תרגיל 1

7 באפריל 2020

דויד פונרובסקי 208504050.

1 חימום.

1.1 סעיפים 1 + 2:

$$proj\,(u,v)=\frac{\langle u,v\rangle}{||u||}\cdot\frac{u}{||u||}=\begin{array}{ll}(1)\to & \frac{1}{1^2+(-1)^2+2^2}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\2\end{bmatrix}=\frac{6}{9}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\\ \\ (2)\to & \frac{1}{1^2+(-1)^2+1^2}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}=\frac{0}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}=0\end{array}$$

1.2 סעיף 3:

טענה- $\langle u,v\rangle=0\Leftrightarrow$ הזווית בין u ל v היא $\pm\frac{\pi}{2}$. ל $u,v\in\mathbb{R}^m$. הוכחה, נחשב את $\langle u,v\rangle$:

$$0=\langle u,v\rangle=||u||\cdot||v||\cos\theta$$

מיצד שני נתון כי $u,v\neq\vec{0}$ ולכן $||u||,||v||>0$ זה יכל לקרות אם ורק אם $\cos\theta=0$ ולכן $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ (עד כדי מחזור 2π).

1.3 סעיף 4:

טענה- אם $A\in Orthonormal$ אזי $||Au||_2=||u||_2$. הוכחה: נזכיר כי $A^tA=\mathbb{I}$, ונקבל כי :

$$||Au||_2=\left((Au)^t\,Au\right)^{\frac{1}{2}}=\left(u^tA^tAu\right)^{\frac{1}{2}}=\left(u^tu\right)^{\frac{1}{2}}=||u||_2$$

2 SVD :

2.1 סעיף 5:

נתונה לנו A ביצוג SVD כלומר $A = UDV^T$ כאשר U ו V הן אורטונורמליות. לכן נקבל כי $A^{-1} = \left(UDV^T\right)^{-1} = \left(V^T\right)^{-1} D^{-1}U^{-1} = VD^{-1}U^T$. כשאשר המעבר האחרון $U^{-1} = U^T$ נובע מכך ש U אורטונורמלית (לפי משפט).
נשים לב שחישוב ההופכית על ידי דירוג $[A|\mathbb{I}]$ (גאוס-ג'ורדן) ידרוש מאיתנו $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ זמן, כאשר n הוא מספר השורות (והעמודות) של A. לעומת זאת מאחר ו $D \in diag$ ניתן לחשב את D^{-1} ב $\mathcal{O}\left(n\right)$ ואת U^T ניתן לחשב ב $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.
את המימוש של U^T ניתן לשפר בכך שבמקום להחליף את U ניתן פשוט להחליף את האיטרטור, כך שבעת גישה ל $\left(U^T\right)_{i,j}$ נקבל את $U_{j,i}$. זאת כמובן ב $\mathcal{O}\left(1\right)$.

2.2 סעיף 6:

נשים לב כי $C^T = \left(UDV^T\right)^T = VD^TU^T$ אבל $D \in diag$ ולכן $D^T = D$ כלומר $C^T = VDU^T$. מכאן נקבל כי $C^TC = VDU^TUDV^T = VD^2V^T$. כלומר נוכל למצוא את D ו V על ידי ליכסון של C^TC.

$$C^TC = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{bmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמאים :

$$det\left(C^TC - \lambda\mathbb{I}\right) = 0 \Rightarrow (26-\lambda)(74-\lambda) - 18^2 = 0$$

פיתרונות של המשוואה שלעיל הם : $\lambda = 20, 80$ ולכן $D^2 = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ כלומר $D = \begin{bmatrix} \sqrt{80} & 0 \\ 0 & \sqrt{20} \end{bmatrix}$. נמצא את הוקטורים העצמאים :

$$\begin{bmatrix} 26-20 & 18 \\ 18 & 74-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow v = normfactor \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 26-80 & 18 \\ 18 & 74-80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v = normfactor \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$V^T = normfactor \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{10}} & \sqrt{\frac{9}{10}} \\ \sqrt{\frac{9}{10}} & -\sqrt{\frac{1}{10}} \end{bmatrix}$$

בנוסף אנו יודעים כי $C = UDV^T \Rightarrow U = D^{-1}VC$ ולכן U שווה ל-

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{80}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{10}} & \sqrt{\frac{9}{10}} \\ \sqrt{\frac{9}{10}} & -\sqrt{\frac{1}{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

2.3 סעיף 7:

אלגוריתם למציאת מטריצת SVD. נסמן, $C_0 = A^T A$ וב $\lambda_1...\lambda_n$, $v_1...v_n$ את הע"ע והו"ע של C_0. וב $m = argmax\{\lambda_i\}$ נראה את נכונות הטענה, כלומר שהסדרה $b_{k+1} = \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|} \underset{k\to\infty}{\to} v_m$ לכל תנאי התחלה עבורם $b_{0_m} \neq 0$.

הוכחה לפי סעיף קודם נזכיר כי לפי התרגיל הקודם : $C_0 = VD^2V^T$ כאשר V אורטונורמלית מכאן-

$$b_{k+1} = \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|} = \frac{VD^2V^T b_k}{\|VD^2V^T b_k\|} = \frac{VD^2V^T \frac{VD^2V^T b_{k-1}}{\|VD^2V^T b_{k-1}\|}}{\left\|VD^2V^T \frac{VD^2V^T b_{k-1}}{\|VD^2V^T b_{k-1}\|}\right\|}$$

ניעזר בכך ש V אורטונורמלית ולכן $V^T V = \mathbb{I}$. בנוסף $\left\|VD^2V^T b_{k-1}\right\| \in \mathbb{R}$ ולכן ניתן לצמצם את הפקטורים כי $||\alpha u|| = \alpha||u||$. נקבל כי

$$b_{k+1} = \frac{VD^4V^T b_{k-1}}{\|VD^4V^T b_{k-1}\|}$$

ניפתח באופן איטרטיבי (אינדוקצה).

$$b_{k+1} = \frac{VD^{2k}V^T b_0}{\|VD^{2k}V^T b_0\|}$$

נפעיל כמה טריקים, אם $b_0 \sim \mathcal{D}$ אז גם $V^T b_0 \sim \mathcal{D}$ (כפל של גודל דטרמיניסטי במשתנה מקרי משמר התפלגות). בנוסף מאורטונורמליות V משמרת נורמה, נסמן $\tilde{b_0} = V^T b_0$ וב- $b_{k+1}^{(j)}$ את הקורדינטה ה j של b_{k+1}.ונצטמצם ל-

$$b_{k+1} = \frac{VD^{2k}\tilde{b_0}}{\left\|VD^{2k}\tilde{b_0}\right\|} = \frac{VD^{2k}\tilde{b_0}}{\left\|D^{2k}\tilde{b_0}\right\|}$$

$$\Rightarrow b_{k+1}^{(l)} = \sum_j V_{l,j} \frac{\lambda_j^k b_0^{\tilde{(j)}}}{\left(\sum_i^n \left(\lambda_i^k b_0^{\tilde{(i)}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \sum_j V_{l,j} \frac{\left[\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{\tilde{(i)}}}{b_0^{\tilde{(m)}}}}{\left(1 + \sum_{i\neq m}^n \left(\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{\tilde{(i)}}}{b_0^{\tilde{(m)}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

כאשר ונקבל שלכל $j \neq m$ הביטוי - $\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right]^k \to 0$ ולכן $b_{k+1}^{(l)} = V_{l,m}$ כלומר b_{k+1} שווה לעמודת m ב V וזאת בדיוק v_m. (כי V היא המטריצה המלכסנת את $A^T A$) ■

שלב שני, **הורדת מימד**, נגריל עכשיו וקטור חדש כאשר $b_0^{\tilde{(m)}} = 0$ ונשים לב כי $\lambda_m^k b_0^{\tilde{(m)}} = 0$, מכאן נסמן ב$m'$ את הע"ע השני בגודלו ונקבל בדיוק באות הדרך כי b_{k+1} מתכנס ל $v_{m'}$. נמשיך באופן איטרטיבי ונמצא כך את V.

כמובן ש $C_0 = VD^2V^T \Rightarrow V^T C_0 V = D^2$ ולכן מצאנו גם את D. ולבסוף נישתמש ב $U = D^{-1}VC_0$ כדי למצוא את U.

זמן ריצה:

נחסום את $||b_k, v_m||$:

$$||b_k, v_m|| = ||\sum_j V_{m,j} \frac{\left[\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{\tilde{(i)}}}{b_0^{\tilde{(m)}}}}{\left(1 + \sum_{i\neq m}^n \left(\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{\tilde{(i)}}}{b_0^{\tilde{(m)}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - V_{m,j}|| \leq$$

$$\leq ||\sum_j V_{m,j} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{\tilde{(i)}}}{b_0^{\tilde{(m)}}} - V_{m,j}|| \leq$$

$$\overset{*}{\leq} \sqrt{(n-1)\left(V_{m',j}\left[\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{\tilde{(m')}}}{b_0^{\tilde{(m)}}}\right)^2}$$

כאשר m' הוא האינדקס של הע"ע השני הכי גדול. $*$ כמובן שהאי-שיוון נכון אחל ממקום מסויים (צריך לבחור k מספיק גדול כדי לבטיח שהפקטור $V_{m',j}\frac{b_0^{\tilde{(m')}}}{b_0^{\tilde{(m)}}}$ יהי יחסית לא משמעותי ביחס ל $\left[\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}\right]$, אינפי 1). נמשיך :

$$\leq \sqrt{n} V_{m',j}\left[\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}\right]^k \frac{b_0^{(\tilde{m'})}}{b_0^{(\tilde{m})}} \leq \varepsilon$$

ולכן עבור דיוק של לפחות ε נידרוש :

$$k \geq \log_{\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}}\left(\frac{b_0^{(\tilde{m})}}{b_0^{(\tilde{m'})} V_{m',j}\sqrt{n}}\varepsilon\right) = \log_{\frac{\lambda_m}{\lambda_{m'}}}\left(\frac{b_0^{(\tilde{m'})} V_{m',j}\sqrt{n}}{b_0^{(\tilde{m})}\varepsilon}\right) \geq$$
$$\log_{\frac{\lambda_m}{\min \lambda}}\left(\frac{b_0^{(\tilde{m'})} V_{m',j}\sqrt{n}}{b_0^{(\tilde{m})}\varepsilon}\right) = \mathcal{O}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)\right)$$

ההיפוך בסיסים ב $\log$ היה חיוני מאחר ו- $\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m} \leq 1$ בהצגה זאת אנחנו לא מרוויחים אינפורמציה אינטואטיבית.
נכחיש כרגע את ההשפעות של שגיאת ε על האיטרציות הבאות. חישוב b^{k+1} מ b^k דורש $\mathcal{O}(n)$ עבודה (נשים לב שאת הסכום במכנה אנו מחשבים רק פעם אחת עבור כל הקורדינטות של b^{k+1}), ולכן נבקבל שאת V ניתן לחשב ב $\mathcal{O}\left(n^2 \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)\right)$. את U ניתן לחשב באותו אופן, נפעיל את אותה וריאציה על $C_0^T = AA^T$. D מורכבת מ הע"ע של A, נעבור עמודה עמודה ב $v_m \in V$ וניפתור את המשווה $Av_m = \lambda v_m$, כאשר מספיק לנו לפתור רק עבור הקורדינטנה הראשונה שאינה שווה ל -0 כלומר $\lambda_m = \frac{\sum A_0^i v_m^i}{v_m^0}$ כלומר חישוב λ_m דורש $\mathcal{O}(n)$ וחישוב D דורש $\mathcal{O}(n^2)$ ולכן סך הכל נישאר עם זמן ריצה אסימפטוטי של $\mathcal{O}\left(n^2 \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)\right)$.

3 חלק שלישי.

3.1 סעיף 8:

יהיה $x \in \mathbb{R}^n$ וקטור קבוע, ו $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אורטוגונלית. נחשב את היעקובן של

$$f(\sigma) = U diag(\sigma) U^T x$$
$$\Rightarrow f(\sigma)_i = U_i^j \sigma_j \delta_j^k \left(U^T\right)_k^l x_l = U_i^k \sigma_k \left(U^T\right)_k^l x_l$$

$$J(f)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_j} = U_i^k \delta_{k,j}\left(U^T\right)_k^l x_l = U_i^j \left(U^T\right)_j^l x_l$$

נשים לב כי רק l אינדקס רץ, ולכן הכתיב שקול ל- $J(f) = U diag\left(U^T x\right)$.

3.2 סעיף 9:

נתון $h(\sigma) = \frac{1}{2}|f(\sigma) - y|^2$ נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla h_i = \frac{\partial h}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = (f(\sigma) - y)\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \Rightarrow \nabla h = (f(\sigma) - y)^T \nabla f$$

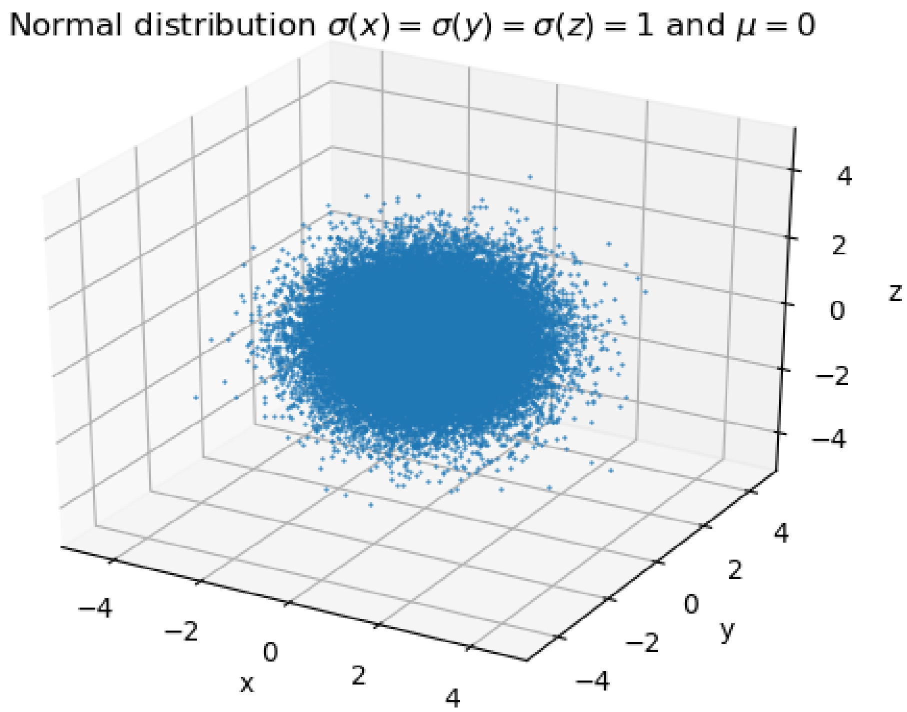
3.3 סעיף 10:

נחשב את היעקבויאן של ה $softmax$: $g(\boldsymbol{z})_j = \frac{e^{z_j}}{\sum e^{z_k}}$

$$J(g)_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial z_j} = \frac{\delta_{i,j} e^{z_i}\sum e^{z_k} - e^{z_j}e^{z_i}}{\left(\sum e^{z_k}\right)^2} = \frac{\delta_i^j e^{z_i}\sum e^{z_k}}{\left(\sum e^{z_k}\right)^2} - \frac{e^{z_j}e^{z_i}}{\left(\sum e^{z_k}\right)^2} =$$
$$= \delta_i^j g_i - g_i g_j = g_i\left(\delta_i^j - g_j\right)$$

4 חלק רביעי.

4.1 סעיף 11:

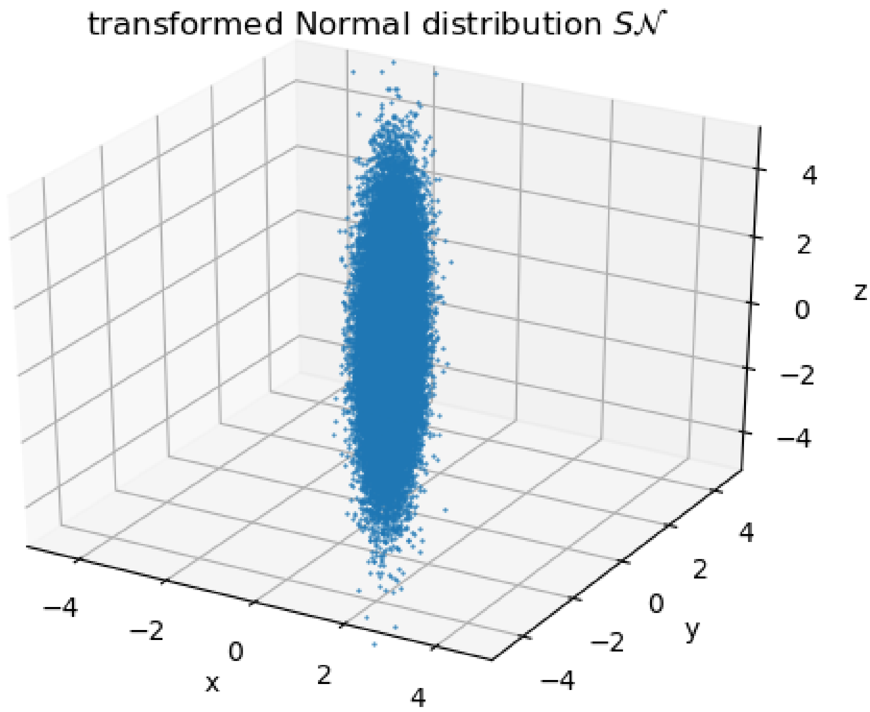


4.2 סעיף 12:

אנליטית : אנו יודעים כי $cov\left(ax, y\right) = a \cdot cov\left(x, y\right)$ ולכן נצפה לקבל את - $cov_{i,i} = diag\left(S_{i,i}^2\right) \Rightarrow S^2$.
באופן נומרי מקבל את :

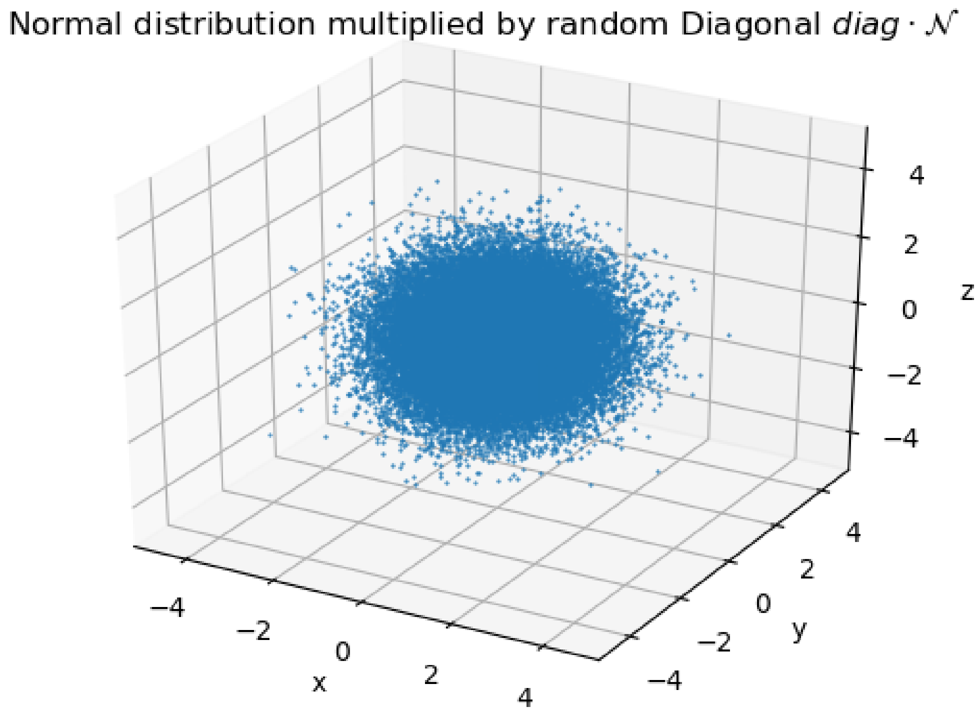
```
davidponar@DESKTOP-M43N0AS MSYS ~/workspace/iml/exercies/ex1 (master)
$ python ./3d_gausian.py
[[1.00755762e-02 1.17976315e-03 2.67707751e-03]
 [1.17976315e-03 2.41934079e-01 1.53245781e-02]
 [2.67707751e-03 1.53245781e-02 3.99995184e+00]]

davidponar@DESKTOP-M43N0AS MSYS ~/workspace/iml/exercies/ex1 (master)
$ python ./3d_gausian.py
[[ 1.00194739e-02  1.16457886e-04 -7.34568479e-04]
 [ 1.16457886e-04  2.51434529e-01 -3.21494511e-03]
 [-7.34568479e-04 -3.21494511e-03  4.03340142e+00]]
```

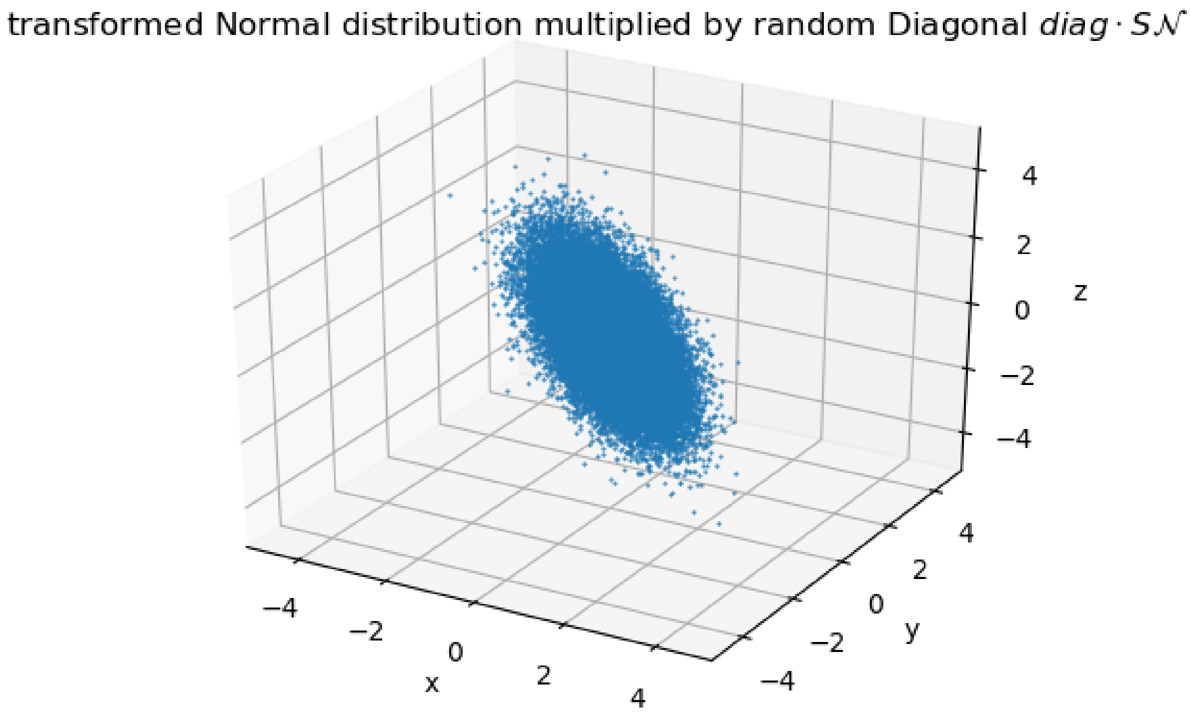
כאשר החישוב הראשון הוא ל $n = 5 \cdot 10^3$ בעוד שהחישוב השני הוא ל $n = 5 \cdot 10^4$ כלומר קל ליראות שהמטרציה שואפת ל S^2.
הנקודת עצמן :



4.3 סעיף 13 :

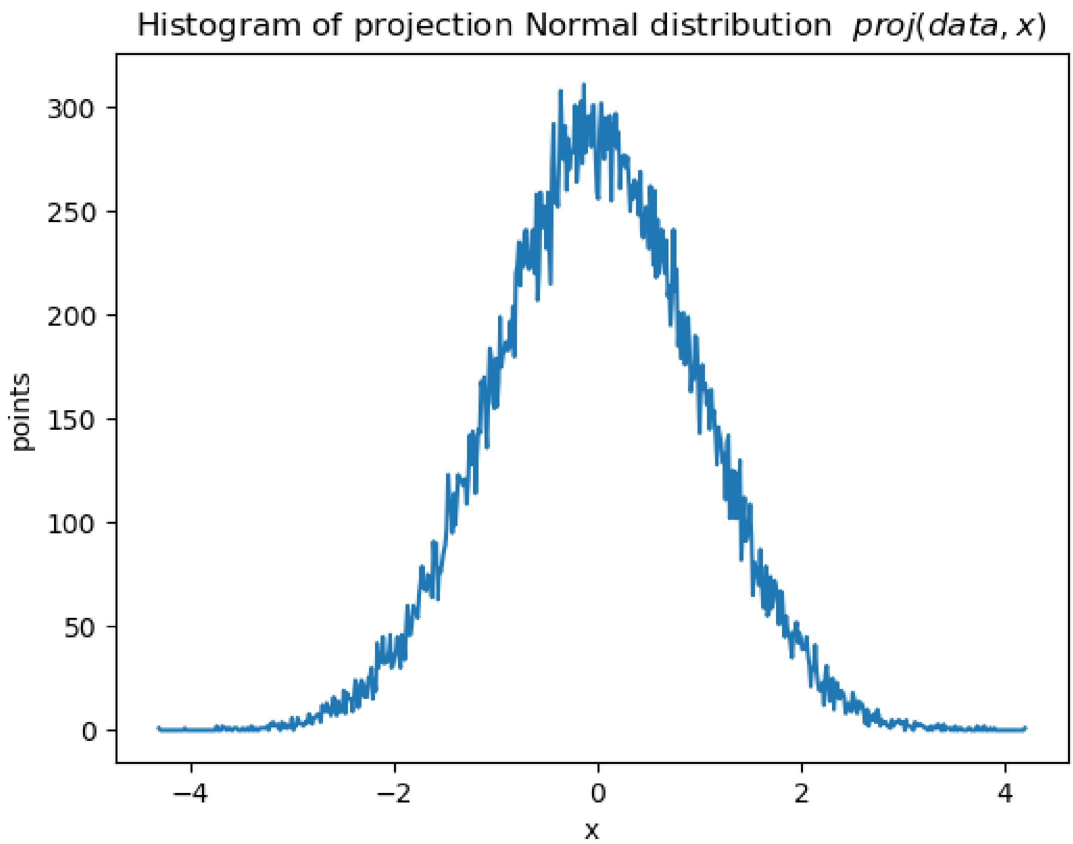
למעשה אנו מסובבים את הדאטה שלנו בזווית רנדומית. נמסן ב X את המידע, וב SX את המידע לאחר המתיחה. לX הייתה סימטריה לסיבובים ($x \sim y \sim z$) ולכן נצפה שלאחר הסיבוב נקבל עדיין כי $cov\left(\mathcal{R}X\right) = cov\left(X\right)$. לעומת זאת $\mathcal{R}\left(SX\right) = \left(\mathcal{R}S\right)X$ ולכן נצפה לקבל סיבוב של המידע ומכאן גם סיבוב של ווקטור השונות, (עכשיו cov כבר לא תיהיה אלכסון).



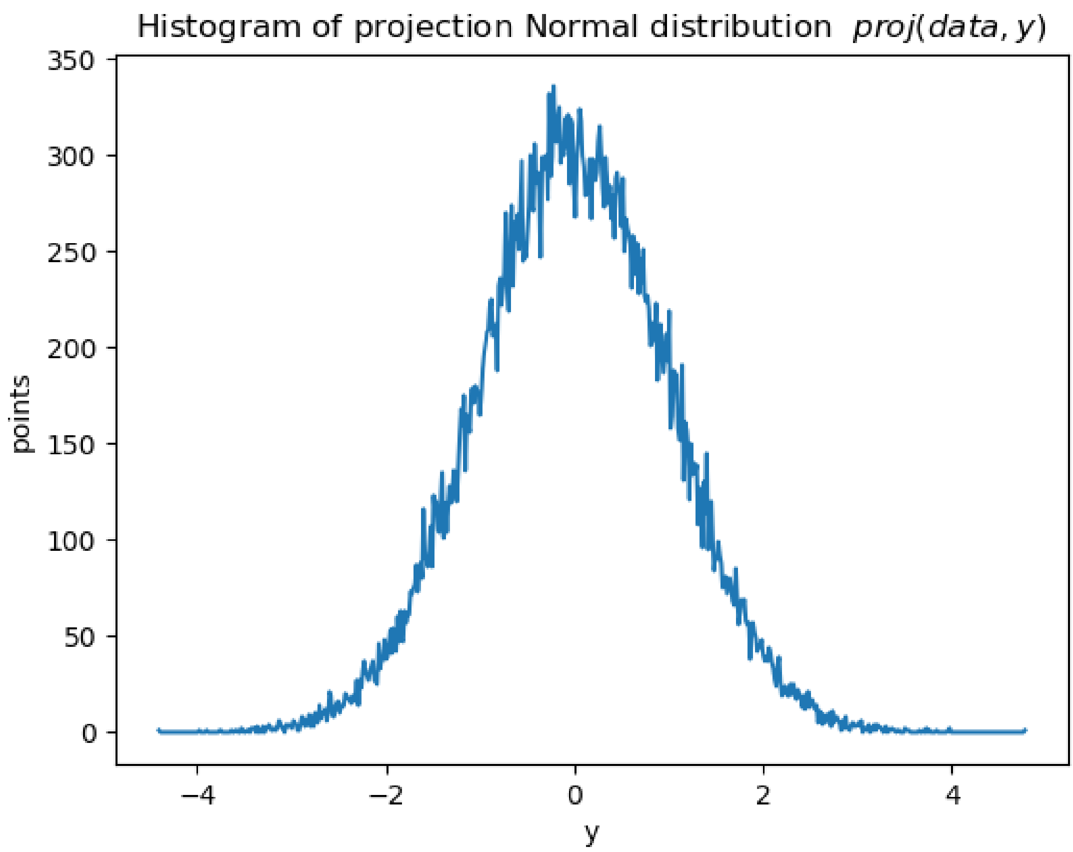


4.4 סעיף 14 :

היסטוגרמת ההטלה על ציר הx :

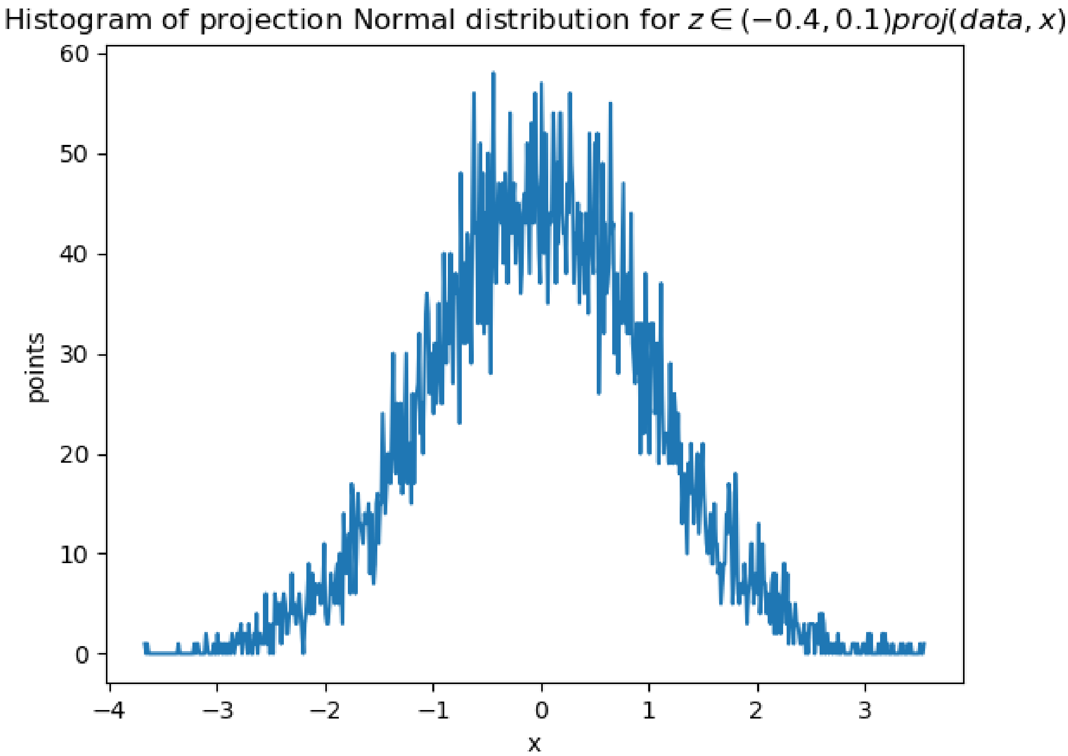


היסטוגרמת ההטלה על ציר ה y :

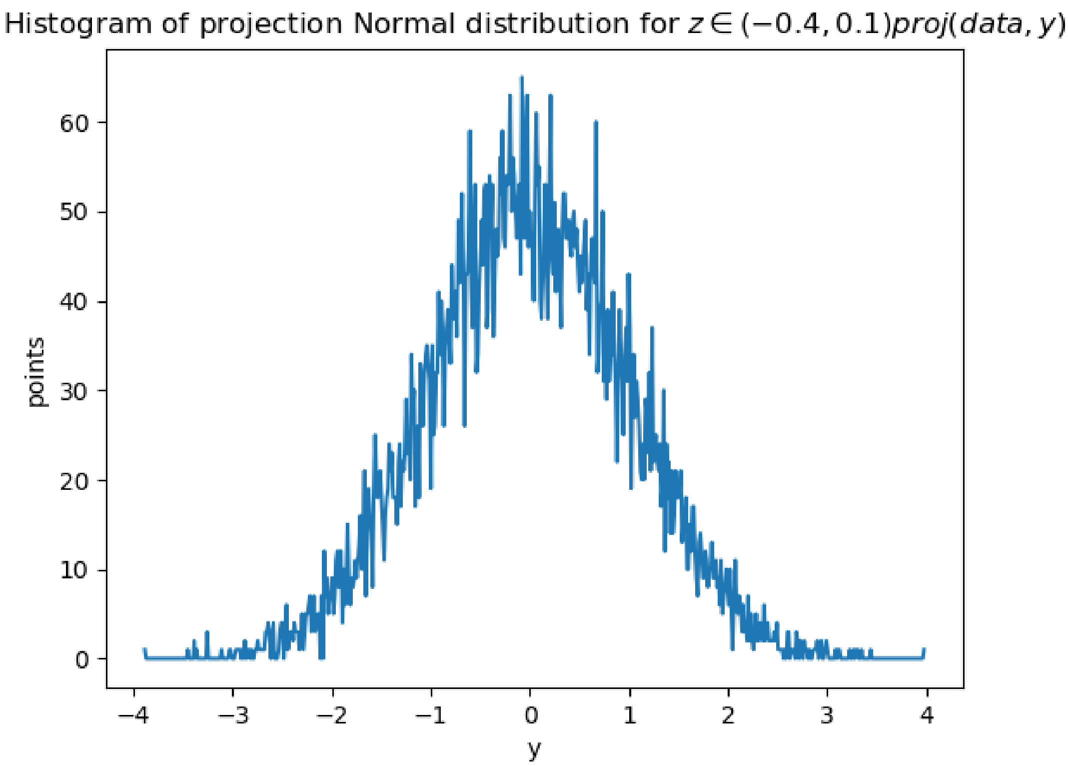


4.5 סעיף 15 :

היסטוגרמת ההטלה על ציר הx :



היסטוגרמת ההטלה על ציר ה y :

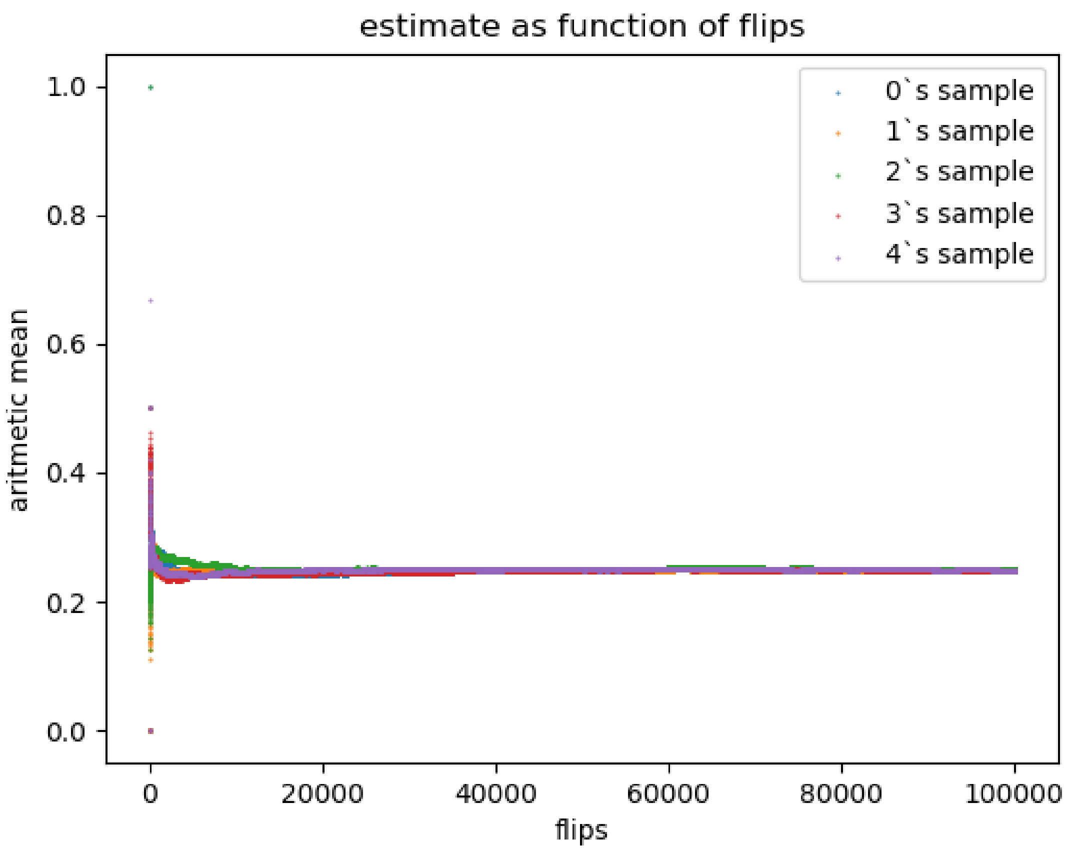


כאשר אובדן הצורה הגאוסנית, נובע מכך שהדאטה שלנו מכיל פחות נקודות כרגע, ולכן רגיש יותר לרעש.

5 חלק חמישי

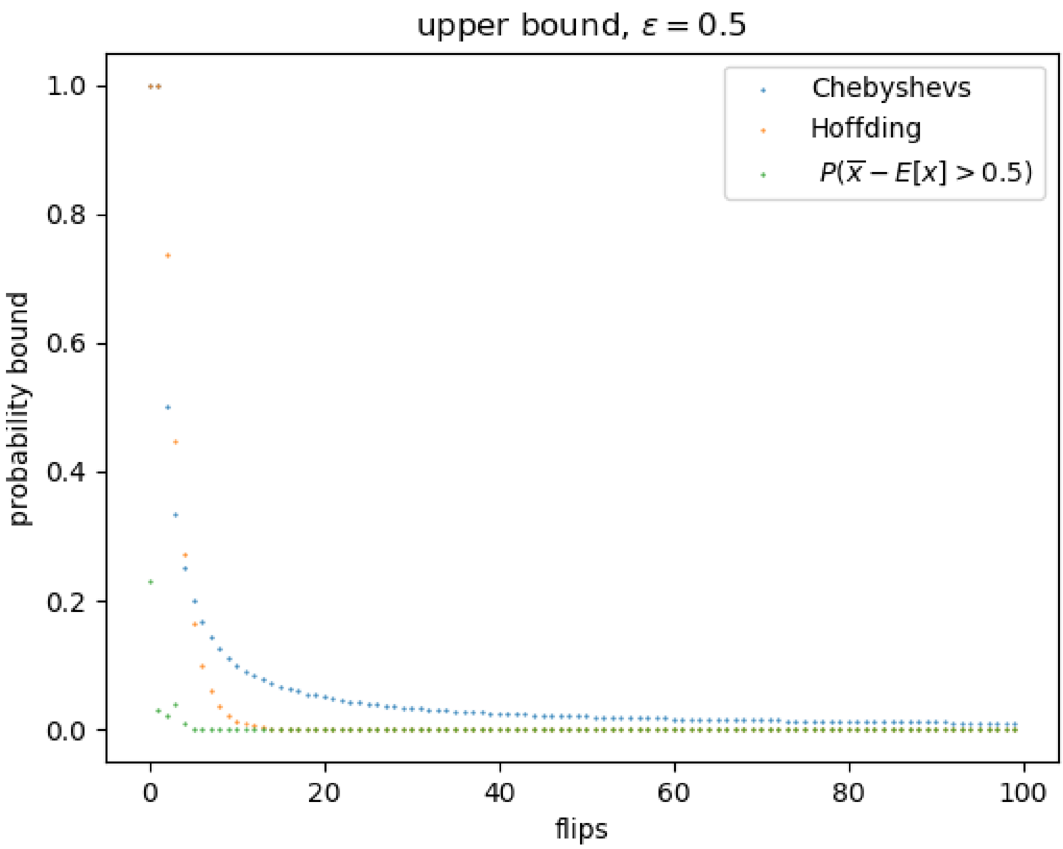
5.1 סעיף 16 :

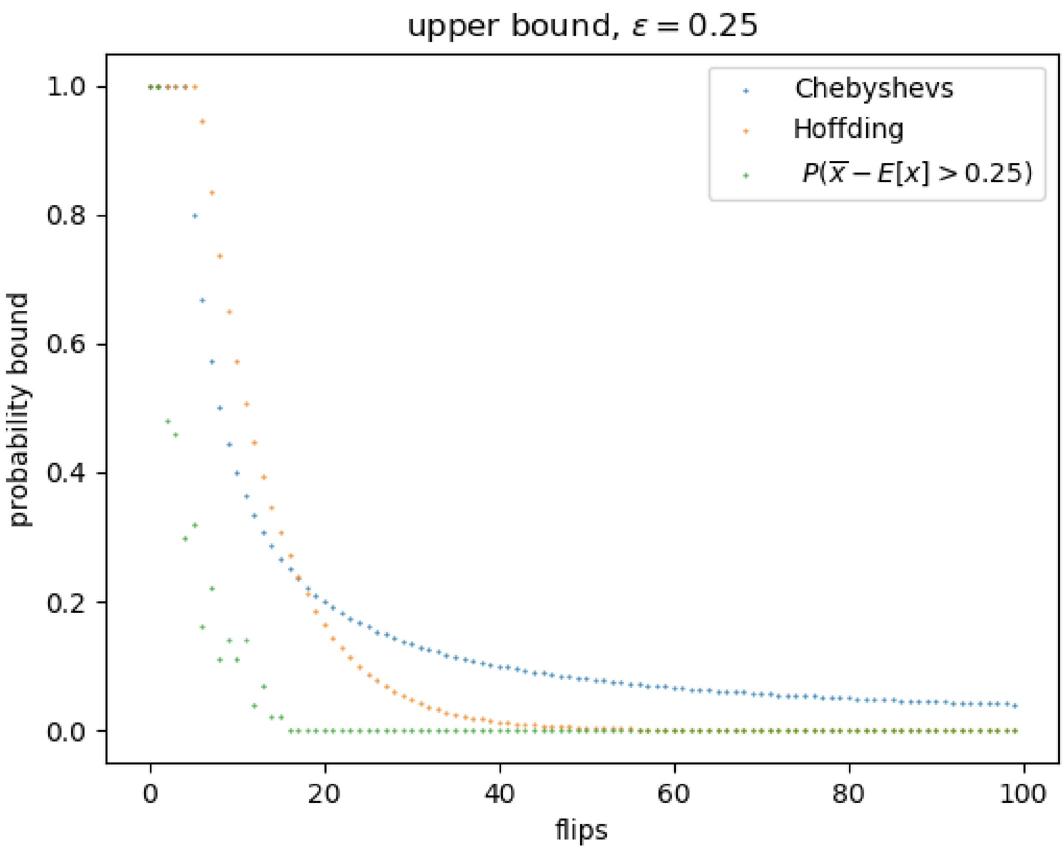
הממוצע הארמטי כפונקציה של מספר ההטלות עבור 5 הניסוים הראשונים, מאחר וההטלות מתפלגות $i.d.d$ ניתן לראות התכנסות לתוחלת של מטבע יחיד :

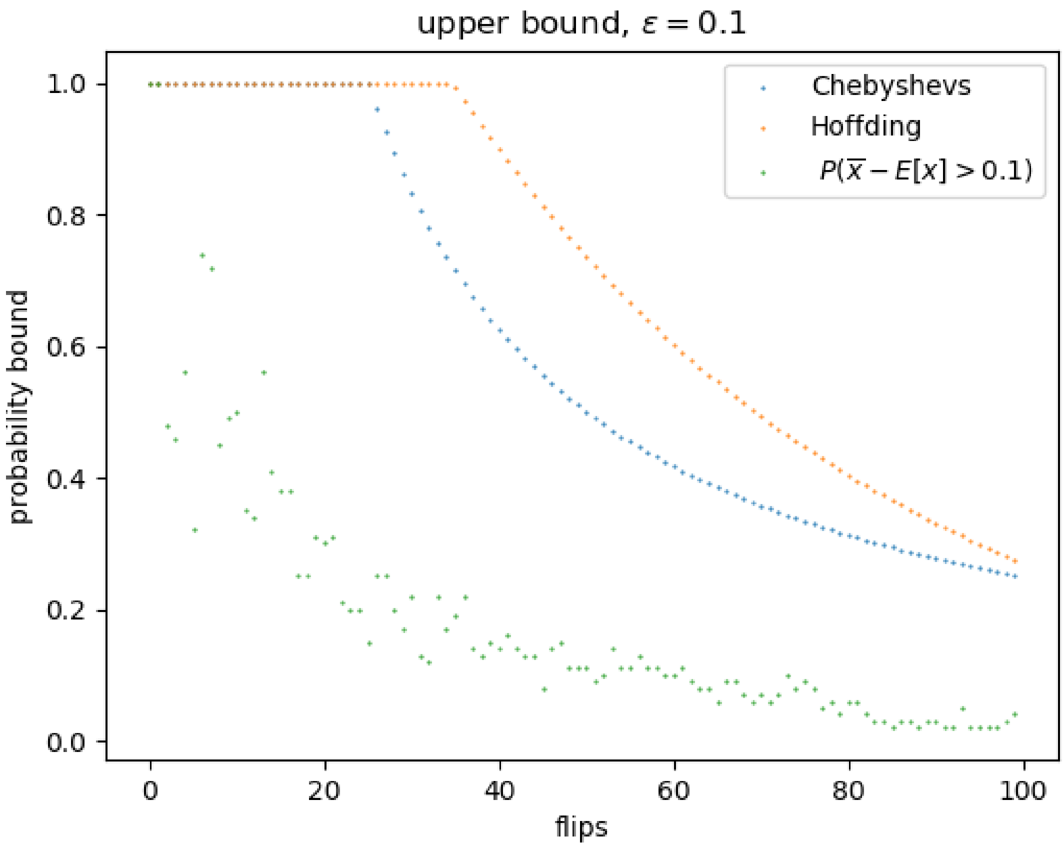


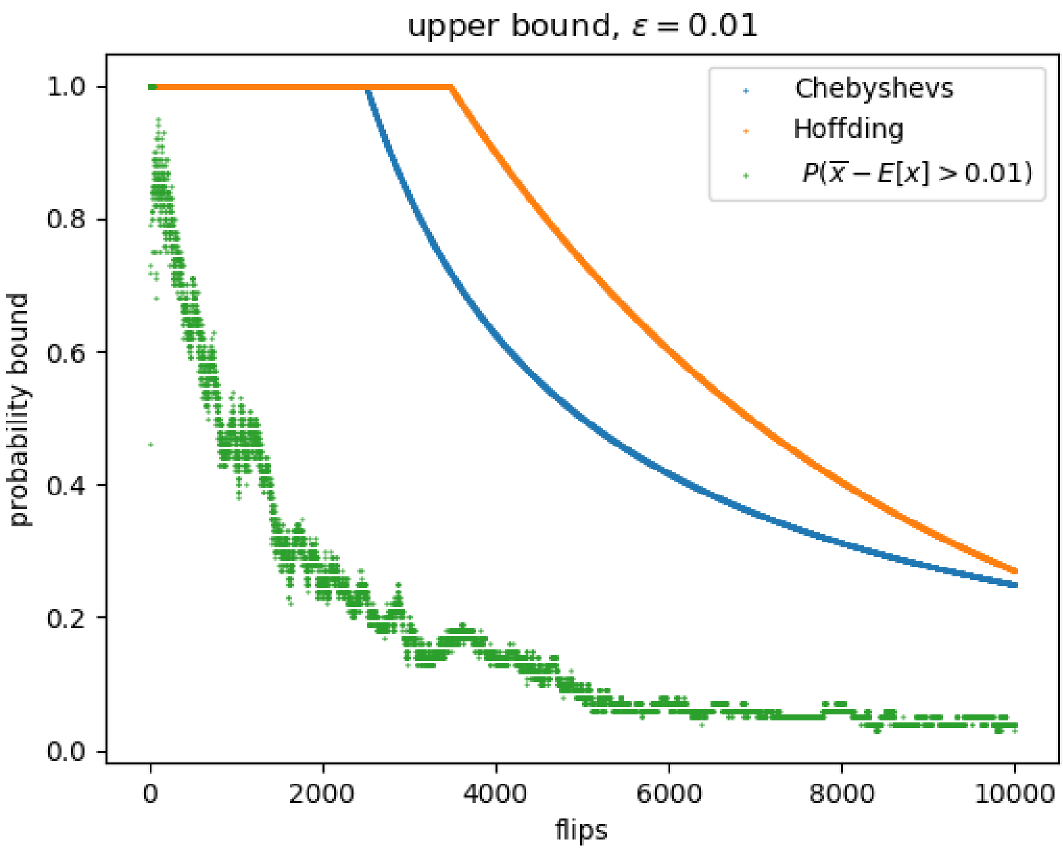
5.2 16 סעיפים ב ו ג:

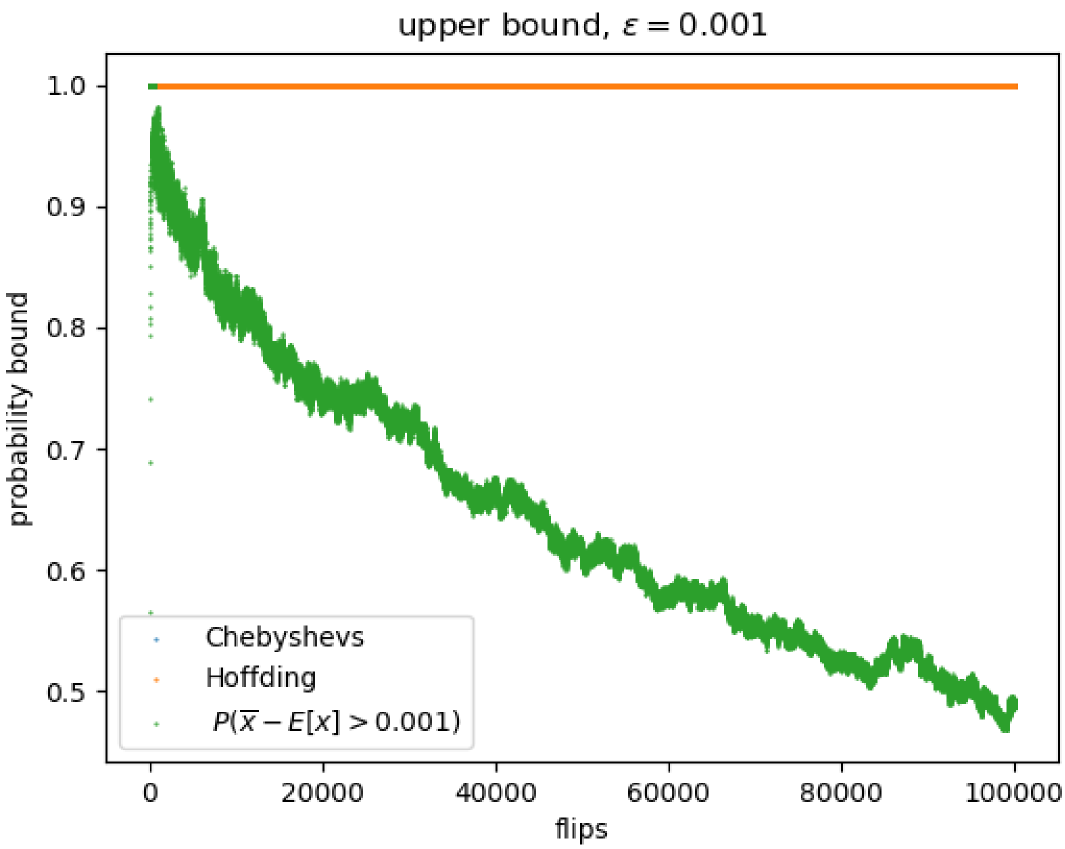
נישתמש בתוצאה שעבור מטבע יחיד $p\left(1-p\right)\leq\frac{1}{4}$ ולכן $\mathcal{D}^{m}\left[\left|p-\hat{p}\right|\geq\varepsilon\right]\leq\frac{1}{4m\varepsilon^{2}}$ וכמובן שהופנדינג מקיים : $\mathcal{D}^{m}\left[\left|p-\hat{p}\right|\geq\varepsilon\right]\leq2e^{-2m\varepsilon^{2}}$ עבור ה εים השונים נצייר את החסם, ונשווה אל ההפרש האמיתי בין הממצוע האריטמי לבין התוחלת הצפויה :


upper bound, $\varepsilon = 0.5$
Chebyshevs
Hoffding
$P(\overline{x} - E[x] > 0.5)$
probability bound
flips
0
20
40
60
80
100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


upper bound, $\varepsilon = 0.25$
Chebyshevs
Hoffding
$P(\overline{x} - E[x] > 0.25)$
probability bound
flips
0
20
40
60
80
100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


upper bound, $\varepsilon = 0.1$
Chebyshevs
Hoffding
$P(\overline{x} - E[x] > 0.1)$
probability bound
flips
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
20
40
60
80
100


upper bound, $\varepsilon = 0.01$
Chebyshevs
Hoffding
$P(\overline{x} - E[x] > 0.01)$
probability bound
flips
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2000
4000
6000
8000
10000


upper bound, $\varepsilon = 0.001$
probability bound
flips
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
20000
40000
60000
80000
100000
Chebyshevs
Hoffding
$P(\overline{X} - E[x] > 0.001)$