

# Linguagens Regulares

Prof. Eduardo Gabriel Reis Miranda



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Leopoldina – CEFET

17 de julho de 2023

# Conteúdo

- 1 Contextualização
- 2 Alfabetos
- 3 Palavras
- 4 Linguagens

# Conteúdo

1 Contextualização

2 Alfabetos

3 Palavras

4 Linguagens

# O que é linguagem?

# O que é linguagem?

## Dicionário Aurélio

O uso da palavra articulada ou escrita como meio de expressão e comunicação entre pessoas.

# O que é linguagem?

## Dicionário Aurélio

O uso da palavra articulada ou escrita como meio de expressão e comunicação entre pessoas.

- Claramente, a definição acima não é suficiente para permitir o desenvolvimento matemático de uma teoria baseada em linguagens.

# Conteúdo

1 Contextualização

2 Alfabetos

3 Palavras

4 Linguagens

## Definição → Alfabeto

Um conjunto finito de símbolos ou caracteres (Sipser 2012; Menezes 2011). <sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Os membros de um alfabeto são os **símbolos** do alfabeto.

Iremos utilizar letras gregas maiúsculas  $\Sigma$  e  $\Gamma$  para denotar alfabetos.  
Exemplos de alfabetos:

$$\Sigma_1 = \{0, 1\}$$

$$\Sigma_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, x, y\}$$



**Pergunta 1:** O conjunto  $\mathbb{N}$  é um conjunto de alfabeto? Por quê?

**Pergunta 2:** O conjunto vazio (i.e.,  $\emptyset$ ) é um alfabeto?

# Conteúdo

1 Contextualização

2 Alfabetos

3 Palavras

4 Linguagens

## Definição $\rightarrow$ Palavra

Uma string, cadeia, sentença ou palavra é uma sequência finita de símbolos do alfabeto justapostos (Menezes 2002).

Exemplos:

- Se  $\Sigma_1 = 0, 1$ , então 01001 é uma cadeia de símbolos em  $\Sigma_1$ .
- Se  $\Sigma_2 = a, b, c, \dots, x, y, z$ , então abracadabra é uma palavra sobre  $\Sigma_2$ .

# Tamanho de uma palavra...

Se  $w$  é uma palavra sobre  $\Sigma$ , o tamanho (ou comprimento) de  $w$ , denotado  $|w|$ , é o número de símbolos que formam a palavra.

Exemplos:

$$|1| = 1$$

$$|10| = 2$$

$$|0000| = 4$$

$$|001101| = 6$$

Palavra vazia: uma palavra de tamanho zero é denominada **palavra vazia**. O símbolo usado para representar tal palavra é  $\epsilon$ .

Portanto:

$$|\epsilon| = 0.$$

# Mais sobre palavras

- Se uma palavra  $w$  tem tamanho  $n$ , podemos dizer que  $w = w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ , onde cada  $w_i \in \Sigma$ .
- O reverso de uma palavra  $w$ , denotado por  $w^R$ , é a palavra obtida quando inverte-se a ordem dos símbolos de  $w$ :  $w_n, \dots, w_3, w_2, w_1$ .

Exemplos:

$$\textit{banana}^R = \textit{ananab} \quad \textit{teoria}^R = \textit{airoet}$$

- Dado um alfabeto  $\Sigma$ , é possível denotar o conjunto de todas as palavras de tamanho  $k$  usando a notação  $\Sigma^k$ .

Por exemplo, dado  $\Sigma = 0, 1$ , então::

$$\Sigma^1 = 0,1 \quad \Sigma^2 = 00,01,10,11$$

# Fechamento recursivo e transitivo

O **fechamento recursivo e transitivo** definido como o conjunto de todas as palavras sobre um alfabeto  $\Sigma$  é normalmente denotado por  $\Sigma^*$ .

## Definição → Fechamento Recursivo e Transitivo

O fechamento recursivo<sup>a</sup> a e transitivo é formalmente definido como a seguir:

$$\Sigma^* = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma_i$$

---

<sup>a</sup>Às vezes denominado fechamento flexivo e transitivo.

# Fechamento recursivo e transitivo

Em alguns casos, é conveniente remover a palavra vazia do conjunto de palavras. O **fechamento transitivo** representa o conjunto de palavras **não vazias** sobre um alfabeto  $\Sigma$  e é denotado por  $\Sigma^+$ .

## Definição $\rightarrow$ Transitivo

O fechamento recursivo a e transitivo é formalmente definido como a seguir:

$$\Sigma^+ = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$$

Portanto, como se pode perceber:

$$\Sigma^* = \Sigma + \cup \{\epsilon\}$$

# Concatenação de Palavras

Dado duas palavras  $\alpha$  e  $\beta$  de comprimentos  $n$  e  $m$  respectivamente. Então, pode-se dizer que  $\alpha\beta$  representa a concatenação de  $\alpha$  e  $\beta$ , ou seja, representa a palavra formada por uma cópia de  $\alpha$  seguida por uma cópia da palavra  $\beta$ .

- Mais precisamente, se  $\alpha$  é uma palavra composta de  $i$  símbolos  $\alpha = a_1a_2a_3a_4 \dots a_i$  e se  $\beta$  é uma palavra composta de  $j$  símbolos  $\beta = b_1b_2b_3b_4 \dots b_j$ , então  $\alpha\beta$  tem comprimento  $i + j$ :  
$$\alpha\beta = a_1a_2a_3a_4 \dots a_ib_1b_2b_3b_4 \dots b_j.$$

Exemplo: Dado  $\alpha = 01101$  e  $\beta = 110$ , então  $\alpha\beta = 01101110$  e  $\beta\alpha = 11001101$ .



# Concatenação de Palavras

A notação de expoente é utilizada para concatenar uma palavra com si própria. Dado uma palavra  $w$ ,  $w^n$  representa a concatenação de  $w$  com si própria  $n$  vezes:

$$\underbrace{www \cdots w}_n$$

Exemplo: Dado  $w = 0011$ , então  $w^3 = 001100110011$

## Propriedades → Concatenação

A operação de concatenação satisfaz as seguintes propriedades:

- Associatividade<sup>a</sup>
- Elemento neutro à esquerda e à direita

Elemento neutro à esquerda e à direita

---

<sup>a</sup>Embora associativa, a concatenação não é comutativa.

# Prefixos, sufixos e subpalavras

- Diz-se que uma palavra  $\alpha$  é prefixo de uma outra palavra  $\beta$  se é possível escrever  $\beta$  como  $\alpha\gamma$ .
- Uma palavra  $\alpha$  é sufixo de outra palavra  $\beta$  se é possível escrever  $\beta$  como  $\gamma\alpha$ .
- Dado quatro palavras,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , uma palavra  $\alpha$  é denominada subpalavra de uma palavra  $\beta$  quando  $\beta = \gamma\alpha\delta$ . (Se  $\gamma$  e  $\delta$  ou ambos forem vazios, a definição ainda se aplica.)

# Conteúdo

- 1 Contextualização
- 2 Alfabetos
- 3 Palavras
- 4 Linguagens

# Linguagens (formais)

## Definição → Linguagem

Uma linguagem formal é um conjunto de cadeias de comprimento finito formadas pela concatenação de símbolos de um alfabeto finito. Mais formalmente, uma linguagem pode ser vista como o conjunto de todas as palavras que podem ser selecionadas de um dado alfabeto  $\Sigma$ , i.e.,  $\Sigma^*$  (Hopcroft et al. 2006).

Exemplo:

A linguagem de todas as palavras que consistem de  $n$  0s seguidos de  $n$  1s para todo  $n \geq 0$ :  $\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

**Pergunta 3:**  $\emptyset = \{\epsilon\}$ ? Por quê?

**Pergunta 4:** Qual é o conjunto resultante de  $\Sigma^0$  ?

# Como descrever linguagens formais?

No decorrer da disciplina, usaremos a notação para construção de conjuntos (set-builder notation)<sup>1</sup> para descrever linguagens complexas ou que contém muitas palavras. Considere o seguinte exemplo:

$$L = \{w \mid w \text{ contém o mesmo número de 0s e 1s}\}$$

ou

$$L = \{w : w \text{ contém o mesmo número de 0s e 1s}\}$$

---

<sup>1</sup>Conforme apresentado na aula anterior

# Exercícios:

Usando operadores de conjunto e linguagem defina sobre  $\Sigma = \{0, 1\}$ :

- A linguagem dos strings que começam com 0.
- A linguagem dos strings que possuem a substring 00.
- A linguagem dos strings que possuem 00 ou 11.
- A linguagem dos strings que possuem tamanho par.
- A linguagem dos strings que possuem tamanho ímpar.
- A linguagem dos strings que terminam com 0 seguido por um número ímpar de 1's consecutivos.
- A linguagem dos strings de tamanho par que começam ou terminam com 0.

John E Hopcroft, Jeffrey D Ullman, and Rajeev Motwani. Introdução à teoria de autômatos, linguagens e computação. *Rio de Janeiro: Campus*, 2002.

Newton José Vieira. *Introdução aos fundamentos da computação: linguagens e máquinas*. Pioneira Thomson Learning, 2006.



# Linguagens Regulares

Prof. Eduardo Gabriel Reis Miranda



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Leopoldina – CEFET

17 de julho de 2023