Teoria de Linguagem

Conceitos Básicos: Conjuntos, Relações e Funções

Vinicius H. S. Durelli
✉ durelli@ufsj.edu.br

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

Organização

1. Conjuntos
   - Operações sobre conjuntos
2. Relações
   - Endorelação
   - Propriedades
   - Fecho de uma relação
   - Fecho transitivo, fecho transitivo reflexivo
3. Funções parciais e funções
   - Funções parciais
   - Imagem e conjunto imagem
   - Funções
4. Considerações finais

Conjuntos

Praticamente **tudo em matemática pode ser descrito em termos de conjuntos** (Hammack 2013).

Definição → *Conjuntos*

Um conjunto é uma **coleção de zero ou mais *elementos*** que não possuem qualquer ordem associada (Hammack 2013). ❑

➟ O termo **elemento** é usado de forma ampla e pode designar **objetos concretos ou abstratos**.

Exemplos:

$$\{2, 4, 6, 8\} \text{ conjunto com 4 elementos}$$

$$\{a, e, i, o, u\} \text{ é o conjunto das vogais}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ é o conjunto dos dígitos}$$

$$\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \text{ conjunto com as coordenadas de um quadrado}$$

Conjuntos

Praticamente **tudo em matemática pode ser descrito em termos de conjuntos** (Hammack 2013).

Definição → *Conjuntos*

Um conjunto é uma **coleção de zero ou mais *elementos*** que não possuem qualquer ordem associada (Hammack 2013). ❑

➠ O termo **elemento** é usado de forma ampla e pode designar **objetos concretos ou abstratos**.

Exemplos:

$\{2, 4, 6, 8\}$

$\{a, e, i, o, u\}$

Conjuntos são delimitados por { e } e os elementos são separados por ,

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é o conjunto dos dígitos

$\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ conjunto com as coordenadas de um quadrado

Conjuntos podem ser **finitos ou infinitos**.

Pertinência...

No decorrer desta disciplina, **letras maiúsculas** são utilizadas para denotar conjuntos. Por exemplo, considerando um dos conjuntos apresentados anteriormente: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Se um determinado a é elemento de um conjunto A, usamos a seguinte notação:

$$a \in A$$

o que é interpretado como:

a **pertence ao conjunto** A

Caso contrário, afirma-se que a **não pertence** ao conjunto A:

$$a \notin A$$

Continência e subconjunto (1)...

Se todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto B, então afirma-se que A **está contido** em B e denota-se por:

$$A \subseteq B$$

Exemplo:

$$\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$$

Alternativamente, quando B **contém** A, denota-se por:

$$A \supseteq B$$

Nos casos em que $A \subseteq B$ ou $A \supseteq B$, afirma-se que A é um **subconjunto** de B.

Continência e subconjunto (2)...

Se $A \subseteq B$, mas existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, então afirma-se que A **está contido propriamente** em B, ou que A é um subconjunto de B, e denota-se por:

$$A \subset B$$

Exemplo:

$$\{a, b\} \subset \{b, c, a\}$$

Se $A \subset B$, diz-se que A é um **subconjunto próprio** de B. (Alternativamente, pode-se dizer que B **contém propriamente** A, i.e., $A \supset B$.)

Igualdade...

Os conjuntos A e B são ditos conjuntos iguais, o que é denotado por:

$$A = B$$

se e somente se tais conjuntos possuem os mesmos elementos:

$$A = B \text{ se e somente se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

Exemplos:

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$$
$$\{2, 4, 8\} = \{2, 2, 4, 4, 8, 8\}$$
$$\{a, e, i, o, u\} \neq \{x, y, z\}$$

Como definir conjuntos?

- **Denotação por extensão**: listando todos os elementos (em qualquer ordem).

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- **Denotação por compreensão**: quando conjuntos são muito grandes ou complexos para serem descritos por extensão, eles podem ser definidos em termos de suas propriedades usando a notação:[1]

$$A = \{x \mid \text{x possui uma determinada propriedade P}\}$$

[1] Tal notação é denominada *set-builder notation*.

Como definir conjuntos?

- **Denotação por extensão**: listando todos os elementos (em qualquer ordem).

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- **Denotação por compreensão**: quando conjuntos são muito grandes ou complexos para serem descritos por extensão, eles podem ser definidos em termos de suas propriedades usando a notação:[1]

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{n é um número par}\}$$

ou

$$P = \{n \in \mathbb{N} : \text{n é um número par}\}$$

[1] Tal notação é denominada *set-builder notation*.

Alguns conjuntos importantes. . .

Conforme mencionado, um conjunto pode possuir um número **finito** ou **infinito** de elementos. Naturalmente:

- Conjuntos finitos podem ser denotados por extensão.
- Conjuntos infinitos são denotados por compreensão.

Alguns **conjuntos infinitos**:

$\mathbb{N}$ Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos números racionais

$\mathbb{I}$ Conjunto dos números irracionais

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

Um conjunto importante é o **conjunto vazio**, i.e., $\{\}$. Tal conjunto é representado pelo símbolo $\emptyset$.

Exercícios. . .

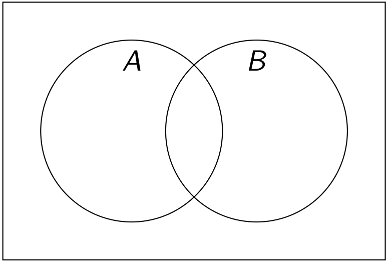
1. Especifique os conjuntos abaixo usando denotação por compreensão:
   - $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$
   - $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
2. Escreva os conjuntos abaixo usando denotação por extensão:
   - $\{5x - 1 \ : \ x \in \mathbb{Z}\}$
   - $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ -2 \leqslant x < 7\}$

União

A união de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

➡ O conjunto resultante contém todos os elementos em A e B.

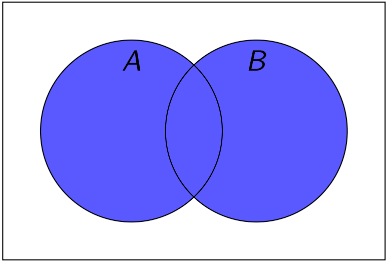


União

A união de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

➡ O conjunto resultante contém todos os elementos em A e B.

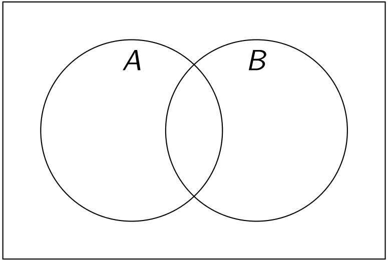


Intersecção

A intersecção de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

➟ O conjunto resultante contém todos os elementos que aparecem em ambos os conjuntos.

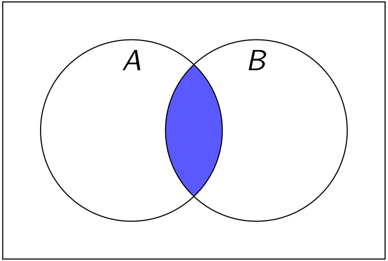


Intersecção

A intersecção de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

➡ O conjunto resultante contém todos os elementos que aparecem em ambos os conjuntos.

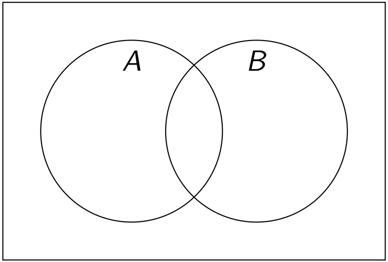


Diferença

A diferença de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

➡ O conjunto resultante contém todos os elementos que aparecem somente em A.

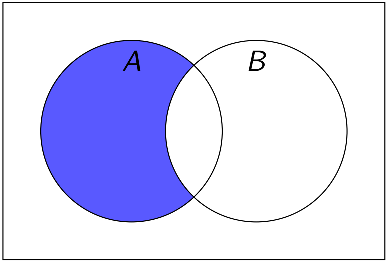


Diferença

A diferença de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

➡ O conjunto resultante contém todos os elementos que aparecem somente em A.

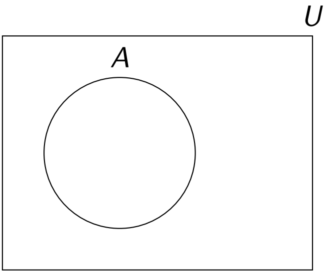


Complemento

A operação de complemento é definida em relação ao conjunto universo, i.e., U:

$$\sim A = A' = \overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

➟ O conjunto resultante contém todos os elementos contidos em U e que não aparecem em A.

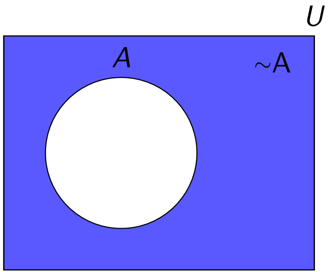


Complemento

A operação de complemento é definida em relação ao conjunto universo, i.e., U:

$$\sim A = A' = \overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

➡ O conjunto resultante contém todos os elementos contidos em U e que não aparecem em A.



Conjunto das partes (*power sets*)

Definição → *Conjunto das partes*

Se A é um conjunto, o conjunto das partes de A é outro conjunto, denotado por $\mathcal{P}(A)$ e definido como o conjunto de todos os subconjuntos de A (Hammack 2013). ❑

$$2^A = \mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$$

Por exemplo, dado um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Produto cartesiano

Definição → *Produto cartesiano*

O produto cartesiano de dois conjuntos é outro conjunto denotado por $A \times B$ (Hammack 2013). ❑

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A\ ,\ \ b \in B\}$$

Por exemplo, dado os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\alpha, \beta\}$, $A \times B$ é o conjunto a seguir:

$$A \times B = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}$$

- Cada elemento de um produto cartesiano é denominado **par ordenado**.
- É usual denotar o produto cartesiano de um conjunto com ele mesmo como um expoente, i.e., $A \times A = A^2$.

O que são relações?

Na Matemática duas entidades podem se **relacionar** de várias formas.

$5 \leqslant 10$ $\quad$ $x \neq y$ $\quad$ $9 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$

➡ Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Elementos de A podem ser comparados por meio do símbolo $<$. Por exemplo, $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$ e assim por diante.

O que são relações?

Na Matemática duas entidades podem se **relacionar** de várias formas.

$5 \leqslant 10$ $\qquad x \neq y$ $\qquad 9 \in \mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$

➡ Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Elementos de A podem ser comparados por meio do símbolo $<$. Por exemplo, $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$ e assim por diante.

- Imagine que você tivesse que explicar $<$ para alguém competente em formalismo matemático mas não muito brilhante.

O que são relações?

Na Matemática duas entidades podem se **relacionar** de várias formas.

$5 \leqslant 10$ $\qquad x \neq y$ $\qquad 9 \in \mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$

➠ Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Elementos de A podem ser comparados por meio do símbolo $<$. Por exemplo, $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$ e assim por diante.

- Imagine que você tivesse que explicar $<$ para alguém competente em formalismo matemático mas não muito brilhante.

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3),\\ (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

Relações (1)

Definição → *Relações*

Suponha dois conjuntos A e B. Uma relação (binária) $\mathcal{R}$ de A em B é um subconjunto de um produto cartesiano (Menezes 2011). ❑

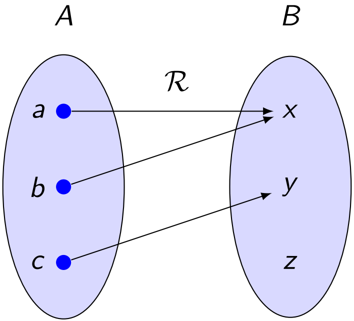
Formalmente:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

sendo que:

- A é denominado **domínio**;
- B é denominado **contradomínio**.

Relações (2)



Uma relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ é também denotada como $\mathcal{R} : A \to B$. Um elemento $(a, b) \in \mathcal{R}$ pode ser denotado de forma infixada: $a\mathcal{R}b$.

Endorelação (autorelação)

Definição $\rightarrow$ *Endorelação*

Dado um conjunto A. Então uma relação $\mathcal{R} : A \rightarrow A$ (domínio e contradomínio no mesmo conjunto) é dita uma endorelação (Menezes 2011). ❑

Uma endorelação $\mathcal{R} : A \rightarrow A$ é normalmente denotada por: $(A, \mathcal{R})$.

- **Matemática**: para formalizar conceitos como "maior igual" e "igual".
- **Teoria dos Grafos**: para modelar o conceito de adjacência.
- **Ciência da Computação**: para descrever conceitos relacionados às linguagens formais e autômatos.

Exemplo

➡ Considerando o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto resultante:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (3,2), (3,1)\} \subseteq A \times A$$

➥ O conjunto $\mathcal{R}$ é uma relação que associa elementos de A, e.g., $(1,1) \in \mathcal{R}$, portanto, temos $1\mathcal{R}1$.

✍ Qual a relação representada por $\mathcal{R}$?

Exemplo

➡ Considerando o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto resultante:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (3,2), (3,1)\} \subseteq A \times A$$

➥ O conjunto $\mathcal{R}$ é uma relação que associa elementos de A, e.g., $(1,1) \in \mathcal{R}$, portanto, temos $1\mathcal{R}1$.

✍ Qual a relação representada por $\mathcal{R}$?

R: A relação **maior-igual** (i.e., $\geq$) agora é representada por meio do conjunto $\mathcal{R}$.

Exemplo

➡ Considerando o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto resultante:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (3,2), (3,1)\} \subseteq A \times A$$

➥ O conjunto $\mathcal{R}$ é uma relação que associa elementos de A, e.g., $(1,1) \in \mathcal{R}$, portanto, temos $1\mathcal{R}1$.

✍ Qual a relação representada por $\mathcal{R}$?

R: A relação **maior-igual** (i.e., $\geq$) agora é representada por meio do conjunto $\mathcal{R}$.

Algumas propriedades importantes (1)

Uma expressão relacional $x\mathcal{R}y$ é uma "sentença" que pode ser verdadeira ou falsa.

- $5 < 10$ é verdadeira;
- $10 < 5$ é falsa.

➟ **Relações podem ser vistas como operadores lógicos**. As sentenças de tais operadores resultam em **verdadeiro ou falso**, dependendo dos operandos (i.e., x e y).

(Relações têm propriedades diferentes) Exemplos:

- A relação $\leqslant$ em $\mathbb{Z}$ satisfaz $x \leqslant x$ para qualquer $x \in \mathbb{Z}$.
- O mesmo não pode ser dito para a relação $<$.[2]

[2] Note que $x < x$ nunca é verdadeiro.

Algumas propriedades importantes (2)

Seja A um conjunto e $\mathcal{R}$ uma relação. Então $\mathcal{R}$ é uma relação:

Definição → *Relação Reflexiva*

Se $\forall a \in A$, $a\mathcal{R}a$ (Menezes 2011; Hammack 2013). ❑

Para ilustrar tal propriedade, considere o conjunto $A = \mathbb{Z}$. Alguns exemplos de relações reflexivas incluem:

- $\leqslant$, visto que $a \leqslant a$;
- $=$, visto que $a = a$.

Algumas relações que não são reflexivas:

- $<$;
- $\neq$.

Algumas propriedades importantes (3)

Seja A um conjunto e $\mathcal{R}$ uma relação. Então $\mathcal{R}$ é uma relação:

Definição $\to$ *Relação Simétrica*

Se $\forall a, b \in A,\ a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$ (Menezes 2011; Hammack 2013). ❑

Considere o conjunto $A = \mathbb{Z}$. Alguns exemplos de relações simétricas incluem:

- $\neq$, visto que $a \leqslant b$ e $b \neq a$;
- $=$, visto que $a = b$ e $b = a$.

Algumas relações que não são simétricas:

- $\leqslant$, pois $a \leqslant b$ não implica que $b \leqslant a$.

Algumas propriedades importantes (4)

Seja A um conjunto e $\mathcal{R}$ uma relação. Então $\mathcal{R}$ é uma relação:

Definição → *Relação Transitiva*

Se $\forall a, b, c \in A$, $((a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c)) \implies a\mathcal{R}c$ (Menezes 2011; Hammack 2013), ou seja, para todo $a, b, c \in A$, caso $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$, então $a\mathcal{R}c$. ❑

Considere o conjunto $A = \mathbb{Z}$. Alguns exemplos de relações transitivas incluem:

- $\leqslant$, visto que se $a \leqslant b$ e $b \neq c$, então $a \leqslant c$;
- $=$, visto que $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

Algumas relações que não são simétricas:

- $\neq$.

Fecho de uma relação...

Definição → *Fecho de uma Relação*

Sejam $\mathcal{R} : A \to A$ uma endorelação e P um conjunto de propriedades. Então o fecho de $\mathcal{R}$ em relação a A é a menor endorelação em A que contém $\mathcal{R}$ e que satisfaz as propriedades de P (Menezes 2011). ❑

No decorrer desta disciplina, o fecho de uma relação é denotado por:

$$\text{FECHO-P}(\mathcal{R})$$

Portanto, para qualquer conjunto de propriedades, a relação sempre é subconjunto de seu fecho, ou seja:

$$\mathcal{R} \subseteq \text{FECHO-P}(\mathcal{R})$$

Fecho transitivo e fecho transitivo reflexivo

Seja $\mathcal{R}$ uma endorelação em A. Então:

Definição → *Fecho Transitivo*

O fecho de $\mathcal{R}$ em relação ao conjunto de propriedades transitiva é denotado por $\mathcal{R}^+$ e é definido como (Menezes 2011):

- Se $(a, b) \in \mathcal{R}$, então $(a, b) \in \mathcal{R}^+$;
- Se $(a, b) \in \mathcal{R}^+$ e $(b, c) \in \mathcal{R}^+$, então $(a, c) \in \mathcal{R}^+$;
- Os únicos elementos de $\mathcal{R}^+$ são construídos como acima.

❑

Fecho transitivo e fecho transitivo reflexivo

Seja $\mathcal{R}$ uma endorelação em A. Então:

Definição → *Fecho Transitivo*

O fecho de $\mathcal{R}$ em relação ao conjunto de propriedades transitiva é denotado por $\mathcal{R}^+$ e é definido como (Menezes 2011):

- Se $(a, b) \in \mathcal{R}$, então $(a, b) \in \mathcal{R}^+$;
- Se $(a, b) \in \mathcal{R}^+$ e $(b, c) \in \mathcal{R}^+$, então $(a, c) \in \mathcal{R}^+$;
- Os únicos elementos de $\mathcal{R}^+$ são construídos como acima.

❑

Definição → *Fecho Transitivo Reflexivo*

O fecho de $\mathcal{R}$ em relação ao conjunto de propriedades transitiva e reflexiva é denotado por $\mathcal{R}^*$ e é definido como (Menezes 2011):

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

❑

1. Conjuntos
   - Operações sobre conjuntos

2. Relações
   - Endorelação
   - Propriedades
   - Fecho de uma relação
   - Fecho transitivo, fecho transitivo reflexivo

3. Funções parciais e funções
   - Funções parciais
   - Imagem e conjunto imagem
   - Funções

4. Considerações finais

Funções parciais

Para o estudo das linguagens formais, o conceito de função parcial é de suma importância: vários formalismos apresentados são baseados em funções parciais.

Definição $\rightarrow$ *Função Parcial*

Uma função parcial é uma relação $f \subseteq A \times B$ tal que (Menezes 2011):

$$\text{se } (a, b) \in f \text{ e } (a, c) \in f \text{ , então } b = c$$

Cada elemento do domínio está relacionado com, no máximo, um elemento do contradomínio. Uma função parcial $f \subseteq A \times B$ é denotada por:[a]

$$f : A \nrightarrow B$$

❑

[a]Ou simplesmente $f : A \rightarrow B$ quando é claro que se trata de uma função parcial.

Imagem e conjunto imagem

Seja $f : A \nrightarrow B$ uma função parcial. Então:

Definição → *Imagem*

- Se para $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$, então afirma-se que f está definida para a e que b é a imagem de a;
- Caso contrário, afirma-se que f não é definida para a.

❑

Definição → *Conjunto Imagem*

O conjunto imagem de f, denotado por $f(a)$, é tal que (Menezes 2011):

$$f(a) = \{b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$$

❑

Funções

Uma **função total**, ou simplesmente função, é um caso particular de função parcial.

Definição → *Função*

Uma aplicação, função total, ou simplesmente função é uma função parcial $f : A \to B$ a qual é total, ou seja, para todo $a \in A$ existe um $b \in B$ tal que $f : A \to B$ (Menezes 2011). ❑

Uma função (total) é uma função parcial definida para **todos os elementos do domínio**.

Considerações finais. . .

Na aula de hoje nós vimos:

- Conjuntos;
    - Operações envolvendo conjuntos.
- Relações;
    - Endorelações;
    - Fecho de relações;
    - Fecho transitivo;
    - Fecho transitivo reflexivo.
- Funções parciais;
- Funções (totais).

Na **próxima aula**:

- Alfabetos, palavras e linguagens formais;

Referências

Menezes, Paulo Blauth (2011). *Linguagens Formais e Autômatos*. 6th ed. Livros Didáticos Informática da UFRGS. Bookman, p. 256.

Hammack, Richard (2013). *Book of Proof*. Richard Hammack, p. 314.

☺**Próxima aula: exercício(s) sobre o conteúdo da aula de hoje!** ☺