

Auswertung des Versuchs H2

Sven Jandura & Edward Wang

20. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
2 Versuchsdurchführung	5
2.1 Absorptionsspektroskopie	5
2.2 Sättigungsspektroskopie	5
3 Auswertung	7
3.1 Absorptionsspektrum	7
3.2 Sättigungsspektroskopie	8
3.3 Fehlerdiskussion	14
4 Abschluss	15

1 Grundlagen

In der Quantenmechanik werden die Elektronenorbitale von Atomen durch diskrete Energieniveaus beschrieben. Dabei kann es zu Übergänge zwischen diesen Zuständen kommen, bei denen ein Photon absorbiert bzw. emittiert wird. Die Frequenz dieses Photons wird dann gemäß der Planck-Formel durch $E_2 - E_1 = h\nu$ gegeben. Durch Messung dieser Resonanzfrequenz ν kann man die Abstände der Energieniveaus bestimmen, und somit Auskunft über die innere Struktur von den Atomen bekommen. Allerdings lässt sich diese Spektrallinie nicht beliebig scharf messen, sondern sie besitzt eine gewisse Linienbreite. Grund dafür sind, u.a., die Stoßverbreiterung, die durch Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Atomen verursacht wird, die Dopplerverbreiterung und die natürliche Linienbreite. Die natürliche Linienbreite kommt dadurch zustande, dass diese angeregte Zustände nur kurzlebig sind, und wegen der Energie-Zeit-Unschärfe ist die Energie dieses angeregten Zustandes also nicht genau definiert. Die Linie nimmt die Form eines Lorentz-Peaks:

$$I(\omega) = I_0 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

Die Doppler-Verbreiterung entsteht wegen der Geschwindigkeitsverteilung der Atome im Gas. Diese Geschwindigkeit entlang der Ausbreitungsachse des Lichts bewirkt, dass diese Atome die Frequenz Dopplerverschoben sehen, gemäß $\omega' = \omega_0 (1 - \frac{v_z}{c})$. Die absorbierte Intensität beträgt dann nach [Hümmer et al., 2016]:

$$I(\nu) = I_0 e^{-\frac{(\nu - \nu_U)^2 mc^2}{2\nu_U^2 k_B T}}$$

wobei ν_U die Frequenz des betrachteten Übergangs ist. Betrachten wir einen Frequenz des Lasers von $\nu_0 + \nu$, wobei $\nu_0 = \frac{c}{780\text{nm}}$ die ungefähre Frequenz des Lasers ist, sodass $\nu \ll \nu_0$. Dann kann unabhängig von der genauen Frequenz des betrachteten Übergangs das ν_U im Nenner des Exponenten durch ν_0 ersetzt werden.

Für Übergänge bei $\nu_0 + \nu_1, \nu_0 + \nu_2, \dots, \nu_0 + \nu_N$ beträgt die nicht absorbierte Intensität dann

$$I(\nu) = I_0(\nu) - \sum_{n=1}^N I_n e^{-\frac{(\nu - \nu_n)^2 mc^2}{2\nu_0^2 k_B T}} \quad (1)$$

wobei $I_0(\nu)$ die Intensität des Lasers vor Durchgang durch die Rubidiumzelle ist.

Das Rubidium-Atom besitzt nur ein Valenzelektron, d. h., die inneren Schalen sind abgeschlossen und tragen nicht für den Gesamtdrehimpuls bzw. Spin bei. Außerdem kann man die Wechselwirkungen zwischen dieses Valenzelektron und die restlichen vernachlässigen, weshalb es als wasserstoffähnlich bezeichnet wird. Wir betrachten die beiden Isotope Rb-85 und Rb-87, die stabil sind, und dessen Kernspins jeweils 5/2 bzw. 3/2 beträgt. Wir berücksichtigen zum einen die Grobstruktur, die durch den Abstand der Elektronen zum Kern entsteht, die Feinstruktur, in der die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt wird, d.h. die Wechselwirkung zwischen den von dem Spin und dem Bahndrehimpuls erzeugten magnetischen Momenten, und die Hyperfeinstruktur, bei der die Kopplung zwischen den Gesamtdrehimpuls und den Kernspin betrachtet wird.

Somit spaltet sich die D2-Linie, die durch den Übergang zwischen den $5^2s_{1/2}$ und den $5^2p_{3/2}$ Zuständen erzeugt wird, in 6 Linien auf.

2 Versuchsdurchführung

2.1 Absorptionsspektroskopie

Bei der Absorptionsspektroskopie messen wir das transmittierte Licht durch das Rubidium-Gas. Dabei erwarten wir, dass bei der Durchstimmung der Laserfrequenz eine Senkung der transmittierten Intensität bei den Übergangsfrequenzen beobachtet wird. Das Experiment wurde so aufgebaut, dass ein Laserstrahl durch ein Prismenpaar geschickt wird, damit er rund wird, dann durchquert er ein $\lambda/2$ Plättchen und einen polarisierenden Strahlteiler, die Rubidium-Zelle, und wird schließlich durch eine Linse in die Photodiode fokussiert, wo dann die Intensität des Lichts gemessen wird. Der reflektierte Teil im Strahlteiler wird in einem Referenzresonator der Länge 10 cm geleitet, damit der freie Spektralbereich nach

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d}$$

bestimmt werden kann. Ein Funktionsgenerator durchstimmt den Laser mit einer Frequenz von ca. 20 Hz und die Intensität wird mit einem Oszilloskop gespeichert.

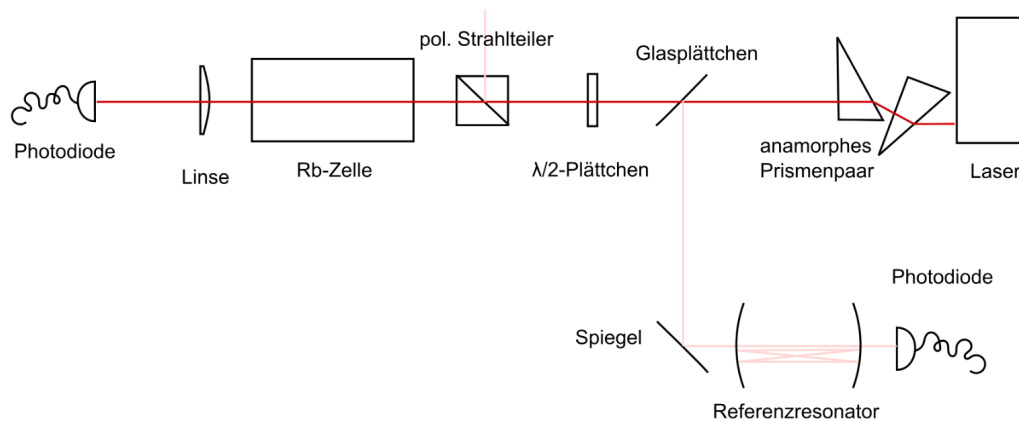


Abbildung 1: Aufbau der Absorptionsspektroskopie (aus [Hümmer et al., 2016])

2.2 Sättigungsspektroskopie

Ziel der Sättigungsspektroskopie ist es, die Dopplerverbreiterung zu vermeiden. Dabei ist der Unterschied zur Absorptionsspektroskopie, dass der Strahl die Zelle zweimal in umgekehrten Richtungen durchquert. Experimentell wird es umgesetzt, indem der linear polarisierte Strahl nach der Rubidium-Zelle durch einen ND-Filter abgeschwächt wird, durch ein $\lambda/4$ Plättchen zirkular polarisiert, in einem Spiegel reflektiert und wieder linear polarisiert wird, bevor er die Rubidium-Zelle nochmal durchläuft. Bei der Reflektion wird die zirkulare Polarisation umgedreht, sodass der Teststrahl nach der $\lambda/4$ Platte senkrecht zum Pumpstrahl polarisiert ist, und deshalb beim polarisierenden Strahlteiler komplett in der Diode reflektiert wird. Auch hier wird der Strahl durch eine Linse fokussiert.

Bei diesem Versuch erwarten wir die selben Senkungen zu beobachten, wie in der Absorptionsspektroskopie, allerdings mit sogenannten Lamb-Dips. Wenn der Pumpstrahl die Resonanzfrequenz eines Übergangs trifft, regt er Atome im Gas an, und wenn diese Atome entlang der Verbreitungsachse des Strahls eine Geschwindigkeit nahe Null haben, wird aus Sicht dieser Atome der Teststrahl die selbe Frequenz besitzen wie der

Pumpstrahl; allerdings können sie nicht durch den Teststrahl angeregt werden, da diese Anregung schon durch den Pumpstrahl gesättigt wurde. Somit entstehen Peaks im Intensitätsprofil. Außerdem entstehen durch einen ähnlichen Prozess die sogenannten Cross-Over-Peaks. Diese liegen vor, wenn die Laserfrequenz zwischen zwei Übergängen liegt, und so liegen Atome vor, die eine Geschwindigkeit besitzen, mit der sie sowohl vom Pumpstrahl als auch vom Teststrahl angeregt werden können, allerdings in unterschiedlichen Übergängen. So werden diese Atome durch den Pumpstrahl angeregt und können daher nicht vom Teststrahl nochmal angeregt werden, also wird der Teststrahl weniger absorbiert. Diese Cross-Over-Peaks haben oft eine höhere Intensität als die Lamb-Dips.

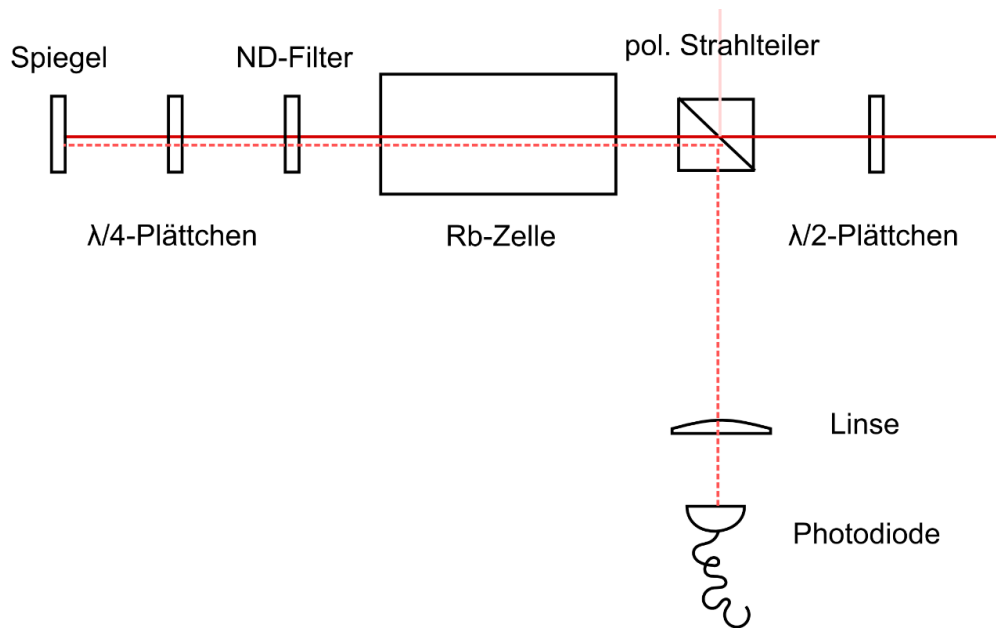


Abbildung 2: Aufbau der Sättigungsspektroskopie (aus [Hümmer et al., 2016])

3 Auswertung

3.1 Absorbtionsspektrum

Es werden die Peaks des Referenzresonator gegen die Zeit aufgetragen und mit einem Polynom dritter Ordnung gefittet, um die Nichtlinearität der Verstimmung des Lasers zu korrigieren.

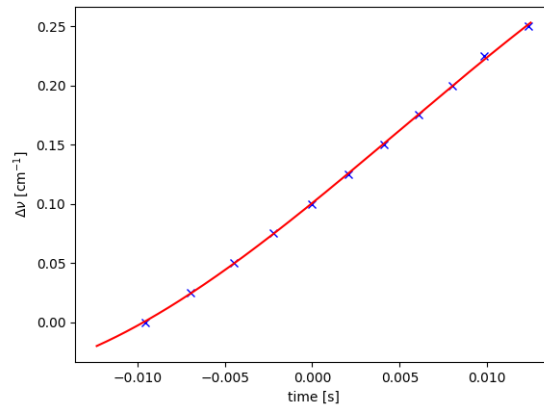


Abbildung 3: Durchstimmung des Lasers

Da man mit den Messdaten nicht die Übergänge von einem s-Hyperfeinniveau zu verschiedenen p-Hyperfeinniveaus unterscheiden kann, fassen wir alle Übergänge, die vom selben s-Hyperfeinniveau ausgehen, zu einem zusammen. Wir verwenden also $N = 4$. Wir fitten (1) an die Messdaten. Dabei verwenden wir für I_0 ein Polynom zweiter Ordnung.

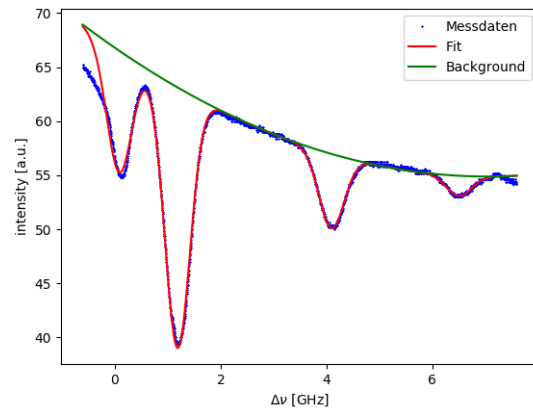


Abbildung 4: Fit der Absorptionsspektroskopie

Die Abweichung des Fits an der linken Seite führen wir auf die Nichtlinearität der Durchstimmung des Lasers zurück. Der Fit weicht an der linken Seite nur vor dem ersten Peak des Referenzresonators ab. Unsere Interpolation von oben kann augenscheinlich nicht verwendet werden, um die Frequenz-Zeit Abhängigkeit links des ersten Peaks des Referenzresonators zu extrapolieren. Auch beim Experiment wurde beobachtet, dass der Laser in einem Frequenzbereich annähernd linear durchgestimmt wird, an den Rändern aber sehr nichtlinear.

Wir erhalten folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 0.082 \pm 0.001 \text{ GHz} \\
\nu_2 &= 1.1854 \pm 0.0003 \text{ GHz} \\
\nu_3 &= 4.094 \pm 0.002 \text{ GHz} \\
\nu_4 &= 6.501 \pm 0.005 \text{ GHz} \\
T &= 350 \pm 2 \text{ K}
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Abstände im Termschema zu $\nu_2 - \nu_1 = 1.103 \pm 0.002 \text{ GHz}$, $\nu_3 - \nu_2 = 2.909 \pm 0.003 \text{ GHz}$ und $\nu_4 - \nu_3 = 6.419 \pm 0.006 \text{ GHz}$. Die Abweichungen zu den Literaturwerten können zum Teil damit erklärt werden, dass wir die Übergänge zu unterschiedlichen p-Hyperfeinniveaus in dem Verfahren nicht auflösen konnten, und deshalb mit einer einzigen Gauß-Funktion gefittet haben. Da diese Kurve in der Tat die Summe dreier Kurven mit unterschiedlichen Frequenzen und Intensitäten ist, kann man diese Abstände nicht genau bestimmen. Außerdem kennen wir die Abstände zwischen den p-Niveaus im Rb-85 und im Rb-87 nicht.

3.2 Sättigungsspektroskopie

Wir betrachten nun alle 12 Übergänge getrennt. Sei $L_i(\cdot)$ die Linienbreite des i -ten Übergang, bevor die Dopplerverbreiterung betrachtet wird. Sie erreicht ihr Maximum bei $\nu_0 + \nu_i$. Atome, die sich mit Geschwindigkeit v relativ zum Laser bewegen, sehen die verschobene Linienform

$$\tilde{L}_i(\nu_0 + \nu) = L_i((\nu_0 + \nu)\sqrt{1 - (v/c)^2}) \approx L_i(\nu_0 + \nu - \nu_0 v/(2c))$$

wobei die Näherung gilt da $v \ll c$ und $\nu \ll \nu_0$.

Der vom Pumpstrahl mit Frequenz $\nu_0 + \nu$ angeregte Anteil der Atome mit Geschwindigkeit v beträgt damit

$$n(\nu, v) = \sum_{i=1}^N A_i L_i(\nu_0 + \nu - \nu_0 v/(2c))$$

mit Konstanten A_1, \dots, A_N .

Die Geschwindigkeit der Rubidiumatome entlang der Ausbreitungsachse ist Gaußverteilt: $f_{\text{Gauß}}(v) = \sqrt{m/(2\pi k_B T)} e^{-mv^2/(2k_B T)}$. Die von Atome mit Geschwindigkeit v absorbierte Intensität des Teststrahl ist proportional zur Anteil dieser Atome im Grundzustand $dv f_{\text{Gauß}}(v)(1 - n(\nu, v))$ und zur Übergangswahrscheinlichkeit des j -ten Übergangs für die vom Atom wahrgenommene dopplerverschobene Frequenz $L_j(\nu_0 + \nu + \nu_0 v/(2c))$. Die Dopplerverschiebung hat dabei das entgegengesetzte Vorzeichen, da der Teststrahl die Atome in umgekehrte Richtung wie der Pumpstrahl durchquert.

Die gemessene Intensität beträgt dann

$$\begin{aligned}
 I(\nu) &= I_0(\nu) - \int_{-\infty}^{\infty} dv f_{Gau\beta}(v)(1 - n(\nu, v)) \sum_{j=1}^N B_j L_j(\nu_0 + \nu + \nu_0 v/(2c)) \\
 &= I_0 - \sum_j B_j \int_{-\infty}^{\infty} dv f_{Gau\beta}(v) L_j(\nu_0 + \nu + \nu_0 v/(2c)) \\
 &\quad + \sum_{i,j} A_i B_j \int_{-\infty}^{\infty} dv f_{Gau\beta}(v) L_i(\nu_0 + \nu - \nu_0 v/(2c)) L_j(\nu_0 + \nu + \nu_0 v/(2c))
 \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck hat die Integration über die Geschwindigkeit die Bedeutung, dass man die absorbierte Intensität, die von der Geschwindigkeit abhängt, jedes Atoms aufsummiert, was in dem Fall zur Aufintegration über die Geschwindigkeiten genähert wird, gewichtet mit der Häufigkeit dieser Geschwindigkeit. Wie schon angedeutet ist die Geschwindigkeit Gaußverteilt.

Mit Konstanten B_1, \dots, B_N und Ausgangsintensität $I_0(\nu)$. Der zweite Summand ist der selbe Term wie bei der Absorptionsspektroskopie. Den dritten Summanden nähern wir, indem wir ausnutzen, dass $L_i(\nu_0 + \nu - \nu_0 v/(2c)) L_j(\nu_0 + \nu + \nu_0 v/(2c))$ nur für $v \approx 2c \frac{\nu_i - \nu}{\nu_0}$ nicht verschwindend ist. Deshalb können wir $f_{Gau\beta}(v)$ als konstant annehmen und der dritte Summand wird $\sum_{i,j} A_i B_j f_{Gau\beta}(2c \frac{\nu_i - \nu}{\nu_0}) T_{ij}$ mit

$$T_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} dv L_i(\nu_0 + \nu - \nu_0 v/(2c)) L_j(\nu_0 + \nu + \nu_0 v/(2c))$$

Sei L_γ die Lorentzverteilung um 0 mit FWHM γ . Wir nehmen $L_i(x) = L_{\gamma_i}(x - (\nu_0 + \nu_i))$ an. Dann ist

$$\begin{aligned}
 T_{ij} &= \frac{2c}{\nu_0} \int_{-\infty}^{\infty} du L_{\gamma_i}(2\nu - (\nu_i + \nu_j) - u) L_{\gamma_j}(u) \\
 &= \frac{2c}{\nu_0} (L_{\gamma_i} * L_{\gamma_j})(2\nu - (\nu_i + \nu_j)) \\
 &= \frac{2c}{\nu_0} L_{\gamma_i + \gamma_j}(2\nu - (\nu_i + \nu_j))
 \end{aligned}$$

Für $i = j$ beschreibt T_{ij} einen Lamb-Dip, sonst einen Crossover-Peak.

Damit ergibt sich insgesamt eine Fitfunktion

$$I(\nu) = I_0(\nu) - \sum_{i=1}^N B_i e^{-mc^2(\nu - \nu_i)^2/(2k_B T \nu_0^2)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^N C_{ij} L_{\gamma_i + \gamma_j}(2\nu - (\nu_i + \nu_j)) \quad (2)$$

mit Konstanten $C_{ij} = (2 - \delta_{ij}) A_i B_j f_{Gau\beta}(2c \frac{\nu_i - \nu}{\nu_0}) \frac{2c}{\nu_0}$. Wir haben $T_{ij} = T_{ji}$ ausgenutzt.

Wir haben jeden der vier großen Peaks individuell gefittet. Ein Fit mit der Funktion aus (2) war jedoch leider nicht möglich, der Fit ist nicht konvergent. Wir führen das

darauf zurück, dass die Variation der B_i die Funktion kaum verändert, solange ihre Summe konstant bleibt. Stattdessen haben wir, wie bei der Absorptionsspektroskopie, die Gaußpeaks zu einem einzelnen zusammengefasst und mit der Funktion

$$I(\nu) = I_0(\nu) - B e^{-mc^2(\nu - \nu_{Gau\beta})^2 / (2k_B T \nu_0^2)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^N C_{ij} L_{\gamma_i + \gamma_j}(2\nu - (\nu_i + \nu_j)) \quad (3)$$

gefittet. I_0 haben wir als Polynom ersten Grades gefittet. Die weiteren Fit Parameter sind B , $\nu_{Gau\beta}$, T , C_{ij} und γ_i . Das Fitten wird vereinfacht, dass die FWHM-Breiten der Crossover Peaks sich als Mittelwerte der FWHM-Breiten der Lamb-Dips ergeben. Das Ergebnis der Fits mit und ohne Dopplerhintergrund ist in Abbildung 5 dargestellt.

Wir erhalten folgende Frequenzen:

Übergänge von Rb 87 von $F = 2$:

$$\nu_{F'=1} = 106 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=2} = 258 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=3} = 523 \pm 4 \text{ MHz}$$

Übergänge von Rb 85 von $F = 3$:

$$\nu_{F'=2} = 454 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=3} = 521 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=4} = 643 \pm 4 \text{ MHz}$$

Übergänge von Rb 85 von $F = 2$:

$$\nu_{F'=1} = 147 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=2} = 174 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=3} = 238 \pm 4 \text{ MHz}$$

Übergänge von Rb 87 von $F = 1$:

$$\nu_{F'=0} = 617 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=1} = 709 \pm 4 \text{ MHz}$$

$$\nu_{F'=2} = 858 \pm 4 \text{ MHz}$$

Damit ergeben sich die Differenzen zwischen den Niveaus zu $\nu_{F'=2} - \nu_{F'=1} = 28 \pm 6$ MHz, $\nu_{F'=3} - \nu_{F'=2} = 66 \pm 6$ MHz bzw. 64 ± 6 MHz und $\nu_{F'=4} - \nu_{F'=3} = 122 \pm 6$ MHz

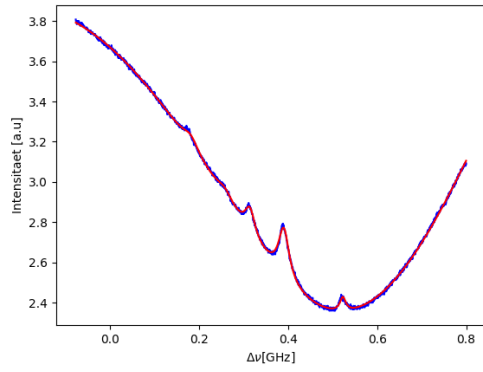
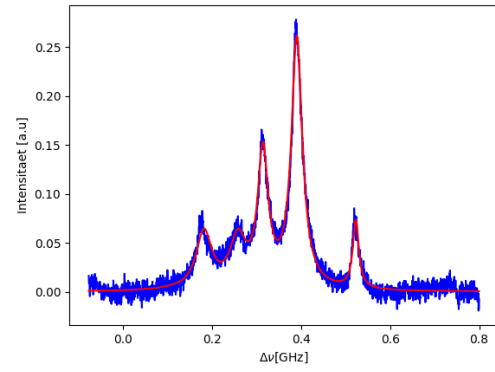
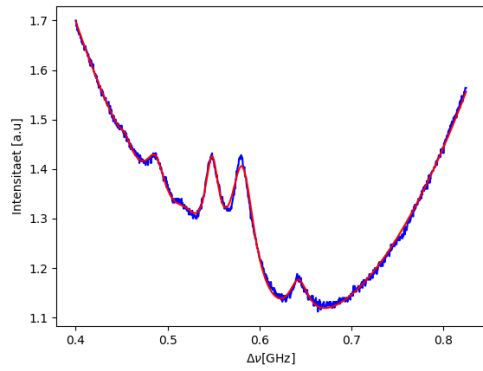
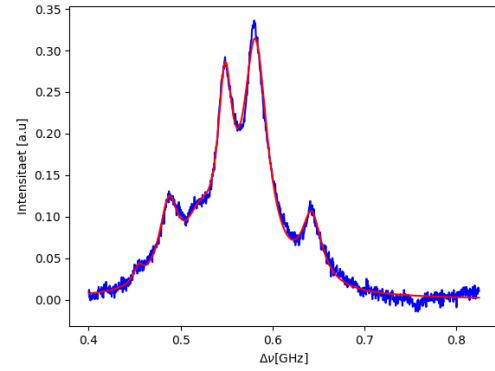
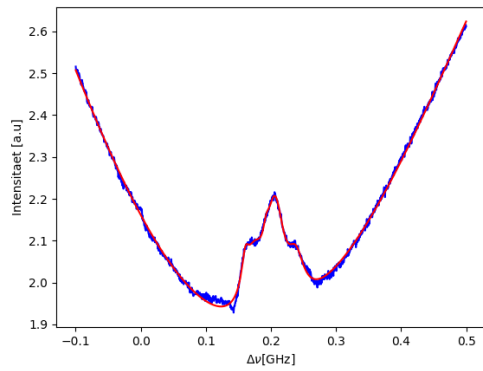
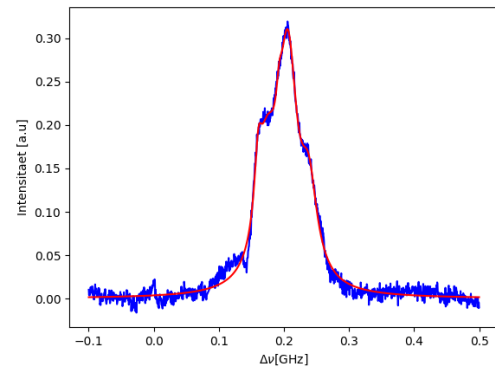
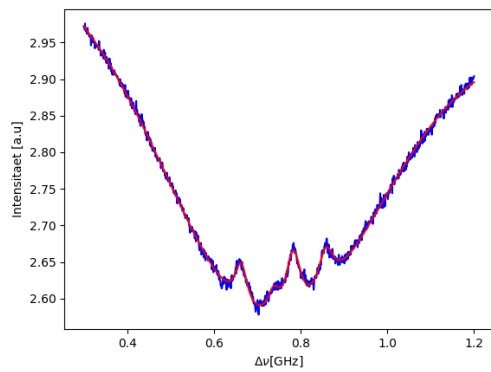
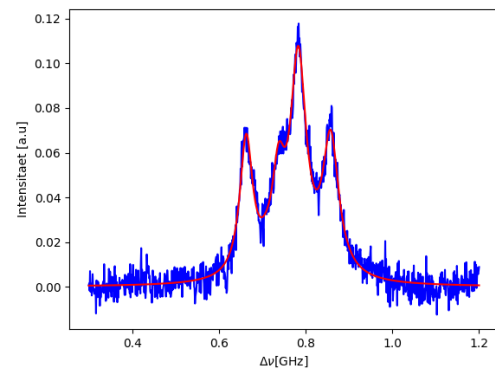
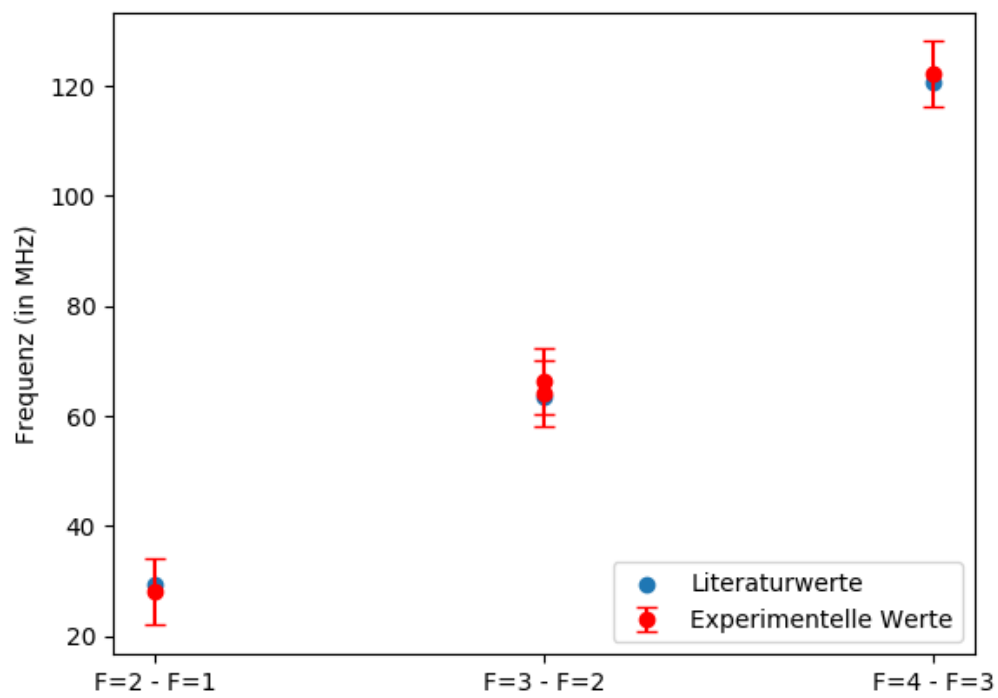
Rb-87, $F = 2$ Rb-87, $F = 2$ ohne DopplerhintergrundRb-85, $F = 3$ Rb-85, $F = 3$ ohne DopplerhintergrundRb-85, $F = 2$ Rb-85, $F = 2$ ohne DopplerhintergrundRb-87, $F = 1$ Rb-87, $F = 1$ ohne Dopplerhintergrund

Abbildung 5: Fits

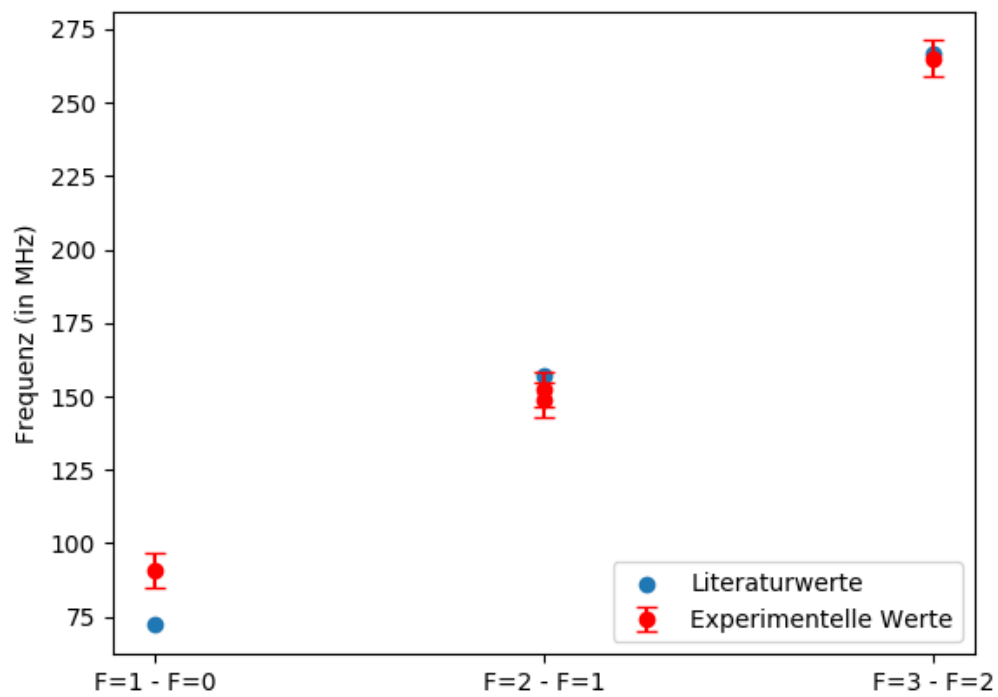
für Rb 85 sowie $\nu_{F'=1} - \nu_{F'=0} = 91 \pm 6$ MHz, $\nu_{F'=2} - \nu_{F'=1} = 152 \pm 6$ MHz bzw. 149 ± 6 MHz und $\nu_{F'=3} - \nu_{F'=2} = 265 \pm 6$ MHz für Rb 87.

Man kann nun noch versuchen, die Abstände der s-Hyperfeinniveaus beider Isotope genauer zu bestimmen, indem man mit $\nu_{Gau\beta} - \nu_i$ korrigiert, d.h., man betrachtet die Übergänge zu den einzelnen p-Hyperfeinniveaus und berechnet daraus die Differenz. Hierbei verwenden wir die erhaltenen Werte für $\nu_{Gau\beta}$ aus der Absorptionsspektroskopie und die für ν_i aus der Sättigungsspektroskopie. In Rb-85 ist das für die p-Niveaus mit $F = 2$ und $F = 3$, möglich, in Rb-87 für $F = 1$ und $F = 2$. Man erhält 3.07 ± 0.01 GHz bzw. 3.10 ± 0.02 GHz für Rb-85 und 6.51 ± 0.01 GHz bzw. 6.68 ± 0.02 GHz.

Unsere gemessene Werte für die p-Hyperfeinniveaus im Vergleich zu den Literaturwerten ([Steck, 2008], [Steck, 2001]) sind in Abbildung 6 dargestellt.



Rb-85



Rb-87

Abbildung 6: Werte im Vergleich

3.3 Fehlerdiskussion

Die beobachtete natürliche Linienbreite der Lamb-Dips ist kein Messfehler, denn es handelt sich um eine intrinsische Unschärfe, wie schon oben beschrieben.

Die Durchstimmung des Lasers ist nicht linear, wir haben sie durch ein Polynom 3. Grades gefittet. Bei der Betrachtung der einzelnen Peaks bei der Sättigungsspektroskopie hatten wir jeweils nur zwei Werte aus dem Referenzresonator zur Verfügung, sodass wir die Durchstimmung des Lasers als linear annähern mussten. Man hätte diese Durchstimmung korrigieren können, dafür bräuchte man aber das Signal vom Referenzresonator und man müsste die Lasereinstellung fest lassen. In unserem Versuch mussten wir die Einstellungen vom Laser gelegentlich ändern, um ein schärferes Bild der einzelnen Peaks in der Sättigungsspektroskopie zu bekommen.

Wie schon besprochen, besteht jede Gauß-Kurve in der Tat aus drei unterschiedlichen Kurven, mit unterschiedlichen Frequenzen. Dies bewirkt, dass die beobachtete Kurve breiter erscheint als die bei Raumtemperatur erwartete Dopplerverbreiterung. Deshalb bekamen wir im Fit eine hohe Temperatur des Gases (350 K) im Vergleich zur Raumtemperatur, was aber lediglich diese größere Breite widerspiegelt.

Man beobachtet, dass die ermittelten Werte mit den Literaturwerten meistens übereinstimmen. Unsere abgeschätzten Unsicherheiten sind wesentlich größer als die vom Fit ergebenden Standardabweichungen, da die Peaks oft nicht genau unterscheidbar sind, wie man in Abbildung 5 sehen kann.

Eine größere Abweichung ist im Wert der Energiedifferenz zwischen den p-Hyperfeinniveaus $F = 0$ und $F = 1$ bei Rb 87 zu erkennen. Ein möglicher Grund dafür ist die Unschärfe des mittleren Peaks, wie es im letzten Plot der Abbildung 5 zu sehen ist. Daher ist die Resonanzfrequenz nicht genau zu ermitteln.

4 Abschluss

In diesem Versuch wurden die theoretischen Vorhersagen zur Hyperfeinstruktur des Rubidium-Atoms nachgewiesen. Der Mechanismus der Sättigungsspektroskopie wurde erfolgreich ausgenutzt, um die Dopplerverbreiterung zu umgehen und die Energieabstände der Hyperfeinniveaus zu messen, und wir konnten auch das Auftauchen der sogenannten Cross-Over-Peaks beobachten. Der Gauß-Peak und der Lorentz-Peak haben sich als kompatible Kurven zur modellierung der Dopplerverbreiterung, bzw. der natürlichen Linienbreite, erwiesen. Außerdem waren die gemessenen Werte in den meisten Fällen kompatibel zu den Literaturwerten.

Literatur

[Hümmer et al., 2016] Hümmer, T., Benedikter, J., and Mader, M. (2016). Versuch H2 Laserspektroskopie.

[Steck, 2001] Steck, D. A. (2001). Rubidium 87 D line data. page 26.

[Steck, 2008] Steck, D. A. (2008). Rubidium 85 D line data. page 26.