

בראונית

30 בדצמבר 2020

1 51% תאור הרקע ומטרת הניסוי

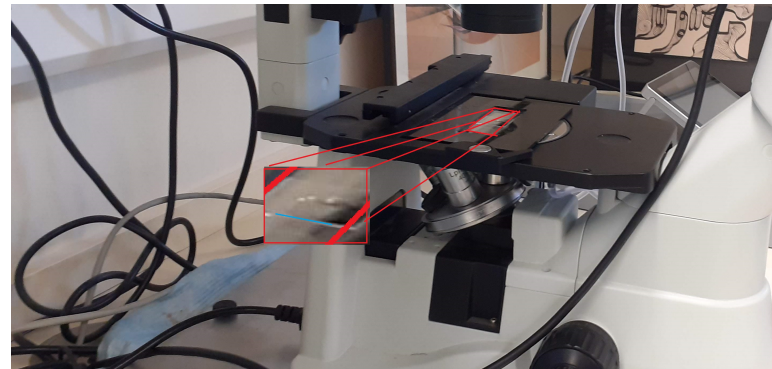
הניסוי בוחן תנועה רב חלקיקית, תחת הנחת הארגודיות - לפיה הכוח מתפלג באופן אחיד על כלל המערכת. ולכן מיצוע שלו יניב $\langle x^F(t) \rangle = 0$. פיתוח מהכיוון הנ"ל יביא למשוואת התנועה הבאה :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} x_0^2 + \frac{2k_B T}{\alpha} t$$

נזכיר כי ל α היה יחידות של $\left[\frac{m}{t}\right]$ (קבוע משוואת סטוקס), או מצפים כי למדידה לאחר זמן סביר תזניח את האיבר המעריכי ונקבל את :

$$\frac{2k_B T}{6\pi\mu a} t = \frac{2k_B T}{\alpha} t = \langle r^2 \rangle$$

. מה שמתאים לפיתוח דרך משוואת הדיפוזיה - $\frac{\partial}{\partial t}\psi = D\nabla^2\psi$, כאשר ψ היא צפיפות החומר, הפתרון הוא : $\psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}$: כלומר התפלגות נורמלית ולכן $\mathbb{E}[x^2] = \sqrt{2Dt}$ (לבדוק שאכן פקטור $\sqrt{2}$). מטרתנו בניסוי הייתה תחילה לאשש תאוריה זאת, כלומר לבדוק האם ההנחת הארגודיות היא סבירה בתנאים של טמפ' החדר וריכוזים שונים של טווחים אותם או מערכים כ"סטנדרטים". לאחר הערכה הגסה, לתת תוקף נוסף בהמצאות חישוב קבוע בולצמן עד כדי שגיאה שמקורה ביכולת המדידה. לשמחתנו אף על פי שהתרשלנו במדידת הטמפ' ונוכחות של זרם, הגענו להערכה טובה של קבוע זה עד להשלים ספרות אחרי הנקודה. בטווח ...



איור 1 : המיקרוסקופ בו השתמשנו כדי לקחת את הדגימות, בהגדלה ניתן לראות את הצלחית ששימשה אותנו, הפס הכחול מדגיש את הזכוכית העליונה שנועדה לשטח את הרכיז.

2 53% תאור מהלך הניסוי איך הניסוי בוצע - שיטת העבודה בעיות מיוחדות – איך התגברתם

2.0.1 תיאור טכני של מהלך הניסוי.

כדי לבחון את התנועה הבראונית חילקנו את הניסוי לפי ריכוזים שונים. כל ריכוז הכיל כ 10% ריכוז של חלקיקים -להלן טבלה-, וכ 90% מתערובת של מים וגליצרול. יחד בנפח כולל של כ $40[\mu L]$. להלן טבלה המתארת את ריכוז הגליצרול בתערובת בכל אחד הניסויים, ולכל ריכוז שכזה את קבוע הצמיגות המאפיין אותה. כל ריכוז שוכן בין שתי פלטות זכוכית, במטרה לצמצם את דרגת החופש של התנועה בציר ה \hat{z} . ובכך להבטיח שאנו מסתכלים על מערכת שהיא בקרוב דו מימדית.

עוד קצת פרטים טכנים על הכנת הריכוזים. כדי להבטיח יחס של 90 ל 10 % , בתמיסה הכוללת דגמנו כ $160[\mu L]$ מריכוז תערובת הגליצרול וכ $40[\mu L]$ מתערובת החלקיקים, שמנו לב כי עבור ריכוזים גבוהים של גליצרול, הפטיפטה מזייפת, בערכה גסה כ ..., כלומר היא אינה יונקת כ $160[\mu L]$ נפח.

את תמונה המתקבלת מהמיקרוסקופ ניתחנו בהמצאות תוכנת מעקב, עבור חלקיקים שנבחרו באופן סלקטיבי כך שלמראית העין ניראים כדורים. כארבעה חלקיקים פר ריכוז. במערכת המצייתת באופן מושלם להנחת הארגודיות, מקטע הנתונים $[t_1 \rightarrow t_2]$ הוא מדידה בפני עצמו. זאת מאחר ומערכת ארגודית היא חסרת זכרון. הסעיף הבא מתואר כיצד השתמשנו בעובדה הזאת, כדי להתגבר על משברים שנקלנו בס בעת ההסקה מהמדידה. לצורך המשך הדיון נגיד כי חלון w הוא אינטרוול זמן, ומיצוע על החלונות פירושה

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{\#windows} \sum_{\omega} X[\omega + t]$$

כאשר X הוא גודל כל שהוא (כמובן שבהקשר המרחק $X = \bar{x}^2$). שוב, בהתאמה מושלמת לתאוריה, המדידה על פני החלונות שקולה למדידה על פני חלקיקים שונים ברדיוס זהה.

נציין כי בתחילת הניסוי ההיינו חשדנים לגבי טיב האיכות של התוצאות המתקבלות מבחירה סלקטיבית של חלקיקים (כדורים). ולמעשה הדרישה הזאת אינה הכרחית אם מניחים כי התפלגות צורת החלקיקים היא ללא עדיפות מבחינה מרחבית, כלומר שבתוחלת הכדורים שואפים להיות כדורים. המחשבה הזאת, התניעה בנו מוטיבציה לסכום על פני כל החלקיקים במערכת, ומשם קבוע בולצמן יהיה השיפוע של הישר התקבל מחישוב התוחלת המותנת

$$k_B T = c \cdot \mathbb{E}[\mathbb{E}[r^2|a]](t)$$

. תוצאה שכזאת הייתה יכולה להיות מאוד מרגשת. לבסוף לא הצלחנו לממש את הרעיון אך יצאו לנו כמה תמונות יפות, ויותר חשוב, ההתעסקות בכך חיזקה את הבנה הכללית שלנו לגבי קנה המידה של המערכת, עד כמה היא רועשת, מה זה אומר ארגודיות בעצם ולמה כשאומרים "סביר להניח" אז באמת סביר להניח.

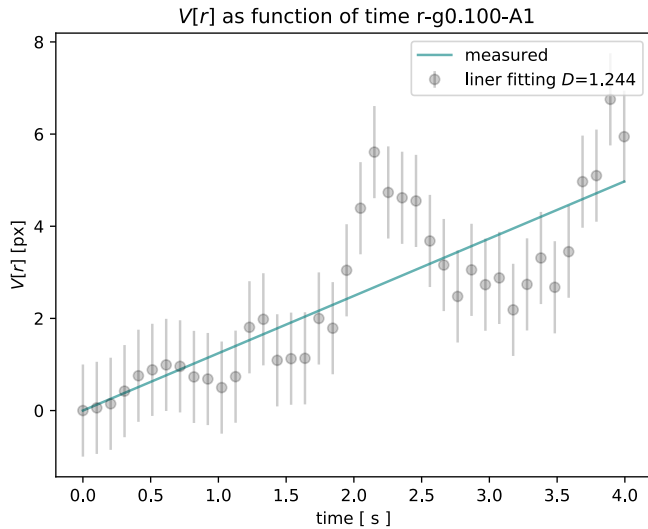
2.0.2 סחף.

נזכיר שוב כי פיתוח הקשר של התנועה הבראונית מניח כי מיצוע על פני הכוח אותו ירגיש חלקיק במרחב מתאפס $\langle x^F(x, t) \rangle$. אך ברור כי גורמים שונים יכולים להטות כיוון לכוח זה ומכאן כיוון מרכזי לזרימה על הצלוחית. בהינתן כיוון מועדף נצפה כי $\langle x(t) \rangle \neq 0$ (תוחלת מיקום החלקיק).

הגישה הראשונה בה נקטו כדי להתמודד עם הפער בין ההנחות למצב המערכת היתה צימצום למינימום השפעות החיצוניות על המערכת. השתמשנו בפלס כדי לוודא שמשטח המיקרוסקופ ישר ובכך נמנע מכוח הגרויטציה של כדור"א להאיץ את החלקיקים, דאגנו לחכות לחכות זמן סביר כדי שתנאי ההתחלה שנירכשו ברגע הצבת הצלוחית ידעכו. נוסף על כל זה הקפדנו על סטראיליות מאחר וראינו כי הצטברות אבק עקב הזנחה של צלוחית עשויה גם לתת תוצאות מוזרות.

לאחר שיצמצמנו את עוצמת השפעת ההפרעות, נקטנו בגשיה שניה - כעת היה ניתן להניח כי ההפרעות בטווח קצר (טווח שהתברר בדיעבד בסדר גודל של שניות, כלומר אכן מתאים לזמן האופייני בניסוי) הן אינן הגורם העיקרי בהכתבת אופי התנועה ומעתה היה ניתן לחשוב עליהם כאל 'משתנה מקרי', ועל מקטע זמן כאל דגימה, חילקנו הנתונים אל חלונות.

זה עדיין, לא הספיק. להלן (איור 2) ניתוח על פני 60 ~ פריימים (6 שניות לחלוף) לחלקיק הנמצא בתווך עם מקדם צמיגות $10^{-4} [P \cdot s]$. של מיוצע על פני החלונות. וההתאמה הלניארית המתאימה לו. מאחר והסקלה קטנה קל להתבלבל וחשוב שקיבלנו גרף לניארי, אבל למעשה בזמן של 6 שניות קיבלנו שיפוע של 3.5 ~, כלומר בערך הכפלה לאחר 4 שניות. הגדלים הללו אינם דומים כלל לזמן האופייני במערכת.



איור 3: $\mathbb{E}[r^2]$ ו- $\mathbb{V}[r^2]$ ניתוח על פני 4 שניות לחלוף. לחלקיק הנמצא בריכוז 10% גליצרול (מקדם צמיגות $10^{-4} [P \cdot s]$)
הערה חשובה, אומנם זה נראה שההתאמה הלניארית היא פחות טובה עבור השונות. אבל יש לשים לב שהסקלה של ציר ה \hat{y} בתרשים הקודם היא כפולה. ולכן גם המרחקים מהציר הם משמעותיים יותר. והשיפוע תלול בהרבה.

2.0.3 סקלינג, שגיאות.

ליחידות המדידה בעולם הטרקור אנו קוראים אורך אופייני של המערכת. כלומר הערכים המחושבים עלידיו. את תהליך המיפוי בין ערכים אלה לבין ערכי המרחק ביצענו באופן הבא. תחילה השתמשנו בלוחית הכיול כדי לספור כמה פיקסלים בתמונה הם $10^{-2} [mm]$. עבור מספר פריימים בודד, לקחנו את הפרש מיקום של חלקיק מסוים בפיקסלים וחילקנו מספר זה.
 קיבלנו כי 1 "אורך אופייני" שקול ל $\frac{1}{2} 10^{-6} [m]$. בנוסף, הוספנו שגיאת מדידה של כ 1 [אורך אופייני] נסמן שגיאה זאת מכאן ועד סוף הדוח כ 1_σ . הערכה הזאת היא הערכה גסה, השגיאה האמיתית קצת יותר נמוכה ותלויה בעיקר במידת הסימטריה של החלקיק, חלק מהשגיאה גם נובע מקיונטוט של פיקסלים ופיפוס שלנו בספירת פיקסל או שתיים. (עבור חלקיקים כדורים, התוכנה אינה מפשלת בחישוב מרכז החלקיק). כמוכן שבחישוב הממוצע נקבל כי השגיאה מצטברת אל

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(r \pm 1_\sigma)^2] &= \mathbb{E}[r^2 \pm 2r \cdot 1_\sigma + 1_\sigma^2] = \\ &= \mathbb{E}[r^2] \pm 2\mathbb{E}[r] \cdot \mathbb{E}[1_\sigma] + \mathbb{E}[1_\sigma^2] \\ &\leq \mathbb{E}[r^2] + 2\mathbb{E}[r] \cdot 1_\sigma + 1_\sigma^2 \end{aligned}$$

כאשר נקודת המוצא הייתה ש 1_σ נקבעת לפי היכולת שלנו ולכן ישנה אי תלות בין 1_σ ל r ולכן $\mathbb{E}[r] \cdot \mathbb{E}[1_\sigma] = \mathbb{E}[r 1_\sigma]$. כלומר השגיאה היא :

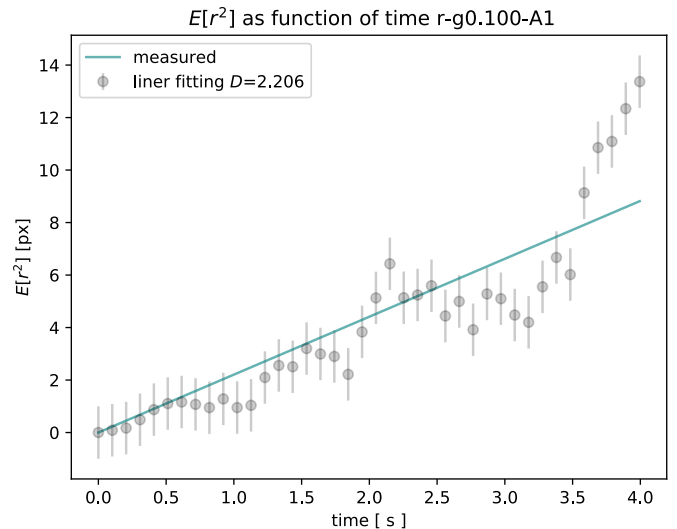
$$2\mathbb{E}[r] \cdot 1_\sigma + 1_\sigma^2$$

(בגרף כמעט ולא רואים זאת אבל אורך השונות משתנה). באופן זה לחלוטין :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[(r \pm 1_\sigma)] &= \mathbb{V}[r] + \underline{2COV(r, 1_\sigma)} + \mathbb{V}[1_\sigma] \\ &\mapsto \mathbb{V}[r] \pm 1_\sigma \end{aligned}$$

נדגיש שבחישוב חיפשנו חסם עליון מבלי להניח כי התפלגות השגיאה על פני 1_σ .

את טבלת הצמיגות לקחנו ממסד הנתונים של הספרייה thermo¹. ההנחה העיקרית היא שהשגיאה העיקרית בצמיגות נובעת מהיכולת שלנו לקחת בדיק את הריכוז הנדרש (אם כי ברור כי יש גם שגיאה לערכי הצמיגות) ולכן נוסיף



איור 2: $\mathbb{E}[r^2]$ ו- $\mathbb{V}[r^2]$ ניתוח על פני 4 שניות לחלוף. לחלקיק הנמצא בריכוז 10% גליצרול (מקדם צמיגות $10^{-4} [P \cdot s]$)
הערה חשובה, אומנם זה נראה שההתאמה הלניארית היא פחות טובה עבור השונות. אבל יש לשים לב שהסקלה של ציר ה \hat{y} בתרשים הקודם היא כפולה. ולכן גם המרחקים מהציר הם משמעותיים יותר. והשיפוע תלול בהרבה.

את הגישה השלישית, אנחנו חייבים לצוות ההדרכה. למעשה, פיתוח משוואה הדיפוזיה חוזה כי המקדם אותו אנו מחפשים $\frac{2k_B T}{\alpha}$ הוא שונות התפלגות המתקבלת ממשוואת הדיפוזיה. תחת ההפרעות, נקבל כי הממוצע של ההתפלגות כבר אינו מתאפס. ומכאן שנקבל מיפוי: $\mathbb{E}[r] \neq 0 \Rightarrow \mathbb{V}[x] \mapsto \mathbb{E}[r^2] - \mathbb{E}^2[r]$. הפירוש פיזיקלי, הוא שחיסור התוחלת ממפה את המערכת בחזרה אל מערכת בה מרכז המסה סטטי. מה שמגביר את מידת הארגודיות במערכת.

¹(של Caleb Bell, קישור <https://github.com/CalebBell/thermo>)

שגיאה גסה של כ 10% אל מקדם הצמיגות. אל הרדיוסים של החלקיקים או מוסיפים שגיאה שמונחי אורך אופייני ($\sim \frac{1}{2} 10^{-6}$). מכאן שבגרף השיפועים נצפה לשגיאה של :

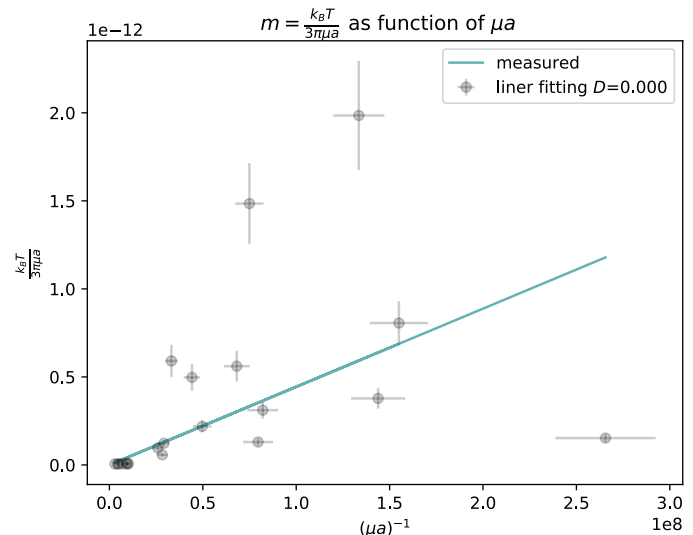
$$\begin{aligned} \frac{k_B T}{3\pi\mu a} &= \frac{k_B (T_0 \pm 8)}{3\pi (\mu \pm \Delta\mu) (a \pm 1\sigma)} = \\ &= \frac{k_B T_0 \left(1 \pm \frac{8}{T_0}\right)}{3\pi\mu a} \left(1 \mp \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) \left(1 \mp \frac{1\sigma}{a}\right) \\ &= \frac{k_B T_0}{3\pi\mu a} \left(1 \mp \frac{\Delta\mu}{\mu} \mp \frac{1\sigma}{a} \pm \frac{8}{T_0} + \dots\right) \Rightarrow \\ \sigma &\leq 2 \left(\frac{\Delta\mu}{\mu} + \frac{1\sigma}{a} + \frac{8}{T_0}\right) = 2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1\sigma}{a} + 0.268\right) = \\ &= \frac{1\sigma}{a} + 0.1536 (\%) \end{aligned}$$

בדומה השגיאה בציר x בגרף השיפועים היא

$$\begin{aligned} (\mu r)^{-1} &= \frac{1}{(\mu \pm \Delta\mu) (a \pm \Delta a)} = \frac{1}{\mu r} \left(1 \pm \frac{\Delta\mu}{\mu} \pm \frac{\Delta a}{a}\right) \Rightarrow \\ \sigma &\leq 2 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1\sigma}{a}\right) \sim \frac{1\sigma}{a} + 0.1 (\%) \end{aligned}$$

2.0.4 חישוב קבוע בולצמן

אספנו את כל השיפועים מהצורה הנ"ל $\frac{k_B T}{3\pi\mu a}$, המיפוי הלניארי בין ערכי $\frac{1}{\mu a}$ נותן ערך של כ $1.488 \cdot 10^{-23}$ פער של 10% מערך קבוע בולצמן $1.38 \cdot 10^{-23}$. נשים לב כי ההתאמה הטובה ביותר מתקבלת כאשר ערכי μa גדולים (אז $\frac{1}{\mu a}$ קטן). בנוסף לאור העבודה כי יש פיזור רחב, נסיק כי יש תלות שאינה ישירה במכפלה μa . אחרת היינו מצפים לראות מגמה מונוטונית ברורה של שינוי הכיוון הגרף.



איור 4: גרף השיפועים מהצורה $\frac{k_B T}{3\pi\mu a}$ ערכי \hat{x} הפעם לשם שינוי יחידות במידה הינם $[mks]$ כלומר- $\frac{s}{m^3} = \frac{1}{m^2/s \cdot m}$ ויחידות ציר ה \hat{y} הן $\frac{JK^{-1}Ks}{m^3}$. חישוב קבוע בולצמן יצא לנו כ $1.488 \cdot 10^{-23}$ פער של 10% מערך קבוע בולצמן $1.38 \cdot 10^{-23}$.

3 מסקנות.

לסיכום ניתן לראות כי לתנועת הפולטיאן יש התאמה טובה מאוד לתאוריה כאשר מסתכלים על ריכוז גבוהה של גליצרול או כאשר רדיוס החלקיק מאוד

גדול (μ, a) גבוה גורר כי $\frac{1}{\mu a}$ הוא ערך נמוך). וישנה התאמה "חלקית" עבור ריכוז נמוך של גליצרול או חלקיק בעל רדיוס קטן. חשוב לציין שזאת לא עובדה טריוויאלית, אומנם התאוריה מספקת לנו את תנאי ההתחלה $\frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m} t} x_0^2$ אך אנו מודידים תמיד ביחס אל נקודת המוצא של החלקיק כלומר $x_0 = 0$. מכאן שנצפה לתיקון נוסף אל משוואת התנועה. מהיסתכלות על הגרף אנו מערכים בהערכה גסה כי התיקון הבא תלוי רק בגורם יחיד μ או a ולא מכפלתם (זאת מאחר והפיזור מיתפצל ולכן אנו מצפים לאמפליפיקציה רק שינוי פרמטר יחיד). נציין שהופתענו,

4 דברים שניסינו לעשות.

כפי שנאמר בהתחלה, בשלב מוקדם בניסוי הרגשנו אי-נוחות עם הבחירה הסלקטבית של החלקיקים אחריהם עקבנו, והתחלנו במקביל לכתוב תוכנה שתבצע מעקב בעצמה על כל החלקיקים במקביל. זאת ניסו לעשות בכמה שלבים, תחילה בשלב הראשון ניקנו רעשים, וקיונטטנו את הסירטונים לתמונות שחור לבן (תמונה פר פריים). לאחר מכן מצאנו את כל החלקיקים פר פריים (רצנו על המטריצה וכל מקבץ של 1ים (גושים שחורים הוכרו כחלקיק). השלב המסובך היה לנסות לשדך בין חלקיקים של פריימים עוקבים, ניסינו גישות שונות, רובן חמדניות, כמו לקחית המסה הקרובה ביותר או החלקיק בעל המסה הקרובה ביותר.

בעיות רבות בהן ניתקלנו, היו התמודדות לא מוצלחת עם רעש, בנוסף לכך להייתה דריסה במהלך השידוכים, כלומר עם שתי חלקיקים הצביעו לשידוך מסויים, אז רק אחת השרשראות שרדה. אי יכולת להתמודד עם חלקיקים שנכנסו לתמונה באמצע הסירטון. ועוד בעיות רבות.

5 נספחים.