

Tugas IV – Optimisasi Sistem Linear

SK5003 – *Programming in Science*

Zuhri A. Suffaturrachman
NIM 20922310

ISSUE 1 – Optimal, Maksimal, dan Minimal

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan optimal, maksimal, dan minimal?

Dalam *linear optimization model*,

- a. Nilai Optimal merupakan nilai yang merujuk pada solusi yang memberikan nilai terbaik yang mencakup nilai – nilai variable yang memaksimalkan (jika masalah maksimisasi) dan meminimalkan (jika masalah minimisasi) fungsi tujuan, sambil memenuhi semua Batasan yang ada.
- b. Nilai Maksimal merupakan nilai yang merujuk pada solusi yang memberikan nilai tertinggi dalam konteks masalah yang diselesaikan dengan memenuhi semua Batasan yang ada.
- c. Nilai Minimal merupakan nilai yang merujuk pada solusi yang memberikan nilai terendah dalam konteks masalah yang diselesaikan dengan memenuhi semua Batasan yang ada.

2. Apakah nilai optimal dapat sama dengan maksimal? Ataukah dapat berbeda? Berikan contoh untuk keduanya.

Nilai Optimal dapat sama dengan nilai maksimal namun juga dapat berbeda dengan nilai maksimalnya. Hal ini bergantung pada kondisi dimana masalah terjadi. Contoh nilai optimal terjadi apabila seseorang memerlukan sparepart mobil untuk mengatasi mobilnya yang tengah tidak dapat berjalan. Nilai maksimum akan dicapai apabila orang tersebut membeli sparepart original yang baru dari pabrikan, namun harganya mahal. Sedangkan nilai optimum akan dicapai apabila orang tersebut membeli sparepart original bekas yang masih dapat berfungsi dengan baik. Solusi optimum dicapai dengan kondisi sparepart yang diperoleh dalam kondisi baik namun dengan biaya yang jauh lebih murah.

3. Apakah nilai optimal dapat sama dengan minimal? Ataukah dapat berbeda? Berikan contoh untuk keduanya.

Nilai Optimal dapat sama dengan nilai minimal namun juga dapat berbeda dengan nilai minimalnya. Hal ini bergantung pada kondisi dimana masalah terjadi. Contoh nilai optimal terjadi apabila dihadapkan pada suatu kondisi dimana terdapat seorang pengemudi mobil yang sedang mencari rute terpendek atau tercepat untuk sampai pada lokasi tertentu. Nilai optimal akan memberikan urutan jalan dan rute yang paling efisien berdasarkan jarak, waktu, dan faktor lain yang relevan. Nilai minimal akan dihasilkan dari jarak tempuh yang pendek, namun dengan biaya yang relative mahal dikarenakan lewat jalan tol. Sedangkan nilai optimal akan diperoleh dari pengemudi yang melewati jalan alternatif non-tol. Dari segi waktu tempuh, pengemudi yang melalui jalan alternatif 10 menit lebih lama sampai daripada waktu tempuh apabila melalui jalan tol. Di sisi lain, pengemudi yang melewati jalan alternatif tidak perlu membayar biaya tol sebanyak Rp 53,000,00 untuk sekali jalan.

ISSUE 2 – Bentuk Umum Optimasi Linier

1. Terbagi dalam berapa bagian bentuk umum dari suatu model optimasi linier?

Terbagi menjadi 3, yaitu sebagai berikut.

- a. Decision Variable
- b. Objective Function
- c. Constraints

2. Tuliskan dan jelaskan dengan singkat bagian – bagian tersebut.

- a. *Objective Function* merupakan fungsi matematis yang harus dimaksimalkan atau diminimalkan dalam sebuah masalah optimasi. *Objective function* ini bergantung pada variable keputusan yang ingin dioptimalkan. Dalam masalah optimasi linear, fungsi objektif berbentuk linear, yaitu merupakan kombinasi linear dari variable keputusan dgn koefisien tertentu.
- b. *Constraints* (Batasan) merupakan kriteria yang harus dipenuhi dengan tujuan untuk membatasi nilai – nilai variable keputusan dan mempengaruhi solusi optimal yang mungkin dicapai. Dalam masalah optimasi linear, Batasan biasanya berbentuk persamaan atau ketidaksamaan linier.

ISSUE 3 – Point, Feasible Region, Infeasible Region

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan point?

Point merupakan entitas dasar yang tidak memiliki dimensi, yang memberikan informasi mengenai lokasi atau posisi dalam ruang atau sistem koordinat.

2. Jelaskan apa yang dimaksud dengan *feasible region*?

Feasible Region merupakan wilayah dalam ruang parameter dimana solusi – solusi yang memenuhi kendala dalam suatu masalah optimisasi atau permodelan matematika. *Feasible Region* dibentuk oleh semua kombinasi nilai variable keputusan yang memenuhi kendala – kendala yang telah ditetapkan.

3. Jelaskan apa yang dimaksud dengan *infeasible region*?

Infeasible Region merupakan wilayah dalam ruang parameter dimana tidak ada solusi yang memenuhi semua kendala yang ditetapkan dalam suatu masalah optimisasi atau permodelan matematika. Dalam *infeasible region*, tidak terdapat kombinasi nilai variable keputusan yang memenuhi kendala – kendala yang diberlakukan. Hal ini menunjukkan tidak ada solusi yang memenuhi semua persyaratan yang telah ditetapkan.

4. Dimanakan seharusnya solusi optimal terletak?

Solusi optimal terletak pada *feasible region* dalam konyeks masalah optimisasi. *Feasible Region* adalah Kawasan dalam ruang parameter dimana solusi – solusi yang memenuhi semua kendala dan Batasan dalam masalah optimisasi ditemukan.

5. Kaitkan antara nilai terbesar dan terkecil dengan permasalahan minimasi dan maksimasi linier, mana yang terkait dengan mana.

Dalam permasalahan maksimasi linier, variable yang digunakan disesuaikan dengan tujuannya yakni mencari nilai maksimum, sehingga nilai yang dicari adalah nilai terbesar. Sebaliknya, dalam permasalahan minimasi linier, variable yang digunakan disesuaikan dengan tujuannya yakni mencari nilai minimum. Sehingga yang dicari merupakan nilai minimal.

6. Terdapat berapa kasus dalam suatu permasalahan optimasi linier?

Dalam suatu permasalahan optimasi linier terdapat 2 kasus.

7. Tuliskan kasus – kasus yang dimaksud tersebut!
Kedua kasus tersebut adalah minimasi dan maksimasi.

ISSUE 4 – Variable Slack dan Excess

1. Apa yang dimaksud dengan variabel *slack*? Berikan ilustrasi cara menggunakannya.

Variabel *Slack* merupakan variabel yang ditambahkan ke model optimasi linier matematika untuk mengkonversikan pertidaksamaan (\leq) menjadi persamaan ($=$). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inialisasi. Variabel *Slack* merupakan variabel non-negatif yang mengukur sejauh mana kendala tidak terpenuhi yang digambarkan dengan sebuah konstanta, dan akan bernilai nol apabila kendala terpenuhi. Contoh penggunaannya, dimisalkan terdapat suatu model optimasi linier sebagai berikut.

$$3x + 2xy + 3y \leq 15$$

Sehingga untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan dengan variabel *slack* dengan simbol **k**, maka menjadi

$$3x + 2xy + 3y + k = 15$$

2. Apa yang dimaksud dengan variabel *excess*? Berikan ilustrasi cara menggunakannya.

Variabel *Excess* merupakan variabel yang ditambahkan ke model optimasi linier untuk mengubah pertidaksamaan (\geq) menjadi persamaan ($=$). Variabel ini merupakan variabel yang dapat bernilai non-negatif yang mengukur sejauh mana kendala tidak terpenuhi yang digambarkan dengan sebuah konstanta, dan akan bernilai nol jika kendala terpenuhi. Contoh penggunaannya, dimisalkan terdapat suatu model optimasi linier sebagai berikut.

$$3x + 2xy + 3y \geq 15$$

Sehingga untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan dengan variabel *slack* dengan simbol **k**, maka menjadi

$$3x + 2xy + 3y - k = 15$$

3. Apakah syarat nilai dari variabel *slack* dan *excess*?

- Variabel *slack* bernilai lebih dari 0 ($k > 0$)
- Variabel *excess* bernilai lebih dari 0 ($k > 0$)
- Nilai variabel *slack* dan *excess* dapat berubah selama proses pengoptimalan, namun tetap memenuhi syarat non-negatif

ISSUE 5 – Bentuk Standar Umum

1. Bila terdapat beberapa *constraint* yang berupa pertidaksamaan, bagaimanakan caranya agar menjadi persamaan?

Untuk mengubah suatu *constraint* berupa pertidaksamaan menjadi persamaan, maka dapat menggunakan variabel *slack* atau variabel *excess*. Sebagai contoh diketahui sebuah pertidaksamaan sebagai berikut.

$$2x + 5y \leq 18$$

Untuk mengubah *constraint* menjadi persamaan, maka dapat menggunakan variabel *slack* sebagai berikut.

$$2x + 5y + k_s = 18$$

Untuk mengubah *constraint* menjadi persamaan, maka dapat menggunakan variabel *excess* sebagai berikut.

$$2x + 5y - k_e = 18$$

2. Apa yang perlu dilakukan bila *constraint* kurang dari suatu nilai tertentu?
Apabila *constraint* kurang dari suatu nilai tertentu, maka dapat menggunakan variabel *slack* untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan.

3. Apa yang perlu dilakukan bila *constraint* lebih dari suatu nilai tertentu?
Apabila *constraint* lebih dari suatu nilai tertentu, maka dapat menggunakan variabel *excess* untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan.

4. Berikan contoh untuk kedua kondisi di atas.
Apabila terdapat sebuah pertidaksamaan sebagai berikut

$$3x + 2xy + 3y \leq 15$$
 Untuk menjadi sebuah persamaan, maka dapat menambahkan variabel *slack* bernilai k_s sebagai berikut.

$$3x + 2xy + 3y + k = 15$$
 Apabila terdapat sebuah pertidaksamaan sebagai berikut

$$3x + 2xy + 3y \geq 15$$
 Untuk menjadi sebuah persamaan, maka dapat menambahkan variabel *slack* bernilai $-k_e$ sebagai berikut.

$$3x + 2xy + 3y - k = 15$$

5. Tuliskan beberapa *constraint* yang telah menjadi persamaan dan nyatakan dalam bentuk perkalian matriks.
 - a. $3x + 2y = 15$
Matriks $[3,2] \times [x,y]^T = [15]$
 - b. $x - 4y = 22$
Matriks $[1,-4] \times [x,y]^T = [22]$
 - c. $-x + 3y = -12$
Matriks $[-1,3] \times [x,y]^T = [-12]$

ISSUE 6 – Variabel Decision dan Fungsi Objektif

1. Apa yang dimaksud dengan variabel decision? Jelaskan dengan singkat.
Variabel *Decision* merupakan variabel dalam optimasi linier yang menggambarkan alternatif Tindakan atau aksi. Nilai daripada variabel ini ditentukan oleh pengambil keputusan (*decision maker*).

2. Apa yang dimaksud dengan fungsi objektif? Jelaskan dengan singkat.
Fungsi objektif atau lebih dikenal dengan fungsi tujuan merupakan fungsi yang menggambarkan tujuan atau sasaran di dalam permasalahan linier program yang berkaitan dengan pengaturan secara optimum untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimal. Fungsi objektif selalu memiliki salah satu target yaitu memaksimalkan atau meminimumkan suatu nilai.

3. Tuliskan kaitan antara fungsi objektif dan variabel decision.
Dalam model optimasi linier, variabel *decision* digunakan dalam fungsi objektif untuk menghitung nilai yang ingin diminimalkan atau dimaksimalkan. Solusi optimal dari model optimisasi akan memberikan nilai optimal bagi variabel *decision* yang mengoptimalkan fungsi objektif sesuai dengan tujuan yang ditetapkan. Dengan kata lain, variabel *decision* dapat ditentukan dengan tujuan fungsi objektif mencapai nilai optimal.

ISSUE 7 – Studi Kasus #1

1. Pelajari Studi Kasus 1

$$A = x_1$$

$$B = x_2$$

$$C = x_3$$

2. Bila terdapat tambahan produk C dengan harga jualnya adalah \$13,50 maka tuliskan fungsi objektifnya.

$$C = aP + bQ$$

$$a = 13,50$$

$$S = 12,75x_1 + 15,25x_2 + 13,5x_3$$

$$0,25x_1 + 0,15x_2 + ax_3 \leq 21,85$$

$$0,125x_1 + 0,35x_2 + bx_3 \leq 29,5$$

$$x_1 \leq 18,5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

3. Bila produk C dapat terjual per-minggu sejumlah £16,50 maka tuliskan *constraint* tambahannya.

$$C = aP + bQ$$

$$a = 16,50$$

$$x_1 \leq 16,5$$

ISSUE 8 – Studi Kasus #2

1. Pelajari Studi Kasus 2

$$X = x_1, Y = x_2$$

2. Bila waktu maksimum penggunaan mesin M1, M2, dan M3 adalah 420, 300, dan 400 jam, tuliskan semua *constraint* nya.

$$P = 4,75x_1 + 3,55x_2$$

$$4,5x_1 + 7,25x_2 \leq 420$$

$$6,45x_1 + 3,65x_2 \leq 300$$

$$10,85x_1 + 4,85x_2 \leq 400$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

3. Bila keuntungan kedua produk, berturut – turut menjadi \$5,25 dan \$7,45, tentukan fungsi objektifnya.

$$P = 5,25x_1 + 7,45x_2$$

ISSUE 9 – Studi Kasus #3

1. Pelajari Studi Kasus 3

$$P = x_1, Q = x_2$$

$$C = 4,55x_1 + 3,55x_2$$

Constraints

$$9,75x_1 + 22,95x_2 \geq 5045$$

$$18,15x_1 + 12,15x_2 \geq 450,75$$

$$13,95x_1 + 18,85x_2 \geq 325,15$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

2. Jelaskan mengapa dalam kasus ini fungsi objektifnya harus diminimumkan sedangkan pada kasus – kasus sebelumnya harus dimaksimumkan? Apa perbedaan kasus ini dengan kedua kasus sebelumnya?

Pada studi kasus 3, fungsi objektif yang dicari adalah solusi biaya minimum untuk memenuhi kebutuhan diet minimum. Sedangkan pada studi kasus 1 dan studi kasus 2 dimaksudkan untuk melakukan fungsi objektif untuk solusi keuntungan atau profit dari penjualan sebuah barang / produk.

ISSUE 10 – Studi Kasus #4

1. Pelajari Studi Kasus 4

$$\text{Corn} = x_1, \text{Barley} = x_2, \text{Wheat} = x_3$$

$$P = (135 \times 1,70x_1) + (45 \times 3,05x_2) + (100 \times 2,25x_3)$$

$$P = 229,5x_1 + 137,25x_2 + 225x_3$$

Constraints

$$135x_1 + 45x_2 + 100x_3 \leq 3895$$

$$95x_1 + 205x_2 + 115x_3 \leq 16850$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 140$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

2. Jelaskan apa yang dimaksud dengan Batasan sumber daya (*resource limitation*)?

Batasan sumber daya (*resource limitation*) merupakan Batasan yang diterapkan pada variabel-variabel dalam suatu persamaan optimasi linier. Contoh: Batasan ukuran dan batasan biaya dalam sebuah konteks pencarian nilai optimal sebuah profit penjualan pakaian.

3. Mengapa *constraint* selalu diturunkan dari Batasan tersebut?

Hal ini diterapkan karena batasan sumber daya (*resource limitation*) dilakukan pembatasan ketersediaan persamaan untuk mencapai nilai optimal, sehingga dapat mengisi nilai solusi yang ada.