Euler Explícito:

Discretização da equação:

Considere o domínio unidimensional dividido em n partes iguais (dx), assim temos n+1 pontos.

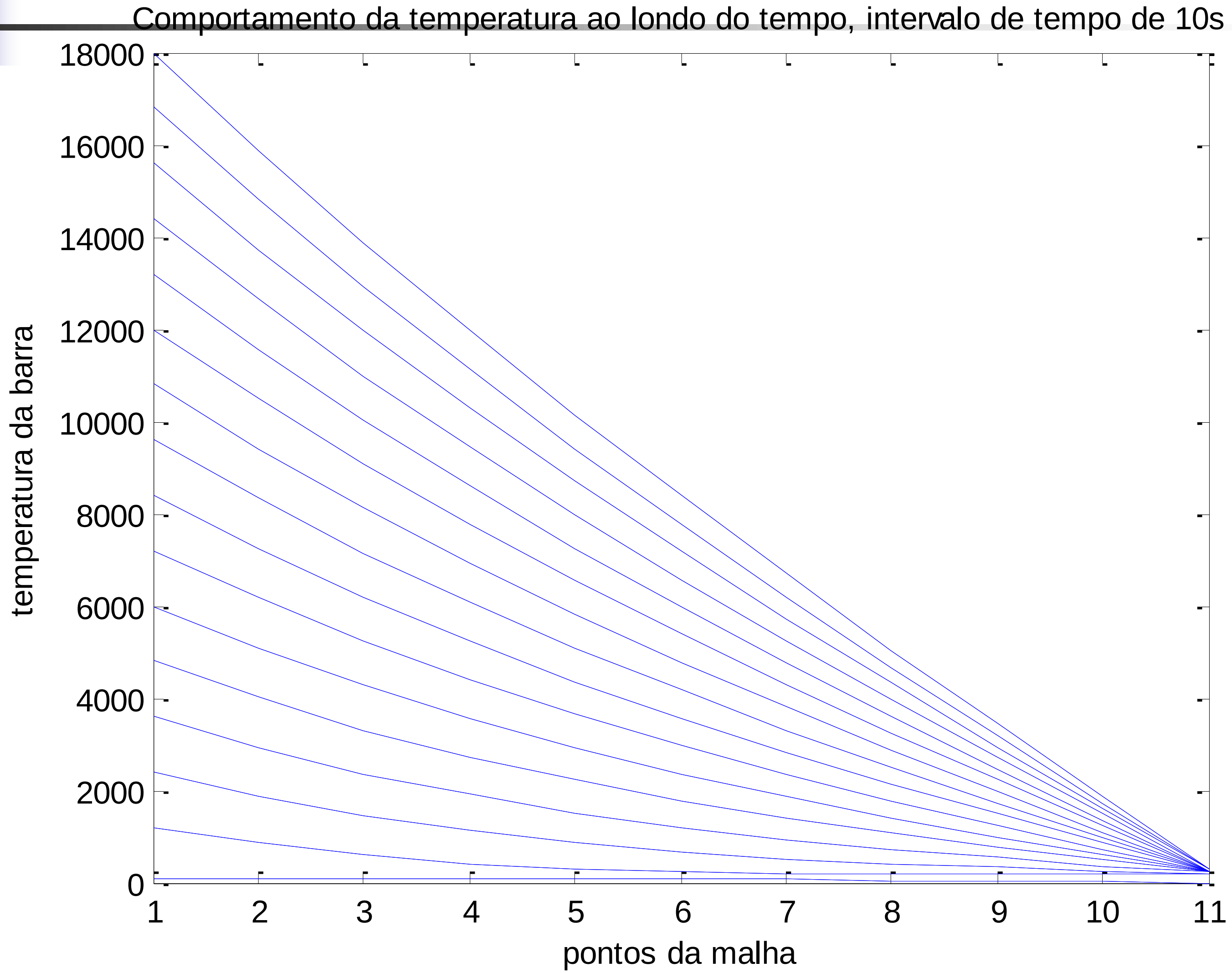
dx = L/n

Xi = dx.(i-1)   , i =1, ..., n+1

$$TN(i) = T(i) + \beta(T(i-1) - 2T(i) + T(i+1))$$

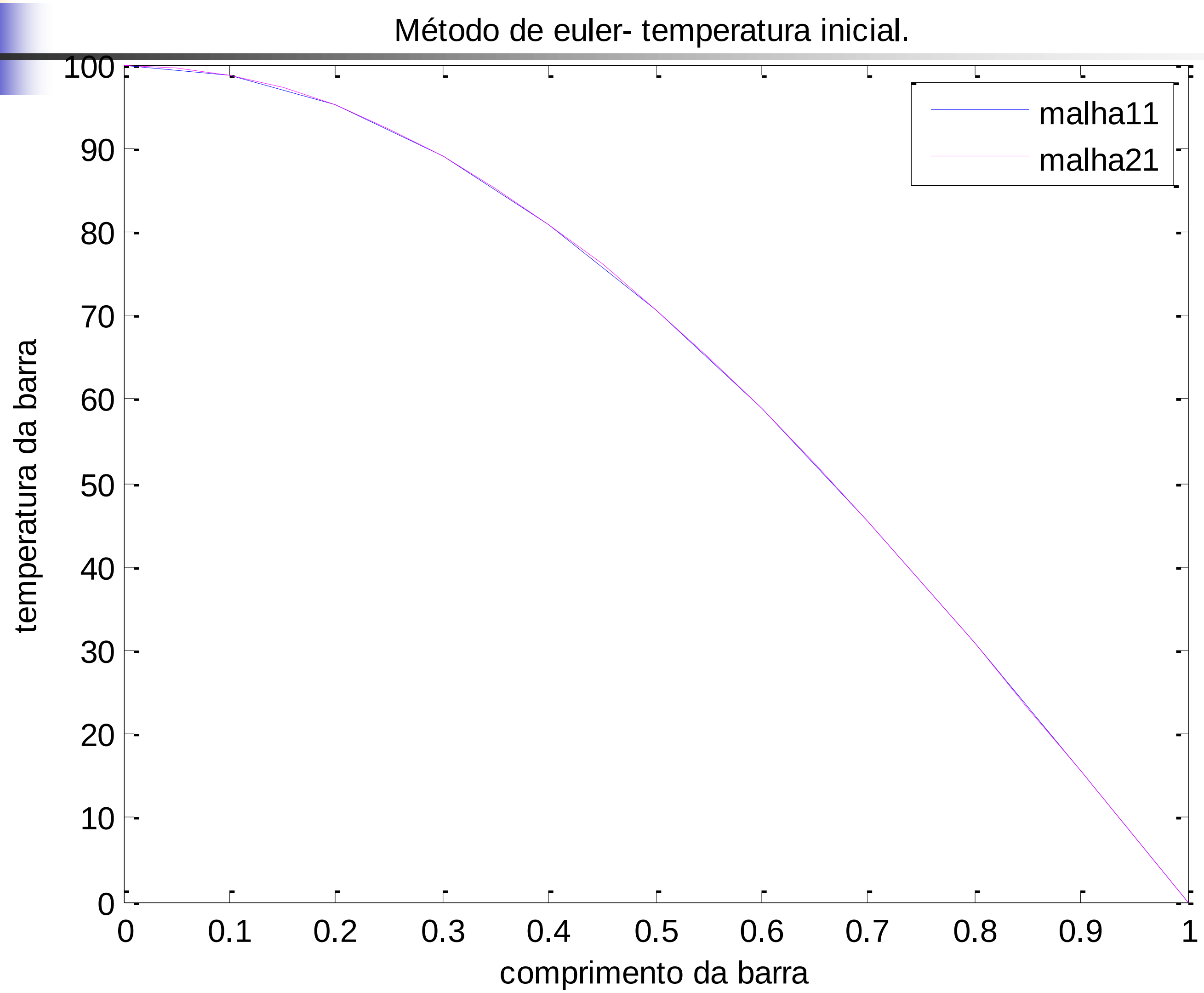
$$\beta = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

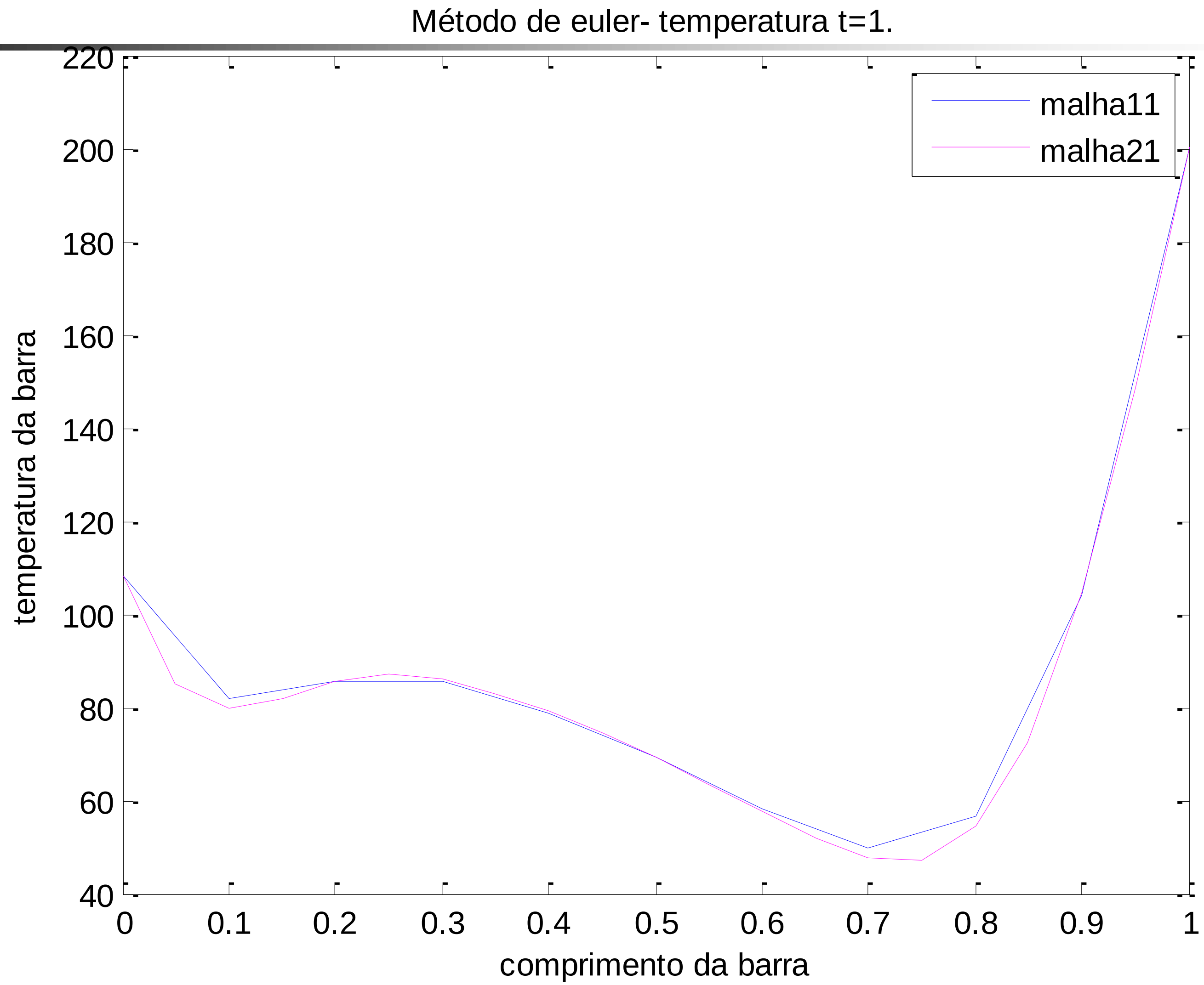
Resultados

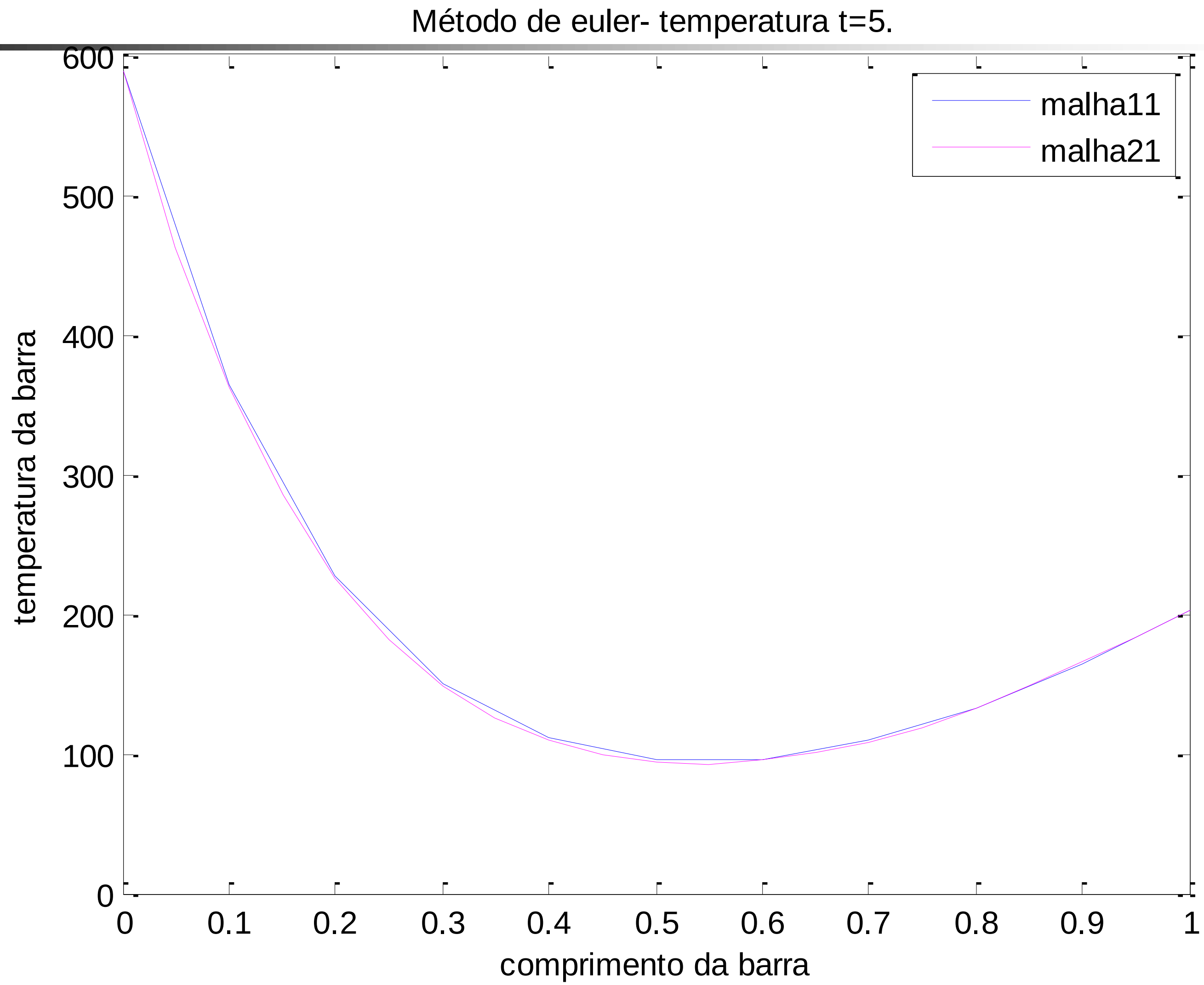


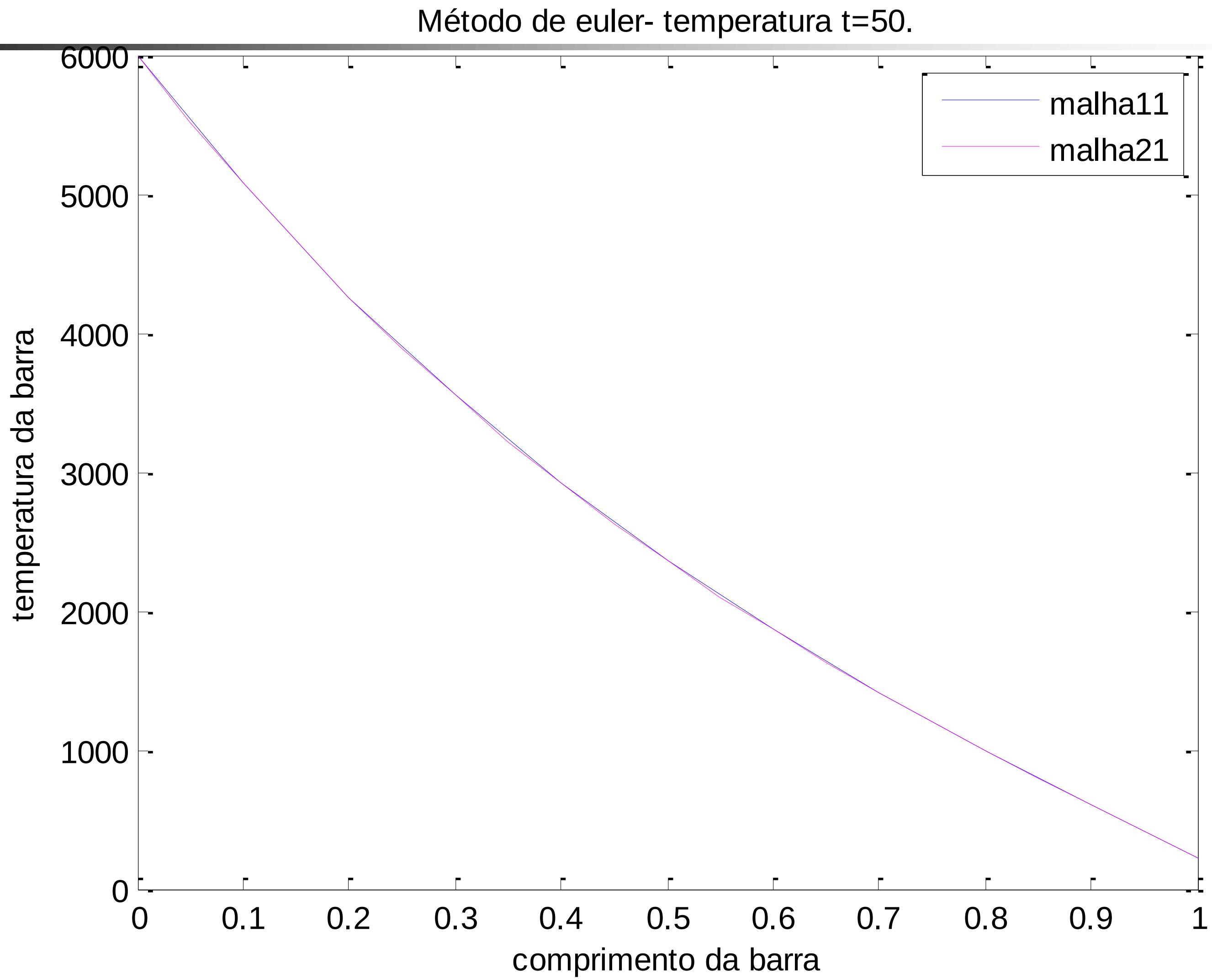
Comportamento da temperatura ao londo do tempo, intervalo de tempo de 10s
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
temperatura da barra
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
pontos da malha

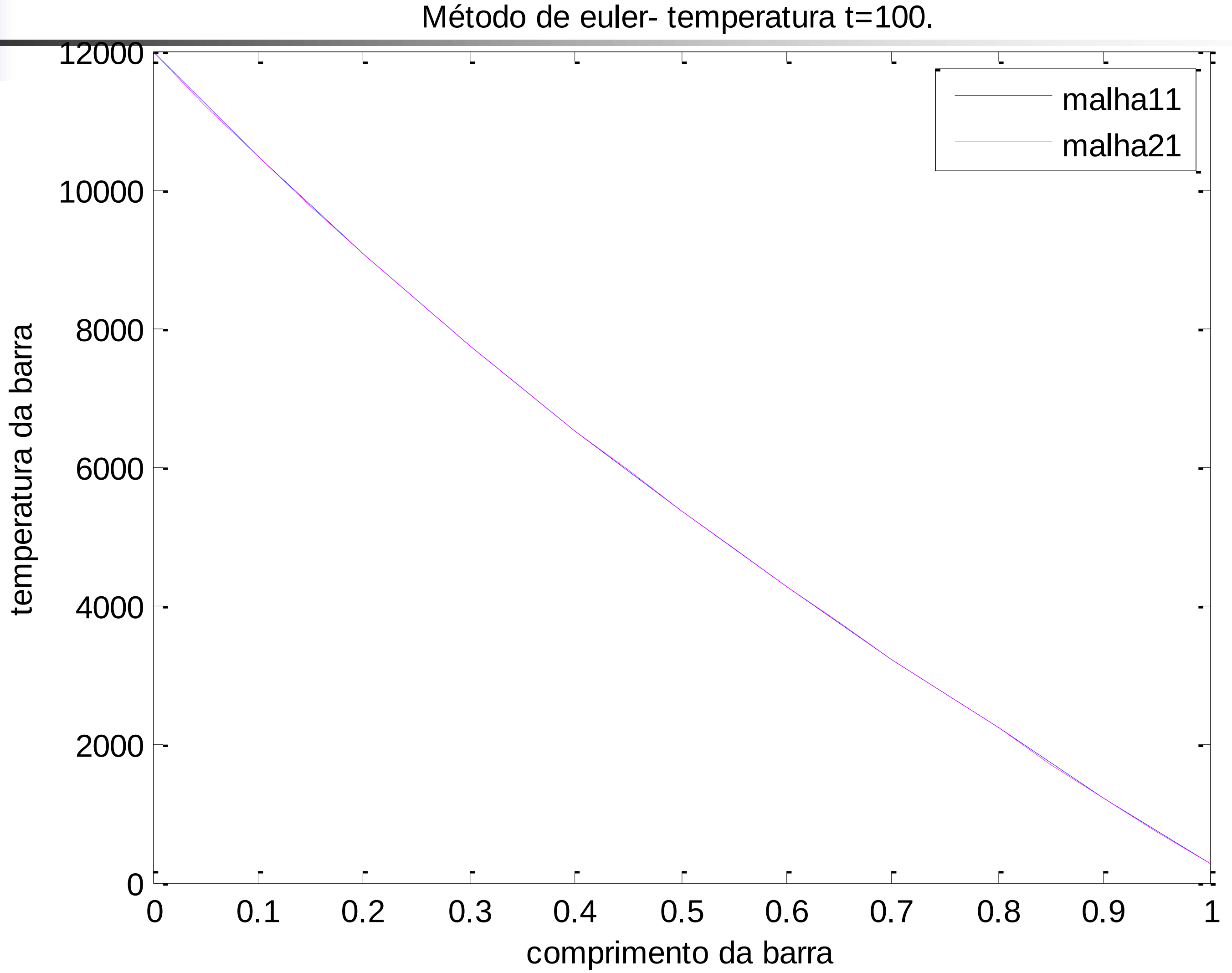
Resultados: Comparação com duas malhas diferentes.



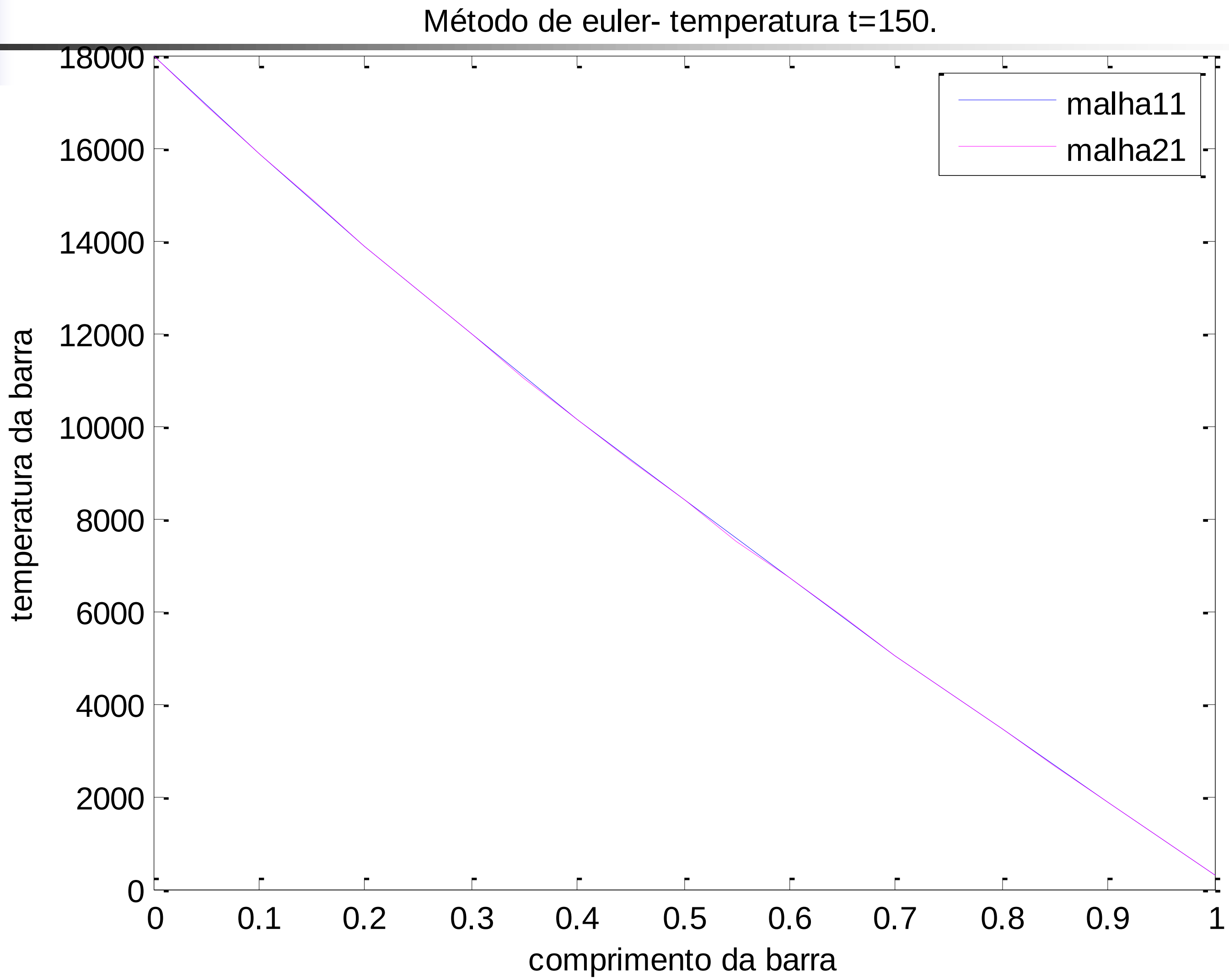

Método de euler- temperatura t=1.
malha11
malha21
temperatura da barra
comprimento da barra
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Método de euler- temperatura t=5.
malha11
malha21
temperatura da barra
comprimento da barra
0
100
200
300
400
500
600
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Método de euler- temperatura t=50.
malha11
malha21
temperatura da barra
comprimento da barra
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Método de euler- temperatura t=100.
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
temperatura da barra
comprimento da barra
malha11
malha21


Método de euler- temperatura t=150.
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
temperatura da barra
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
comprimento da barra
malha11
malha21

Método Implícito

Discretização da equação:

Considere o domínio unidimensional dividido em n partes iguais (dx), assim temos n+1 pontos.

dx = L/n

Xi = dx.(i-1)   , i =1, ..., n+1

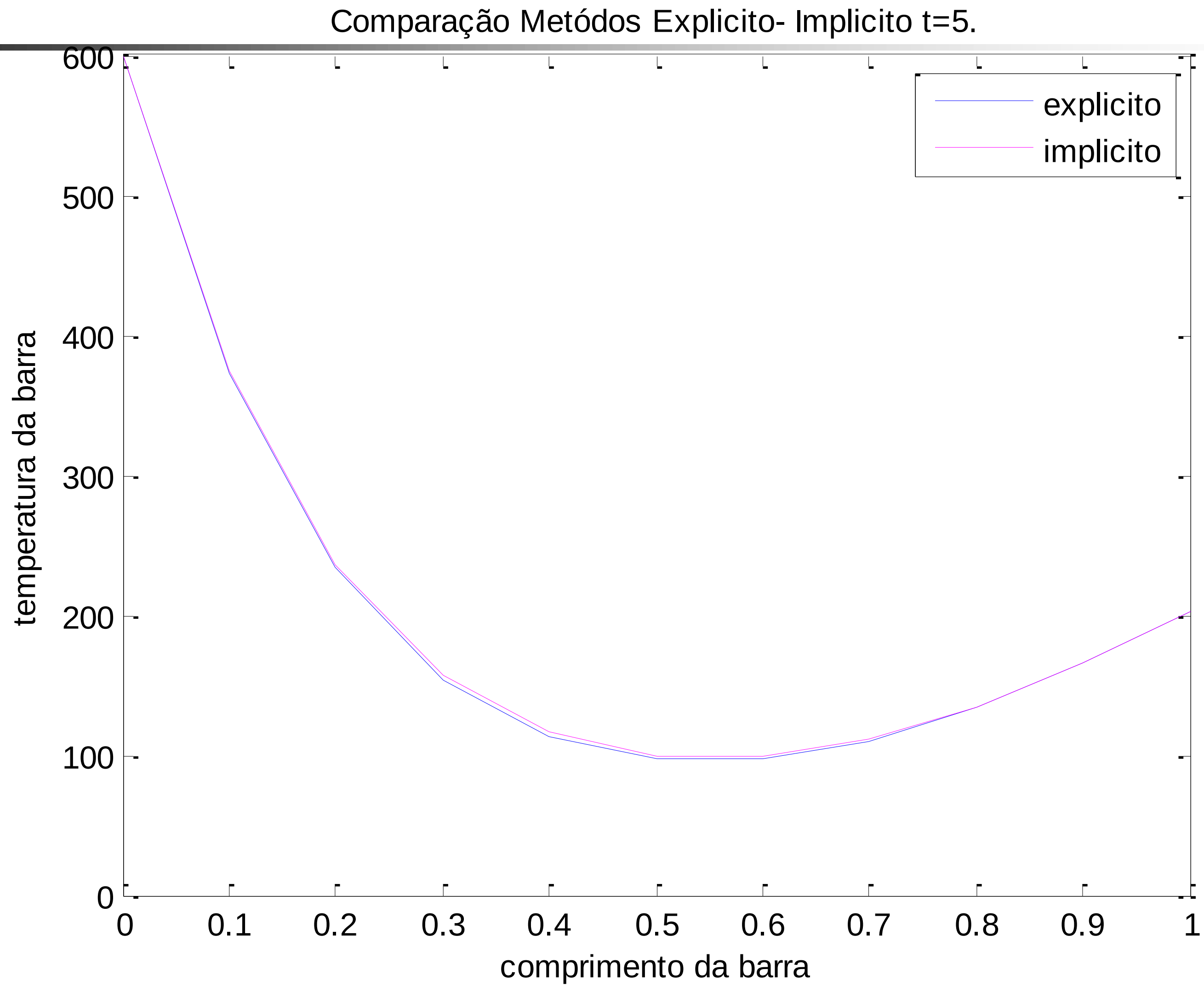
$$-\beta T(i-1)+(1+2\beta)T(i)-\beta T(i+1)=TI(i)$$

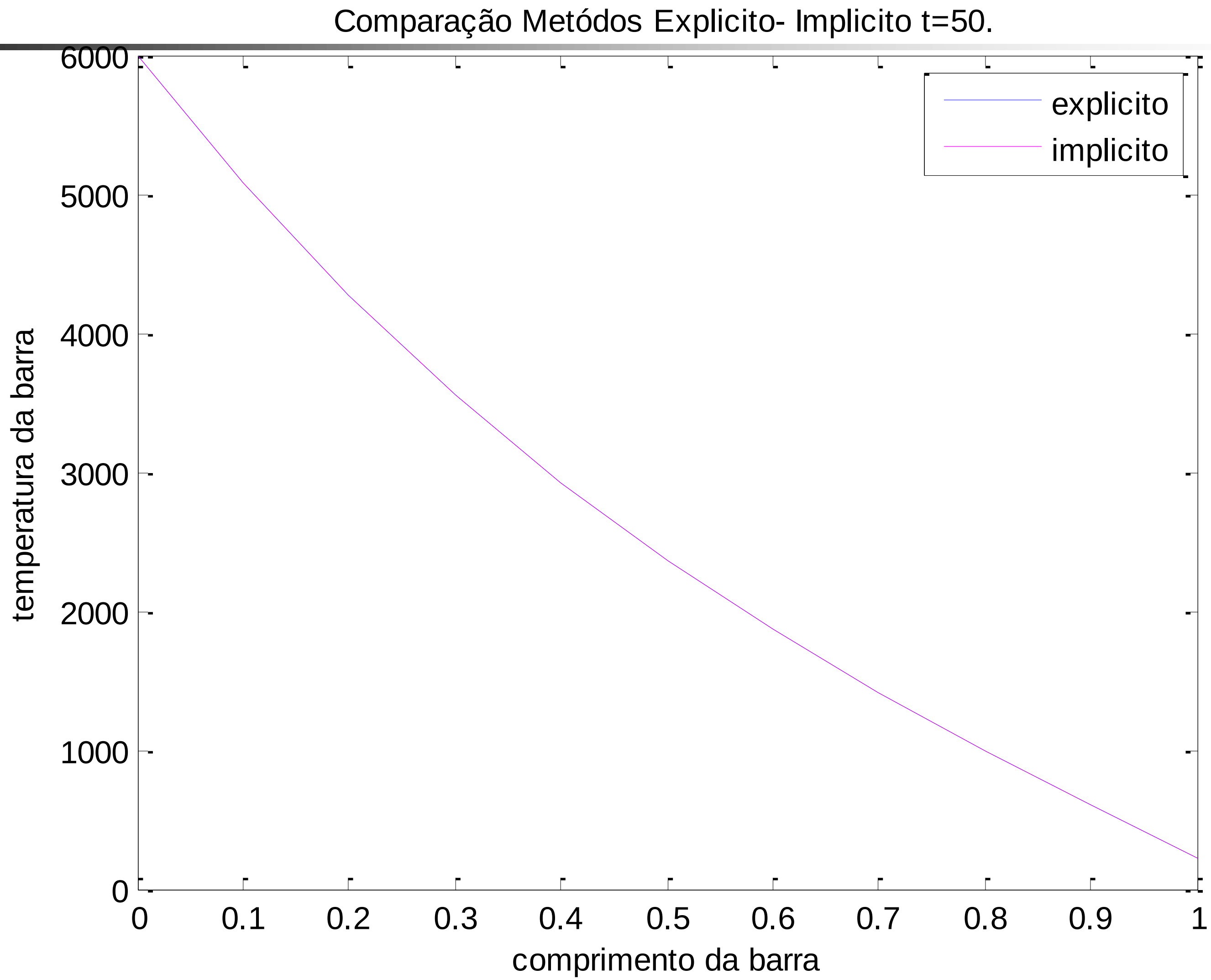
Matriz gerada pelo método implícito.

$$\begin{bmatrix} (1+2\beta) & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & (1+2\beta) & -\beta & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta & (1+2\beta) & -\beta & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & -\beta & (1+2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(2) \\ T(3) \\ T(4) \\ \vdots \\ T(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TI(2)+\beta G0 \\ TI(3) \\ TI(4) \\ \vdots \\ TI(M)+\beta G1 \end{bmatrix}$$

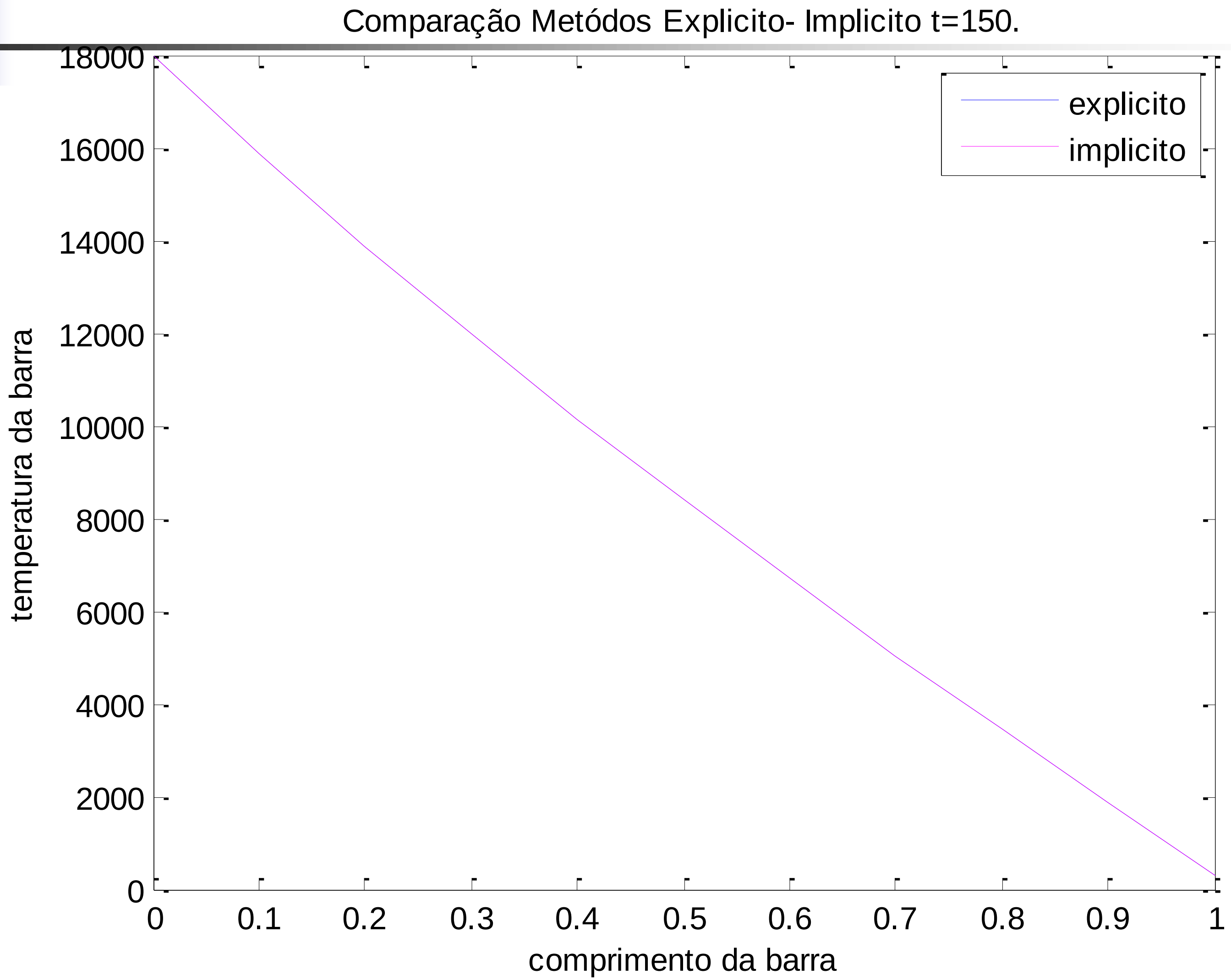
$$\beta G0,\ \beta G1 - Condições\ de\ Contornc$$

Resultados: Comparação entre os métodos explícitos e implícitos.





Comparação Metódos Explicito- Implicito t=50.
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
temperatura da barra
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
comprimento da barra
explicito
implicito


Comparação Métodos Explicito- Implicito t=150.
explicito
implicito
temperatura da barra
comprimento da barra
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

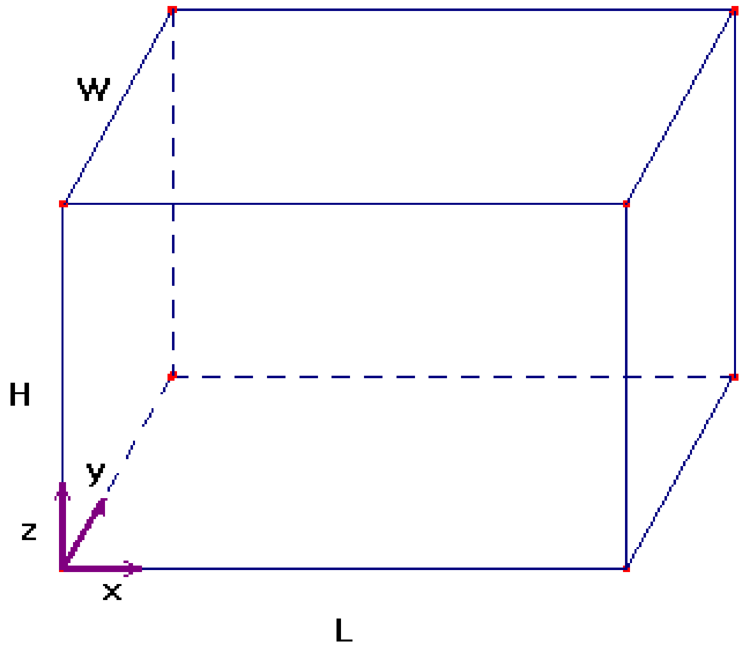
Problema 2

Distribuição de temperatura para o caso de condução tridimensional.

Utilizando o método explícito de diferenças finitas.

Desenvolvido para malha não uniforme.

Domínio Tridimensional.



Dados do Problema

- Dimensões
  - 1) L = M = W = 0,2
  - 2) L=0,2, M=0,1 , W=0,15
- Difusividade térmica $\alpha = 0{,}01 m/s^2$
- Temperaturas para os planos:
  - Plano xy = 100 ^{0}C
  - Nos outros = 20 ^{0}C

Equações do problema.

- Equação diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + Q$$

- Condição inicial: $Ti = 0$

Método de Euler Explícito:

Discretização da equação:

dx = L/n , dy =H/n , dz = W/n

$$
\begin{aligned}
TN(i,j,k) = {} & (1-2(\beta x+\beta y+\beta z))T(i,j,k) + \\
& \beta x(T(i-1,j,k)+T(i+1,j,k)) + \\
& \beta y(T(i,j-1,k)+T(i,j+1,k)) + \\
& \beta z(T(i,j,k-1)+T(i,j,k+1))
\end{aligned}
$$

$$\beta x = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2},\ \beta y = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2},\ \beta z = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}$$