XMAC02
Métodos Matemáticos para Análise de Dados

Aula 05 – Probabilidade

Probabilidade

- Probabilidade clássica
  - Probabilidade é calculada sem realizar nenhum experimento
  - Não é necessário realizar um experimento para calcular a probabilidade de sair cara (ou coroa) num jogo de moeda, basta fazer

$$\frac{\text{Número de casos do evento}}{\text{Número total de casos possíveis}}$$

Probabilidade

- Probabilidade de frequência (ou empírica)
  - Um experimento é realizado primeiro e a partir dos resultados é calculada a probabilidade de ocorrência
  - Vamos checar o leitor biométrico de abertura da porta do laboratório e verificar a probabilidade de atraso no início de uma aula.

$$\frac{\text{Número de vezes que o evento ocorreu}}{\text{Número total de eventos}}$$

Termos/Definições

- Experimento aleatório
  - Ação realizada com a expectativa de um resultado
    - Rolar um dado
- Evento
  - Resultado de um experimento
    - Face 5 obtida após a rolagem
- Espaço amostral
  - Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório
    - Faces 1 2 3 4 5 6

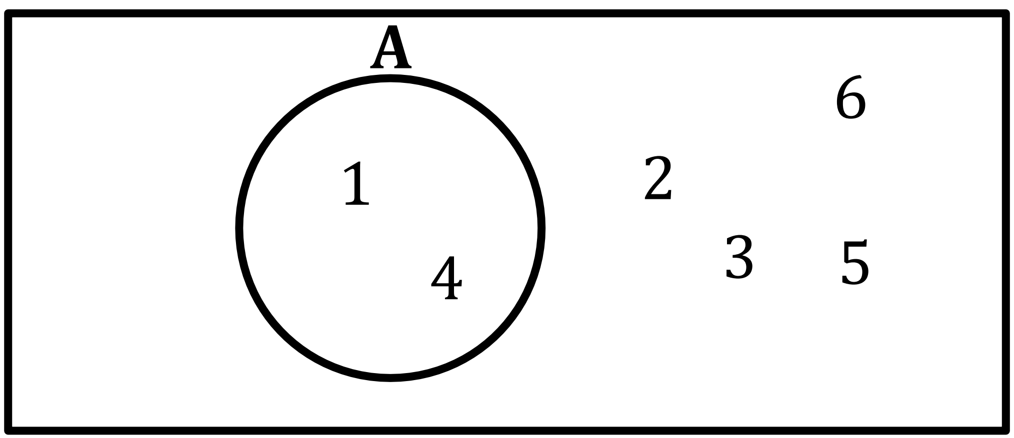
Termos/Definições

- Espaço amostral rolagem de 2 dados

$$
\begin{aligned}
\{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\
&(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\
&(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\
&(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\
&(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\
&(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6),\}
\end{aligned}
$$

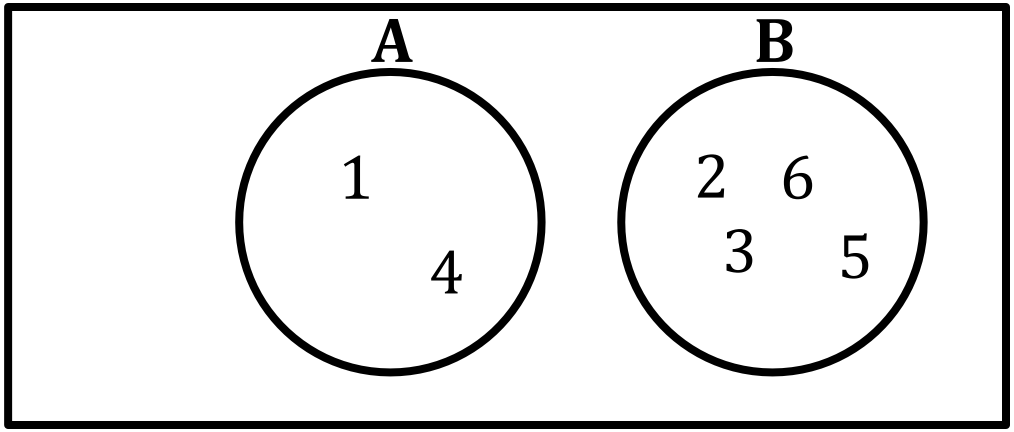
Termos/Definições

- Diagrama de Venn
  - Útil para exibir eventos e espaços amostrais
  - Exemplo
    - Evento A: Probabilidade de obter 1 ou 4 na rolagem de um dado



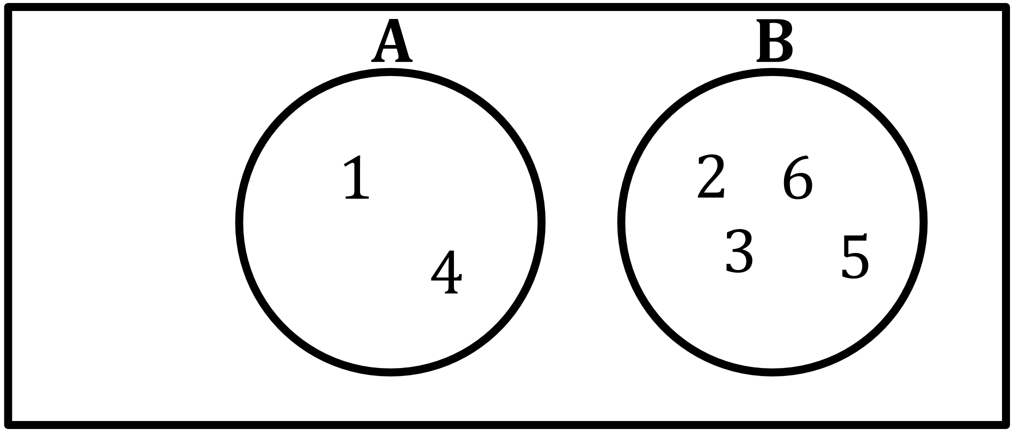
Termos/Definições

- Diagrama de Venn
  - Exemplo 2
    - Evento A: Probabilidade de obter 1 ou 4 na rolagem de um dado
    - Evento B: Probabilidade de obter 2, 3, 5 ou 6



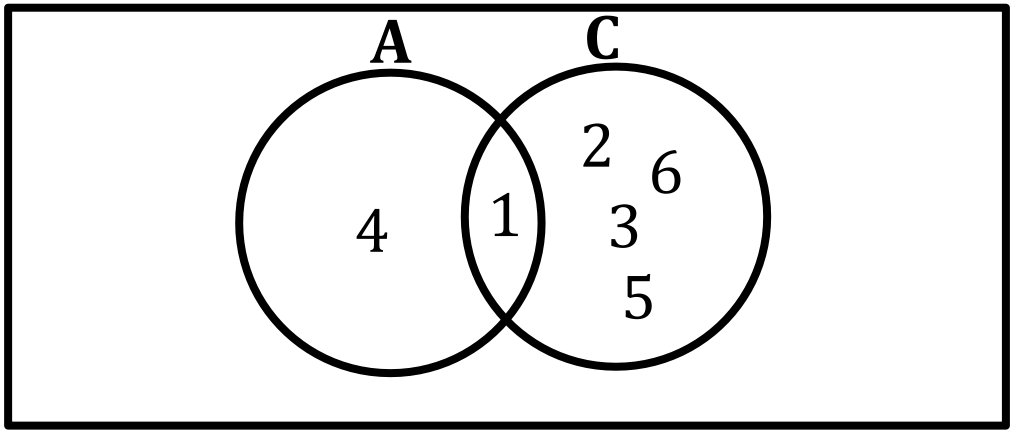
Termos/Definições

- Diagrama de Venn
  - A e B são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, não podem ocorrer ao mesmo tempo



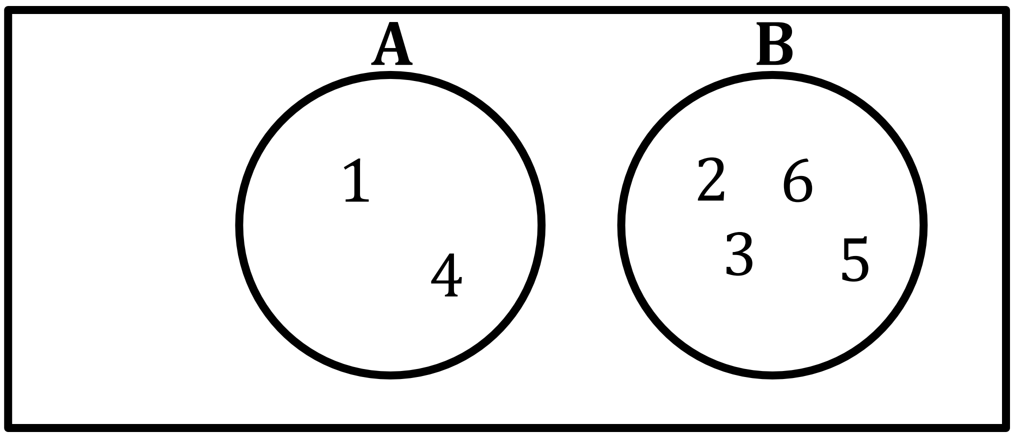
Termos/Definições

- Diagrama de Venn
  - Considere agora os eventos A e C
    - Evento A: probabilidade de sair 1 ou 4 na rolagem
    - Evento C: probabilidade de sair 1, 2, 3, 5 ou 6
    - Neste caso, A e C <u>não</u> são mutuamente exclusivos



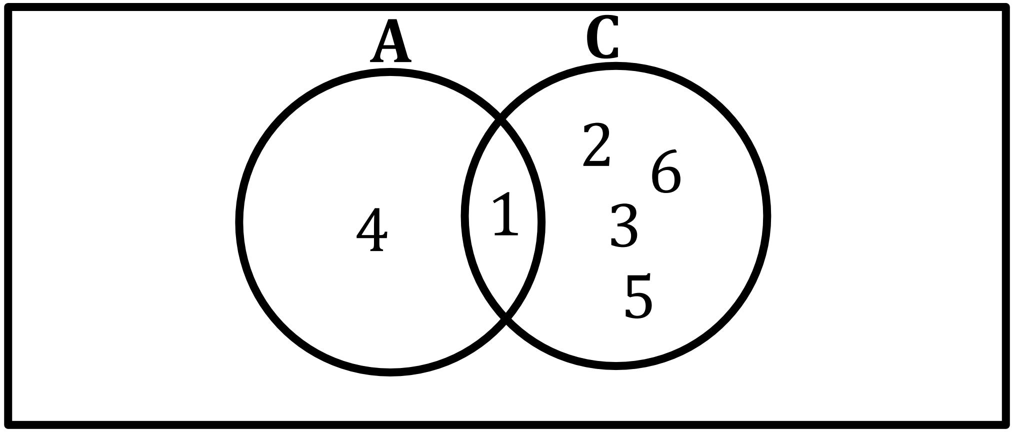
Termos/Definições

- União
  - Probabilidade de A <u>ou</u> B ocorrer
  - P(A U B)
  - {1, 2, 3, 4, 5, 6}



Termos/Definições

- Intersecção
  - Probabilidade de A e C ocorrer
  - $P(A \cap C)$
  - {1}

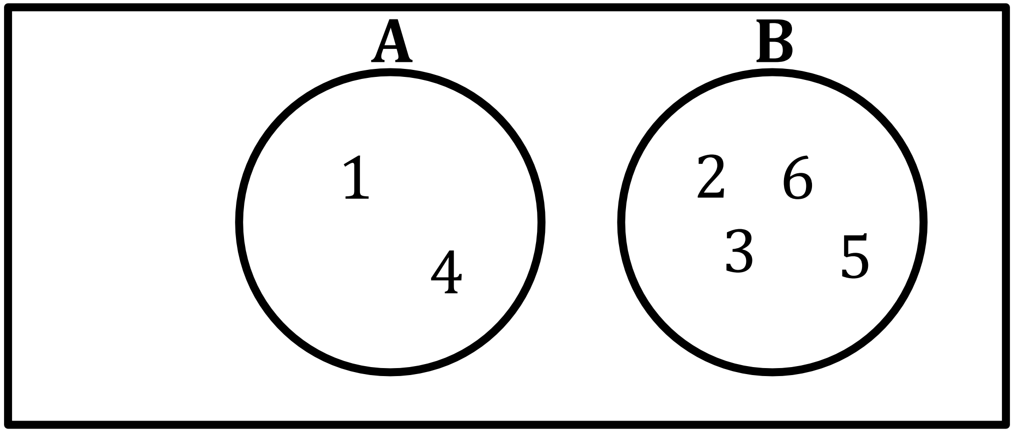


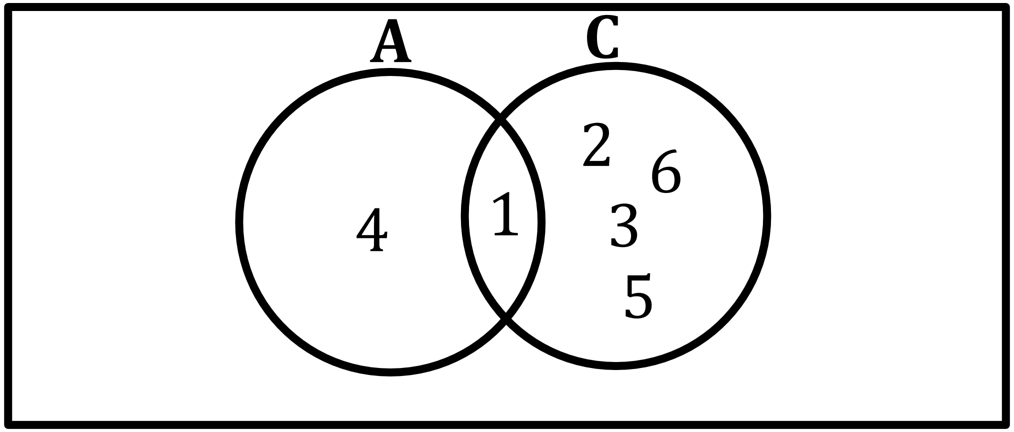
Tipos de Eventos

- Eventos mutualmente exclusivos
- Eventos independentes
- Eventos complementares

Eventos mutualmente exclusivos

- São eventos que não podem ocorrer simultaneamente





Eventos independentes

- A ocorrência do evento A <u>**não modifica**</u> a probabilidade de ocorrência do evento B.
- Vamos considerar que os eventos A e B sejam dois lançamentos de uma moeda (cara/coroa)
  - $P(A) = 0{,}5$
  - $P(B) = 0{,}5$
  - Ou seja, o evento A não afeta o evento B

Eventos dependentes

- A ocorrência do evento A <u>modifica</u> a probabilidade de ocorrência do evento B.
- Considere uma jarra contendo 3 bolas: 1 azul e duas verdes. Agora os eventos consistem em retirar uma bola da jarra, sem retorná-la após a retirada.
- Qual a probabilidade de obtermos duas bolas verdes?
  - $P(G_1) = 2/3$
  - $P(G_2) = 1/3$

Regra da multiplicação

- A probabilidade que os eventos A <u>e</u> B ocorram =

  A probabilidade que o evento A ocorra

  X

  A probabilidade que o evento B ocorra, dado que A ocorreu

  - $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$

Regra da multiplicação

- Qual é a probabilidade de obtermos duas caras ao jogarmos uma moeda duas vezes?
- Como visto anteriormente, jogar uma moeda é um evento independente, portanto:
  - $P(B|A) = P(B)$
- Assim,
  - $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$
  - $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
  - $P(A \cap B) = 0{,}5 * 0{,}5 = 0{,}25$

Regra da multiplicação

- Qual é a probabilidade de obtermos duas faces 6 ao rolarmos um dado duas vezes?
- Neste caso, temos novamente eventos independentes, então:
  - $P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$
  - $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$
  - $P(A \cap B) = 1/6 * 1/6 = 1/36$
  - $P(A \cap B) = 1/36 = 0{,}027$

Regra da multiplicação

- Qual é a probabilidade de obtermos duas bolas verdes de um jarro que contém uma bola azul e duas verdes?
- Neste caso, os eventos são dependentes, então:
  - $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$
  - $P(A \cap B) = 2/3 * 1/3$
  - $P(A \cap B) = 0{,}66 * 0{,}33 = 0{,}22$

Regra da multiplicação

- Vejamos outro exemplo de eventos dependentes: suponha que eu tenha 10 doces num prato (4 verdes, 3 amarelos, 2 laranjas e 1 vermelho). Se eu pegar aleatoriamente 2 doces, qual a probabilidade de obter dois amarelos?
  - $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$
  - $P(A \cap B) = 3/10 * 2/9$
  - $P(A \cap B) = 0{,}3 * 0{,}22 = 0{,}067$

Regra da adição

- A probabilidade que os eventos A <u>ou</u> B ocorram =

  A probabilidade que o evento A ocorra

  +

  A probabilidade que o evento B ocorra

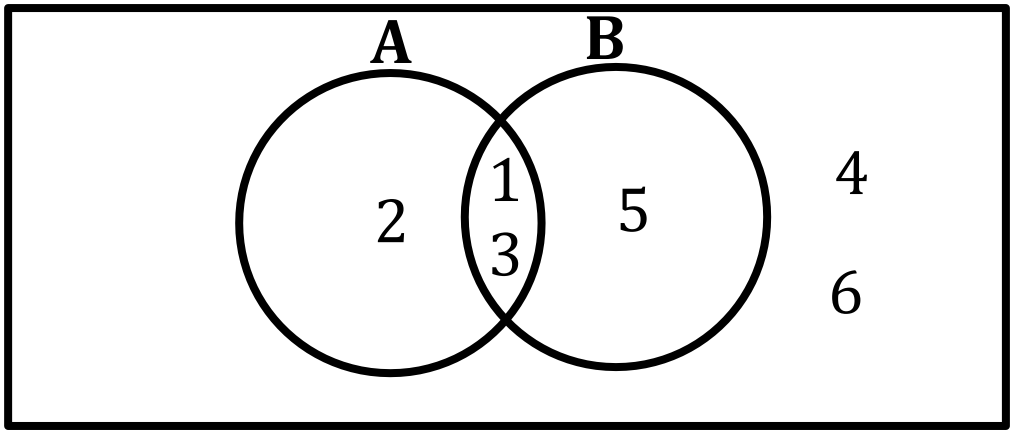
  -

  A probabilidade que ambos A e B ocorram

  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regra da adição

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = 3/6 + 3/6 - 2/6 = 4/6 = 2/3 = 0{,}66$

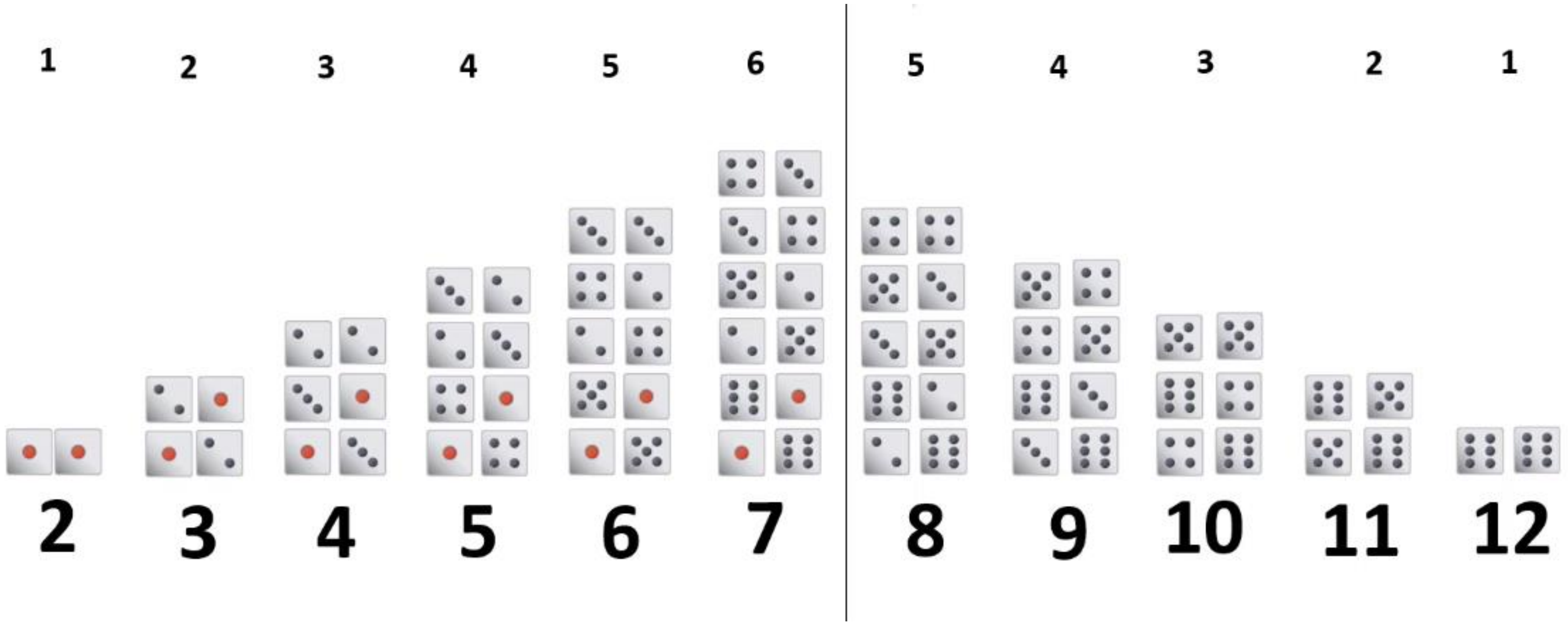


Exercício

- Se eu jogar dois dados, qual é a probabilidade de que a soma dos números obtidos seja maior que 7?

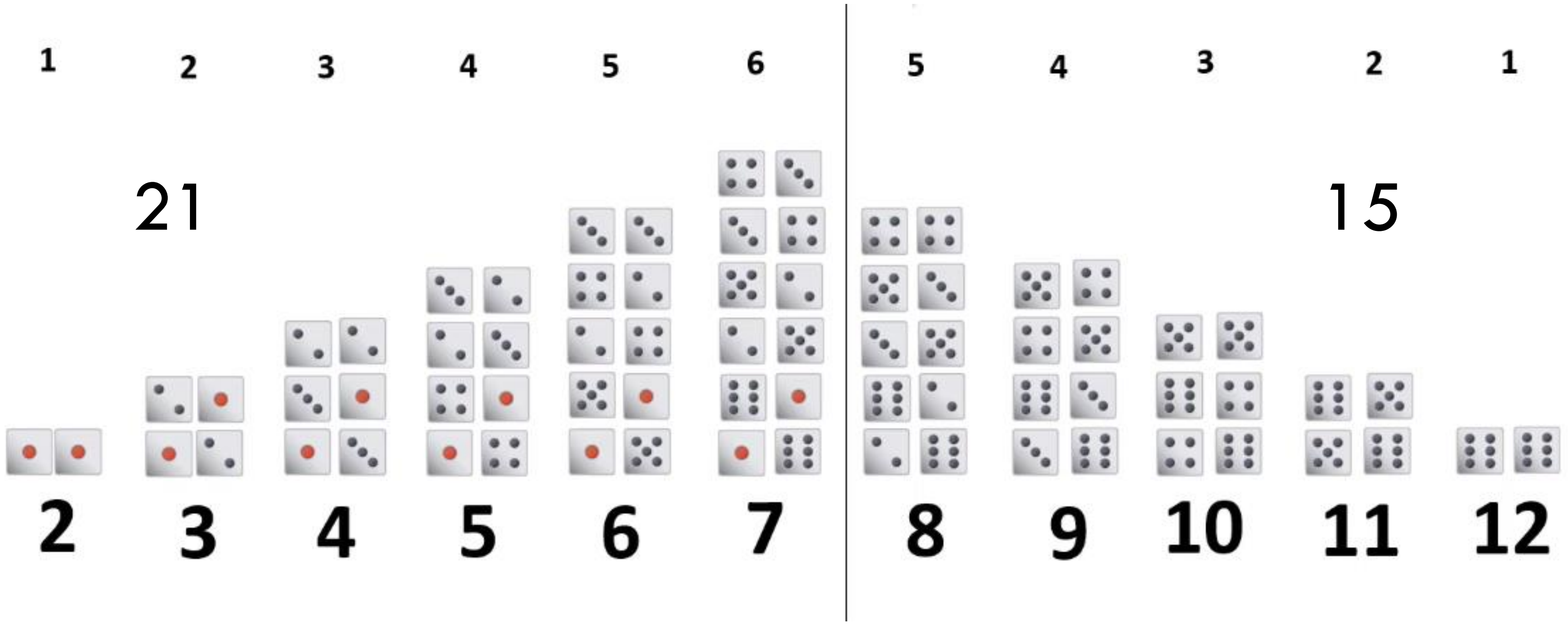
Exercício

- Regra da adição



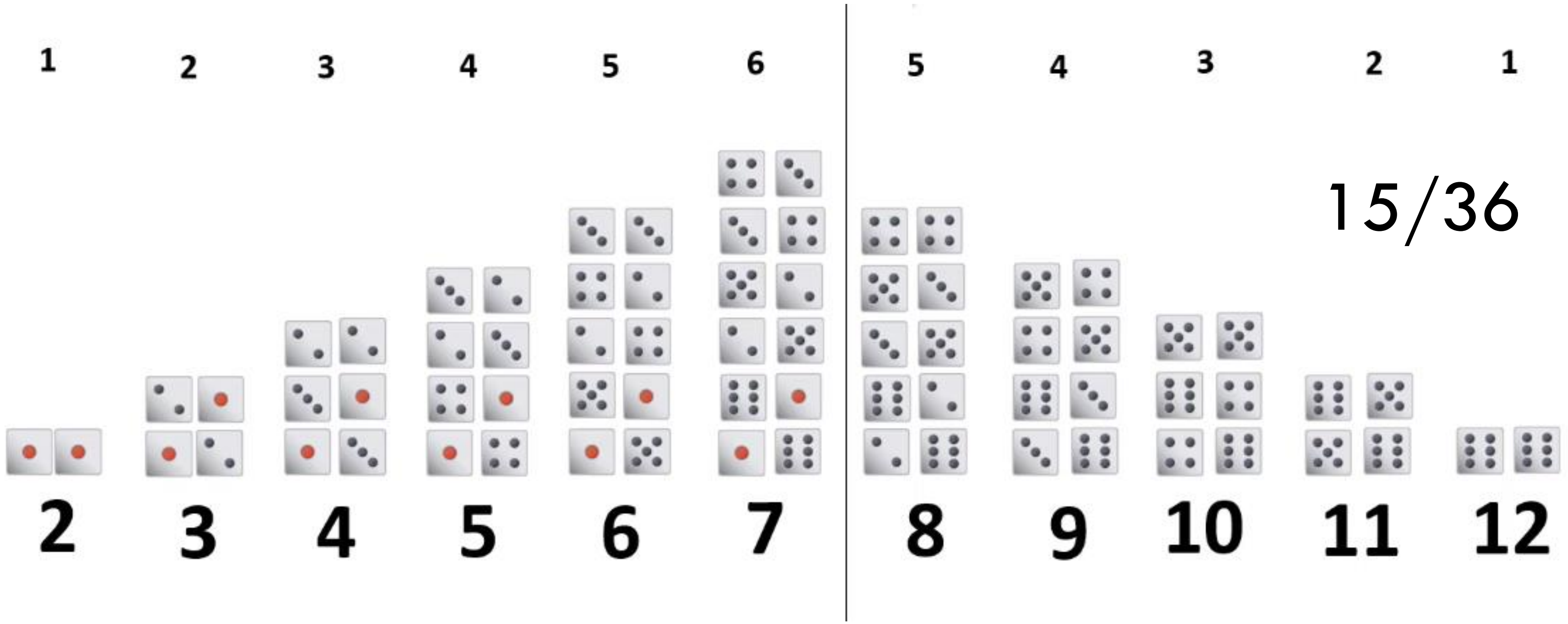
Exercício

- Regra da adição



Exercício

- Regra da adição



Exercício

{6,1}	{6,2}	{6,3}	{6,4}	{6,5}	{6,6}
{5,1}	{5,2}	{5,3}	{5,4}	{5,5}	{5,6}
{4,1}	{4,2}	{4,3}	{4,4}	{4,5}	{4,6}
{3,1}	{3,2}	{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
{2,1}	{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}

$15/36 = 0{,}4166$

Permutação e Combinação

- Permutação
  - Conjunto de objetos no qual a posição (ou ordem) dentro do conjunto é <u>relevante</u>

- Combinação
  - Conjunto de objetos no qual a posição (ou ordem) é <u>irrelevante</u>

Permutação e Combinação

	Sem repetição	Código Python
Permutação	$n_{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	import math math.perm(5,3)
Combinação	$n_{C_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$	import math math.comb(5,3)

Permutação com repetição

- No caso desse cadeado, o número total de permutações é
- 10 x 10 x 10 x 10 = 10.000

$$n^r$$

Permutação sem repetição

- De quantas formas é possível formar uma comissão selecionando 3 pessoas de um grupo de 5, de tal forma que a primeira selecionada seja presidente, a segunda seja vice e a terceira seja secretária?
  - Neste caso a ordem importa e não é permitido repetição

$$n_{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\mathbf{5}_{P_\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{5}!}{(\mathbf{5}-\mathbf{3})!} = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = 60$$

Combinação sem repetição

- De quantas formas é possível selecionar 3 pessoas de um grupo de 5?

$$n_{C_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,\mathrm{r}!}$$

$$\mathbf{5}_{\boldsymbol{C}_3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!}$$

$$\mathbf{5}_{\boldsymbol{C}_3} = \frac{5 \text{ x } 4 \text{ x } 3}{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} = \mathit{10}$$

Combinação com repetição

- Num mercado existem 5 sabores de suco de caixinha. Você deseja comprar 3 caixinhas. Quantas combinações de 3 caixinhas é possível comprar?

~~Sem repetição:~~ $\cancel{{}^{n}C_{r} = \frac{}{(n-r)!\, r!}}$

$$\frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

$$\frac{(5+3-1)!}{3!\,(5-1)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \boldsymbol{35}$$