תרגיל 4.

6 בינואר 2022

שקד ריבר ודויד פונרובסקי.

תרגיל 1.

נמצא את $arg\max_t P\left(t|a,b\right)$:

$$P\left(t|a,b\right)=\prod_{i}\pi_{a_i}\left[e^{t\boldsymbol{R}}\right]_{a_i,b_j}=\left(\prod_{\xi=a_i=b_j}\frac{\pi_\xi}{4}\left(1+3e^{-4\alpha t}\right)\right)\left(\prod_{\xi\neq\eta}\frac{\pi_\xi}{4}\left(1-3e^{-4\alpha t}\right)\right)=$$
$$=\left(\prod_{\xi}\left(\frac{\pi_\xi}{4}\left(1+3e^{-4\alpha t}\right)\right)^{N_{\xi,\xi}}\right)\left(\left(\prod_{\xi\neq\eta}\frac{\pi_\xi}{4}\left(1-e^{-4\alpha t}\right)\right)^{N_{\xi,\eta}}\right)$$

כלומר בהנתן מספר ההופעות של $N_{\xi,\eta}=\sum_i\mathbf{1}\left\{a_i=\xi,b_i=\eta\right\}$ ו t -אנו מסוגלים לחשב את ההסתברות ולכן הם ה sufficient-statistics. נמשיך בחישוב כדי לשערך את $\hat{t}$. נשתמש בזהות הבאה לנגזרת של מכפלה:

$$f=\left(\prod A_i\right)\Rightarrow\partial f=\sum_j\left(\prod_{i\neq j}A_i\right)\cdot\partial A_j=\sum_j\left(\prod_i A_i\right)\cdot\frac{\partial A_j}{A_i}=$$
$$=f\cdot\left(\sum_j\frac{\partial A_j}{A_i}\right)$$

ולכן

$$\partial_t P\left(t|a,b\right)=P\left(t|a,b\right)\left(\sum_\xi\frac{-12\alpha e^{-4\alpha t}}{\left(1+3e^{-4\alpha t}\right)}N_{\xi,\xi}+\sum_{\xi\neq\eta}\frac{4\alpha e^{-4\alpha t}}{\left(1-e^{-4\alpha t}\right)}N_{\xi,\eta}\right)=$$
$$=P\left(t|a,b\right)4\alpha e^{-4\alpha t}\left(\frac{-3}{\left(1+3e^{-4\alpha t}\right)}\sum_\xi N_{\xi,\xi}+\frac{1}{\left(1-e^{-4\alpha t}\right)}\sum_{\xi\neq\eta}N_{\xi,\eta}\right)=$$
$$=P\left(t|a,b\right)4\alpha e^{-4\alpha t}\left(\frac{-3}{\left(1+3e^{-4\alpha t}\right)}\sum_\xi N_{\xi,\xi}+\frac{1}{\left(1-e^{-4\alpha t}\right)}\left(N-\sum_\xi N_{\xi,\xi}\right)\right)=0$$
$$\overbrace{\frac{3\sum_\xi N_{\xi,\xi}}{\left(N-\sum_\xi N_{\xi,\xi}\right)}}^{\phi}=\frac{\left(1-e^{-4\alpha t}\right)}{\left(1+3e^{-4\alpha t}\right)}\Rightarrow\left(3\phi+1\right)e^{-4\alpha t}=1-\phi\Rightarrow$$
$$\hat{t}=\frac{1}{4\alpha}\ln\frac{3\phi+1}{1-\phi}$$

כלומר, קיבלנו כי אנו זקוקים לפרמטר $\phi=\frac{3\sum_\xi N_{\xi,\xi}}{\left(N-\sum_\xi N_{\xi,\xi}\right)}$ כדי לשערך את $\hat{t}$.

תרגיל 2.

1. נחפש מטריצת R המגדירה $P\left(t\right)$ ש $\left(\frac{1}{n}\vec{1}\right)^\top P=\left(\frac{1}{n}\vec{1}\right)^\top$ אך R אינה רורסבילית. דוגמא $R=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}$

מיצד אחד R היא המעגל $\mathbb{Z}_4$, כלומר מטריצת שכנויות של גרף 1-רגולרי ולכן $\vec{1}$ הוא ו"ע שלה ולכן ההתפלגות האחידה היא אחת מבין ההתפלגויות הסטצניוריות שלה. מצד שני, R אינה רורסבילית.

2. ניסתכל על המטריצה $R=\begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}$ מצד אחד $R=R^{\top}$ ולכן רורסבילית. מצד שני, $\vec{1}^{\top}R=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}$ כלומר ההתפלגות האחידה אינה התפלגות סטציונרית של R.

תרגיל 3.

1. נשאל מה ההסתברות עבור המאורע $X_i \overset{t}{\rightsquigarrow} X_j$ כי היות וR ארגודית אז הסתברות סימטרית באופן אסימפטוטי לשיקוף בציר הזמן כלומר $P\left(X_i \overset{t}{\rightsquigarrow} X_j\right) P\left(X_j \rightsquigarrow \infty\right) = P\left(-\infty \rightsquigarrow X_i\right) P\left(X_i \overset{t}{\rightsquigarrow} X_j\right)$ ולכן $P\left(X_i \overset{t}{\rightsquigarrow} X_j\right) =$ $\frac{P(-\infty \rightsquigarrow X_i)}{P(X_j \rightsquigarrow \infty)} P\left(X_i \overset{t}{\rightsquigarrow} X_j\right) = \frac{\pi_{X_i}}{\pi_{X_j}} \left[e^{t\boldsymbol{R}}\right]_{X_i,X_j}$ מכאן ש

$$LL\left(T\right) = \prod_{\{i,j\}\in E} \frac{\pi_{X_i}}{\pi_{X_j}} \left[e^{t\boldsymbol{R}}\right]_{X_i,X_j} = \prod_{i\in V \text{leaf not and}} \pi_{X_i} \prod_{\{i,j\}\in E} \frac{1}{\pi_{X_j}} \left[e^{t\boldsymbol{R}}\right]_{X_i,X_j}$$

2. מאחר ו R רורסבילית, כלומר התהליך סימטרי לזמן גם באופן לוקלי אז $P\left(X_i \overset{t}{\rightsquigarrow} X_j\right) = P\left(X_j \overset{t}{\rightsquigarrow} X_i\right)$ ולכן: $\frac{\pi_{X_i}}{\pi_{X_j}} \left[e^{t\boldsymbol{R}}\right]_{X_i,X_j} = \frac{\pi_{X_j}}{\pi_{X_i}} \left[e^{t\boldsymbol{R}}\right]_{X_j,X_i}$. מכאן שלכל שינוי הכיוונים שנבחר עבור E (כולל השמות DAG לא הגיוניות) נקבל כי המכפלה $LL\left(T\right)$ תשאר זהה.