Processamento Digital de Sinais 4458K-04 – Formulário

1. Fórmula de Euler

$$e^{j\Omega} = \cos(\Omega) + j\mathrm{sen}(\Omega) \qquad \cos(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} \qquad \mathrm{sen}(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{2j}$$

2. Soma de termos de uma PG

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1} \qquad r \neq 1$$

3. Transformada Z

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz \;\; , \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \;\; , \qquad z = re^{j\Omega}$$

4. DTFS

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} D_k e^{jk\Omega_0 n} \, , \qquad D_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}, \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

5. Propriedades da DTFS

- $ax_1[n] + bx_2[n] \;\leftrightarrow\; aD_{1k} + bD_{2k}$ para $x_1[n]$ e $x_2[n]$ com igual N_0 - Linearidade
- $x[n] \;\leftrightarrow\; D_k = D_{k+N_0}$ - Periodicidade em frequência
- $D_n \;\leftrightarrow\; \frac{1}{N_0} x[-k]$ - Dualidade
- $x[n-m] \;\leftrightarrow\; D_k e^{-jk\Omega_0 m}$ para m inteiro - Deslocamento no tempo
- $x[n]e^{jl\Omega_0 n} \;\leftrightarrow\; D_{k-l}$ para l inteiro - Deslocamento em frequência
- $x[-n] \;\leftrightarrow\; D_{-k}$ - Reversão (ou reflexão)
- $\sum_{m=\langle N_0 \rangle} x_1[m] x_2[n-m] \;\leftrightarrow\; N_0 D_{1k} D_{2k}$ - Convolução periódica no tempo
- $x_1[n]x_2[n] \;\leftrightarrow\; \sum_{l=\langle N_0 \rangle} D_{1l} D_{2(k-l)}$ - Convolução periódica (ou circular) em freq.
- $P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |D_k|^2$ - Teorema de Parseval

6. DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} \, d\Omega \;\; , \qquad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

7. Pares de DTFTs

- $\delta[n] \;\leftrightarrow\; 1$
- $\delta[n-m] \;\leftrightarrow\; e^{-jm\Omega}$ para m inteiro

- $u[n]-u[n-m] \;\leftrightarrow\; \frac{sen\left(\frac{\Omega m}{2}\right)}{sen\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j\Omega(m-1)/2}$
- $\gamma^n u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma} \qquad |\gamma|<1$
- $\gamma^n \cos(\Omega_0 n+\theta)u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{e^{j\Omega}[e^{j\Omega}\cos\theta-\gamma\cos(\Omega_0-\theta)]}{e^{j2\Omega}-(2\gamma\cos\Omega_0)e^{j\Omega}+\gamma^2} \qquad |\gamma|<1$
- $\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}\cos\Omega_0}{e^{j2\Omega}-2\cos\Omega_0 e^{j\Omega}+1}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)+\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)]$
- $\mathrm{sen}(\Omega_0 n)\,u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{e^{j\Omega}\mathrm{sen}\Omega_0}{e^{j2\Omega}-2\cos\Omega_0 e^{j\Omega}+1}+\frac{\pi}{j2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)-\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)]$

8. Propriedades da DTFT

- $ax_1[n]+bx_2[n] \;\leftrightarrow\; aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$ - Linearidade
- $nx[n] \;\leftrightarrow\; j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ - Diferenciação em frequência
- $x[-n] \leftrightarrow\; X(-\Omega)$ - Reversão (ou reflexão)
- $x[n-m] \;\leftrightarrow\; X(\Omega)e^{-j\Omega m}$ para m inteiro - Deslocamento no tempo
- $x[n]e^{j\Omega_c n} \;\leftrightarrow\; X(\Omega-\Omega_c)$ - Deslocamento em frequência
- $x_1[n]*x_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[m]x_2[n-m] \leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$ - Convolução linear no tempo
- $x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\Omega)\,X_2(\Omega-\omega)d\omega$ - Conv. periódica (ou circular) em freq.
- $E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$ - Teorema de Parseval

9. DFT

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N_0}\sum_{k=\langle N_0\rangle}X_k e^{jk\Omega_0 n}, \qquad X_k=\sum_{n=\langle N_0\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\Omega_0 n}, \qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$$

10. Propriedades da DFT

- $ax_1[n]+bx_2[n] \;\leftrightarrow\; aX_{1k}+bX_{2k}$ - Linearidade
- $x[n-m] \;\leftrightarrow\; X_k e^{-jk\Omega_0 m}$ para m inteiro - Deslocamento no tempo
- $x[n]e^{jl\Omega_0 n} \;\leftrightarrow\; X_{k-l}$ para l inteiro - Deslocamento em frequência
- $\sum_{m=\langle N_0\rangle}x_1[m]x_2[n-m] \leftrightarrow\; X_{1k}X_{2k}$ - Convolução periódica (ou circular) no tempo
- $x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N_0}\sum_{l=\langle N_0\rangle}X_{1l}X_{2(k-l)}$ - Conv. periódica (ou circular) em frequência
- $E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{N_0}\sum_{k=\langle N_0\rangle}|X_k|^2$ - Teorema de Parseval

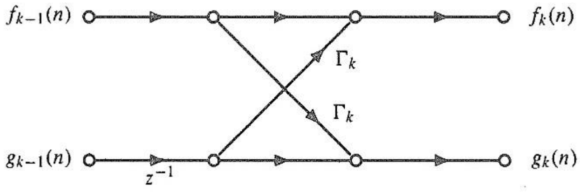
11. Sistemas FIR

- $H(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k} \;\leftrightarrow\; y[n]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$ e $h[n]=\sum_{k=0}^{M}b_k\delta[n-k]$
- Implementação usual → **<u>Forma Direta</u>**
- Estruturas transpostas → inversão dos sentidos de todos os ramos

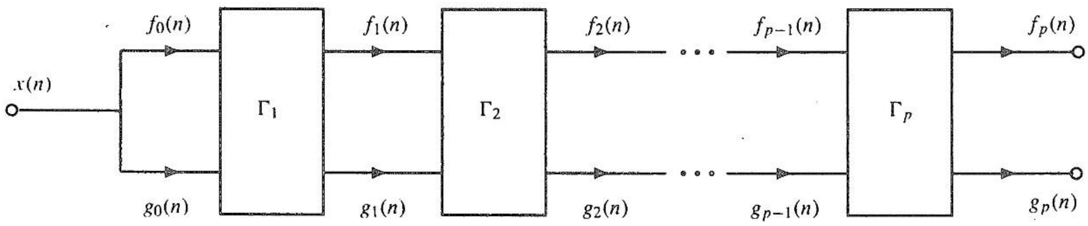
- Cascata FIR $\rightarrow \begin{cases} H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = A\prod_{k=1}^{M}(1-\beta_k\, z^{-1}) \;\; ,\beta_k \text{ zeros de } H(z) \\ \text{c/zeros conjugados } \rightarrow H_k(z) = [1-(\beta_k+\beta_k^*)z^{-1} + \beta_k\beta_k^* z^{-2}] \end{cases}$

- Estrutura com amostragem de frequência $\rightarrow\; H(z) = \frac{(1-z^{-N})}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_k}{1-e^{j2\pi k/N}z^{-1}}$
  $H_k \;\longrightarrow\;$ coeficientes da DFT de N pontos de $h[n]$

- Treliça FIR $\rightarrow \begin{cases} \text{r. ascendente: } A_k(z) = A_{k-1}(z) + \Gamma_k z^{-k} A_{k-1}(z^{-1}) \;,\; A_0(z) = 1 \\ \text{r. descendente:} \begin{cases} A_{k-1}(z) = \frac{1}{1-\Gamma_k^2}[\,A_k(z) - \Gamma_k z^{-k} A_k(z^{-1})] \\ \text{com } A_k(z) = \sum_{l=0}^{k} a_l z^{-l} \;\rightarrow\; \Gamma_k = a_k \end{cases} \end{cases}$



(a)



- Sist. de fase linear de ordem M $\rightarrow h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k\delta[n-k] \;\rightarrow \angle\, H(e^{-j\Omega}) = -\frac{M}{2}\Omega$

$$\begin{cases} \text{Tipo I: } M \text{ par e } h[n] = h[M-n] \rightarrow \text{sem restrições na resposta em frequência} \\ \text{Tipo II: } M \text{ ímpar e } h[n] = h[M-n] \rightarrow H(e^{j\pi}) = 0 \\ \text{Tipo III: } M \text{ par e } h[n] = -h[M-n] \rightarrow H(e^{j0}) = 0 \text{ e } H(e^{j\pi}) = 0 \\ \text{Tipo IV: } M \text{ ímpar e } h[n] = -h[M-n] \rightarrow H(e^{j0}) = 0 \end{cases}$$

12. Sistemas IIR

- $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \;\leftrightarrow\; y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$

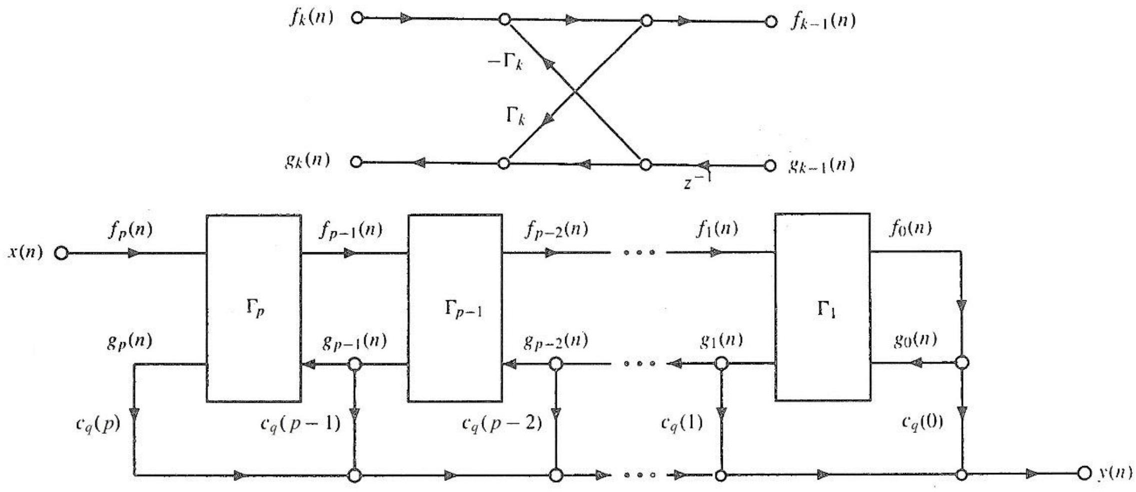
- Implementação usual → **<u>Forma Direta I</u>** ou **<u>Forma Direta II</u>**

- Estruturas transpostas → inversão dos sentidos de todos os ramos

- Cascata IIR $\rightarrow \begin{cases} H(z) = A\prod_k H_k(z)\,,\; H_k(z) = \frac{1-\beta_k z^{-1}}{1-\alpha_k z^{-1}} \;\rightarrow \begin{cases} \beta_k \text{ zeros de } H(z) \\ \alpha_k \text{ pólos de } H(z) \end{cases} \\ \text{c/raízes conjugadas } \rightarrow H_k(z) = \frac{1-(\beta_k+\beta_k^*)z^{-1}+\beta_k\beta_k^* z^{-2}}{1-(\alpha_k+\alpha_k^*)z^{-1}+\alpha_k\alpha_k^* z^{-2}} \end{cases}$

- Estrutura paralela $\rightarrow \begin{cases} \text{decomposição de } H(z) \text{ em frações parciais} \\ H(z) = \sum_k \frac{A_k}{1-\alpha_k z^{-1}} \;\rightarrow\; \alpha_k \text{ pólos de } H(z) \\ \text{c/pólos conjugadas } \rightarrow H(z) = \sum_k \frac{B_{0k}+B_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}} \end{cases}$

- Treliça IIR→ $$\begin{cases} H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{q} b_q(k) z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k}} = B_q(z)\dfrac{1}{A_p(z)}\ ,\ q \le p \\ \text{mesmas recursões ascendente e descendente da treliça FIR} \\ \text{com } b_q(k) = \sum_{j=k}^{q} c_q(j)\, a_j(j-k)\ ,k = 0, 1, \dots, p \\ \text{ou} \\ \begin{cases} c_q(q) = b_q(q) \\ c_q(k) = b_q(k) - \sum_{j=k+1}^{q} c_q(j)\, a_j(j-k)\ ,k = q-1, q-2, \dots, 0 \end{cases} \end{cases}$$



- Filtros passa-tudo → $$\begin{cases} \text{equalizador de fase com } |H(z)| = 1 \\ H(z) = \prod_k \dfrac{z^{-1} - \alpha_k^*}{1 - \alpha_k z^{-1}}\ \to\ \alpha_k\ \text{ pólos de } H(z) \\ \text{c/pólos conjugadas } \to H(z) = \prod_k \dfrac{a_{2k} - a_{1k} z^{-1} + z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \end{cases}$$

13. Filtros digitais

- Dados $$\begin{cases} \text{frequências de corte } \Omega_c\text{: } \Omega_{cLP} \text{ (LP), } \Omega_{cHP} \text{(HP) e } [\,\Omega_1, \Omega_2] \text{ (BP e BR)} \\ \text{limite banda de passagem: } \Omega_p,\ \text{ limite banda de rejeição: } \Omega_s\ \to \Omega_c = \dfrac{\Omega_p + \Omega_s}{2} \\ \textit{ripple} \text{ banda de passagem: } \delta_p,\ \textit{ripple} \text{ banda de rejeição: } \delta_s \\ \text{máxima atenuação na banda de passagem (dB): } \alpha_p = -20\log(1-\delta_p) \\ \text{mínima atenuação na banda de rejeição (dB): } \alpha_s = -20\log(\delta_s) \end{cases}$$

- $h_d[n]$ ideais $$\begin{cases} \text{passa} - \text{baixas: } h_{LP}[n] = \dfrac{sen(\Omega_{cLP} n)}{n\pi},\ -\infty < n < \infty \\ \text{passa} - \text{altas: } h_{HP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n],\ \ \Omega_{cLP} = \pi - \Omega_{cHP} \\ \text{passa} - \text{banda: } h_{BP}[n] = 2\cos(\Omega_0 n) h_{LP}[n],\ \ \Omega_0 = \dfrac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\ \ \Omega_{cLP} = \dfrac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \\ \text{rejeita} - \text{banda: } h_{BR}[n] = \delta[n] - h_{BP}[n],\ \ \Omega_0 = \dfrac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\ \ \Omega_{cLP} = \dfrac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \end{cases}$$

- Filtros FIR causais $$\begin{cases} h[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k \delta[n-k] \qquad y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] \\ \Omega = \dfrac{2\pi f}{f_a} \\ H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \qquad H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\Omega} \end{cases}$$

- Método das janelas $\begin{cases} h[n] = h_d[n - N/2]w[n], \ \ N \text{ par} \\ \text{com } h_d[n] \rightarrow \text{filtro ideal}, \ \ w[n] \rightarrow \text{função janela} \end{cases}$

- Janelas $\begin{cases} \text{Retangular} \rightarrow w[n] = 1 \,, 0 \leq n \leq N \\ \Delta\Omega = \frac{4\pi}{N} \quad \alpha_s = 21 \text{ dB} \quad \alpha_p = 0{,}8 \text{ dB} \\ \text{Von Hann (Hanning)} \rightarrow w[n] = 0{,}5 - 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), 0 \leq n \leq N \\ \Delta\Omega = \frac{8\pi}{N} \quad \alpha_s = 44 \text{ dB} \quad \alpha_p = 0{,}05 \text{ dB} \\ \text{Hamming} \rightarrow w[n] = 0{,}54 - 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), 0 \leq n \leq N \\ \Delta\Omega = \frac{8\pi}{N} \quad \alpha_s = 53 \text{ dB} \quad \alpha_p = 0{,}02 \text{ dB} \\ \text{Blackman} \rightarrow w[n] = 0{,}42 - 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0{,}08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right), 0 \leq n \leq N \\ \Delta\Omega = \frac{12\pi}{N} \quad \alpha_s = 74 \text{ dB} \quad \alpha_p = 0{,}002 \text{ dB} \end{cases}$

- Filtros IIR $\begin{cases} y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \\ \Omega = \frac{2\pi f}{f_a} \\ H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \quad H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \end{cases}$

- Transformação Bilinear $\begin{cases} H_a(s) \rightarrow H(z): \ \ s = 2f_a \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ \text{pré} - \text{distorção}: \ \ f_c' = \frac{f_a}{\pi} \tan\left(\frac{\pi f}{f_a}\right) \end{cases}$

14. Filtros analógicos

- Butterworth $\begin{cases} \text{ordem}: \ N = \lceil \log(d) / \log(k) \rceil \quad d = \sqrt{\frac{(1-\delta_p)^{-2}-1}{\delta_s{}^{-2}-1}} \quad k = \frac{\omega_p}{\omega_s} \\ \text{freq. de corte}: \ \omega_p \left[\left(1-\delta_p\right)^{-2} - 1\right]^{-\frac{1}{2N}} \leq \omega_0 \leq \omega_s\left(\delta_s{}^{-2} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} \\ \text{pólos de } H_a(s): \ s_k = \omega_0 e^{j\frac{N+1+2k}{2N}\pi}, \ \ k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-s_k}{s-s_k} \\ \\ \text{Tabela com } D(s) \text{ para } \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow \ H_a(s) = \frac{1}{D(s)} \\ D(s) = s^N + a_{N-1}s^{N-1} + a_{N-2}s^{N-2} + \cdots + a_1 s + a_0 \end{cases}$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	1									
2	1	1.414								
3	1	2.000	2.000							
4	1	2.613	3.414	2.613						
5	1	3.236	5.236	5.236	3.236					
6	1	3.864	7.464	9.142	7.464	3.864				
7	1	4.494	10.098	14.592	14.592	10.098	4.494			
8	1	5.126	13.137	21.846	25.688	21.846	13.137	5.126		
9	1	5.759	16.582	31.163	41.986	41.986	31.163	16.582	5.759	
10	1	6.392	20.432	42.802	64.882	74.233	64.882	42.802	20.432	6.392

- Transformações
$$\begin{cases} H(s) \text{ original: passa} - \text{baixas com frequência de corte } \omega_0 \\ \text{Para obter passa} - \text{baixas com } \omega_0{}' \text{:} \quad s \rightarrow \dfrac{\omega_0}{\omega_0{}'} s \\ \text{Para obter passa} - \text{altas com } \omega_0{}' \text{:} \quad s \rightarrow \dfrac{\omega_0 \omega_0{}'}{s} \\ \text{Para obter passa} - \text{banda com } \omega_i \ e \ \omega_s : \quad s \rightarrow \omega_0 \dfrac{s^2 + \omega_s \, \omega_i}{s(\omega_s - \omega_i)} \\ \text{Para obter rejeita} - \text{banda com } \omega_i \ e \ \omega_s : \quad s \rightarrow \omega_0 \dfrac{s(\omega_s - \omega_i)}{s^2 + \omega_s \, \omega_i} \end{cases}$$

- Gabaritos LP
$$\begin{cases} \text{HP } (\omega_s < \omega_p) \rightarrow \text{LP } (\omega_p{}' = 1) \text{:} \ \omega_s{}' = \omega_p / \omega_s \\ \text{BP } (\omega_{is} < \omega_i < \omega_s < \omega_{ss}) \rightarrow \text{LP } (\omega_p{}' = 1) \text{:} \ \omega_s{}' = \dfrac{\omega_{ss} - \omega_{is}}{\omega_s - \omega_i} \\ \text{BR } (\omega_i < \omega_{is} < \omega_{ss} < \omega_s) \rightarrow \text{LP } (\omega_p{}' = 1) \text{:} \ \omega_s{}' = \dfrac{\omega_s - \omega_i}{\omega_{ss} - \omega_{is}} \\ \text{Condição de simetria para BP e BR} \rightarrow \omega_s \, \omega_i = \omega_{ss} \, \omega_{is} \end{cases}$$