XMAC02
Métodos Matemáticos para Análise de Dados

Aula 23 – Resolução de Sistemas Lineares

Regressão Linear

- Sistemas lineares no formato triangular são fáceis de resolver

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad \text{a} \\ y + 3z &= 5 \quad \text{b} \\ 5z &= 10 \quad \text{c} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}}$$

- A solução é feita por substituição
  - Começamos coma a equação c:
    - z = 10/5 = 2
  - Em seguida usamos o valor de z na equação b:
    - y + 3z = y + 3(2) = y + 6 = 5, então y = 5 – 6 = –1
  - Finalmente, usamos os valores de y e z na equação a:
    - x – y – z = x – (–1) – 2 = x – 1 = 2, então x = 2 + 1 = 3

Sistemas equivalentes

- Nosso objetivo é chegar a um sistema linear no formato triangular
- Para tanto, podemos realizar as seguintes operações de forma a obter um sistema equivalente triangular:
  - Trocar a posição das equações
  - Multiplicar uma equação por uma constante diferente de zero
  - Multiplicar uma equação por uma constante e adicionar essa equação a outra equação

Sistemas equivalentes
Exemplo

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \quad (a) \\ x - 3y &= -3 \quad (b) \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}}$$

- Multiplicar eq. b por -2:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \quad (a) \\ -2x + 6y &= 6 \quad (b) \end{aligned}$$

- Adicionar eq. a na eq. b:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \quad (a) \\ 7y &= 14 \quad (b) \end{aligned}$$

- Solucionar eq. b: $y = 14/7 = 2$

- Solucionar eq. a: $2x + y = 2x + 2 = 8$ e $2x = 8 - 2 = 6$

$$x = 6/2 = 3$$

Solução gráfica

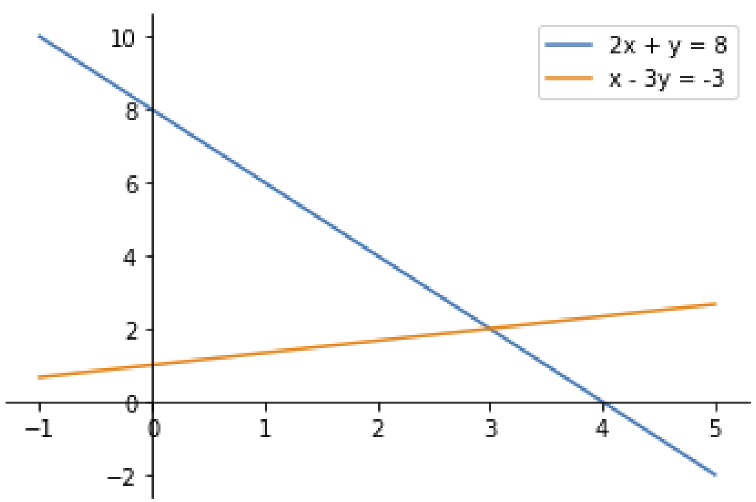
- Podemos visualizar a solução de um sistema linear de duas variáveis x e y:

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 8 \quad \text{a}\\
x - 3y &= -3 \quad \text{b}
\end{aligned}
$$

- Podemos reescrever a e b da seguinte forma:

$$y = -2x + 8$$

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$



Solução é a intersecção

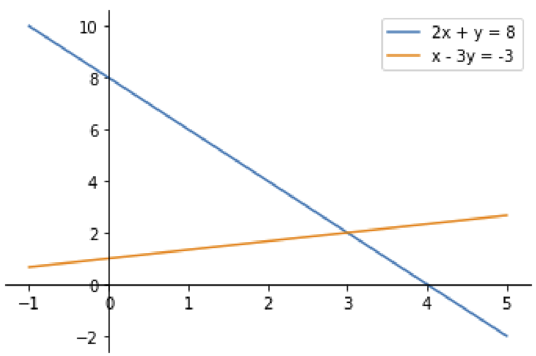
(x, y) = (3, 2)

Sistemas Lineares

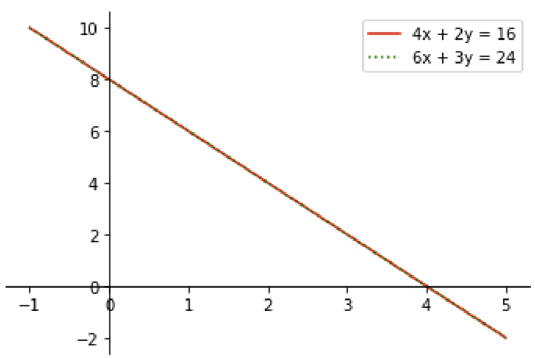
Um sistema linear pode ter

- Solução única
- Soluções infinitas
- Nenhuma solução

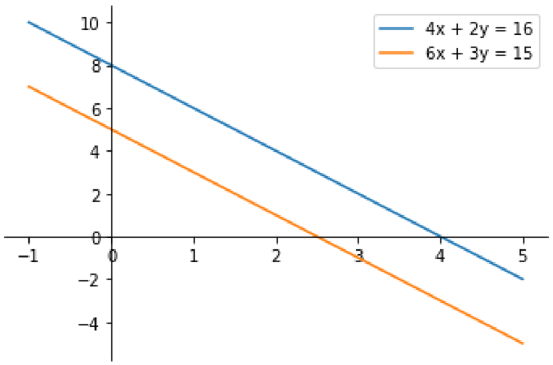
Um sistema linear é dito consistente se tiver pelo menos uma solução e inconsistente se não tiver nenhuma solução.



Solução única



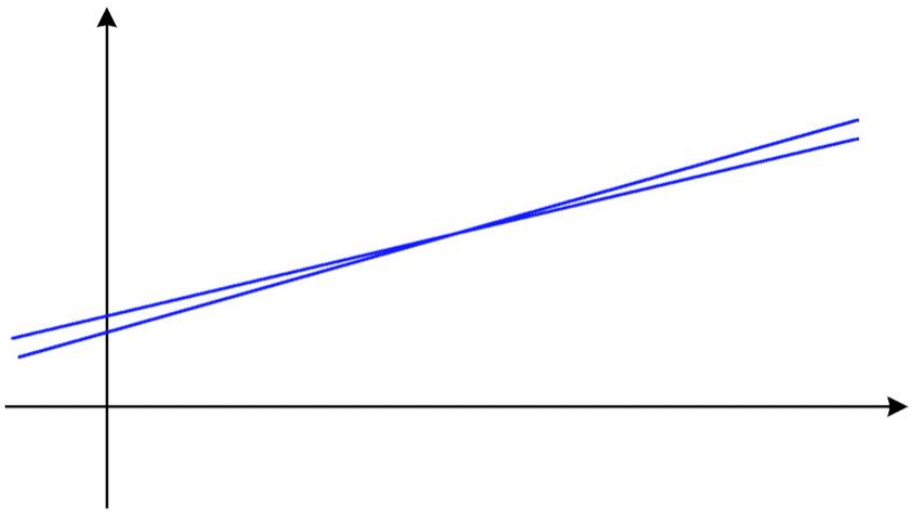
Soluções infinitas



Nenhuma solução

Sistemas mal condicionados

- Um sistema é dito mal condicionado quando pequenas mudanças nos coeficientes resultam em grandes mudanças na solução



Sistemas Lineares
Solução

- Podemos resolver um sistema de equações lineares utilizando uma matriz aumentada
- Exemplo:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad \text{a} \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \quad \text{b} \\ 2x - y + z &= 9 \quad \text{c} \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

- Vamos começar eliminando x das equações b e c

Sistemas Lineares
Solução

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad (a) \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \quad (b) \\ 2x - y + z &= 9 \quad (c) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Subtraia 3x equação a da equação b:

Subtraia 3x a primeira linha da segunda linha:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad (a) \\ 5z &= 10 \quad (b) \\ 2x - y + z &= 9 \quad (c) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Subtraia 2x equação a da equação c:

Subtraia 2x a primeira linha da terceira linha:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad (a) \\ 5z &= 10 \quad (b) \\ y + 3z &= 5 \quad (c) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Sistemas Lineares
Solução

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad \text{a} \\ 5z &= 10 \quad \text{b} \\ y + 3z &= 5 \quad \text{c} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Permutar equações b e c:

Permutar a segunda com a terceira linha:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \quad \text{a} \\ y + 3z &= 5 \quad \text{b} \\ 5z &= 10 \quad \text{c} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Pronto, agora basta resolver a equação pelo método da substituição

Forma Escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

- Um sistema de equações lineares está pronto para ser resolvido pelo método da substituição se sua matriz aumentada estiver na forma escalonada
- Eliminação Gaussiana
  - Procedimento de reduzir uma matriz à sua forma escalonada visando solucionar um sistema de equações lineares
- Eliminação de Gauss-Jordan
  - Produz uma matriz escalonada reduzida, na qual os elementos líder são iguais a 1 e todos os demais são iguais a zero

Exercício

- Obtenha a solução para o sistema linear de preço de casas

$$
\begin{aligned}
8\beta_0 + 25\beta_1 + 16\beta_2 &= 397.000 \\
25\beta_0 + 87\beta_1 + 55\beta_2 &= 1.281.100 \\
16\beta_0 + 55\beta_1 + 36\beta_2 &= 817.700
\end{aligned}
$$

Créditos

- Este conteúdo é uma tradução do original em inglês produzido pelo Prof. Ronald Mak (SJSU).