דו"ח רעש

מיכאל כהן ודויד פונרובסקי

1 ביוני 2021

בכל מעגל חשמלי מופיעות תופעות של רעש חשמלי. רעש ג'ונסון הוא רעש הנובע מפלוקטואציות תרמיות של נושאי מטען במוליך. רעש זה הינו רעש לבן בקירוב ואינו תלוי בחומר ובצורה הגיאומטרית של הנגד. שימוש בפיתוח של נייקוויסט מאפשר לנו לחשב את קבוע בולצמן ואת האפס המוחלט ביחס לטמפרטורת הקיפאון של מים, כלומר במעלות צלזיוס (centigrade scale) (להכניס תוצאות). **בולצמן** $2.16\cdot10^{-23}$, **האפס המוחלט** $0.0057_{[K^\circ]}$

חלק ראשון

1.1 רקע תיאורטי

בשנת 1928 מדד ג'ון ג'ונסון את הרעש הנגרם מהפלוקטואציות התרמיות המוזכר לעיל, ובעקבות פרסום הממצאים פרסם הארי נייקוויסט הסבר לתופעה, ע"י תיאור הקשר בין ערך ה-MS של המתח לטמפרטורה, התנגדות המוליך ותדירות המוד, כאשר המודים של השדה האל"מ נקבעים ע"י תנאי השפה של המוליך.

כידוע לפי הנוסח (הכי פשטני) זרם חשמלי הוא מעבר של מטען בין דרגות שונות של פוטנציאל חשמלי, את הדינמיקה המתקבלת כאשר ההפרש הוא גס מתארת היטב התורה האלקטרומגנטית. עם זאת, כאשר יוצאים ממסגרת העולם האידאלי הפוטנציאל החשמלי של כל גוף/רכיב אינו אחיד על פניו. רעש ג'ונסון מתאר את העולם בגבול הזה, נרצה לחשוב על המתח V, המאפיין תדר ν, הנמדד משתי נקודות שונות של נגד R כאל משתנה מקרי $V(\nu)$.

כזכור מחשמל, הקשר בין ההספק למתח מתואר ע"י $P=\frac{V^2}{4R}$ כלומר במקרה שלנו $\langle P\rangle=\frac{\langle V^2\rangle}{4R}$ $\mapsto$. מצד שני אנו יודעים כי האנרגיה הממוצעת של אוסילטור בעל תדר עצמי ν מתפלג לפי

$$\langle\varepsilon(\nu)\rangle=\frac{2\pi\hbar\nu}{e^{\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}}-1}\quad(1)$$

ובטמפ' גבוהות קירוב מסדר ראשון של האקספוננט נותן $\langle\varepsilon(\nu)\rangle\sim kT$, כאשר יכולנו לצפות לערך זה מחוק החלוקה השווה - כל מוד יקבל תרומה של $\frac{1}{2}kT$ מהשדה החשמלי ותרומה זהה מהשדה המגנטי, מאחר שכל אחד מהם מהווה דרגת חופש ריבועית בהמילטוניאן של המוד. נשים לב שהשימוש בקירוב עבור טמפרטורות גבוהות גורם לכך שהפיתוח תקף עבור תדירויות וטמפרטורות המקיימות $hf<<kT$.

מהקשר של הספק לאנרגיה $P(\nu)=\langle\varepsilon(\nu)\rangle$ נקבל כי

$$dV_j^2=4kTRd\nu\quad(2)$$

בניסוי זה נשתמש בתיאוריה של נייקוויסט בכדי למצוא את טמפרטורת האפס המוחלט (צלזיוס) ואת קבוע בולצמן.

1.2 התאמת התיאוריה למערכת הניסוי עבור רכיבים אידיאליים משוואה (2) הייתה תיאור נכון של המערכת. בפועל, לכבלים הקואקסיאליים בהם השתמשנו יש קיבול מסויים שנסמן ב-C. במצב כזה, עבור נגד R נקבל התנגדות אפקטיבית:

$$R_\nu=\frac{R}{1+(2\pi\nu CR)^2}\quad(3)$$

ולכן בפועל מתקיים הקשר:

$$dV_j^2=4kTR_\nu d\nu\quad(4)$$

העברת האות האל"מ במגבר וב-band pass filter נותנת פונקציית הגבר אפקטיבית:

$$g(\nu)=\frac{V_0(\nu)}{V_i(\nu)}\quad(5)$$

כאשר V_0 הוא ה-RMS של המתח לאחר המגבר והפילטר ו-V_i הוא ה-RMS של המתח של האות הסינוסואידלי בעל תדירות ν אותו אנו מכניסים למגבר. מתקיים:

$$dV_0^2=[g(\nu)]^2dV_i^2\quad(6)$$

לכן נוכל לכתוב במקרה שלנו:

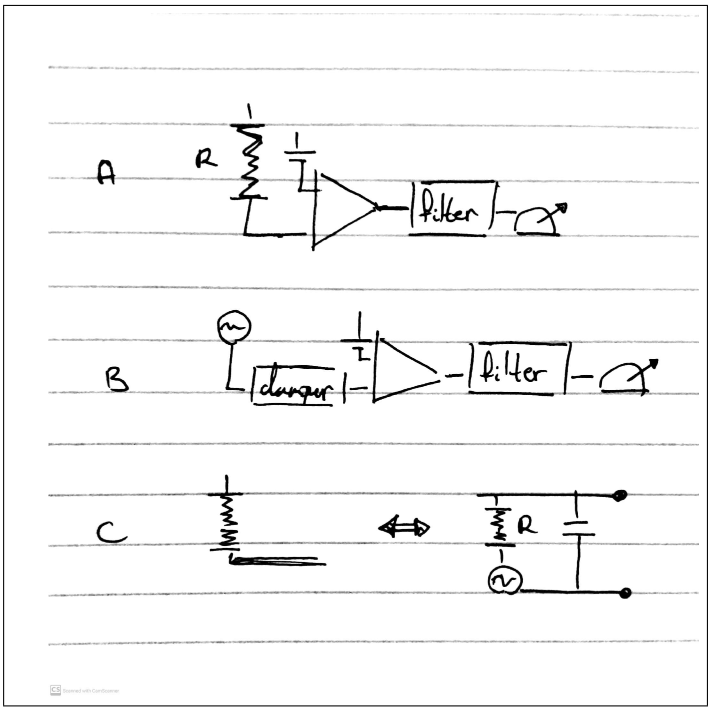
$$V^2=4RkTG\quad(7)$$

כאשר סימנו $G=\int_0^\infty\frac{[g(\nu)]^2}{1+(2\pi\nu CR)^2}d\nu$.

לכן, בתחילת הניסוי השתמשנו במדידות על פני ספקטרום רחב של תדירויות על מנת לשערך נומרית את הפונקציה $g(\nu)$.

חלק שני

2.1 חישוב קבוע בולצמן את קבוע בולצמן נמצא על ידי ההתאמה הלניארית של ערכי $\langle V^2\rangle$ הנמדדים עבור ערכי R שונים, מאחר ובהערכה גסה, בטמפ' החדר ולנגד מסדר גודל של $[10M\Omega]$ רעש ג'ונסון הוא מסדר גודל של $\sim\sqrt{10^{-23}\cdot10^7\cdot10^2}<10^{-6}\,[V]$



איור 1: ב-A מוצגת סכמת הניסוי, ב-B סכמת הכיול וב-C מתואר המעגל השקול לחיבור של נגד אל כבל קואקסלי.

נזדקק למגבר על מנת להגיע לסקלה אותה מכשירי המדידה שלנו יכולים למדוד. השתמשנו במגבר המחובר לספק של $15\,[V]$ ונסמן ב $g\left(\nu\right)$ את יחס ההגברה (עבור $\left\langle V^2\right\rangle$) של המגבר עבור תדר ν. כאמור לעיל, חיבור הנגד בכבל הקואקסלי שקול לחיבור של קבל במקביל לנגד כמתואר באיור 1, ובסה"כ נקבל שהמתח הנמדד מתואר על ידי משוואה (7).

שלבי הניסוי:

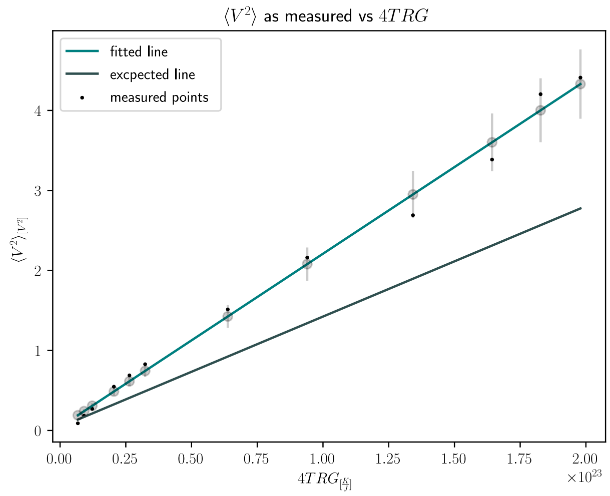
1. מציאת מתח הרוויה של המגבר ורוחב הסרט בו הקרוב $\varepsilon \sim kT$ עדיין תקף, כאשר עבור תדירויות מעבר לרוחב זה האנרגיה שואפת לאפס (מאחר שמתקיים $\lim_{\nu\to\infty}\frac{2\pi\hbar\nu}{e^{\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}}-1}=0$) ומשם גם ההספק. בדקנו זאת עלידי סקירה של ערכי ההגברה למתחים שבין 20 ל $280\,[mV]$, בתדירות קבועה $10\,[kHz]$. באיור 4, ניתן לראות את גרף המדידות שהתקבל.

2. מציאת $g\left(\nu\right)$ עבור מספר רב של מודים בתחום רוחב הסרט, זאת עשינו על ידי הזנת המגבר בסיגנל סינוסוידאלי, מסיבות טכניות איננו יכולים ליצור מתח בסדר של 10^{-6} ולכן נשתמש במנחת (מופיע באיור 1, B כ-$damper$) המנחית בפקטור של 10^3. את המדידות עבור שערוך הפונקציה ביצענו בספקטרום תדרים של $100mHz-100kHz$.

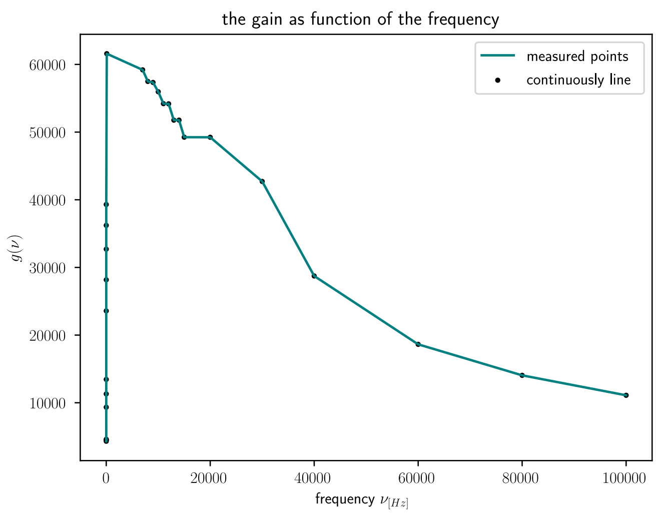
3. חישוב עבור מספר של נגדים את הערך G ומדידה עבור כל אחד מהם את הערך $\left\langle V^2\right\rangle$.

4. חילוץ הערכה לקבוע בולצמן

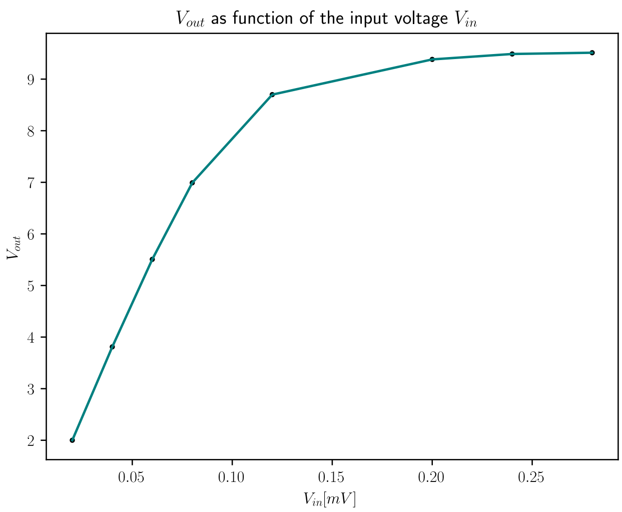
$$\tilde{k}\leftarrow\arg\min_{\tilde{k},c}RMS\left[\left\langle V^2\right\rangle,\tilde{k}\cdot\left(4TG\right)+c\right]$$



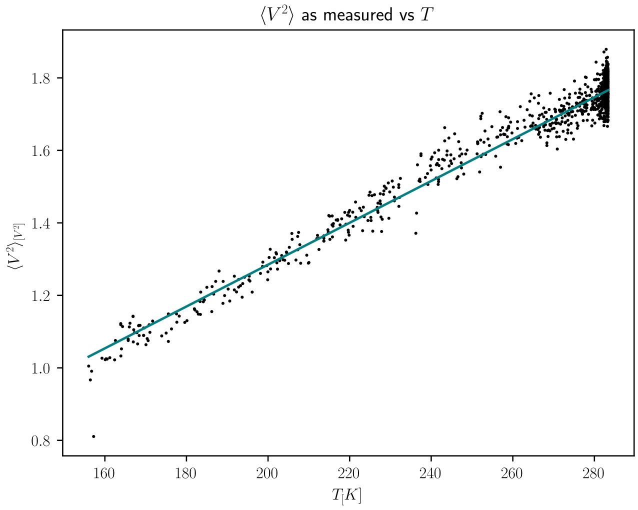
איור 3: התאמה לניארית בין ערכי $\left\langle V^2\right\rangle$ בציר $\hat{y}$ שנמדדו לבין ערכי $4TRG$ בציר $\hat{x}$, הקו האפור מתאים להקשר התאורטי (השיפוע שווה לקבוע בולצמן), הנקודות השחורות הן הערכים שנמדדו עבור $\left\langle V^2\right\rangle$ ביחס לנגד אותו חיברנו למגבר. ה $error-bars$, נמתחים מישר ההתאמה, באימות מלא של התאוריה הקו האפור היה אמור להמצא בטווח ה$error-bars$.



איור 2: שיערוך ערכי ההגברה של הגבר $g\left(\nu\right)$, בתחום $100mHz-100kHz$. הנקודות השחורות, הן ערכי ההגברה שנמדדו עבור תדרים ν ים שונים, הקו הכחול הוא המשכה של הנקודות באופן גס.



איור 4: בציר $\hat{y}$ מוצגים ערכי ההמתח המתקבלים לאחר הגברה עבור ערכי מתח נכנסים שונים בטווח שבין 20 ל $280\,[mV]$, בתדירות $10\,[kHz]$.



איור 5: בציר $\hat{y}$ נמצאים ערכי $\langle V^2 \rangle$, ובציר ה- $\hat{x}$ ערכי הטמפרטורה בקלווין, הנקודות השחורות הינם כ 10^3 נקודות אשר הוגרלו באופן אחיד מהמדידה הרציפה. הקו הכחול היא ההתאמה הלניארית, אשר התקבלה.

2.2 חישוב טמפרטורת האפס המוחלט (צלזיוס) חזרה אל $V^2 = 4kTRG$ מציאת $ax+b$ בשתי דרכים, באחת, על ידי פשוט התאמה. בשניה על ידי, לקיחת ה G בסעיף הקודם $\pm\sigma$.

נספחים,

חישוב השגיאה בקבוע בולצמן, נציין כי שגיאות של $\Delta R, \Delta C, \Delta g(v)$ יביאו לשגיאה כוללת ב G מהצורה :

$$\frac{\left(g(\nu) \pm \Delta g(\nu)\right)^2}{1 + \left(2\pi\nu\left(C \pm \Delta C\right)\left(R \pm \Delta R\right)\right)^2} \sim \frac{g(\nu)^2}{1 + \left(2\pi\nu CR\right)^2} \cdot \left(1 \pm \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 \pm \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 \pm \frac{\Delta g(\nu)}{g(\nu)} + \mathcal{O}\left(\Delta^4\right)\right)$$

הרכיב $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2$ תורם שגיאה קבועה לאינטגרל בעוד ש $\frac{\Delta g(\nu)}{g(\nu)}$ תורם שגיאה מהצורה

$$\int_{Width} \frac{g(\nu)\,\Delta g(\nu)}{1 + \left(2\pi\nu CR\right)^2} d\nu \leq \max_{\nu} \Delta g(\nu) \cdot \int_{Width} \frac{g(\nu)}{1 + \left(2\pi\nu \cdot CR\right)^2}$$

מאחר וביצענו יותר מ-500 מדידות (כל קובץ csv מכיל במינימום כ 6000 שורות על פני 10 תדרים), נקבל כי $\Delta g(\nu) \sim \frac{instrument\ error}{\sqrt{500}} \sim \frac{6}{\sqrt{5}}10^{-3}$ כאשר את השגיאה לקחנו מהמפרט הטכני: [DMU].

$$G + \Delta \sim G\left(1 \pm \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 \pm \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2\right) \pm \pm \frac{6}{\sqrt{5}}10^{-3} \cdot \int_{Width} \frac{g(\nu)}{1 + \left(2\pi\nu \cdot CR\right)^2}$$

ולכן אנו מצפים למצוא את קבוע בולצמן בטווח:

$$k = \frac{\left\langle V^2 \right\rangle}{4\left(G \pm \Delta G\right)\left(T \pm \Delta T\right)\left(R \pm \Delta R\right)} = \sim \frac{\left\langle V^2 \right\rangle}{4GTR}\left(1 \pm \frac{\Delta G}{G} \pm \frac{\Delta T}{T} \pm \frac{\Delta R}{R}\right) \sim \frac{\left\langle V^2 \right\rangle}{4GTR}\left(1 \pm \frac{\Delta R}{R} \pm \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 \pm \frac{\Delta T}{T} \pm \frac{6}{\sqrt{5}}10^{-3} \cdot \frac{\int_{Width} \frac{g(\nu)}{1+(2\pi\nu \cdot CR)^2}}{\int_{Width} \frac{g^2(\nu)}{1+(2\pi\nu \cdot CR)^2}}\right)$$

מאחר שהחישוב הנ"ל מסורבל מאוד, וכל שגיאה לחוד קטנה מאוד, פשטנו את השגיאה על ידי הקירוב הגס הבא: בטמפ' לקחנו שגיאה של כ-2% $\sim 6^\circ/296^\circ$, בנגדים לקחנו שגיאה של מחצית ההפרש המקסימלי בין ערך הנגד אותו מדדנו לבין הערך המצופה (הערך הרשום על הנגד) $0.1\,[M\Omega]$ ערך הנגד הנמדד היה$[M\Omega]$ 8.42 בעוד שהערך המצופה היה $8.2\,[M\Omega]$, כלומר שגיאה של 1.25%, ערכי הקבל נמדדו ב $100pF$ כלומר באזור ה 10^{-10}, מדדנו לבסוף ערך של $120pF$ אבל מאחר והמדידה הייתה תלויה בדיוק ויציבות שאיננו בטוחים בעקביותם (ייצוב המולטימטר על פני המגעים) החלטנו לקחת את השגיאה $6\% \sim \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2$, חישוב של מנת האינטגרל נתן ערך זניח (גם ללא הפקטור), אך אנו מאמינים כי יש גורם נוסף שלא התחשבנו בו, מאחר וציפנו כי עיקר השגיאה תגיעה מחישוב הערך G, לכן ניתן ערך של 1%. סך כל השגיאה היא 10.25%.

מקורות

[DMU] 34401A Digital Multimeter, 6 Digit