תרגיל 2

29 באפריל 2020

דויד פונרובסקי 208504050

1 תרגיל 1:

נדרש להוכיח ש $\ker\left(X^T\right)=\ker\left(XX^T\right)$. קל ליראות ש $\ker\left(X^T\right)\subset\ker\left(XX^T\right)$ נוכיח את הכיוון השני. נתבונן בu כך ש $u\in\ker\left(XX^T\right)$. מכאן

$$XX^Tu=0\Rightarrow u^TXX^Tu=\left(X^Tu\right)^TX^Tu=\left\langle X^Tu,X^Tu\right\rangle=0$$
$$\Rightarrow X^Tu=0\Rightarrow u\in\ker\left(X^T\right)\Rightarrow\ker\left(X^T\right)=\ker\left(XX^T\right)$$

2 תרגיל 2:

צ"ל $Im\left(A^T\right)=\left(\ker A\right)^{\perp}$. כיוון ראשון, ניתבונן ב $b\in Im\left(A^T\right)$ וב $w\in\ker\left(A\right)$

$$b\in Im\left(A^T\right)\Rightarrow\exists x:A^Tx=b\Rightarrow\langle b,w\rangle=\left\langle A^Tx,w\right\rangle=$$
$$=\langle x,Aw\rangle=0\Rightarrow Im\left(A^T\right)\subset\left(\ker A\right)^{\perp}$$

כיוון שני $x\in\left(\ker A\right)^{\perp}$ מכאן שלכל $Av=AA^Tv=\vec{0}\Rightarrow\langle x,v\rangle=0$. ניתבונן בבסיס $B=\{b_i\}\bigcup\{b_i'\}$ כך ש- $b_i'\in\ker A$. את x ניתן להציג ע"י $x=\sum\mu_ib_i+\sum 0\cdot b_i'$ נסמן את וקטור המקדמים ב μ. וניתן לרשום $x=\mu b^T$. מאחר ו B הוא בסיס אז

$$span\{b_i\}\bigcap span\{b_i'\}=\emptyset\Rightarrow span\{b_i\}\bigcap\ker\left(A\right)=\emptyset$$
$$\Rightarrow\mu b^T\notin\ker A\overset{(1)}{\Rightarrow}\mu b^T\notin\ker A^TA$$

את (1) קיבלנו מהסעיף הקודם. מכאן נקבל שמעל המרחב $span\left(B_2\right)=span\left(\{b_i\}\right)$, המטריצה $\left[A^TA\right]_{B_2}:span\left(B_2\right)\to Im\left(A\right)$ היא חח"ע והפיכה (ריבועית עם גרעין ריק מעל התת מרחב). ולכן

$$x=\mu b^T=\left[A^TA\right]_{B_2}\left[\left(A^TA\right)\right]_{B_2}^{-1}\left(\mu\right)=\left(A^TA\cdot P_{B_2}\right)\left[\left(A^TA\right)\right]_{B_2}^{-1}\left(\mu\right)$$

כאשר P_{B_2} היא מטריצת המעבר אל בסיס B_2. מצאנו וקטור y כך ש $A^Ty=x$. $\Leftarrow$ $x\in Im\left(A^T\right)$.

3 תרגיל 3:

X אינה הפיכה, צ"ל ל $X^Tw=y$ יש אינסוף פתרונות אמ"מ $y\perp\ker\left(X\right)$. הוכחה :
ראשית מהסעיף הקודם אנו יודעים כי

$$Im\left(X^T\right)=\left(\ker X\right)^{\perp}\Rightarrow y\in Im\left(X^T\right)\Leftrightarrow y_{\perp}\ker X$$

ולכן אנו יודעים כי קיים לפחות פתרון אחד w. נראה כי $w+v$ הוא גם פתרון לכל $v\in\ker X^T$:

$$X^T\left(w+v\right)=X^Tw+X^Tv=X^Tw=y$$

מכאן שאם X היא לא הפיכה אז גם X^T לא הפיכה ולכן $\ker X^T is\ a\ subsapce$ כלומר קיימים אין סוף vים השייכים ל $\ker X^T$ ולכן יש אינסוף פתרונות מהצורה $w+v$.

כיוון שני, נניח שיש אין סוף פתרונות מהצורה $X^Tw=y$ ונתבונן ב v כך ש $Xv=0$ מכאן

$$\langle y,v\rangle=\left\langle X^Tw,v\right\rangle=\langle w,Xv\rangle=0$$

כמובן שזה נכון לכל $v\in\ker X$ מכאן ש $y\in\left(\ker X\right)^{\perp}$.

4 תרגיל 4:

צ"ל להראות כי $XX^T\omega = Xy$ יש אינסוף פתרונות או פיתרון יחיד. נראה כי $Xy \perp \ker\left(XX^T\right)$. לפי סעיפים קודמים $\ker\left(XX^T\right) = \ker\left(X^T\right)$ ולכן מספיק להראות כי $Xy \perp \ker\left(X^T\right)$, אם $y \notin \ker X$ אז

$$Xy \in Im\left(X\right) = \left(\ker X^T\right)^{\perp} \Rightarrow Xy \perp \ker\left(X^T\right)$$

מקרה שני, אם $y \in \ker X$ אז כל פתרון ב $\omega \in \ker X^T$ יפתור, וכמובן שאם $\ker X \neq \emptyset$ אז X לא הפיכה מכאן ש X^T גם לא הפיכה ולכן גם $\ker X^T$ אינו ריק. כלומר ניתן למצוא $\omega \in \ker X^T$ במקרה זה.

5 תרגיל 5:

5.1 (a)

נראה כי $P = \sum v_i v_i^T$ סימטרית: $P^T = \left(\sum v_i v_i^T\right)^T = \sum\left(v_i v_i^T\right)^T = \sum v_i v_i^T = P$.

5.2 (b)

נסמן ב $\{e_i\}$ וקטורים שנמצאים בבסיס ל $\mathbb{R}^d/V$. כמובן ש $span\left(\{e_i\}\bigcup\{v_i\}\right) = \mathbb{R}^d$, ניתבנן ב$u \in \mathbb{R}^d$ ונפרוש אותו $u = \sum\alpha_i v_i + \sum\beta_i e_i$

$$\begin{aligned}
Pu &= \sum_i v_i v_i^T\left(\sum_j \alpha_j v_j + \sum_j \beta_j e_j\right) = \lambda u \\
&\Rightarrow v_i v_i^T\left(\sum_j \alpha_j v_j + \sum_j \beta_j e_j\right) = \lambda\alpha_i v_i \\
&= \sum_j \alpha_j v_i\left(v_i^T v_j\right) + v_i v_i^T\sum_j \beta_j e_j = \sum_j \alpha_j v_i\left\langle v_i, v_j\right\rangle + v_i v_i^T\sum_j \beta_j e_j = \\
&= \alpha_i v_i + v_i v_i^T\sum_j \beta_j e_j = \lambda\alpha_i v_i
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון תקף כי לבסיס אורטונורמלי מתקיים $\left\langle v_i, v_j\right\rangle = \delta_{i,j}$. ולכן נידרוש כי $v_i v_i^T\sum_j \beta_j e_j = 0$ אבל e_j הוא בסיס בת"ל ולכן בהכרח $\beta_j = 0$ וכמובן $\lambda = 1$.
אם אנו מסתכלים על קורדינטה המתאימה ל e_i כלומר :

$$\left(Pu\right)_k = \left(\sum_i v_i v_i^T\left(\sum_j \alpha_j v_j + \sum_j \beta_j e_j\right)\right)_{(k)} = \lambda\beta_k e_k$$

אז מאחר והקורדינטה הkית (יצוג ב $\{e_i\}\bigcup\{v_i\}$) של P היא 0 נקבל כי $0 = \lambda\beta_k e_k$ כלומר כך או כך $\beta_k = 0$.

5.3 (c)

צ"ל לכל $u \in V$ מתקיים $Pu = u$. מאחר ו$u \in V$ ניתן לפרוש אותו בהמצאות $\{v_j\}$ בלבד, ולכן נקבל כי

$$Pu = P\left(\sum\alpha_i v_i\right) = \sum\lambda_i\alpha_i v_i = \sum\alpha_i v_i = u$$

5.4 (d)

צ"ל $P^2 = P$. נחשב :

$$\begin{aligned}
P^2 &= \sum_{i,j} v_i v_i^T v_j v_j^T = \sum_{i,j} v_i\left\langle v_i, v_j\right\rangle v_j^T = \sum_{i,j} v_i\delta_{i,j} v_j^T = \\
&= \sum_i v_i v_i^T = P
\end{aligned}$$

5.5 (e)

ישירות מהסעיף הקודם :

$$(\mathbb{I}-P)\,P=P-P^2=P-P=0$$

6 תרגיל 6:

צ"ל $U^T\left(\Sigma\Sigma^T\right)^{-1}U^T = \left(XX^T\right)^{-1}$ נחשב:

$$\left(XX^T\right)^{-1}=\left(\left(U\Sigma V^T\right)\left(U\Sigma V^T\right)^T\right)^{-1}=\left(U\Sigma V^TV\Sigma^TU^T\right)^{-1}=$$
$$=\left(U\Sigma\Sigma^TU^T\right)^{-1}=\left(\left(U^T\right)^{-1}\left(\Sigma\Sigma^T\right)^{-1}U^{-1}\right)=U\left(\Sigma\Sigma^T\right)^{-1}U^T$$

כאשר השתמשתי בכך ש $UU^T=VV^T=\mathbb{I}$ (אורטונורמליות). מהנחה כי XX^T הפיכה, כל הע"ע שלה שונים מ0 ולכן $\Sigma^{-1}=\Sigma^\dagger$ מוגדר. מכאן נקבל כי

$$\left(XX^T\right)^{-1}X=U\left(\Sigma\Sigma^T\right)^{-1}U^TU\Sigma V^T=U\Sigma^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma V^T=$$
$$U\Sigma^{-1}V^T=\left(V\Sigma^{-1}U^T\right)^T=\left(X^\dagger\right)^T$$

7 תרגיל 7:

צ"ל ש XX^T הפיכה אמ"מ $span\left\{x_1,..,x_m\right\}=\mathbb{R}^d$. כיוון ראשון, $x_1,..,x_m$ הם העמודות של X ולכן אם

$$span\left\{x_1,..,x_m\right\}=\mathbb{R}^d\Leftrightarrow Im\left(X^T\right)=\mathbb{R}^d\Leftrightarrow\ker\left(X^T\right)=\emptyset$$

אבל בסעיפים קודמים הראנו כי $\ker\left(X^T\right)=\ker\left(XX^T\right)$ ולכן

$$XX^T\,is\,invertible\Leftrightarrow\ker\left(XX^T\right)=\emptyset\Leftrightarrow span\left\{x_1,..,x_m\right\}=\mathbb{R}^d$$

8 תרגיל 8:

קודם כל נראה כי $\hat{w}=X^{T\dagger}y$ הוא פיתרון.

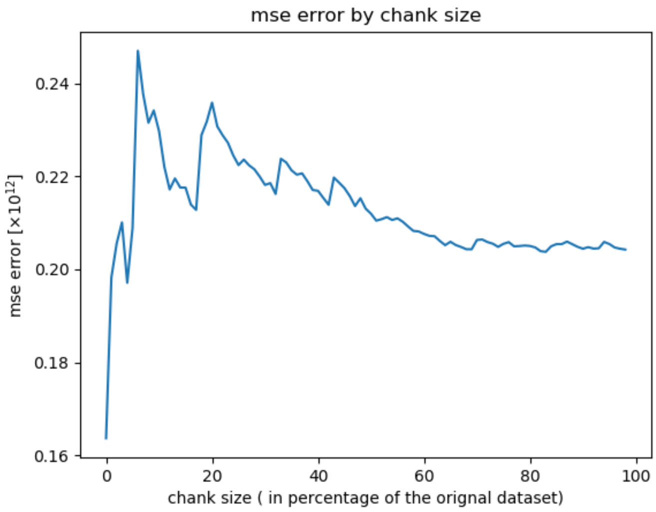
$$XX^T\hat{w}=XX^TX^{T\dagger}y=U\Sigma V^TV\Sigma^TU^T\left(U\Sigma^\dagger V^T\right)y=U\Sigma V^Ty=Xy$$

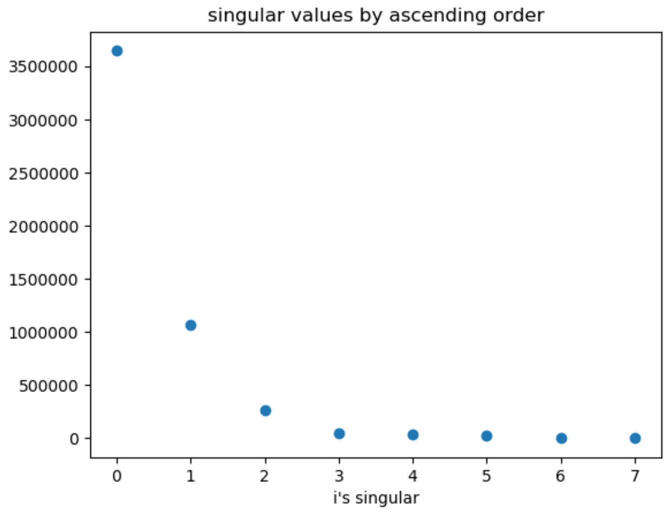
נשים לב שבבסיס הוע"ע של XX^T יש ל$\hat{w}$ פתרון יחיד לכל קורדינטה ב$\hat{w}_i$. מכאן שלכל $\bar{w}=\hat{w}+\vec{\varepsilon}$ מתקיים כי $\vec{\varepsilon}\notin span\left(\hat{w}_i\right)$ ולכן

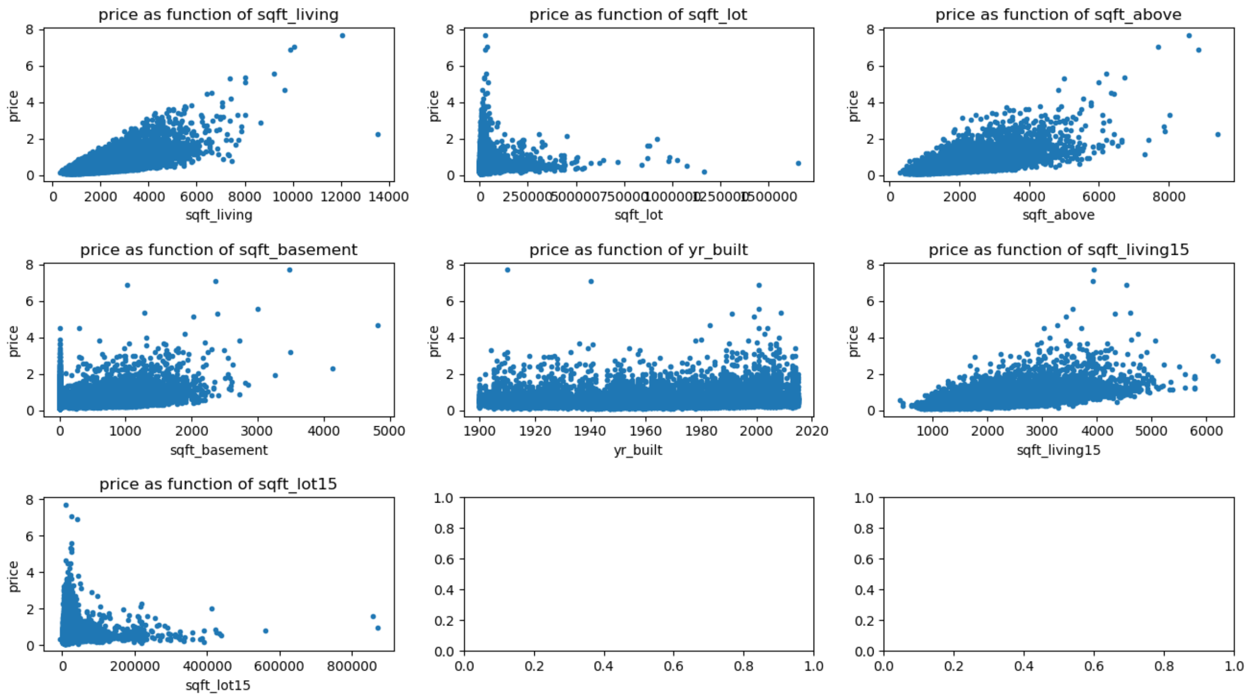
$$||\bar{w}||=||U^T\bar{w}||=||\left[\bar{w}\right]_U||=||\left[\hat{w}+\vec{\varepsilon}\right]_U||=||\left[\hat{w}\right]_U||+||\left[\vec{\varepsilon}\right]_U||\geq$$
$$\geq||\left[\hat{w}\right]_U||=||U^T\hat{w}||=||\hat{w}||$$

9 רגרסיה, מחירי הדירות.

ערכים שהורדתי לחלוטין : $['date','zipcode','yr_renovated','price','lat','long']$ ערכים אלו לא הראו שום הגיון בבדיקת הקורלציה. קטגוריות : $['view','waterfront','bedrooms','grade','floors','condition','bathrooms']$.
ערכים אלו התחלקו לטווח ערכים סופי. בסך הכל הגעתי לטווח שגיאת mse של 0.2×10^{12} כלומר std של בערך $0.2\cdot 10^{6}\sim$. כלומר שיערוך של שגיאה ממוצעת $\pm$ 200 אלף לדירה נחשב לדעתי לגיטמי לחלוטין (למרות שאולי בדולרים, זה כבר לא כל כך הגיוני). ניתן לראות כי יש 3 עע"מ מכרעים יחידים (את כל השאר ניתן להזניח) ואחד מהם הוא ההוזה $(bias)$.







מטריצות מקדמי המתאם :

$$p\left(price, sqft-living\right)=\begin{bmatrix} 2.5\cdot10^{3} & 7.02\cdot10^{-1} \\ 7.02\cdot10^{-1} & 3.9\cdot10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$p\left(price, sqft-lot\right)=\begin{bmatrix} 1.1\cdot10^{5} & 8.9\cdot10^{-2} \\ 8.9\cdot10^{-2} & 8.7\cdot10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$p\left(price, sqft-above\right)=\begin{bmatrix} 6.6\cdot10^{-1} & 4.43\cdot10^{-4} \\ 1.2\cdot10^{3} & 3.2\cdot10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$p\left(price, sqft-basement\right)=\begin{bmatrix} 3.2\cdot10^{-1} & 8.29\cdot10^{-4} \\ 8.02\cdot10 & 5.4\cdot10^{-2} \end{bmatrix}$$

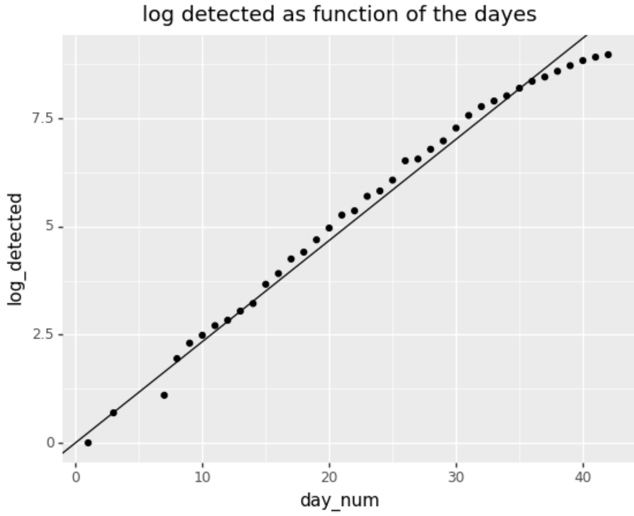
$$p\left(price, yr-built\right)=\begin{bmatrix} 5.4\cdot10^{-2} & 1.25\cdot10^{-2} \\ 7.02\cdot10^{-1} & 3.9\cdot10^{-4} \end{bmatrix}$$

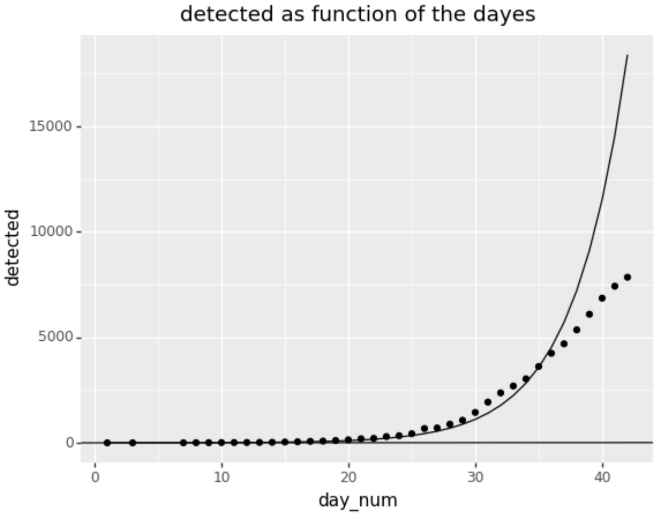
$$p\left(price, sqft-living15\right)=\begin{bmatrix} 2.5\cdot10^{3} & 7.02\cdot10^{-1} \\ 8.26\cdot10^{-2} & 1.3\cdot10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$p\left(price, sqft-living15\right)=\begin{bmatrix} 7.43\cdot10^{4} & 8.2\cdot10^{-2} \\ 8.26\cdot10^{-2} & 1.3\cdot10^{-5} \end{bmatrix}$$

10 רגרסיה קורנה :

דומה לשאלה הקודמת.





11 תרגיל 10:

במקרה פונקציית המחיר היא $L_{exp}=\frac{1}{2}\left(e^{wX}-Y\right)^{2}$ ולכן נקבל כי

$$\nabla L_{exp}=X\left(e^{wX}-Y\right)=0\Rightarrow w=X^{\dagger T}\log Y$$