Sistemas Lineares

Métodos Numéricos

Motivação

- Diversos problemas de engenharia podem ser resolvidos através da análise linear; entre eles podemos citar:
  - determinação do potencial em redes elétricas,
  - cálculo da tensão na estrutura metálica da construção civil,
  - cálculo da razão de escoamento num sistema hidráulico com derivações,
  - previsão da concentração de reagentes sujeitos a reações químicas simultâneas.

Motivação

- O problema matemático em todos estes casos se reduz ao problema de resolver um sistema de equações simultâneas. Também as encontramos, quando estudamos métodos numéricos para resolver problemas de equações diferenciais parciais, pois estes requerem a solução de um conjunto de equações.

Sistemas Lineares

- Um sistema linear é um conjunto de m equações, com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (1) \\
&\;\;\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- Os números a_{ij} são os coeficientes do sistema linear, e são fornecidos no problema. Os b_i's são chamados de termos independentes. Aqui estudaremos apenas os sistemas lineares que tenham tantas equações quanto incógnitas, isto é, $m = n$.

Sistemas lineares

- Notação Matricial, mais utilizada para resolução e representação dos métodos numéricos: AX=B,onde

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m11} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tipos de Soluções

- Solução única: Determinante da Matriz A é diferente de zero.
- Infinitas soluções: Determinante da Matriz A é igual a zero.
- Nenhuma solução: Determinante da Matriz A é igual a zero.

Sistemas lineares

- Os métodos que serão apresentados se aplicam a sistemas cuja Matriz A dos coeficientes tem determinante diferente de zero, isto é, o sistema possui uma única solução.

Resolução sistemas lineares

(i) **métodos diretos,** onde considerados os erros de arredondamento ou truncamento, é fornecida a solução exata do sistema a partir de um número finito de operações;

(ii) **métodos iterativos**, onde é gerada uma seqüência de vetores coluna (soluções) a partir de uma aproximação inicial x0.

Resolução de sistemas lineares

- Métodos Diretos:
  - Regra de Cramer
  - Método da matriz inversa
  - **Escalonamento (Eliminação de Gauss)**
  - **Decomposição LU**
  - **Método de Cholesky**
  - **...**

Resolução de sistemas lineares

- Métodos Iterativos:
  - **Gauss-Jacobi**
  - **Gauss-Seidel**
  - Método dos Gradientes
  - **...**

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES TRIANGULARES

Um sistema é dito triangular superior se para todo aij com i > j, tem-se aij = 0 e aii ≠ 0.

$$
\begin{array}{rcl}
a11x1 + a12x2 + a13x3 + \ldots + a1,n\text{-}1xn\text{-}1 + a1nxn & = & b1 \\
a22x2 + a23x3 + \ldots + a2,n\text{-}1xn\text{-}1 + a2nxn & = & b2 \\
a33x3 + \ldots + a3,n\text{-}1xn\text{-}1 + a3nxn & = & b3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
an\text{-}1,n\text{-}1xn\text{-}1 + an\text{-}1,nxn & = & bn\text{-}1 \\
annxn & = & bn
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES TRIANGULARES

- Algebricamente, temos:
  - Da última equação obtém-se: xn = bn/ann.
  - Da penúltima equação

  a(n-1,n-1)x(n-1) + a(n-1,n)x(n) = b(n)

  e usando o valor de xn, teremos:

  x(n – 1) = [b(n-1) – a(n-1,n)x(n)]/a(n-1,n-1).

  - Sucessivamente se obtém x(n – 2), ...x(2), x(1), onde

  x1 = [b1 – a(12)x(2) - ... - a(1,n-1)x(n-1) - a(1n)x(n)]/a(11).

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES TRIANGULARES

```
/* Resolução do sistema triangular */

x[n-1]= B[n-1][n]/B[n-1][n-1];

for(i=n-2; i>-1; i--)
 {
   S=0;
   for(k=i+1; k<n; k++)
   {
    S = S + B[i][k]*x[k];
   }
   x[i]= (-S + B[i][n])/B[i][i];
 }
```

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)

Quando o sistema não se apresenta na forma triangular utiliza-se o método de eliminação de Gauss para torná-lo triangular. Podem ser aplicadas as transformações, denominadas transformações lineares:

(1) trocar as posições das equações:

(2) multiplicar uma equação por um número real, não nulo.

(3) somar uma equação com outra multiplicada por um número real.

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)

- Considere o sistema: $Ax = C$.
  - Onde $A(nxn)$
- Faça a matriz expandida:
  - $B = A|C$, onde $B(nxn+1)$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)

- Etapa 1:
  - Pivô: b(1,1)
  - Multiplicadores:
    - m(k,1)/b(1,1), onde k = 2 ... n+1
  - Atualização das linhas:
  - Para k = 2 ... n+1
    - b(k,j) = b(k,j)-m(k,j)*b(1,j), j = 2 ... n+1

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)

- Etapa 2
  - Pivô: b(2,2)
  - Multiplicadores:
    - m(k,2)/b(2,2), onde k = 3 ... n+1
  - Atualização das linhas:

    para k = 3 ... n+1
    - b(k,j) = b(k,j) - m(k,j)*b(2,j), j = 3 ... n+1

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)

- Assim sucessivamente até a etapa n-1.
  - Pivô: b(n-1,n-1)
  - Multiplicador:
    - m(n,n-1)/b(n-1,n-1)
  - Atualização das linhas:
    - b(n,j) = b(n,j) - m(n,n-1)*b(n-1,j), j = n-1... n+1

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)

```
for(i=k+1;i<n; i++)
  {
     m = B[i][k]/B[k][k];
     B[i][k]=0;
     for(j=k+1;j<=n;j++)
      {
        B[i][j] =(B[i][j]) - (m*B[k][j]);
      }
  }
```

Estratégias de Pivoteamento.

Vimos que o algoritmo para o método de Eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik}=a_{ik}/a_{kk}$$

para isso a_{kk} não pode ser nulo.

Aconselha-se também escolher como pivô um elemento não próximo de zero, pois isto, torna - lá o multiplicador um número muito grande gerando resultados imprecisos.

Esta estratégia de pivoteamento consiste em:

- No início da etapa k da fase de eliminação, escolher como pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes.
- Trocar as linhas k e i, se for necessário.

Fatoração LU

O processo de fatoração para resolução de sistema consiste em decompor a matriz A dos coeficientes em um produto de dois fatores L e U, em seguida, resolver uma seqüência de sistemas lineares triangulares que conduzirá a solução do sistema original.

Fatoração LU

Teorema LU - Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assumimos que $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Então existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = \ldots = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tal que $LU = A$. Além disso,

$$\det(A) = u_{11}.u_{22}. \ldots .u_{nn}$$

Fatoração LU

Considere o sistema $Ax = b$, sendo A satisfazendo as condições do teorema LU. Então A pode ser decomposta em LU, e os seguintes sistemas podem ser resolvidos.

Logo, $Ax = b$ pode ser escrito como $LUx = b$, chamaremos $Ux = y$ então $Ly = b$. Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver

$Ly = b$ e em seguida $Ux = y$.

Vantagens da Fatoração LU

- Uma vez decomposta a Matriz A em LU.
  - Pode-se aplicar a resolução de sistemas lineares cuja matriz A, representa os coeficientes.
  - Aplicação em problemas que se diferenciam apenas nos termos independentes.

Cálculo dos Fatores LU

Um esquema prático para decomposição LU, é simplesmente aplicar a definição de produto e igualdade de Matrizes, isto é, impor que $A = L.U$

Exemplo.

- Resolver o sistema usando fatoração LU.

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

Fatoração LU com pivoteamento parcial

- Considere o sistema Ax = b e sejam os fatores L e U obtidos pelo processo da eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial.
- L e U são fatores da matriz A´, onde A´ é a matriz A com as linhas permutadas, isto é, A´= PA.
- Para resolver o sistema, as mesma permatações realizada sobre A deverão ser feitas sobre o vetor b, b´=Pb.

Exemplo.

- Resolver pelo método de fatoração LU com pivoteamento parcial.

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$

$$4x_1 - 3x_3 = -2$$

Resolução:

Matriz A		
3	-4	1
1	2	2
4	0	-3
Pivoteamento L1 com L3		
4	0	-3
1	2	2
3	-4	1

Etapa 1		
4	0	-3
¼	2	11/4
3/4	-4	13/4
Pivoteamento L2 com L3		
4	0	-3
3/4	-4	13/4
¼	2	11/4

Etapa 2		
4	0	-3
3/4	-4	13/4
¼	-1/2	35/8

Resolução

Matriz L		
1	0	0
3/4	1	0
¼	-1/2	1

Matriz U		
4	0	-3
0	-4	13/4
0	0	35/8

Vetor B com pivoteamento
-2
9
3

Matriz L.U		
4	0	-3
3	-4	1
1	2	2

Solução

- Ly = b´´

Matriz L		
1	0	0
3/4	1	0
¼	-1/2	1

Y
y1
y2
y3

=

b´´
-2
9
3

Y
-2
21/2
35/4

- Ux = y

Matriz U		
4	0	-3
0	-4	13/4
0	0	35/8

X
x1
x2
x3

=

Y
-2
21/2
35/4

x
1
-1
2

Método de Cholesky

- No caso em que a Matriz do Sistema linear é simétrica, podemos simplificar os cálculos da decomposição LU, levando em conta a simetria.

  - Simetria
    - Os elementos aij = aji para todo i, j com i diferente de j.

Condição para aplicar o método

- Se A é simétrica, positiva definida, então A pode ser decomposta unicamente no produto GG^T sendo G uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Positiva definida: Seja A = (aij) uma matriz quadrada de ordem n, e Ak o menor principal, constituío das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assumimos que det(Ak) > 0 para

k = 1, 2, ... , n − 1.

Esquema Prático Para a decomposição.

Um esquema prático para decomposição GG^T, é simplesmente aplicar a definição de produto e igualdade de Matrizes, isto é, impor que $A = GG^T$

Aplicação a resolução de Sistemas

- Seja Ax = b, onde A satisfaz as condições do método de Cholesky.
- A solução de Ax = b, fica reduzida à solução do par de sistemas lineares triangulares:

$$Gy = b$$

$$G^T x = y$$

Exercício

- Resolva o sistema utilizando o método de Cholesky

$$1x_1 + 1x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1$$

$$-1x_2 + 3x_3 = 5$$

Refinamento da Solução

- Os métodos exatos deveriam fornecer a solução exata dos sistema linear.
- Entretanto, devido aos erros de arredondamento obtemos, em geral, soluções aproximadas.
- Porém, podemos refinar a solução aproximada para que se aproxime da solução exata.

Refinamento da Solução

- Considere um sistema linear Ax=b de ordem n.
- Seja x = (x1, x2, ... , xn) a solução exata e

  y = (y1, y2, ... , yn) a solução aproximada.
- Então temos, x = y + c,

  sendo c = (c1,c2,...,cn) as correções que devem ser adicionadas aos valores aproximados (obtidos por um método direto) para fornecer os valores exatos.

Resíduo

- Considere o sistema $Ax=b$
- Se $x = y+c$, então:

$$A.(y+c)=b$$

$$Ay+Ac = b$$

$$Ay = b - Ac = r$$

r é chamado de resíduo.

Refinamento da solução

- O objetivo do processo de refinamento é encontrar as correções de modo que o resíduo seja nulo ou menor que uma determinada precisão.

Mal Condicionamento

- Se a solução das equações é muito sensível a pequenas mudanças nos coeficientes, este fenômeno é chamado “mal condicionamento” e está relacionado ao fato de que a matriz dos coeficientes nas equações lineares está próximo de ser singular, isto é, determinante igual a zero.

Mal Condicionamento

- Uma maneira de se “medir” o condicionamento da matriz seria calculando seu determinante(embora muitas vezes só conseguimos calcula-lo após escalonar a matriz).
  - O determinante é o hipervolume (com sinal) do hiperparalelepípedo formado pelos vetores colunas da Matriz A(dos coeficientes do sistema linear).
  - Se os vetores forem quase linearmente independentes, então o volume do hiperparalelepipedo será pequeno.

Mal Condicionamento

- O número de condicionamento pode ser encontrado, da seguinte forma:
  - Substitua cada coluna A_{ei} da Matriz A, pelo vetor normalizado, isto é, vi = A_{ei} /$||A_{ei}||$, sendo $||A_{ei}||$ a norma euclidiana do vetor A_{ei} /|
  - Calcule o valor absoluto do determinante da nova matriz.
  - Observe se o número obtido esta próximo de 0 ou de 1.
    - Se estiver próximo de 0 a matriz é mal condicionada.

Matrizes de Hilbert

- Exemplo de matriz mal condicionada, aparecem naturalmente no problema de ajuste polinomial.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\
1/2 & 1/3 & 1/4 & & 1/n+1 \\
1/3 & 1/4 & 1/5 & & 1/n+2 \\
\vdots & & & \ddots & \\
1/n & 1/n+1 & 1/n+2 & \cdots & 1/2n-1
\end{bmatrix}
$$