דוח התאבכות

מיכאל כהן ודויד פונרובסקי

11 ביוני 2021

רקע תיאורטי גל מישורי מונוכרומטי ניתן לתיאור בתור שדה התלוי בזמן ובמרחב

$$\psi(\vec{r},t)=Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=U(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

כאשר $\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)$ ו-$\omega=c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$. עבור גל כזה ניתן לתאר את המרחב כאוסף רציף של מישורים שווי-פאזה. מישורים אלה נקראים חזיתות הגל.
עצמה של גל מוגדרת להיות

$$I(\vec{r})=|U(\vec{r})|^2$$

כאשר n גלים שונים נפגשים, ניתן לתאר גל יחיד שקול שהוא סכום הגלים, מעקרון הסופרפוזיציה:

$$\psi(\vec{r},t)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\vec{r},t)=\sum_{j=1}^{n}U_j(\vec{r})e^{-\omega_j t}$$

לדוגמה, במקרה שבו $n=2$, העוצמה של גל מוגדרת להיות

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}cos(\Delta\phi)$$

כלומר תבנית ההתאבכות נקבעת לפי הפרשי הפאזה של המקורות.
הקירוב הפרקסיאלי - כאשר נניח זוויות קטנות בין הציר האופטי ובין וקטורי הגל, עבור וקטור גל $\vec{k_0}=(k_x,k_y,k_z=\sqrt{k_0^2-k_x^2-k_y^2})$ מתקיים $|k_x|,|k_y|<<k_0$ ולכן נקבל:

$$\sqrt{k_0^2-k_x^2-k_y^2}=k_0\sqrt{1-\frac{k_x^2+k_y^2}{k_0^2}}\approx k_0-\frac{k_x^2+k_y^2}{2k_0}$$

כאשר גל פוגע בסריג, אינטגרל פרנל בעזרת הקירוב הפראקסיאלי מתאר את השדה במרחב:

$$U(x,y,z)=-\frac{ik_0}{2\pi z}e^{ik_0z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(x',y',z=0)\cdot e^{\frac{ik_0}{2z}((x-x')^2+(y-y')^2}$$

כאשר $U(x',y',z=0)$ מייצג את הביטוי המתקבל מכפל פונקציית הגל ממש לפני המפתח, כפול פונקציית ההעברה של המפתח, המבטאת את המבנה הגיאומטרי של המפתח. בדרך כלל נניח מפתח דו-מימדי ולכן גם פונקציית ההעברה תהיה דו-מימדית. למשל, עבור מפתח ריבועי פונקציית ההעברה היא מכפלה של שני פונקציות $Rect(\cdot)$.
אם בנוסף לכך נניח שאנחנו מסתכלים על נקודה רחוקה מאוד r עבורה נוכל להשתמש בקירוב השדה הרחוק:

$$|x'_{max}|,|y'_{max}|<<\sqrt{\lambda z}$$

כאשר $|x'_{max}|,|y'_{max}|$ מייצגים את ערכי x,y המקסימליים במישור המפתח עבורם פונקציית ההעברה אינה 0.

תחת קירוב זה יהיה ניתן להזניח את האיברים הריבועיים באקספוננט, ולקבל את קירוב פראונהופר עבור עקיפה בקירוב השדה הרחוק:

$$U(x,y,z)=-\frac{ik_0}{2\pi z}e^{ik_0(z+\frac{x^2+y^2}{2z})}\cdot$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(x',y',z=0)\cdot e^{-\frac{ik_0}{z}(xx'+yy')}dx'dy'$$

תיאור מערכת הניסוי איור 1 מציג שירטוט סכמתי של מערכת הניסוי. בנקודה C ממוקם הלייזר, קרן זאת עוברת דרך נקודה A שם מונח השריג, שיכל להיות סדק בודד או זוג שכאלה. באות W נסמן את רוחב הסדק, ובמקרה של שתי סדקים נשתמש בנוסף באות d כדי לסמן את המרחק ביינהם. z יציין את המרחק המינמלי (האנך) אותו עוברת קרן האור עד להגעה למישור המסך. בB נמצא הגלאי, הנע על מסלול מעגלי שבקרוב מתלכד עם המישור, הזווית הנפרשת ממנו אל האנך, היא דרגת החופש שלנו במערכת אותה נסמן ב θ. בחרנו למדוד רק עבור ערכי $|\theta|<\frac{2\pi}{24}$ $(\pm15°)$ שם מתקיים כי מסדר ראשון

$$\tan(\theta)\sim\theta+\mathcal{O}\left(\frac{\theta^3}{3}\right)\le\theta+\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{24}\right)^3\le\theta+7\cdot10^{-4}$$

ולכן נוכל להצדיק קירובי זוויות קטנות $\frac{x}{z}=\tan\theta\to|x-z\theta|\le\sim\frac{1}{20}$.
התחשבות השגיאה ב x, תעמיס על החישובים ואינה תתרום בסדרי גדול מעבר לתרומות שגיאות אחרות. לכן לא נתחשב בה, ונניח כי ערכי את ה x עלפני המסך אנו מודדים בקרוב טוב. נסמן ב x' נקודה בה הקרן יכולה להיות במישור השריג, אורך הגל מקיים

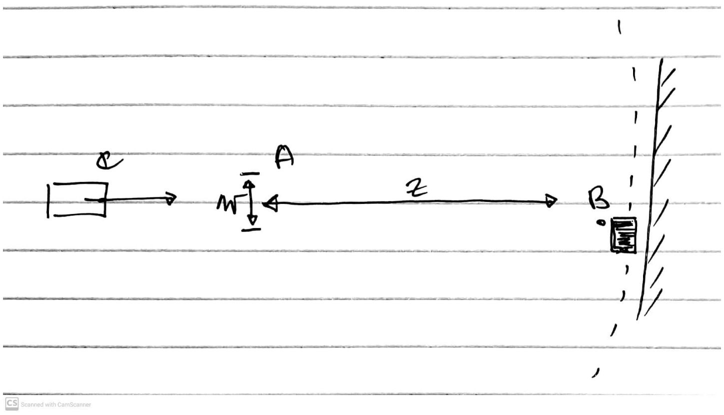
$$\frac{1}{\lambda}\cdot x'^2\le\frac{1}{\lambda}\cdot W^2\sim\frac{(\mu m)^2}{\mu m}\le\mathcal{O}\left(10^{-6}z\right)$$

כלומר קירוב השדה הרחוק של פרנוהפר מוצדק במערכת.
את הזווית ועוצמת האור אנו מודדים על ידי חיישנים שאנו מניחים כי הם מבצעים רק פעולות לניאריות על הקלט, כלומר מוסיפים רק כפולות בקבוע.

אימות התאוריה אל מול אורך הגל. בניסוי השתמשנו בלייזר אדום בעל אורך גל $\lambda\sim0.6_{[\mu m]}$. אורך זה משותף לכל הניסויים, ללא תלות ביחס לרוחב הסדק או כמות הסדקים. בנוסף בניגוד לערכים משתופים אחרים, למשל מרחק הלייזר מהגלאי, אורך הגל רובסטי במיוחד לשגיאות כיול. ביחס ליכולת המדידה שלנו גודל זה הוא אוניברסלי ולכן אם הניסויים שלנו תואמים את התאוריה, נצפה שחישוב יניב אורך גל זהה.
כזכור, לפי קירוב פרנהופר העוצמה המתקבלת היא $V(\theta)\sim V(x_\theta)\propto sinc^2\left(\frac{\pi wx}{\lambda z}\right)$ עבור סדק יחיד. סכמת החישוב מתבצעת באופן הבא,

1. תחילה אנו מוצאים את תדירות הסינק $\alpha_W=\arg\min_\alpha RMS\left(V(x),Amp\cdot sinc^2(\alpha x)\right)$ עבור כל ניסוי.
2. לאחר מכן, אנו מחלצים את שיפוע ההתאמה הלינארית לגדלים המתקבלים מ $\frac{1}{\alpha_W\cdot W}$ כלומר

$$\lambda=\arg\min_{\lambda,\phi}RMS\left(\frac{1}{\alpha_W}\left(\frac{1}{W}\right),\lambda\cdot\left(\frac{1}{W}\right)+\phi\right)$$



איור 1: מערכת הניסוי עבור סדק יחיד, הנקודה B היא מיקום החיישן, הנע על מסלול שהוא בקירוב טוב מקביל למסך, הנקודה A היא נקודת המעבר של קרן הלייזר בסדק ובנקודה C נמצא מקור הלייזר.

אפקטיבית, השגיאה ברוחב הסדק זניחה (סדר גודל של פחות מ-μm אין לנו יכולת להבחין בה), ולכן ניתחשב רק בשיגאת של מדידת המרחק Δz, ונסמן ב σ את סטיין התקן אותה מחזירה התאמת ה RMS של ספריית ה$scipy$. מכאן ש

$$\alpha(W) = \frac{\pi W}{\lambda(z\pm\Delta z)} \pm \sigma \Rightarrow \lambda = \frac{\pi W}{(\alpha(W)\pm\sigma)(z\pm\Delta z)}$$

$$\lambda \sim \frac{\pi W}{\alpha(W)\, z}\left[1\pm\left(\frac{\sigma}{\alpha(W)}+\frac{\Delta z}{z}\right)+\mathcal{O}\left(\Delta^2\right)\right]$$

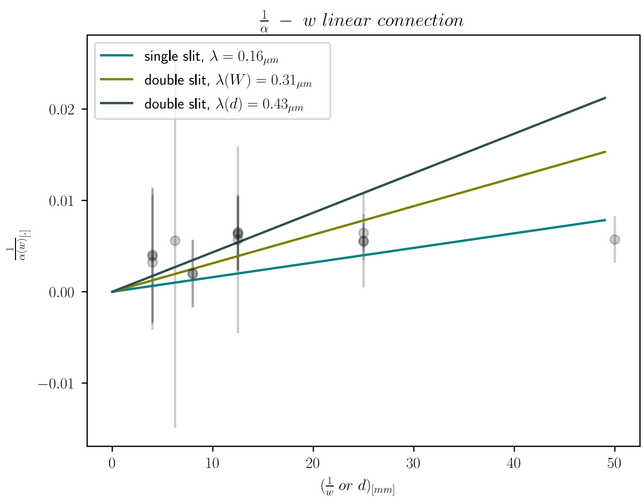
באופן זהה לחלוטין נאמת את ניסוי שני הסדקים, רק ששם התאוריה חוזה קשר של $V(x_\theta) \propto sinc^2\left(\frac{\pi w x}{\lambda z}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda z}\frac{d+W}{2}x\right)$ כאשר הקשר מתקבל לאור הזהות

$$\mathcal{F}\left[\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)}{2}\right] = \mathcal{F}[f]\cos(\tau x)$$

במקרה שלנו, המרחק בין הסדקים הוא d, מרכזם נמצא ב $\frac{d+W}{2}$, ולכן עוצמת האהרה ברגע המעבר בסדק שקולה לעוצמת שתי מקרות אור במרחק $\pm\frac{d+W}{2}$ מהראשית. הפעם נוסיף פרמטר $\beta_{W,d}$ שייצג את התדירות האופטימלית של רכיב ה cos כלומר

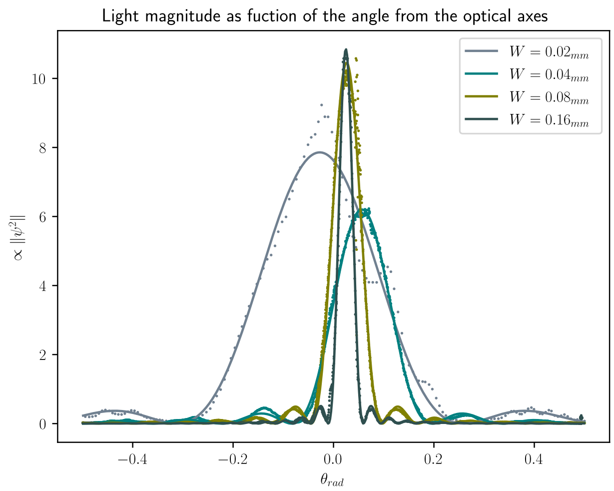
$$\alpha_{W,d},\beta_{W,d} = \arg\min RMS\left(V(x), Amp\cdot sinc^2(\alpha x)\cos^2(\beta x)\right)$$

נחלץ את אורך הגל לפי הפרצודרה עבור α ו β בנפרד, ונאמת את ערך אורך הגל בנפרד.

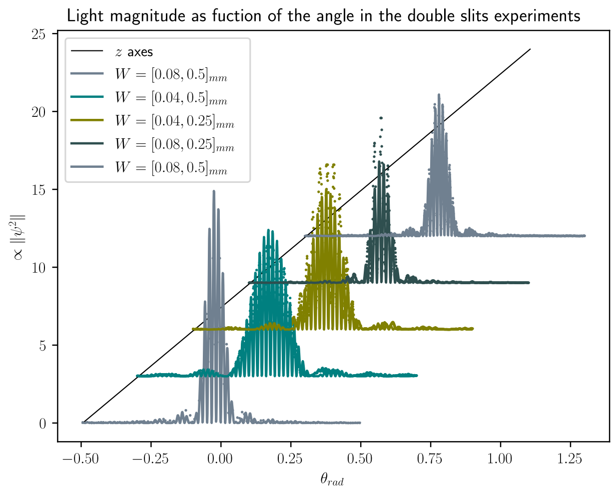


איור 2: ההתאמה הלינאירית בין "1 חלקי תדר" ה$\sin c$ ו $\cos$ כפונקציה של $\frac{1}{W}$ או ($\frac{2}{W+d}$ במקרה של $\cos$). ציר $\hat{x}$ מופיעה $\frac{1}{W}$ ובציר $\hat{y}$ את $\frac{1}{\alpha_W}\left(\frac{1}{W}\right)$ כאשר α_W הוא התדר.

תוצאות באיורים 3 ו- 4 ניתן לראות את ההתאמות אל מול המדידות, באיור מספר 2 את התאמה הלניארית ל α_W^{-1} (תדר ה $\sin c$ שחולץ מההתאמה) כאשר השיפוע הוא אורך הגל, $\lambda\cdot\left(\frac{1}{W}\right)+\phi$. נציין כי ערכי השיפועים אינם תואמים את הערכי הגל של הלייזר האדום (עבור סדק יחיד התקבל אורך גל של $0.16_{\mu m}$ ומחילוץ תדרי ה $\sin c$ ו $\cos c$ בניסוי השני קיבלנו $0.31_{\mu m}$ ו $0.43_{\mu m}$) כאשר אורך הגל של לייזר אדום הוא $0.6_{\mu m}$. יחד עם זאת ערך σ המוחזר עבור התדר נע בין ערכי 0.1 ל 2 (עבור כל סדק מתקבל ערך אחר בתחום) כלומר, הערך המקסימלי הנתרם ל - $\frac{\sigma}{\alpha(W)}$ הוא 15%, ובנוסף מאחר ומדידת האורכים במערכת היא גסה (נובע ישירות מקרוב הזוויות הקטנות) לקחנו שגאה של כ 10% באורך ולכן ניתן לחסום את השגיאה מלעיל ב $\pm25\%$, ואכן לא הצלחנו להגיע לאימות מלא. אבל כן לתוצאה קרובה בסדרי הגודל.



איור 3: ההתאמות לתבנית ההתאבכות במערכת סדק יחיד, עבור רוחבים משתנים. בציר $\hat{x}$ נתונה הזווית ברדיאנים, בציר $\hat{y}$ את עוצמת האור הנמדדת.



איור 4: ההתאמות לתבנית ההתאבכות במערכת שתי סדקים, עבור רוחבים משתנים W ומרחק משתנה ביינהם d. בציר $\hat{x}$ נתונה הזווית ברדיאנים, בציר $\hat{y}$ את עוצמת האור הנמדדת.

נספחים.

נסיון לאמת את ניסוי מייכאלסון. חלק זה לא הוכנס לדו"ח מאחר וניתוח תצאותיו רחוקות מאוד מהערכים אותם ציפנו להקבל בתאוריה. ולכן חלק זה נכנס כניספח.

בחלק זה של הניסוי, אנו מעבירים את אחד הגלים דרך תווך המוסיף פאזה מסויימת, במקרה שלנו משטח זכוכית, נטייה בזווית θ של המשטח תאפשר לנו לשלוט במרחק אותו עובר הגל בתוך התווך.

נסמן ב $g\left(\theta,\vec{x}\right)$ את הפאזה אותה צובר הגל בעת מעבר בזכוכית בזווית θ במיקום $\vec{x}$, ונקבל כי שיכלול הגל המתקבל על המסך הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ig(\theta,\vec{x})}+1\right)\psi\left(x\right)$ מכאן שהמרחק (בנורמת פורבינוס) לבין הגל המקורי

$$\begin{aligned} d_F\left(\psi_\theta-\psi\right) &= \sqrt{\int_D |\psi_\theta\left(x\right)-\psi\left(x\right)|^2} \\ &= \sqrt{\int_D |\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ig(\theta,\vec{x})}-1\right)\psi\left(x\right)|^2} \\ &= \sqrt{\int_D \sin\left(\frac{1}{2}g\left(\theta,\vec{x}\right)\right)|\psi\left(x\right)|^2} = \\ &= \sqrt{\mathcal{F}\left[\sin\left(\frac{1}{2}g\left(\theta,\vec{x}\right)\right)\right]*\mathcal{F}\left[|\psi\left(x\right)|^2\right]} = \\ &= \sqrt{\mathcal{F}\left[\sin\left(\frac{1}{2}g\left(\theta,\vec{x}\right)\right)\right]*\mathcal{F}\left[\psi\left(x\right)\right]*\mathcal{F}\left[\psi\left(x\right)\right]} \end{aligned}$$

כאשר שתי המעברים האחרונים נובעים ישירות ממשפט הקונבלוציה. אנו מניחים כי $\psi\left(x\right)$ הוא הפתרון לפיזור מסדק דק כלומר $\psi\left(x\right)\sim sinc\left(wx\right)$ ומכאן ש $\mathcal{F}\left[\psi\left(x\right)\right] = rect\left(rx'\right)$, כאשר r,w הם הפרמטרים הפיזים. נזכיר כי קונבלוציה של שתי מלבנים ($rects$) שווה לפונקציית המשולש.

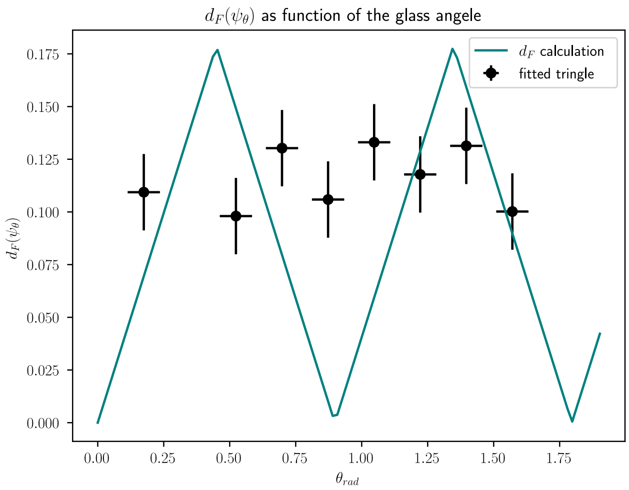
נניח כי $g\left(\theta,\vec{x}\right)$ הוא אופרטור לינארי ב θ בשדה מודולו 2π, מהצורה $g\left(\theta,\vec{x}\right)=\left(\vec{\xi}\cdot\vec{x}\right)\theta \mod 2\pi\zeta$ (כאשר ζ, מייצג את 1 חלקי המחזור) הנחה זאת סבירה עם מקדם השבירה של הזכוכית קטן. במקרה זה, נקבל כי

$$\mathcal{F}\left[\sin\left(\frac{1}{2}g\left(\theta,\vec{x}\right)\right)\right]\sim\delta\left(|x'-\frac{1}{2}\left(\vec{\xi}\cdot\vec{1}\right)\theta| \mod 2\pi\zeta\right)$$

נקבל סך הכל כי.

$$d_F\left(\psi_\theta-\psi\right)=\sqrt{tringle\left(\frac{1}{2}\left(\vec{\xi}\cdot\vec{1}\right)\theta \mod 2\pi\zeta\right)}$$

כאשר ξ הוא פרמטר, המייצג את מקדם השבירה בכל ציר ו ζ הוא פרמטר המייצג את 1 חלקי זמן המחזור. מטעמי פשטות נניח כי מקדם השבירה בשתי הצירים זהה.



איור 5: התאמה בין הנורמות $d^2\left(\psi_\theta-\psi\right)$ לבין $tringle\left(\frac{1}{2}\left(\vec{\xi}\cdot\vec{1}\right)\theta \mod 2\pi\zeta\right)$ בציר $\hat{x}$ נמצאת הזווית θ בציר $\hat{y}$ מוצגת הנורמה.

איור 6: דוגמא, ל 4 פריימים שצולמו לאחר הפעלת טרשהולד.

נציין כי, ההתאמה המופיע באיור 5 היא אינה ההצגה האופטימלית המצמצת את השגיאה, זאת מאחר וכל פתרון המוחזר על $scipy$ הוא משולש בעל תדר גבוהה בצורה בלתי סבירה, מה שמעיד על כך שכניראה אחת ההנחות לעיל הייתה פשוט לא סבירה.