אלגוריתם למציאת מטריצת SVD. נסמן, $C_0 = A^T A$ וב $\lambda_1 ... \lambda_n$, $v_1 ... v_n$ את הע"ע והו"ע של C_0. וב $m = argmax\{\lambda_i\}$ נראה את נכונות הטענה, כלומר שהסדרה $v_m \underset{k\to\infty}{\rightarrow} b_{k+1} = \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|}$ לכל תנאי התחלה עבורם $b_{0_m} \neq 0$.

הוכחה לפי סעיף קודם נזכיר כי לפי התרגיל הקודם : $C_0 = VD^2V^T$ כאשר V אורטונורמלית מכאן-

$$b_{k+1} = \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|} = \frac{VD^2V^T b_k}{\|VD^2V^T b_k\|} = \frac{VD^2V^T \frac{VD^2V^T b_{k-1}}{\|VD^2V^T b_{k-1}\|}}{\left\| VD^2V^T \frac{VD^2V^T b_{k-1}}{\|VD^2V^T b_{k-1}\|} \right\|}$$

ניעזר בכך ש V אורטונורמלית ולכן $V^T V = \mathbb{I}$. בנוסף $\left\|VD^2V^T b_{k-1}\right\| \in \mathbb{R}$ ולכן ניתן לצמצם את הפקטורים כי $||\alpha u|| = \alpha ||u||$. נקבל כי

$$b_{k+1} = \frac{VD^4V^T b_{k-1}}{\|VD^4V^T b_{k-1}\|}$$

ניפתח באופן איטרטיבי (אינדוקצה).

$$b_{k+1} = \frac{VD^{2k}V^T b_0}{\|VD^{2k}V^T b_0\|}$$

נפעיל כמה טריקים, אם $b_0 \sim \mathcal{D}$ אז גם $V^T b_0 \sim \mathcal{D}$ (כפל של גודל דטרמינסטי במשתנה מקרי משמר התפלגות). בנוסף מאורטונורמליות V משמרת נורמה, נסמן $\tilde{b_0} = V^T b_0$ וב- $b_{k+1}^{(j)}$ את הקורדינטה ה j של b_{k+1}.ונצטמצם ל-

$$b_{k+1} = \frac{VD^{2k}\tilde{b_0}}{\left\|VD^{2k}\tilde{b_0}\right\|} = \frac{VD^{2k}\tilde{b_0}}{\left\|D^{2k}\tilde{b_0}\right\|}$$

$$\Rightarrow b_{k+1}^{(l)} = \sum_j V_{l,j} \frac{\lambda_j^k \tilde{b_0^{(j)}}}{\left(\sum_i^n \left(\lambda_i^k \tilde{b_0^{(i)}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \sum_j V_{l,j} \frac{\left[\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(i)}}}{\tilde{b_0^{(m)}}}}{\left(1 + \sum_{i\neq m}^n \left(\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(i)}}}{\tilde{b_0^{(m)}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

כאשר ונקבל שלכל $j \neq m$ הביטוי - $\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right]^k \rightarrow 0$ ולכן $b_{k+1}^{(l)} = V_{l,m}$ כלומר b_{k+1} שווה לעמודת m ב V וזאת בדיוק v_m. (כי V היא המטריצה המלכסנת את $A^T A$) ■

שלב שני, **הורדת מימד**, נגריל עכשיו וקטור חדש כאשר $\tilde{b_0^{(m)}} = 0$ ונשים לב כי $\lambda_m^k \tilde{b_0^{(m)}} = 0$, מכאן נסמן ב$m'$ את הע"ע השני בגודלו ונקבל בדיוק באות הדרך כי b_{k+1} מתכנס ל $v_{m'}$. נמשיך באופן איטרטיבי ונמצא כך את V.

כמובן ש $C_0 = VD^2V^T \Rightarrow V^T C_0 V = D^2$ ולכן מצאנו גם את D. ולבסוף נישתמש ב $U = D^{-1} V C_0$ כדי למצוא את U.

זמן ריצה:

נחסום את $||b_k, v_m||$:

$$||b_k, v_m|| = || \sum_j V_{m,j} \frac{\left[\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(i)}}}{\tilde{b_0^{(m)}}}}{\left(1 + \sum_{i\neq m}^n \left(\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(i)}}}{\tilde{b_0^{(m)}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - V_{m,j} || \leq$$

$$\leq || \sum_j V_{m,j} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(i)}}}{\tilde{b_0^{(m)}}} - V_{m,j} || \leq$$

$$\overset{*}{\leq} \sqrt{(n-1)\left(V_{m',j}\left[\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(m')}}}{\tilde{b_0^{(m)}}}\right)^2}$$

כאשר m' הוא האינדקס של הע"ע השני הכי גדול. $*$ כמובן שהאי-שיוון נכון אחל ממקום מסויים (צריך לבחור k מספיק גדול כדי לבטיח שהפקטור $V_{m',j}\frac{\tilde{b_0^{(m')}}}{\tilde{b_0^{(m)}}}$ יהי יחסית לא משמעותי ביחס ל $\left[\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}\right]$, אינפי 1). נמשיך :

$$\leq \sqrt{n} V_{m',j} \left[\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}\right]^k \frac{\tilde{b_0^{(m')}}}{\tilde{b_0^{(m)}}} \leq \varepsilon$$

ולכן עבור דיוק של לפחות ε נידרוש :

$$k \geq \log_{\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m}} \left(\frac{b_0^{(\tilde{m})}}{b_0^{(\tilde{m'})} V_{m',j}\sqrt{n}} \varepsilon \right) = \log_{\frac{\lambda_m}{\lambda_{m'}}} \left(\frac{b_0^{(\tilde{m'})} V_{m',j}\sqrt{n}}{b_0^{(\tilde{m})} \varepsilon} \right) \geq$$
$$\log_{\frac{\lambda_m}{\min \lambda}} \left(\frac{b_0^{(\tilde{m'})} V_{m',j}\sqrt{n}}{b_0^{(\tilde{m})} \varepsilon} \right) = \mathcal{O}\left(\ln \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon} \right) \right)$$

ההיפוך בסיסים ב $\log$ היה חיוני מאחר ו- $\frac{\lambda_{m'}}{\lambda_m} \leq 1$ בהצגה זאת אנחנו לא מרוויחים אינפורמציה אינטואטיבית.
נכחיש כרגע את ההשפעות של שגיאת ε על האיטרציות הבאות. חישוב b^{k+1} מ b^k דורש $\mathcal{O}(n)$ עבודה (נשים לב שאת הסכום במכנה אנו מחשבים רק פעם אחת עבור כל הקורדינטות של b^{k+1}) , ולכן נבקבל שאת V ניתן לחשב ב $\mathcal{O}\left(n^2 \ln \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon} \right) \right)$.
את U ניתן לחשב באותו אופן, נפעיל את אותה וריאציה על $C_0^T = AA^T$. D מורכבת מ העע"מ של A, נעבור עמודה עמודה ב $V \in v_m$ וניפתור את המשווה $Av_m = \lambda v_m$, כאשר מספיק לנו לפתור רק עבור הקורדינטנה הראשונה שאינה שווה ל -0 כלומר $\lambda_m = \frac{\sum A_0^i v_m^i}{v_m^0}$ כלומר חישוב λ_m דורש $\mathcal{O}(n)$ וחישוב D דורש $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ ולכן סך הכל נישאר עם זמן ריצה אסימפטוטי של $\mathcal{O}\left(n^2 \ln \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon} \right) \right)$.