<u>בייסיאני – תרגיל 2</u>

1. נשתמש בנוסחת להחלפת משתנה לפונק' הצפ' $f: x \to y$:

$$p_y(y) = \left|\frac{\partial f^{-1}(y)}{\partial y}\right| p_x(f^{-1}(y))$$

במקרה שלנו:

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{k+1} (10\alpha_n)x^n + \eta$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1 \dots \alpha_k) = \frac{1}{10}\cdot\vec{\theta}$$

$$f^{-1}(\theta_1 \dots \theta_k) = 10\vec{\alpha} \Rightarrow \frac{\partial f^{-1}(\alpha)_i}{\partial \alpha_j} = \delta^i_j \cdot 10 = \begin{bmatrix} 10 & & \\ & \ddots & \\ & & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{p_\alpha(\alpha|D) = p_\theta(10\alpha|D)\cdot 10^k}$$

באופן דומה:

$$y_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{k+1} \gamma_n^3 x^n + \eta$$

$$\cancel{f^{-1}(\theta_1,\dots\theta_k)=}$$

$$f^{-1}(\gamma_1 \dots \gamma_k) = \begin{bmatrix} \gamma_1^3 \\ \vdots \\ \gamma_k^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f^{-1}(\gamma)_i}{\partial \gamma_j} = \begin{bmatrix} 3\gamma_1^2 & & & \\ & 3\gamma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 3\gamma_k^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p_\gamma(\gamma|D) = p_\theta(\gamma_1^3 \dots \gamma_k^3|D)\left(\prod_{i=1}^{k}\gamma_i^2\right)3^k}$$

2. עבור α. נזכור כי

$$\hat{\theta}^{MMSE}(D) = E[\theta|D]$$

ומכאן ש-

$$\hat{\alpha}^{MMSE}(D) = E[\alpha|D] =$$

$$= \int \alpha\, p_\alpha(\alpha|D)\, d\alpha = \int 10^k p_\theta(10\alpha|D)\,\alpha\, d\alpha =$$

$$\overset{k=1}{\Downarrow} \quad \int 10\alpha\, p_\theta(10\alpha|D)\, d\alpha = \int \frac{1}{10}\theta\, p_\theta(\theta|D)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{10} E[\theta|D]$$

$$\hat{\gamma}^{MMSE}(D) = \int \gamma\, p_\gamma(\gamma|D)\, d\gamma = \int \gamma \cdot 3\gamma^2 p_\theta(\gamma_1^3 \dots \gamma_k^3|D)\, d\gamma =$$

$$= \int \sqrt[3]{\theta}\, p_\theta(\theta|D)\, d\theta \neq E[\theta|D]$$

3.

$$p(\theta, D_1, D_2) = \cancel{p(\theta, D_1}$$

$$= p(\theta)\,p(D_1, D_2|\theta)$$

$$= p(\theta)\,p(D_1 \cap D_2|\theta)$$

מאחר ו- D_1, D_2 הם מאורעות בת"ל כי D_1 מייצג חלק מהנק' הרלוונטיות ו- D_2 מייצג חלק מהנק' האחרות. נקבל כי

$$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1)\,p(D_2)$$

ומכאן:

$$p(D_1 \cap D_2|\theta) = p(D_1|\theta)\cdot p(D_2|\theta)$$

$$\Rightarrow p(\theta, D_1, D_2) = p(\theta)\,p(D_1|\theta)\,p(D_2|\theta)$$

4.

$$p(\theta|D_1, D_2) = \frac{p(\theta)\,p(D_1|\theta)\,p(D_2|\theta)}{p(D_1, D_2)}$$

$$= \propto \quad p(\theta)\,p(D_1|\theta)\,p(D_2|\theta)$$

נזכור כי בהינתן θ הסיכוי לקבלת D:

~~$D|\theta \sim \mathcal{N}(H$~~

$$p(D|\theta) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)^T \frac{1}{\sigma^2}(y-\mu)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - H_x\theta)^T(y - H_x\theta)\right)$$

נציב: הסכום באקספוננט:

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}(\theta-\mu)^T\Sigma^{-1}(\theta-\mu) - \frac{1}{2\sigma^2}(y^{(1)} - H_x^{(1)}\theta)^T(y^{(1)} - H_x^{(1)}\theta)$$

$$- \frac{1}{2\sigma^2}(y^{(2)} - H_x^{(2)}\theta)^T(y^{(2)} - H_x^{(2)}\theta)\Big)$$

ניתן לחשוב על המצב כאילו ב-

$$\cancel{H_3 = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{H_3 = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}} \quad H_3 = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

נציב במטריצות ונקבל כי

$$H^T H \to \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = H_1^T H_1 + H_2^T H$$

$$H^T y \to \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = H_1^T y_1 + H_2^T y_2$$

5. נזכיר כי

$$\Sigma_{\theta|D} = \Sigma^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} H^T H$$

$$\mu_{\theta|D} = \Sigma_{\theta|D} \left(\Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{\sigma^2} H^T y \right)$$

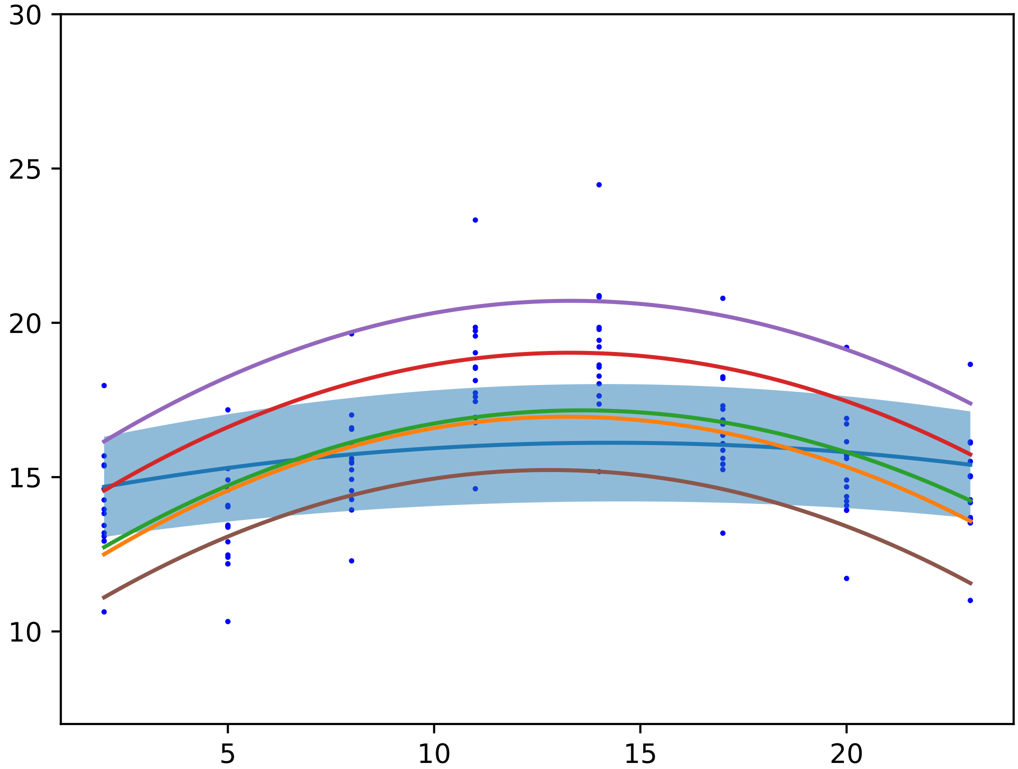
עבור גאוסיין ומידע (D ומידע). אז נקבל כי

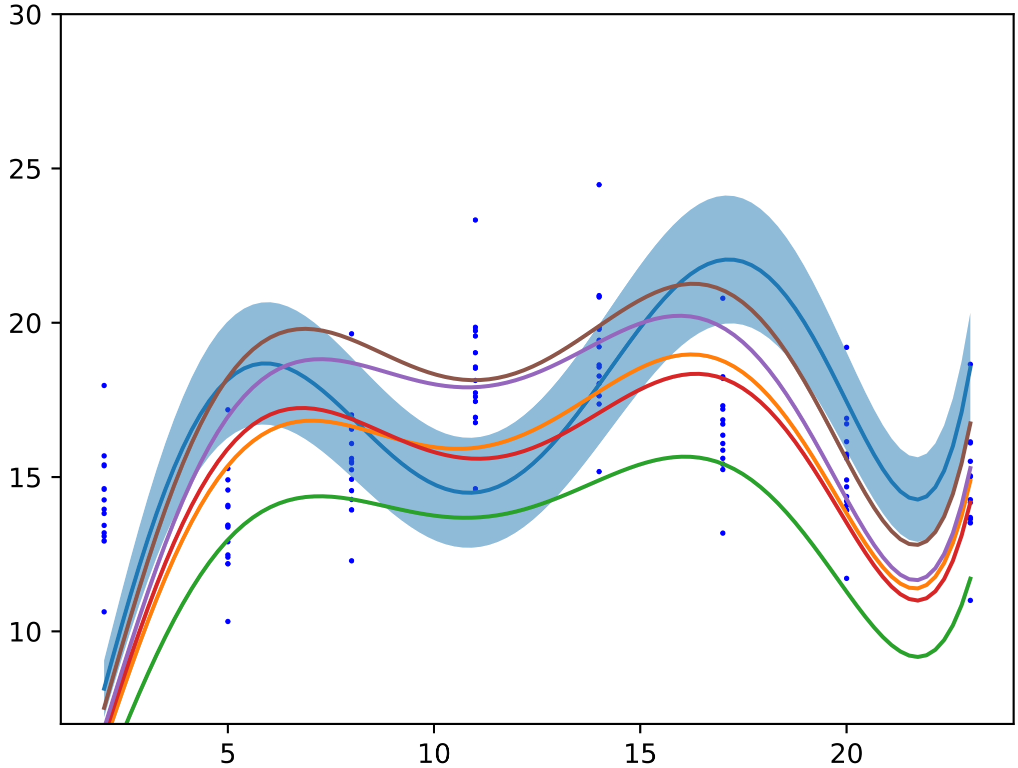
$$\Sigma^{(i)}_{\theta|D^{(i)}} = \Sigma^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} H^{(i)T} H^{(i)}$$

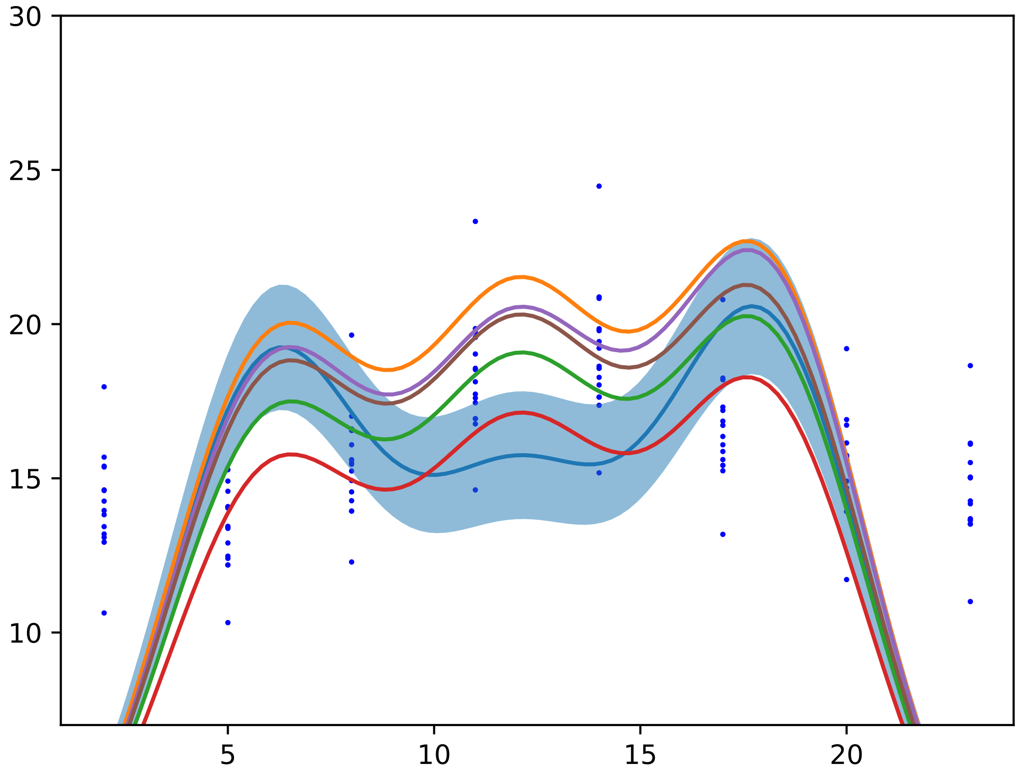
$$\mu^{(i)}_{\theta|D} = \Sigma^{-1(i)}_{\theta|D} \left(\Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{\sigma^2} H^{(i)T} y^{(i)} \right)$$

$$\Rightarrow \Sigma^{-1}_{\theta|D} = \Sigma^{-1(1)}_{\theta|D} + \Sigma^{-1(1)}_{\theta|D} - \Sigma^{-1}$$

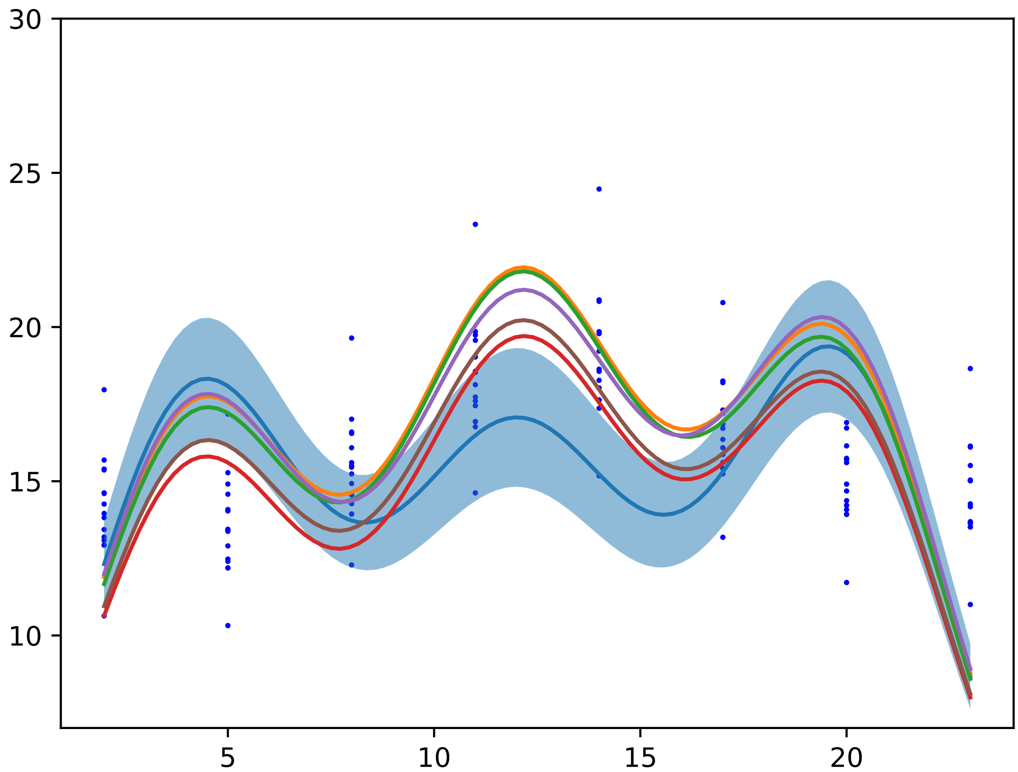
$$\mu_{\theta|D} = \Sigma_{\theta|D} \cdot \left(\Sigma^{(1)^{-1}}_{\theta|D} \mu^{(1)}_{\theta|D} + \Sigma^{(2)^{-1}}_{\theta|D} \mu^{(1)}_{\theta|D} - \Sigma^{-1}\mu \right)$$


30
25
20
15
10
5
10
15
20

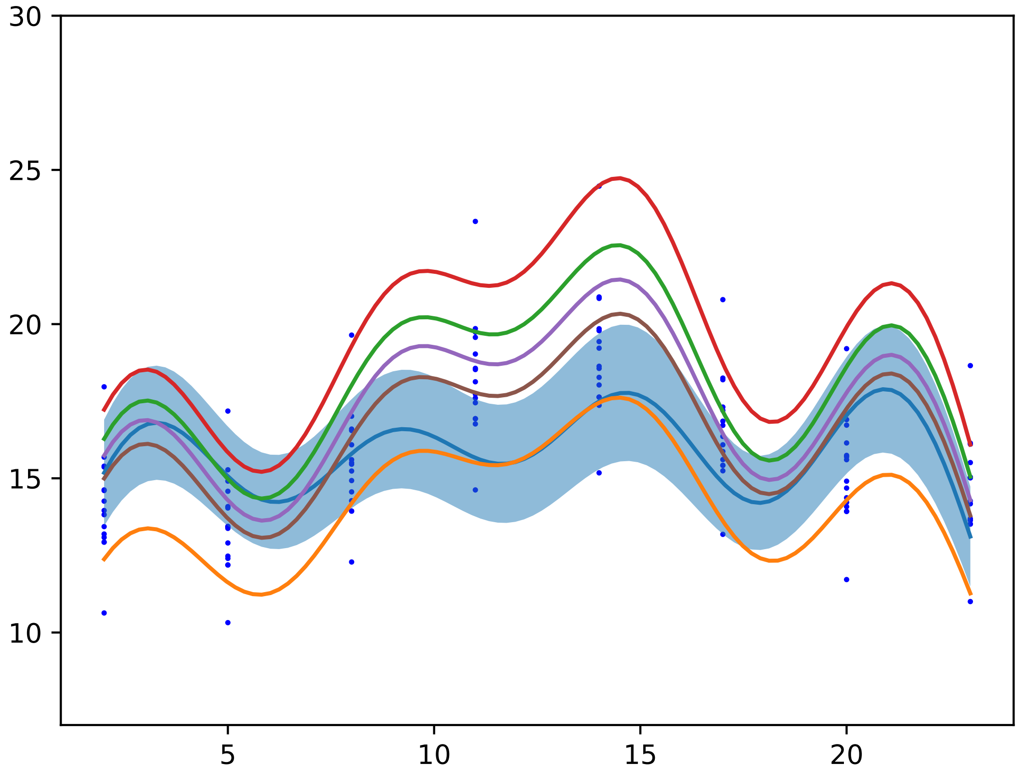

30
25
20
15
10
5
10
15
20

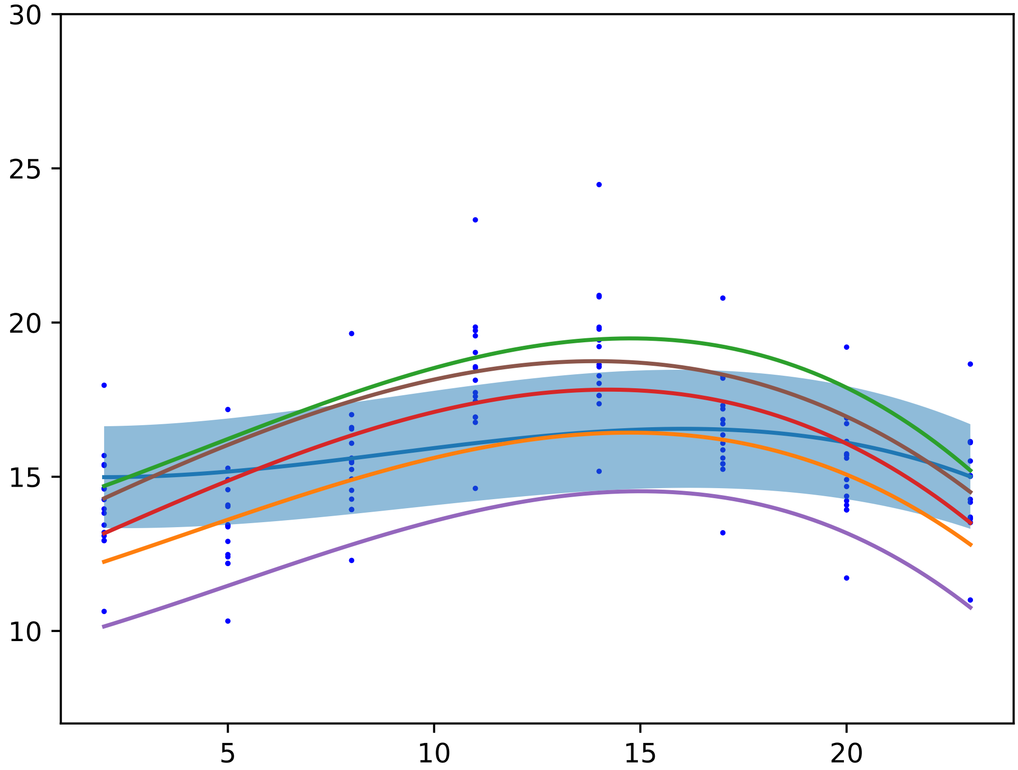


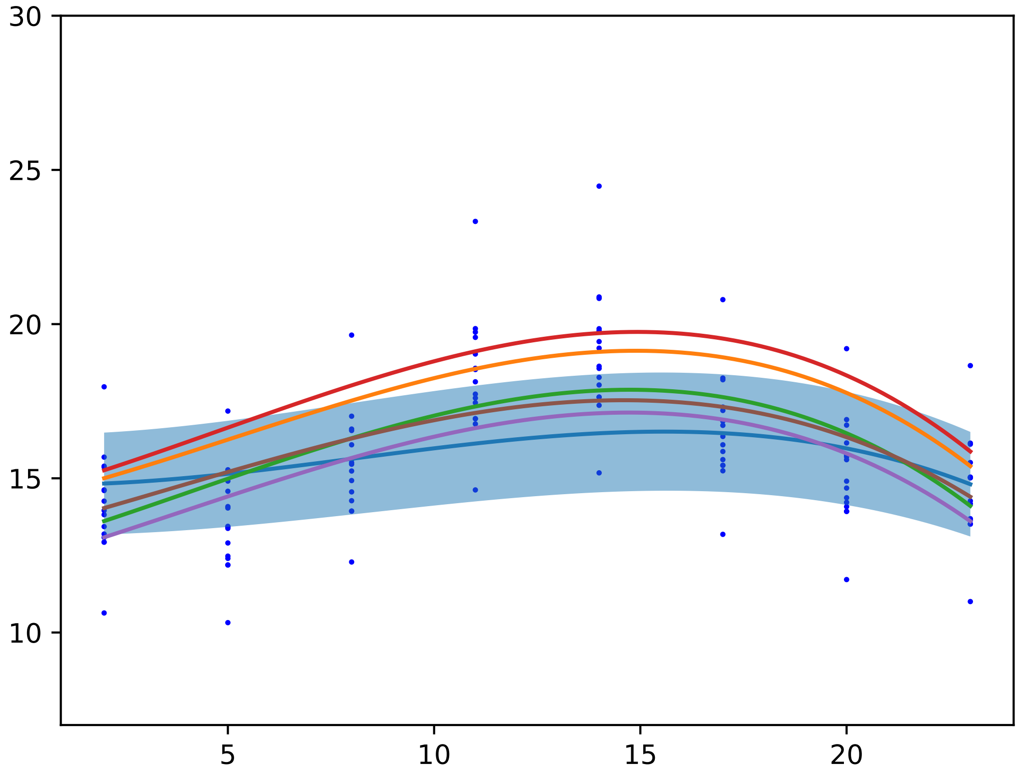
30
25
20
15
10
5
10
15
20

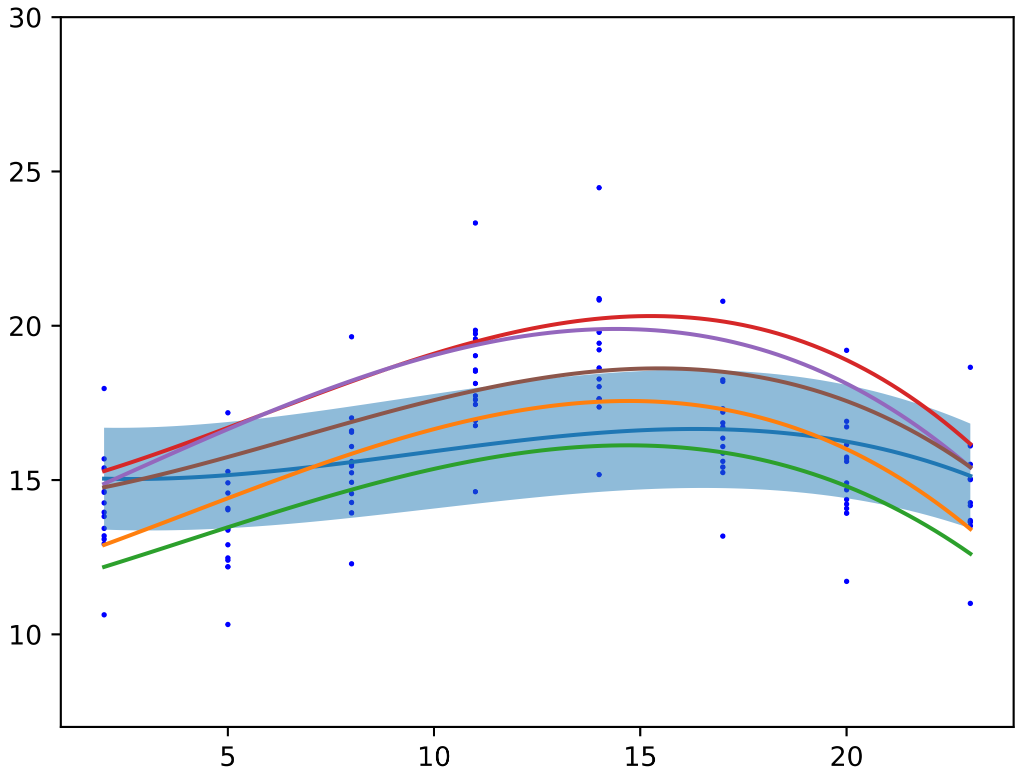


30
25
20
15
10
5
10
15
20


30
25
20
15
10
5
10
15
20


30
25
20
15
10
5
10
15
20


30
25
20
15
10
5
10
15
20


30
25
20
15
10
5
10
15
20