Caderno de Questões

Segunda Fase - Beta

OMU - 41ª Edição

Instruções

Leia com atenção. Este texto faz parte do regulamento.

Normas para a realização das provas

1. As equipes tem 7 (sete) dias para realizar a prova. Estimulamos que os alunos de uma mesma equipe interajam o máximo possível entre si.
2. Pedimos que, até o final da prova, as provas não sejam disponibilizadas em mídias sociais e tampouco compartilhadas com pessoas não participantes da 41ª OMU.
3. As respostas devem ser **manuscritas**. Provas escritas em editor de texto (LaTeX, Word e semelhantes) não serão corrigidas. Provas manuscritas com mesas digitalizadoras ou tablet serão aceitas. Figuras do GeoGebra ou códigos manuscritos anexados à solução (desde que não se ultrapasse o limite de páginas) serão aceitos quando comentados. Quaisquer outras **capturas de tela** não serão avaliadas.
4. É permitido consultar sites, livros e utilizar softwares, mas todos os materiais consultados que tenham tido alguma valia devem ser citados explicitamente nas provas. **Utilizar fontes sem fazer referência é considerado plágio**.
5. É proibido consultar outras pessoas (colegas, pais, parentes, amigos, professores) acerca das questões, que não sejam os próprios alunos membros da equipe. Mesmo o professor responsável não deve participar da resolução das questões ou da escrita das respostas.
6. Relembramos que equipes não devem realizar provas conjuntamente. Provas idênticas serão **zeradas** de forma sumária.

7. O uso de inteligências artificiais para argumentação é proibido. Tais respostas, além de padronizadas, podem estar incompletas ou mesmo conter erros. Cuidado.

8. A consulta em sites e fóruns de discussão, tais como *Brainly*, *Stackexchange*, *Mathoverflow* e similares é **estritamente proibida**. Respostas copiadas destes sites serão consideradas inválidas e a postagem solicitada no site, caso identificada, levará à **desclassificação da equipe**. A organização da OMU mantém contato com responsáveis legais de diversos destes sites para coibir e punir este tipo de prática.

Sobre o envio das provas

Cada equipe deverá preparar **5 (cinco) cadernos de respostas**, um para cada uma das questões. Os cadernos serão feitos do seguinte modo:

1. Cada caderno de resposta terá **até 5 (cinco) folhas, apenas frente**, onde a equipe deverá escrever a redação final da resposta. Caso sejam enviados arquivos com mais de cinco páginas, serão corrigidas apenas as cinco primeiras.

2. Em **nenhum lugar** da prova deve ser escrito o nome dos participantes da equipe, do professor responsável ou da escola. Provas com qualquer identificação não serão corrigidas. Recomendamos portanto iniciar com folhas em branco, sem o logotipo da escola.

3. Caso sejam utilizadas folhas brancas, a versão final da prova deve ser escrita com **caneta preta ou azul** (não com lápis), para garantir melhor legibilidade. Provas realizadas em *tablet* e mesa digitalizadora, assim como desenhos no geral, poderão ser feitos em outras cores, mas questões ilegíveis não serão corrigidas. Logo, priorize cores contrastantes.

4. As provas deverão ser digitalizadas. Sugerimos que utilize um aplicativo gratuito para digitalizar as páginas com o celular. Veja uma lista de aplicativos disponíveis aqui ou aqui.

5. Os arquivos devem ser escaneados **exclusivamente em formato PDF**. Para cada questão, deverá ser enviado um único arquivo PDF.

6. Digitalize as páginas na ordem correta. Como medida extra de segurança, sugerimos que, no canto superior direito de cada pagina, numere-as indicando quantas foram enviadas (1/5, 2/5, 3/5, 4/5 e 5/5). Assim, caso a equipe envie páginas fora de ordem, existe a possibilidade de corrigirmos o erro.

7. No site da OMU, mediante login e senha, será possível enviar os arquivos com as respostas.

   (a) Há uma página para cada questão, onde é possível fazer o envio. Esta página é acessada através da Sala da Equipe.

   (b) Qualquer membro da equipe pode enviar as respostas, podendo ser membros diferentes para cada pergunta.

   (c) Você pode carregar suas respostas e salvá-las como rascunho. Assim, vocês evitam a tensão de ter de digitalizar e enviar todas as perguntas no último momento.

   (d) Se alguma pergunta ficar salva como rascunho, ao término do prazo de envio, a última versão salva na área de sua equipe será enviada para correção.

   (e) Apesar de os rascunhos serem corrigidos, recomendamos entregar definitivamente as questões. Somente assim, você ganhará um recibo que comprova sua entrega. Ele será essencial caso haja algum questionamento sobre o recebimento da questão.

8. Ao anexar as questões, verifique se está fazendo no lugar correto. Questões anexadas incorretamente **não** serão corrigidas.

9. Soluções de provas enviadas fora do sistema da OMU, por e-email ou qualquer outro meio, serão **ignoradas**.

10. O professor responsável pode acompanhar o andamento de cada uma de suas equipes através do ambiente *"Sala do Professor"*.

    (a) Na coluna com o nome da equipe, o ambiente permite que o professor visualize, para cada questão, se o envio já foi realizado, se está salva como rascunho ou se ainda não foi colocada no sistema.

    (b) Nesse ambiente, o professor pode realizar o envio das provas de suas equipes. No entanto, a Comissão Organizadora recomenda que o professor responsável fique com o papel de conferir o envio, caso deseje.

Sobre eventuais esclarecimentos

1. Eventuais esclarecimentos a respeito das questões serão publicados em `https://www.olimpiada.ime.unicamp.br/comunicados.html?abc`. Verifique, antes de solicitar esclarecimento, se sua dúvida já está respondida no site.

2. Pedidos de esclarecimentos serão aceitos, no máximo, até quarta-feira (**11 de junho**) via aba *Suporte* em `https://www.olimpiada.ime.unicamp.br/?abc`. Assim, a Comissão Organizadora terá tempo hábil para analisá-los e comunicá-los a todas as equipes.

3. Qualquer problema técnico no envio da prova deve ser comunicado pela aba *Suporte* em `https://www.olimpiada.ime.unicamp.br/suporte.html`.

Datas referentes ao envio da prova da segunda fase

1. As provas devem ser enviadas no sistema da OMU até às **23h59 de segunda-feira, 16 de junho**.

   É recomendado não deixar o envio para os últimos minutos; grandes fluxos podem gerar instabilidades técnicas.

   Prevendo a possibilidade deste tipo de ocorrência que afete o conjunto de participantes da OMU, o sistema poderá ser reaberto, permitindo o carregamento de documentos por mais duas horas, até as 02h00 (da madrugada) do dia 17 de junho.

   Após as 02h00 do dia 17 de junho, não será possível tratar novos pedidos relativos ao envio de provas.

Questão 1: Safira e Pérola disputam um jogo em um tabuleiro no formato de disco $\mathbb{D}$ de raio $R > 0$ centrado na origem,

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}.$$

Elas se alternam em turnos, **começando por Safira**, para posicionar pontos no disco, seguindo a regra de que todo ponto deve estar a uma distância maior ou igual a 1 dos demais.

A jogadora que não conseguir posicionar um novo ponto obedecendo à regra perde.

(a) Mostre que, para $R = 1$, Safira possui uma estratégia vencedora.

(b) É possível que Pérola vença em um tabuleiro de raio $R = 1$, assumindo que Safira não fará jogadas ótimas? Justifique.

(c) Mostre que o jogo sempre acaba.

(d) Mostre que Safira possui uma estratégia vencedora para todo $R > 0$.

Questão 2: Sejam C, D e E circunferências no semiplano superior do plano cartesiano (conforme ilustra a Figura 1), centradas em K_C, K_D e K_E, respectivamente. Sabe-se que:

- C, D, E são tangentes ao eixo x;
- C é tangente a E em um ponto P;
- C é tangente a D em um ponto Q;
- D é tangente a E em um ponto R;
- Q e R possuem a mesma abscissa.

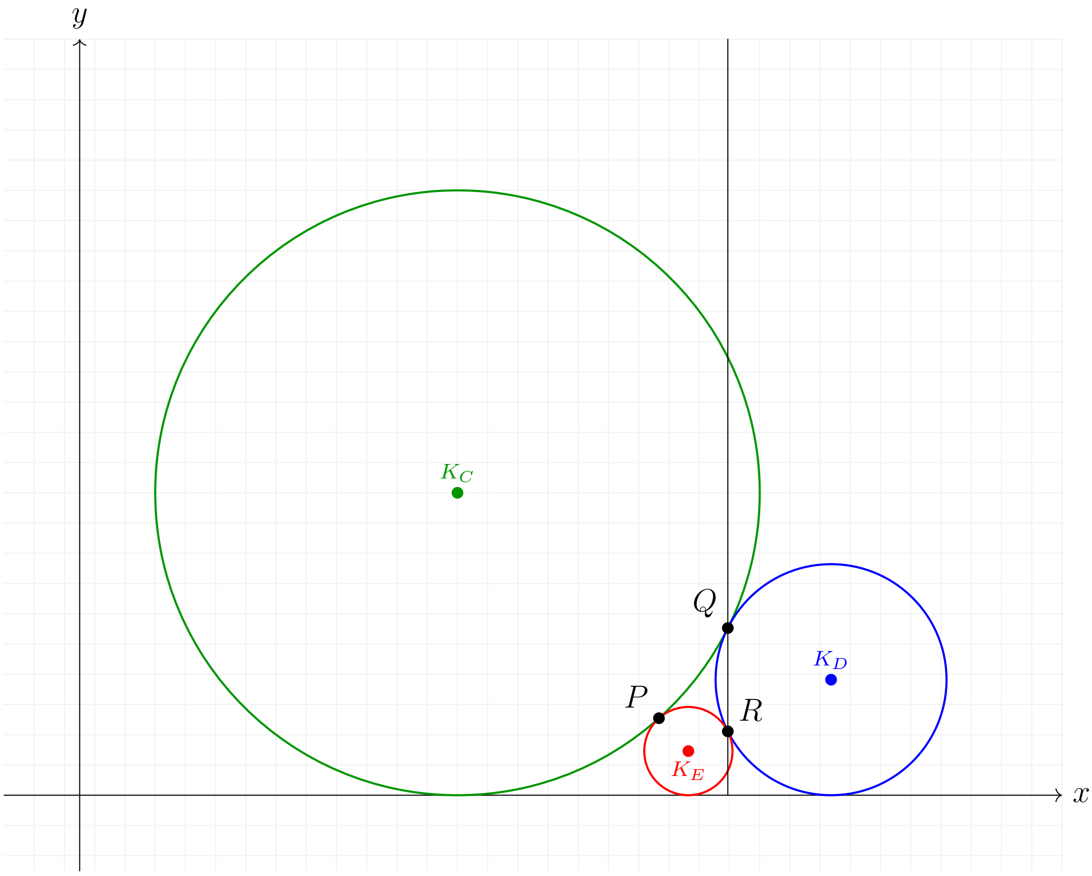


Figura 1: Circunferências C em verde, D em azul e E em vermelho.

Sejam c, d e e os respectivos raios de C, D e E. Mostre que

$$\frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Dica: mostre primeiro que

$$\sqrt{\frac{d}{e}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{c/d}}.$$

As imagens da resolução desta questão podem ser construídas pelo software matemático Geogebra (lembrando-se que todo argumento utilizado deve ser devidamente justificado).

Questão 3: Dados dois pontos $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ no plano cartesiano que será denotado por $\mathbb{R}^2$, definimos o *reticulado* Λ obtido através deles como sendo

$$\Lambda = \{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Um exemplo muito conhecido de reticulado é o assim chamado $\mathbb{Z}^2$, que é obtido pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, e consiste de todos os pontos com coordenadas inteiras, como ilustrado na figura 2.

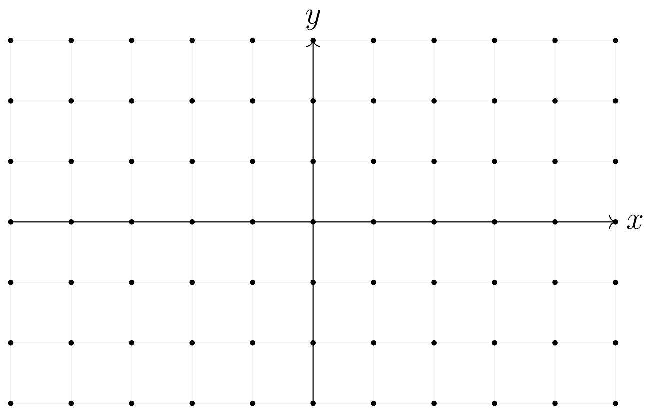


Figura 2: Reticulado $\mathbb{Z}^2$.

Fixado um ponto do reticulado $\mathbf{p} \in \Lambda$, o *arredor* de $\mathbf{p}$ para o reticulado Λ é definido como a região formada pelos pontos que estão mais próximos de $\mathbf{p}$ do que de qualquer outro ponto do reticulado. Em termos matemáticos, podemos escrever

$$\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\Lambda) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leqslant d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \text{ para todo } \mathbf{z} \in \Lambda\right\},$$

em que d_2 é a distância euclidiana usual do plano, ou seja, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, com $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, então $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Importante: Se necessário, você pode (não é obrigatório) utilizar ferramentas de desenho, como

Geogebra, para indicar a região encontrada em determinados itens. Mas lembre-se que desenhos feitos à mão ou por *software* sem justificativa matemática não serão aceitos como resposta.

Responda:

(a) Encontre a região no plano formada por todos os pontos que estão mais próximos da origem que de $\mathbf{p} = (1, 0)$ utilizando a distância euclidiana.

(b) Calcule e esboce o arredor da origem para o reticulado

$$\Lambda = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) Considere, agora, que a forma de medir as distâncias é modificada. Nesse caso, para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, com $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, definimos a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como sendo

$$d_{\max}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Considere o arredor de $\mathbf{p} \in \Lambda$ para um reticulado Λ associado a essa distância, ou seja,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{p}}^{\max}(\Lambda) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_{\max}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leqslant d_{\max}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \text{ para todo } \mathbf{z} \in \Lambda\right\}.$$

Calcule e esboce o arredor da origem para o reticulado

$$\Lambda = \{(2m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

utilizando a distância $d_{\max}$.

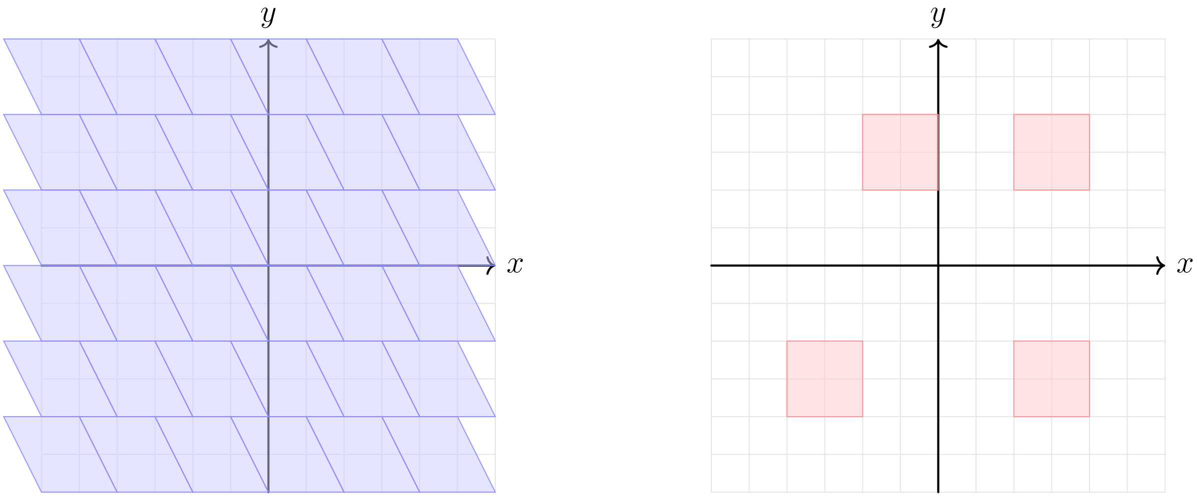
(Dica: Calcular a região do plano dos pontos mais próximos da origem do que de $(1, 0)$ usando a distância $d_{\max}$ pode ser útil.)

(d) Um ladrilhamento do plano é uma coleção de regiões do plano, chamadas *ladrilhos*, que satisfazem as seguintes condições:

(i) A união dessas regiões cobre todo plano, ou seja, qualquer ponto do plano pertence a pelo menos um *ladrilho*;

(ii) A interseção de quaisquer duas regiões (ou ladrilhos) acontece, no máximo, na borda das regiões.

As figuras a seguir indicam um ladrilhamento do plano (figura 3a) e uma coleção de regiões que não ladrilham o plano (figura 3b).



(a) Exemplo de ladrilhamento do plano.

(b) Exemplo de regiões que não ladrilham o plano.

Figura 3: Exemplos de ladrilhamento e de regiões que não ladrilham o plano.

Considere, neste item, que a distância entre dois pontos é feita pela **distância euclidiana**. Mostre que todo reticulado Λ possui a seguinte propriedade: para qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, existe um ponto $\mathbf{y} \in \Lambda$ tal que a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é a menor distância entre $\mathbf{x}$ e pontos de Λ. Conclua que a coleção de arredores de cada ponto de um reticulado arbitrário Λ ladrilham o plano.

Questão 4: Uma circunferência é dividida em p arcos congruentes pelos pontos $A_0, A_1, ..., A_{p-1}$, em que p é um número primo ímpar. Dada uma permutação $P = (i_0, ..., i_{p-1})$ dos elementos $0, ..., p-1$, a *curva poligonal* C_P determinada por essa permutação é a união dos segmentos de reta $\overline{A_{i_0}A_{i_1}}$, $\overline{A_{i_1}A_{i_2}}$, ..., $\overline{A_{i_{p-2}}A_{i_{p-1}}}$, $\overline{A_{i_{p-1}}A_{i_0}}$. Duas curvas poligonais são ditas *congruentes* se uma pode ser obtida a partir da outra por meio de uma rotação da circunferência. Veja o exemplo na Figura 4.

Responda:

(a) Seja $P = (i_0, ..., i_{p-1})$ uma permutação dos elementos $0, ..., p-1$. Determine o número de permutações (incluindo P) que determinam a mesma curva poligonal que P.

(b) Seja $\mathcal{C}$ uma curva poligonal. Determine o número de curvas poligonais congruentes a $\mathcal{C}$ (incluindo ela mesma).

(c) Determine o número total de curvas poligonais **não congruentes entre si** que podem ser obtidas a partir de permutações dos elementos $0, ..., p-1$ (ou seja, se existem exatamente k curvas poligonais que são congruentes a uma dada curva poligonal $\mathcal{C}$, incluindo ela mesma, então essas k curvas poligonais devem ser contadas apenas uma vez).

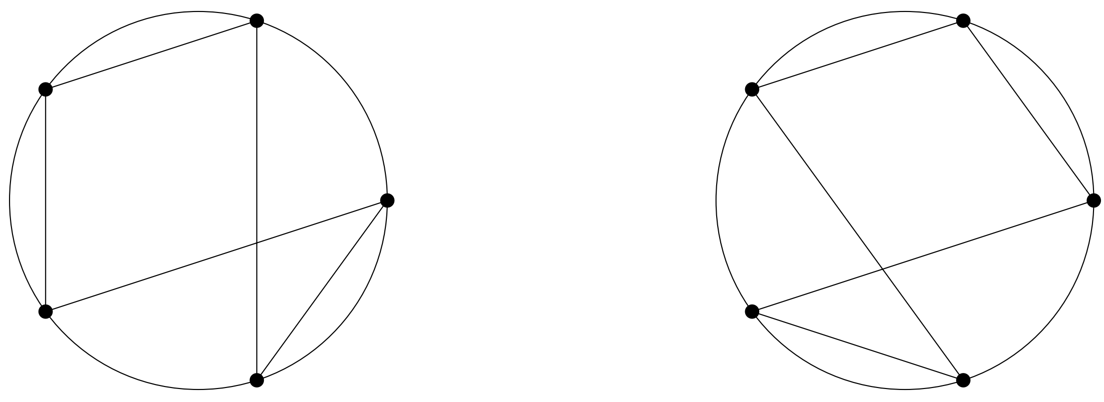


Figura 4: Exemplo de duas curvas poligonais distintas, porém congruentes, para $p = 5$.

Questão 5: Um espaguete cru caiu e, com o impacto, quebrou-se simultaneamente em alguns pedaços de maneira aleatória. Responda:

(a) Se o espaguete se quebrou em exatamente três pedaços, qual a probabilidade de as medidas destes pedaços serem as medidas de um triângulo?

(b) Se o espaguete se quebrou em quatro pedaços, então:

(*i*) Determine as condições (algébricas) que descrevem todas as configurações possíveis para os tamanhos dos quatro pedaços e, usando o GeoGebra, grafique a região do espaço delimitada por essas condições.

(*ii*) Determine as condições (algébricas) que quatro números devem satisfazer para que sejam medidas de um quadrilátero.

(*iii*) Utilizando (*i*) e (*ii*), determine as condições (algébricas) que devem ser satisfeitas para que os tamanhos destes quatro pedaços formem um quadrilátero e, usando o GeoGebra, grafique a região do espaço delimitada por essas condições.

(*iv*) Calcule a probabilidade de os tamanhos dos pedaços serem as medidas de um quadrilátero.

Observação: É obrigatório anexar as imagens dos gráficos solicitados, incluindo as argumentações. Não é permitido o uso de técnicas do Cálculo Diferencial.