

# Processamento e Análise de Imagens

## Morfologia Matemática

Felipe Augusto Lima Reis



**PUC Minas**

# Introdução

# Introdução

- Morfologia, em biologia, é ramo que estuda a forma e estrutura de animais e plantas;
- **Morfologia matemática** é uma ferramenta para extração de componentes usados para representação e descrição de regiões
  - Podem ser descritas formas, bordas, esqueletos, entre outros;
  - Podem ser aplicadas a imagens binárias ou em escala de cinza – por simplicidade, estudaremos primeiro imagens binárias, para, em seguida, avaliar as operações em escala de cinza.

# Introdução

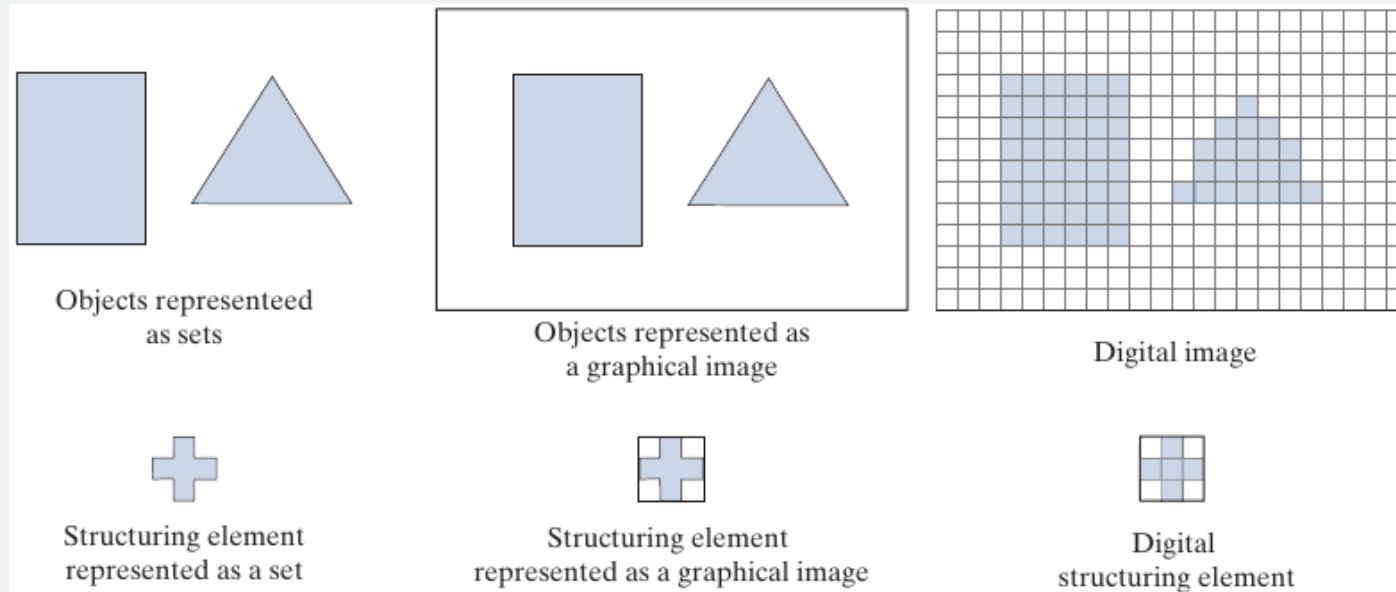
- A morfologia matemática é baseada na teoria de conjuntos
  - Operações morfológicas também são definidas em termos de conjuntos;
  - A morfologia é baseada em dois tipos no conjunto de pixels: **elementos estruturantes** (SE - *structuring elements*) e **objetos** (*objects*)
    - Elementos estruturantes correspondem a “sondas”, utilizadas para identificar propriedades específicas nas imagens;
    - Os elementos estruturantes são movidos sobre uma imagem (de modo semelhante às operações de correlação e convolução).

# Introdução

- **Elementos estruturantes** correspondem a “sondas”, utilizadas para identificar propriedades específicas nas imagens
  - Podem ser associados aos kernels, em convoluções;
- Os elementos estruturantes são movidos sobre uma imagem pixel a pixel, de forma semelhante ao utilizado nas convoluções;
- Para manutenção do tamanho da imagem original, podem ser utilizadas operações de padding.

# Introdução

- Elementos estruturantes podem ter quaisquer formas, porém devem ser contidos em arrays retangulares.



# Introdução

- Elementos estruturantes possuem um elemento principal, indicado por um ponto
  - Normalmente, esse elemento principal é definido no centro do elemento estruturante (SE) – em alguns casos, pode ser indicado em posições diferentes;
  - Caso não seja indicado o ponto principal do elemento estruturante, entende-se que o ponto central do SE corresponde ao elemento principal;
- O ponto principal será utilizado para definir a posição em que um pixel da imagem resultante será preenchido, caso o elemento estruturante atenda aos requisitos da operação morfológica.

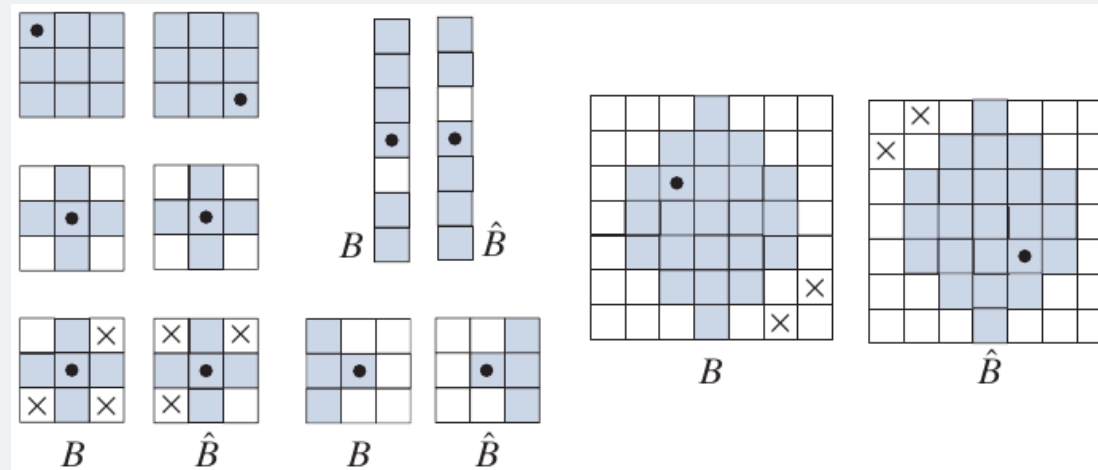
# Introdução

- Ao deslizar um kernel sobre a imagem, é possível obter as seguintes situações:
  - **Fit** → Quando todos os pontos do elemento estruturante correspondem a um objeto (região) da imagem;
  - **Hit** → Quando ao menos 1 ponto do elemento estruturante corresponde a um objeto (região) da imagem;
  - **Miss** → Quando nenhum ponto do elemento estruturante é correspondente a uma região da imagem.



# Introdução

- Elementos estruturantes estão sujeitos a transformações afins, como reflexão, rotação e translação;
- Alguns elementos estruturantes podem conter elementos “*dont-care*”, denotados por  $\times$ , cujo valor do elemento específico não importa.



# Operações Morfológicas em Imagens Binárias

Erosão e Dilatação

# Erosão e Dilatação

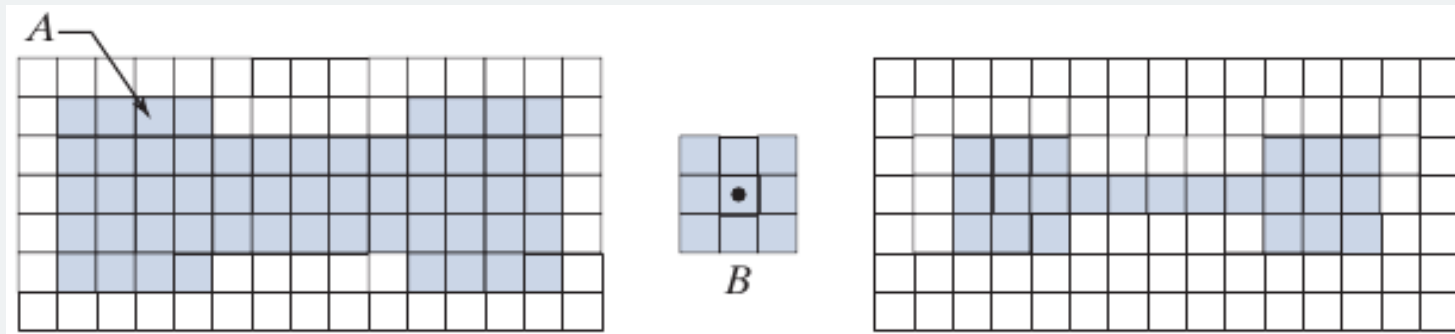
- As operações de **Erosão** e **Dilatação** são consideradas operações primitivas na área de morfologia matemática
  - Outras operações mais avançadas podem ser construídas com base nelas;
- Operações morfológicas são escritas em termos de elementos estruturantes B e um conjunto A, de pixels de “**frente**” (**foreground**)
  - Podem ser também descritas em termos elementos estruturantes B e uma imagem I que contém A.

# Erosão

- A **Erosão** de um conjunto de pixels de foreground A por um elemento estruturante B, onde z são os valores de foreground, é definida como:

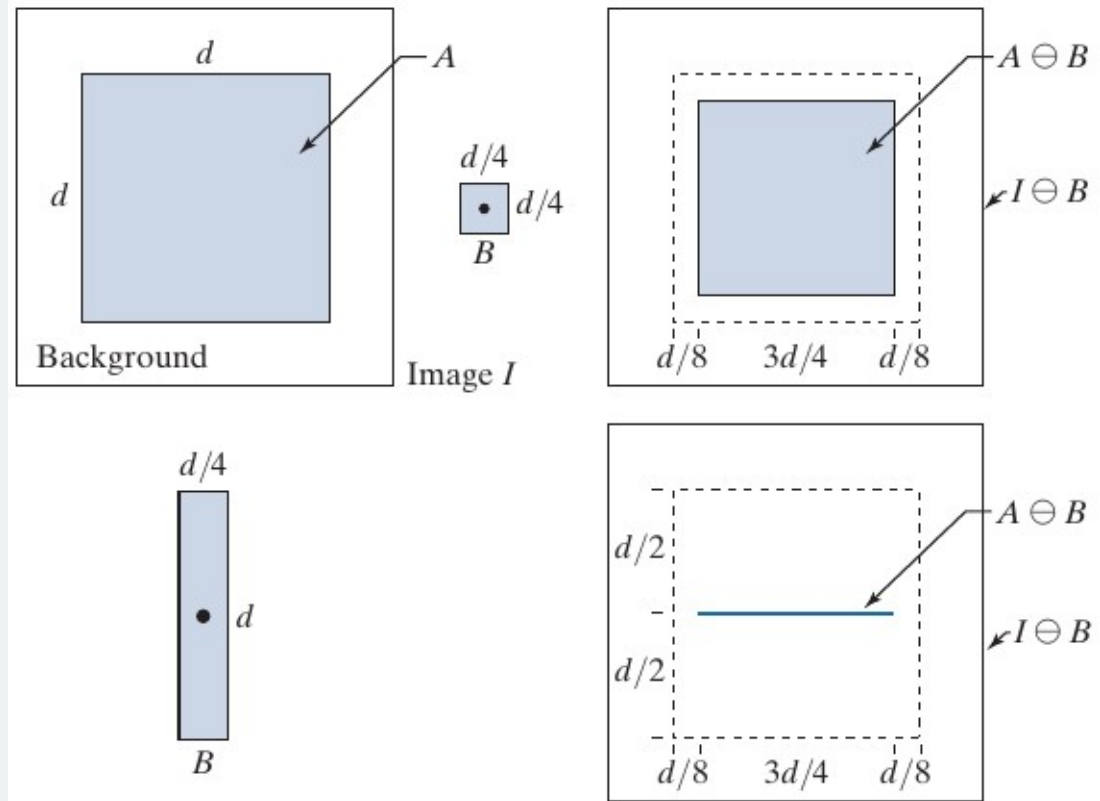
$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$$

- A equação indica que a erosão é o conjunto de todos os pontos z de forma que B, transladado por z, está contido em A.



# Erosão

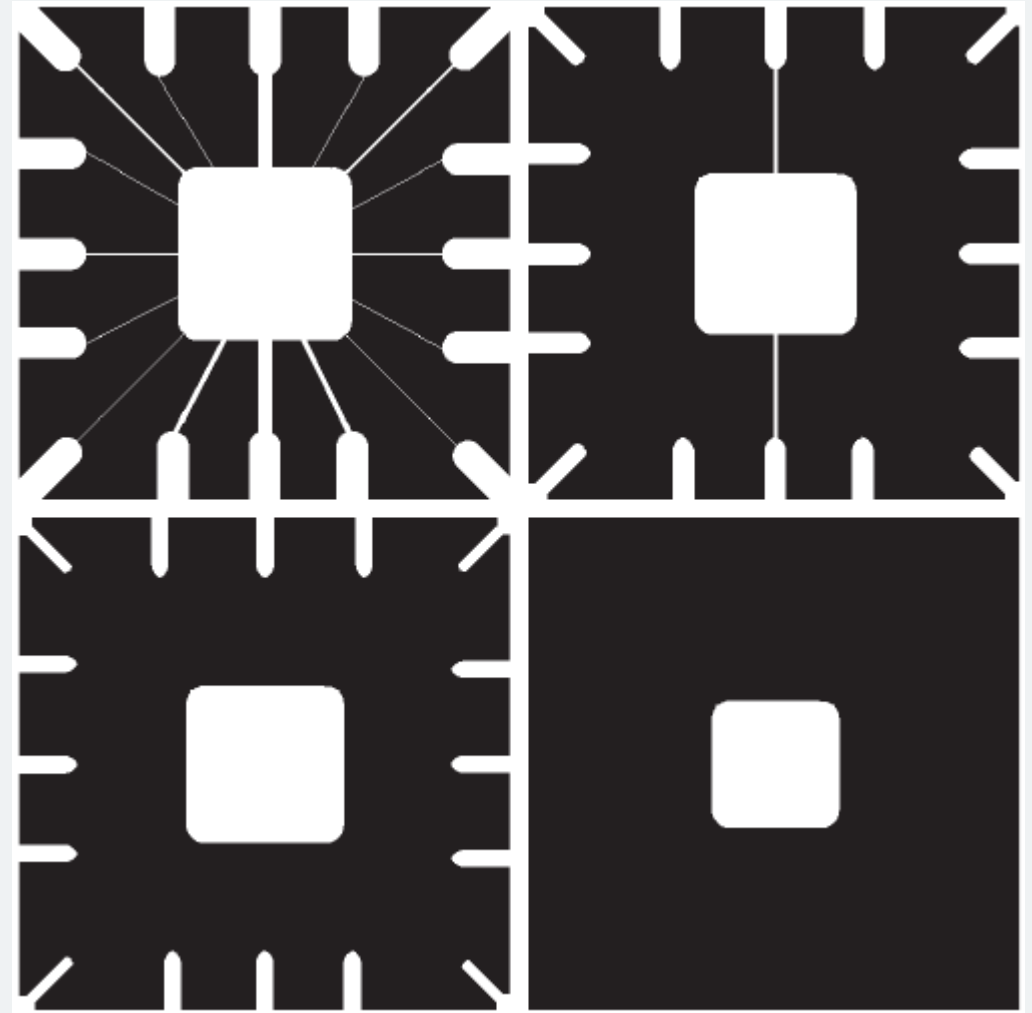
- A imagem ao lado contém dois exemplos de erosões, usando um elemento estruturante quadrado e outro retangular;
- As áreas em azul correspondem ao *foreground* (frente);
- As áreas tracejadas correspondem ao tamanho original da imagem – observe que a erosão reduz o tamanho original do *foreground*.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

# Erosão

- A erosão pode ser utilizada para remover componentes das imagens, como no exemplo ao lado
- A imagem foi erodida com elementos estruturais de  $11 \times 11$ ,  $15 \times 15$  e  $45 \times 45$  (em sentido horário).



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

# Dilatação

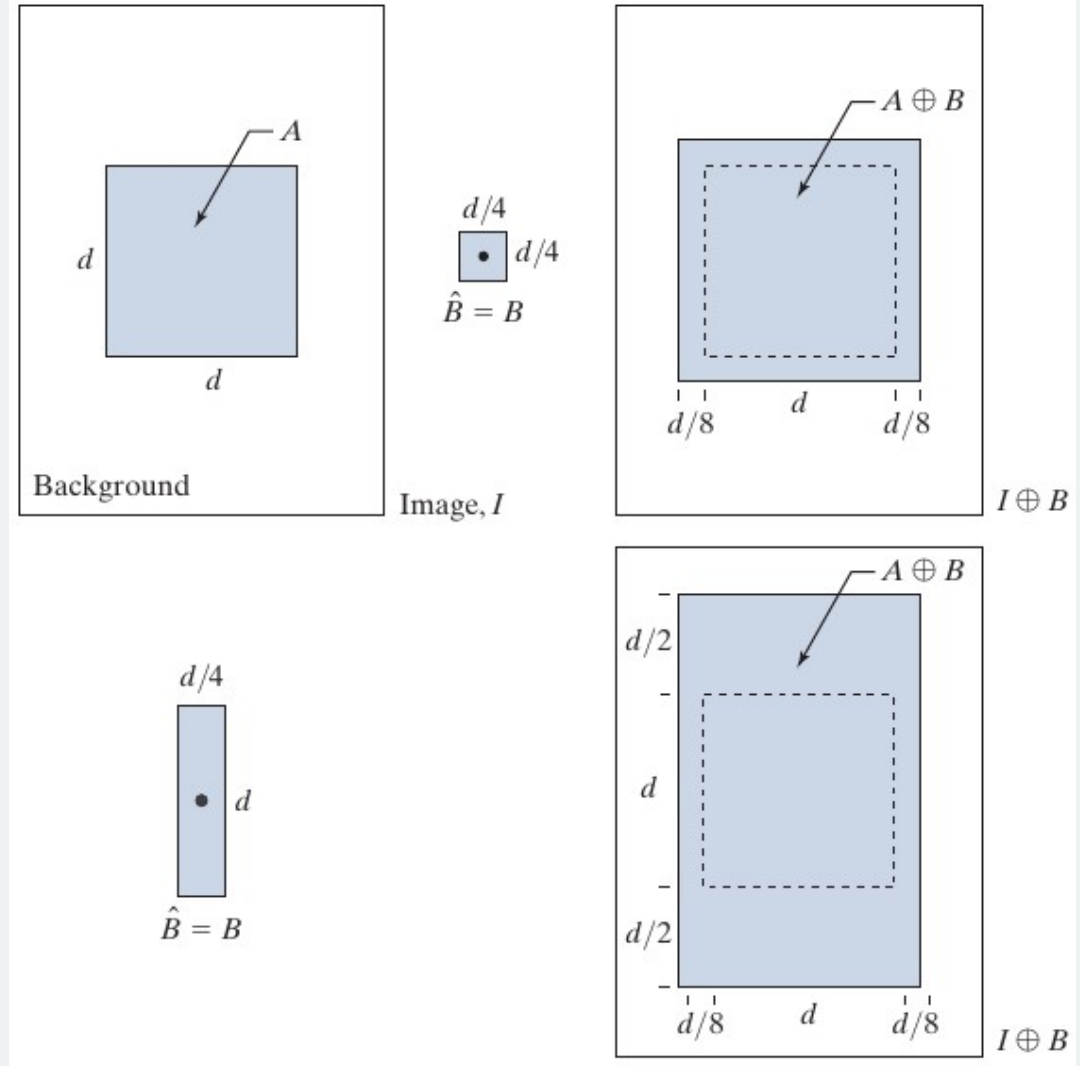
- A **Dilatação** de um conjunto de pixels de foreground A por um elemento estruturante B, onde z são os valores de foreground, é definida como:

$$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

- A dilatação de A por B é, então, o conjunto de todos os deslocamentos, z, de forma que  $\hat{B}$  e A se sobreponham pelo menos por um elemento.

# Dilatação

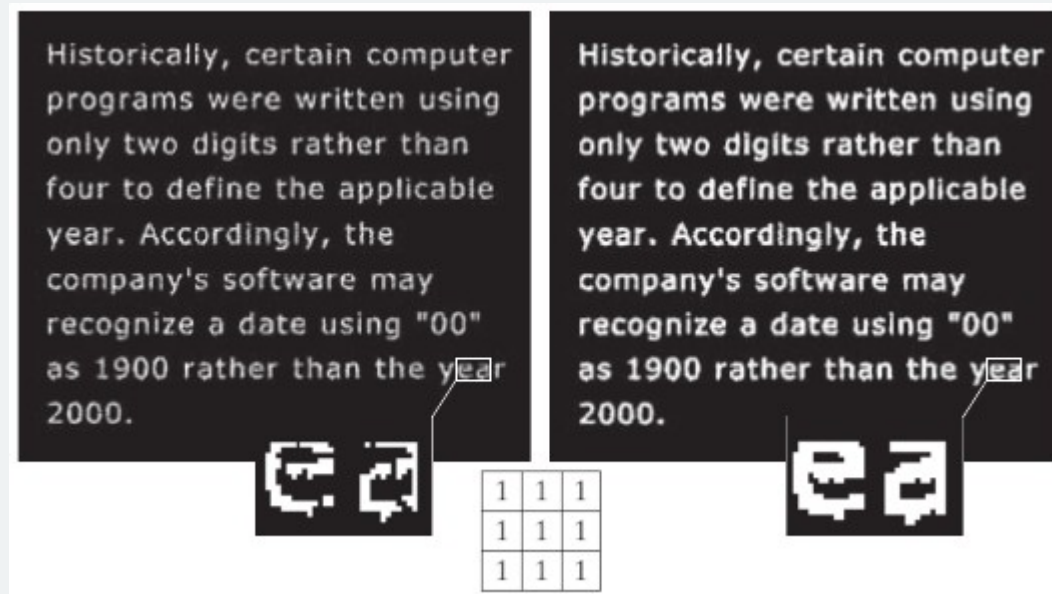
- A imagem ao lado contém dois exemplos de dilatações, usando um elemento estruturante quadrado e outro retangular;
- As áreas em azul correspondem ao foreground;
- As áreas tracejadas correspondem ao tamanho original da imagem.





# Dilatação

- A dilatação pode ser usada para unir segmentos quebrados em imagens
- No exemplo abaixo, a dilatação foi usada para deixar um texto mais “forte”.



# Erosão e Dilatação

- Erosão e dilatação são duais em relação ao complemento e reflexão

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

- Podemos obter a erosão de uma imagem A por B fazendo a dilatação do background (dilatando  $A^c$ ) com o mesmo elemento estruturante e complementando o resultado.

# Operações Morfológicas em Imagens Binárias

Abertura e Fechamento

# Abertura e Fechamento

- **Abertura** e **Fechamento** são duas operações morfológicas baseadas nas operações de erosão e dilatação.
  - A abertura suaviza o contorno de objetos, rompe istmos (pequena ligação fina entre objetos) e elimina saliências finas;
  - O fechamento tende a suavizar contornos como na abertura, porém funde as descontinuidades estreitas, eliminando pequenos buracos e preenchendo as lacunas em um contorno.

# Abertura

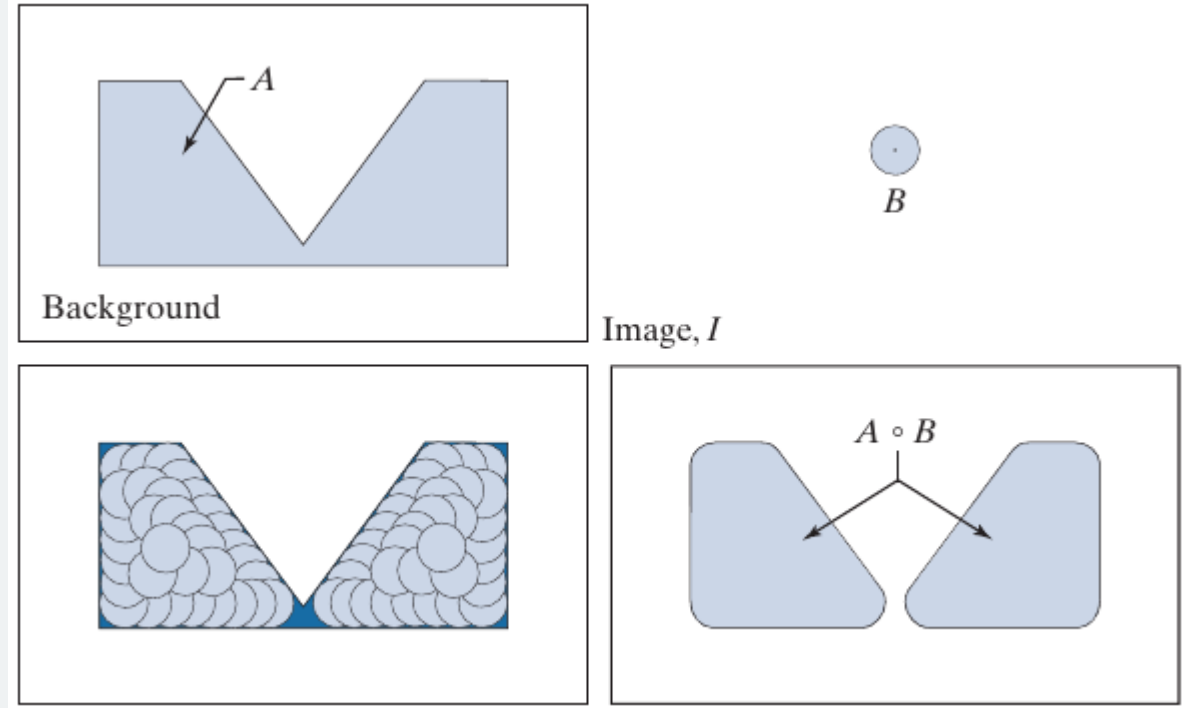
- A **Abertura** de um conjunto de pixels de foreground A por um elemento estruturante B, é definida como:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- A abertura de A por B é sempre uma erosão de A por B, seguida de uma dilatação do resultado obtido por B.

# Abertura

- A imagem ao lado contém um exemplo da operação de abertura, usando um elemento estruturante circular;
- Podemos observar após o processamento da imagem:
  - Surgimento de um buraco entre as regiões;
  - Suavização dos contornos.



# Fechamento

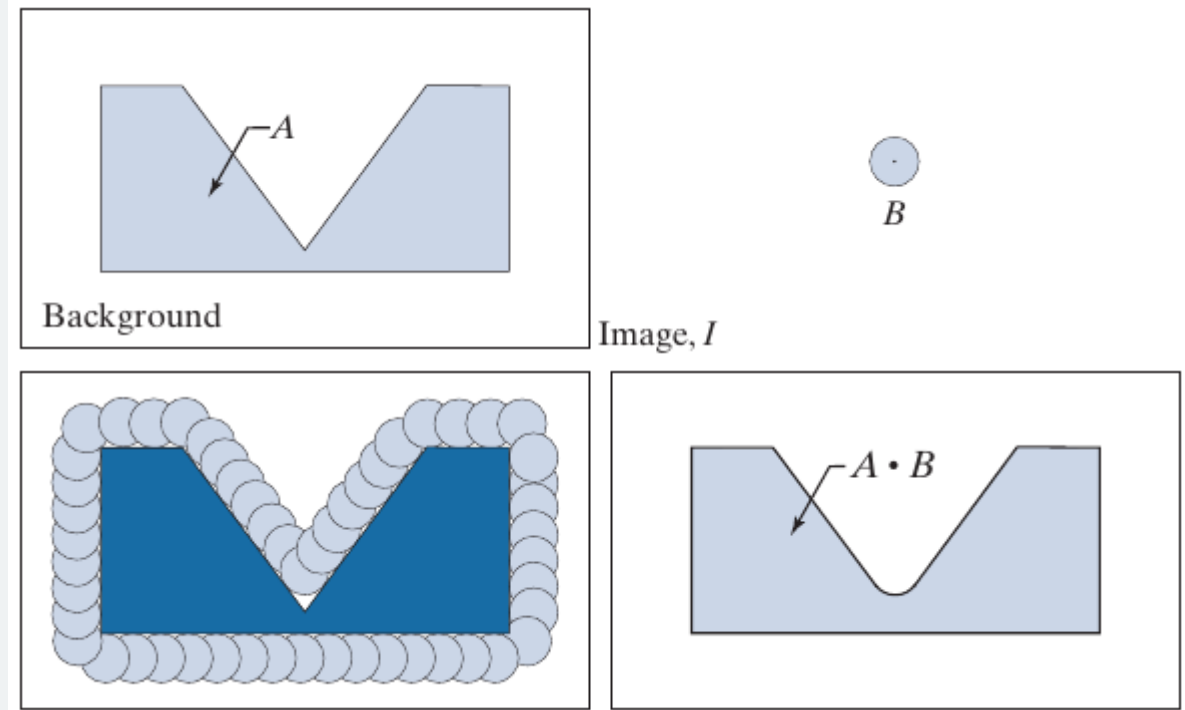
- O **Fechamento** de um conjunto de pixels de foreground A por um elemento estruturante B, é definida como:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- O fechamento de A por B é sempre uma dilatação de A por B, seguida de uma erosão do resultado obtido por B.

# Fechamento

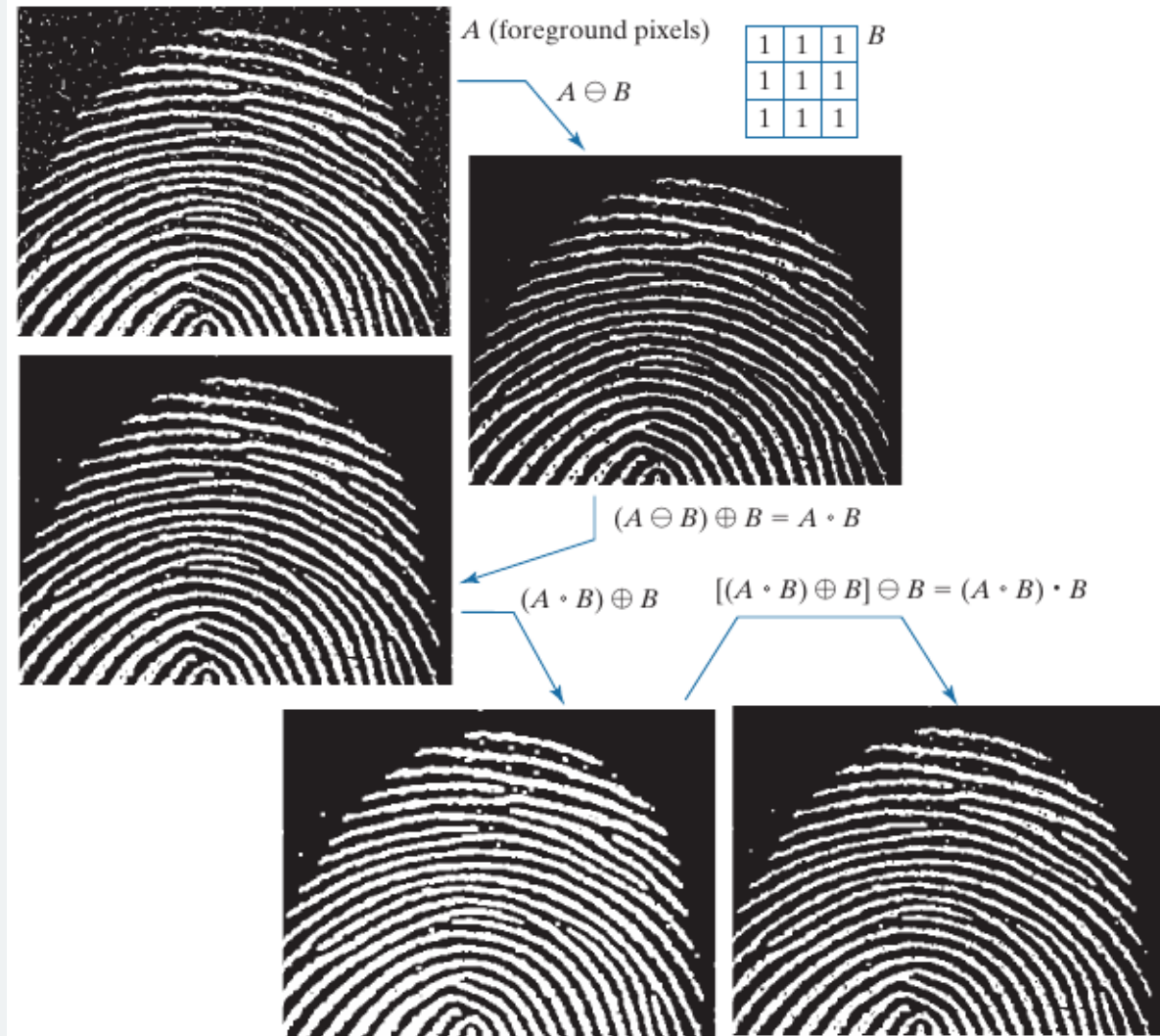
- A imagem ao lado contém um exemplo da operação de fechamento, usando um elemento estruturante circular;
- Podemos observar após o processamento da imagem:
  - Suavização dos contornos;
  - Aumento da área mais fina da imagem.





# Abertura e Fechamento

- As operações de erosão, dilatação, abertura e fechamento podem ser vistas na imagem ao lado, para remoção de ruídos na imagem
- As operações foram combinadas de forma a produzir uma imagem resultante com menor quantidade de ruídos.



# Operações Morfológicas em Imagens Binárias

Transformada Hit-or-Miss

# Transformada Hit-or-Miss

- A **Transformada Hit-or-Miss** é útil para encontrar padrões em imagens binárias;
- A transformada encontra pixels cuja vizinhança corresponde à forma de um primeiro elemento estruturante  $B_1$  e não corresponda à forma de um segundo elemento estruturante  $B_2$  ao mesmo tempo.
- A operação aplicada a uma imagem  $A$  pode ser definida como:

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

# Transformada Hit-or-Miss

- A transformada Hit-or-Miss é realizada de acordo com o seguinte procedimento:
  1. Erodir a imagem  $A$  com o elemento estruturante  $B_1$ ;
  2. Erodir o complemento da imagem,  $A^c$ , com o elemento estruturante  $B_2$ ;
  3. Aplicar a operação de AND nos resultados dos passos 1 e 2.

# Transformada Hit-or-Miss

- Um exemplo de kernels de Hit ( $B_1$ ), Miss ( $B_2$ ) e o kernel combinado ( $B$ ) podem ser vistos na imagem abaixo:
- No exemplo, deseja-se encontrar um pixel de fundo cujos valores nas posições de 4-conexo (norte, sul, leste, oeste) sejam todos de frente.

0	1	0
1	0	1
0	1	0

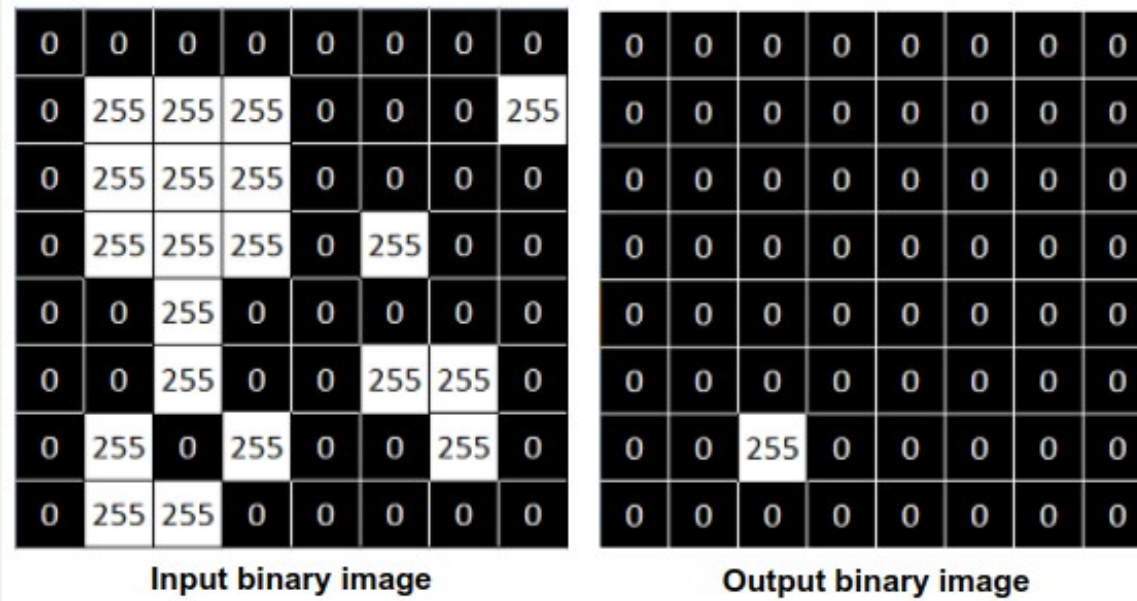
0	0	0
0	1	0
0	0	0

0	1	0
1	-1	1
0	1	0

Fonte: OpenCV (2023).

## Transformada Hit-or-Miss

- A imagem abaixo contém uma figura binária e o resultado da transformada Hit-or-Miss utilizando o elemento estruturante anteriormente especificado.



# Algoritmos Morfológicos em Imagens Binárias

# Algoritmos Morfológicos

- Uma das principais aplicações da morfologia matemática é extrair componentes da imagem para auxiliar na representação e na descrição de formas;
- Operações morfológicas são usadas em diversas tarefas de processamento de imagens
  - Também podem ser utilizadas em tarefas de pré e pós processamento, auxiliando nos algoritmos principais e/ou refinando resultados.



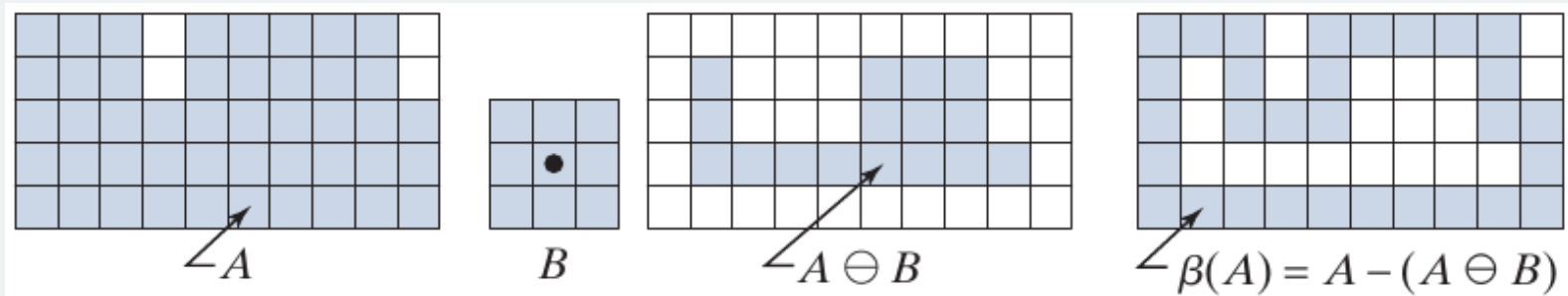
# Algoritmos Morfológicos

- Algoritmos morfológicos são utilizados para as seguintes tarefas:
  - Extração de fronteiras;
  - Geração de esqueleto de regiões;
  - Preenchimento de buracos em imagens;
  - Afinamento e espessamento;
  - Poda.

# Extração de Bordas

- A borda de uma imagem binária  $\beta$  pode ser obtida pelo seguinte procedimento:
  - Erosão de pixels de foreground A por um elemento estruturante B;
  - Execução de diferença de conjuntos entre A e o valor erodido.

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



# Extração de Bordas

- A imagem abaixo contém um exemplo de extração de borda de imagens binárias usando morfologia matemática.



# Preenchimento de Buracos

- Um buraco pode ser definido como uma região de fundo rodeada por um contorno de pixels de frente conectados (Gonzalez e Woods, 2018).
- O algoritmo para preenchimento de buracos pode ser descrito como:
  1. Seja A um conjunto com bordas 8-conexas, com cada borda finalizando uma região de fundo (ou seja, um buraco);
  2. Deve ser gerado um array  $X_0$  com zero em todas as posições, exceto nos locais onde sabe-se que  $X_0$  contém um buraco – nesta posição o valor é igual a 1;
  3. O seguinte procedimento preenche todos os buracos com 1's:

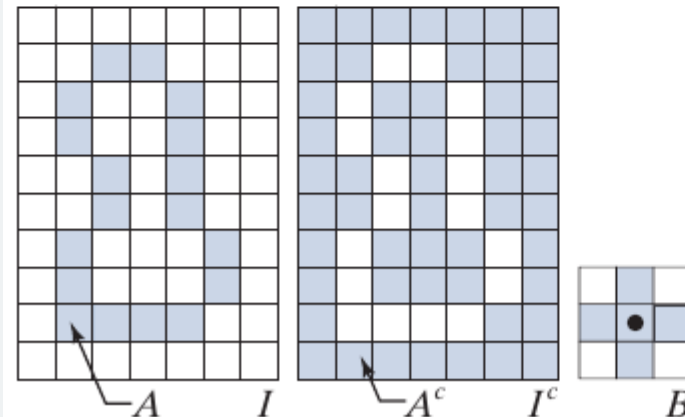
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I^c \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

# Preenchimento de Buracos

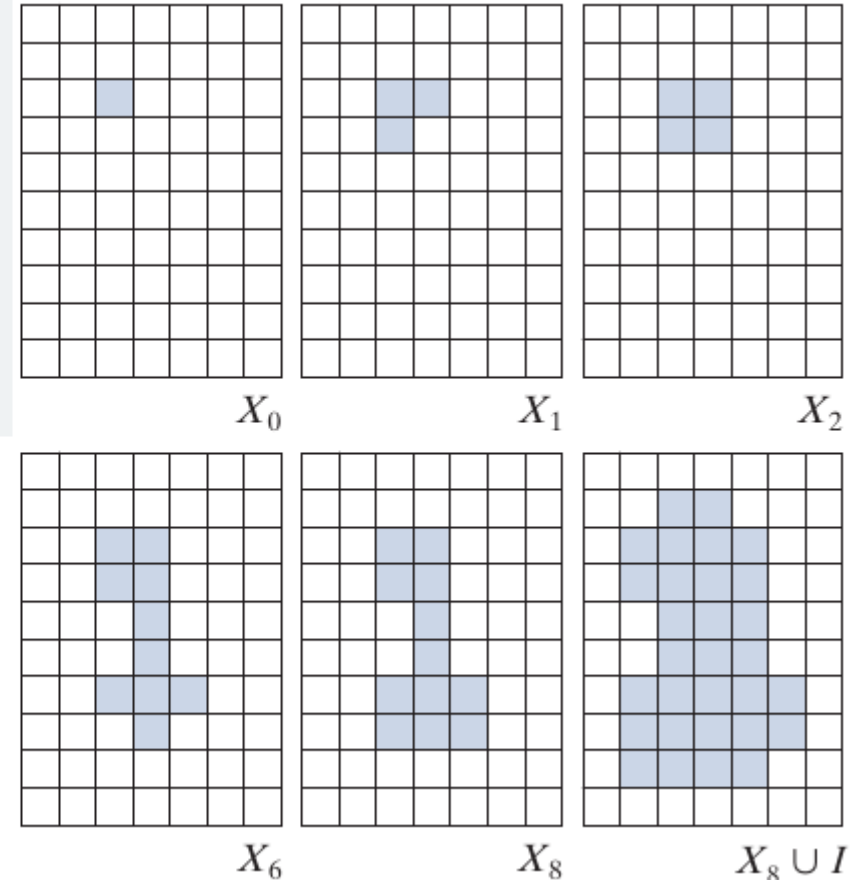
- No algoritmo anterior, a dilatação preencheria toda a área, porém a interseção em cada passo por  $I^c$  limita o resultado na região de interesse;
  - No procedimento descrito, o processo é condicionado de modo que atinja uma propriedade desejada;
  - A aplicação é denominada dilatação condicional.

# Preenchimento de Buracos

- Na imagem ao lado, utiliza-se um elemento estruturante  $B$ , em forma de cruz que é aplicado ao complemento da imagem original;
- Após as iterações do algoritmo, os buracos existentes na imagem são preenchidos.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).



# Afinamento

- O **Afinamento** de um conjunto de pixels de frente A pode ser definido com auxílio da transformada Hit-or-Miss:

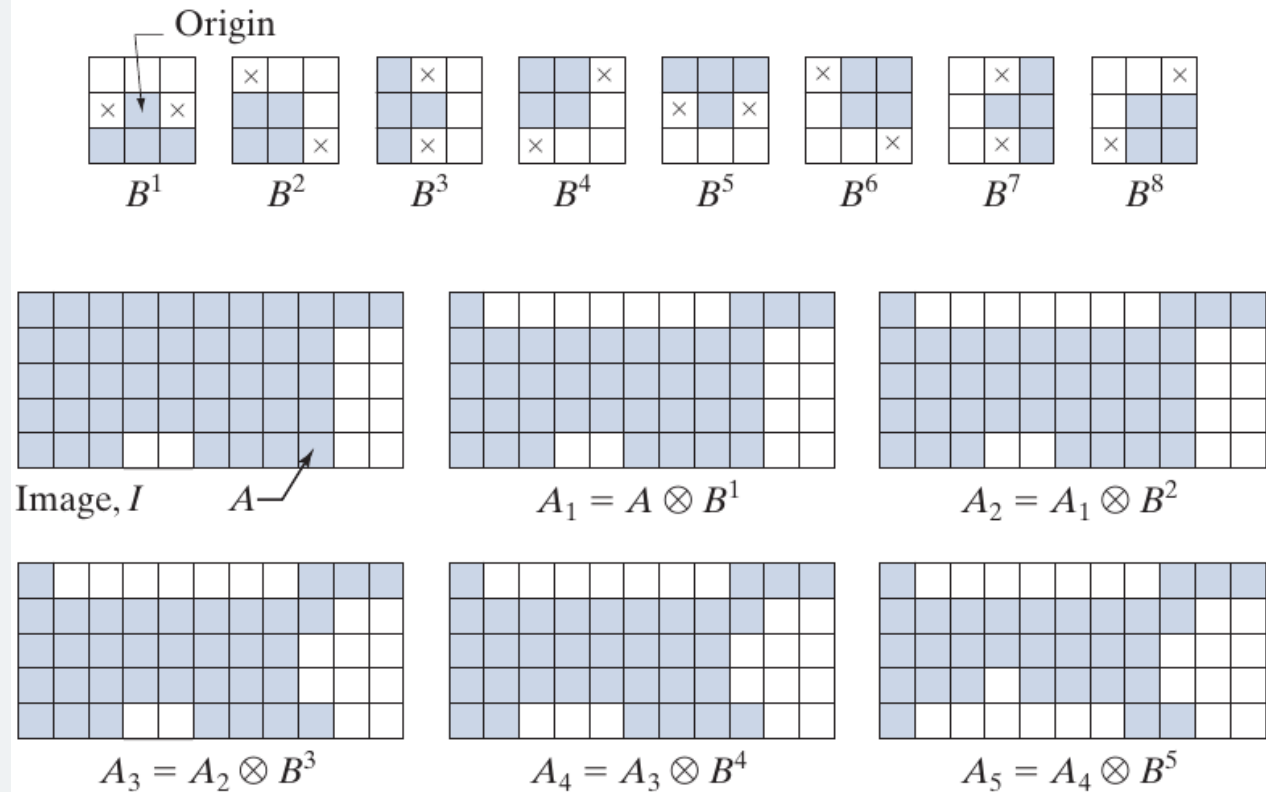
$$\begin{aligned} A \otimes B &= A - (A * B) \\ &= A \cap (A * B)^c \end{aligned}$$

- O resultado do afinamento corresponde a uma operação que passa por uma sequência de elementos estruturantes adequados para afinamentos, de modo a produzir uma imagem com no máximo 1 pixel de espessura.

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$$

# Afinamento

- A imagem ao lado contém o início do processo de afinamento morfológico de uma imagem
- São utilizados múltiplos elementos estruturantes, que são aplicados sequencialmente na imagem.





# Afinamento

- A imagem abaixo contém um exemplo do processo de afinamento morfológico;
- Pode-se observar a manutenção da forma geral, com 1 pixel de espessura.



Fonte: Próprio autor.

# Espessamento

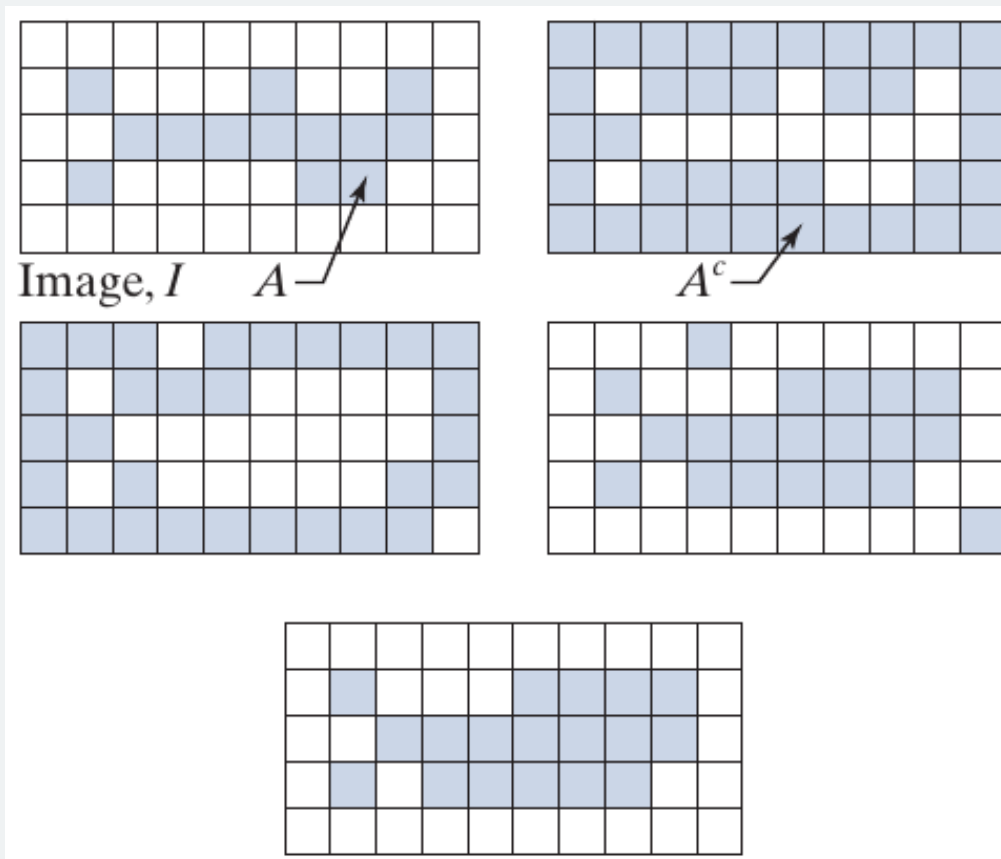
- O **Espessamento** é considerado a operação dual do afinamento e pode ser definido como:

$$A \odot B = A \cup (A * B)$$

- De forma semelhante ao afinamento, o espessamento é uma operação que passa por um conjunto de elementos estruturantes  $B = \{B_1, B_1, \dots, B_n\}$  adequados para o procedimento;
- Algoritmos específicos para espessamento são incomuns na prática - o mais usual é executar o afinamento do *background*.

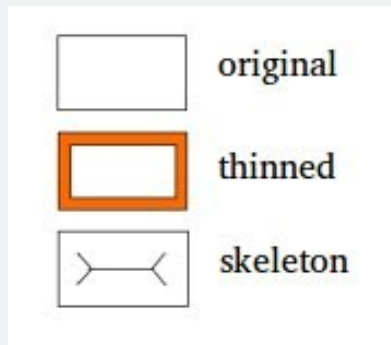
# Espessamento

- A imagem ao lado contém o processo de espessamento morfológico;
- Pode-se observar que o procedimento é realizado com a operação de afinamento do complemento da imagem.



# Esqueletos

- O processo de criação de **esqueletos (skeletonization)** busca produzir uma forma medial para um dado objeto em uma imagem
- O conceito deve ser diferenciado do processo de afinamento
  - Enquanto afinamento busca apenas reduzir as formas por um processo repetitivo de redução de pixels, a “esqueletonização” busca manter a forma original da imagem.



# Esqueletos

- A criação de esqueletos pode expressa em termos de erosões e aberturas:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$$

- onde  $S_k$  é definido por:

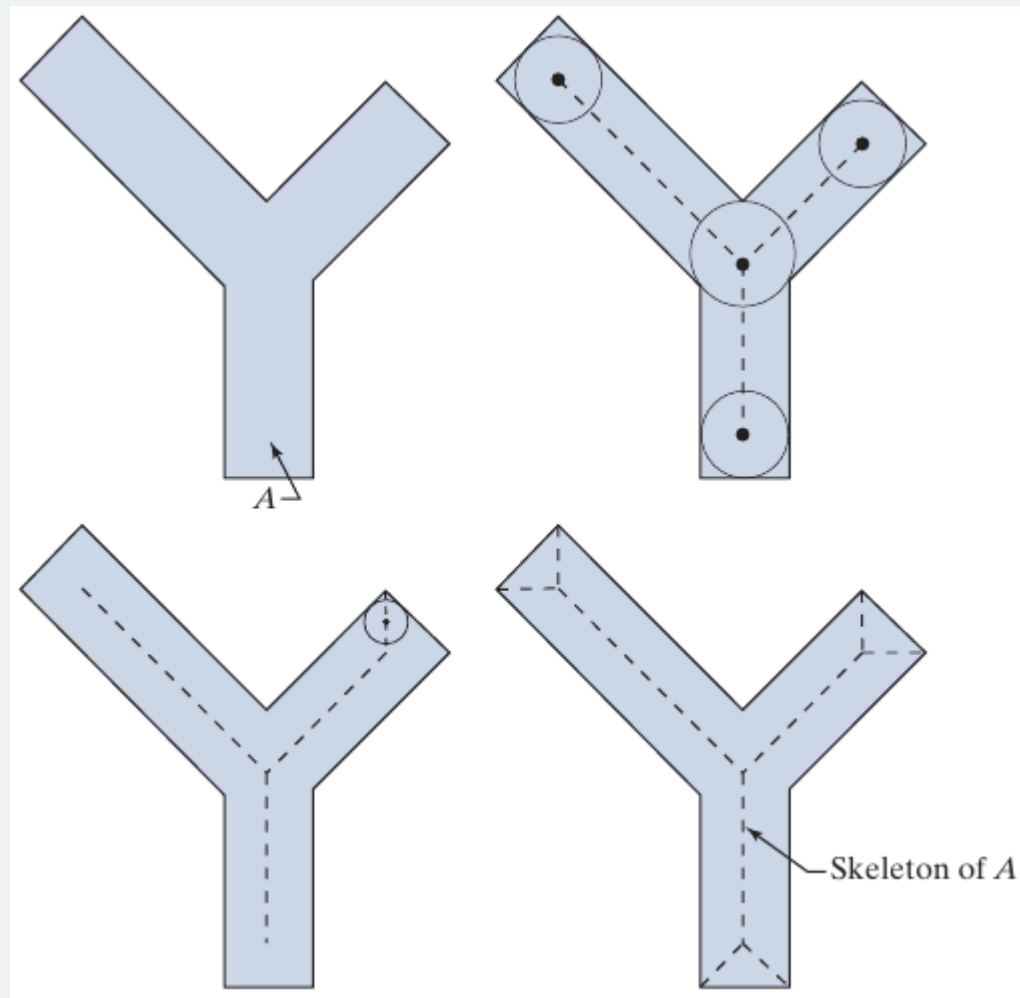
$$S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B$$

- onde  $B$  é um elemento estruturante,  $k$  indica as sucessivas processos erosivos de  $A$ .

# Esqueletos

- A imagem ao lado contém um processo de esqueletonização
  - O resultado obtido pelo processo pode ser visto nas linhas tracejadas.
  - Os discos são utilizados pelo algoritmo para definição das posições centrais do esqueleto.

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).



# Operações Morfológicas em Imagens em Escala de Cinza

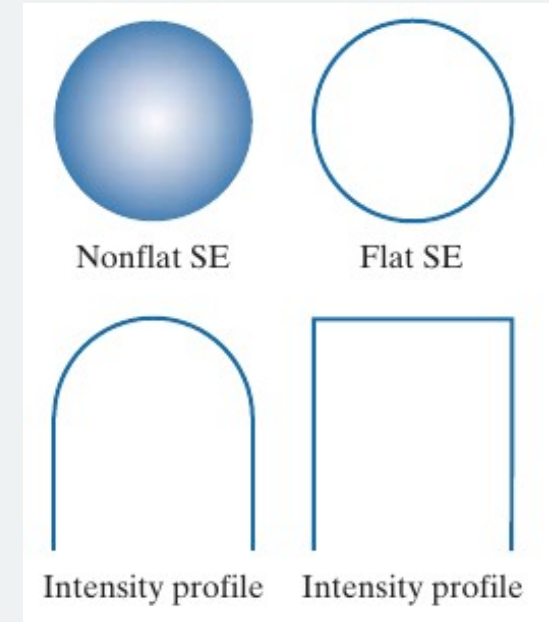
# Morfologia em Imagens em Tons de Cinza

- Operações morfológicas podem ser aplicadas a imagens em tons de cinza;
- Da mesma forma que as operações binárias, as operações em escala de cinza dependem de **elementos estruturantes** e **objetos**.



# Morfologia em Imagens em Tons de Cinza

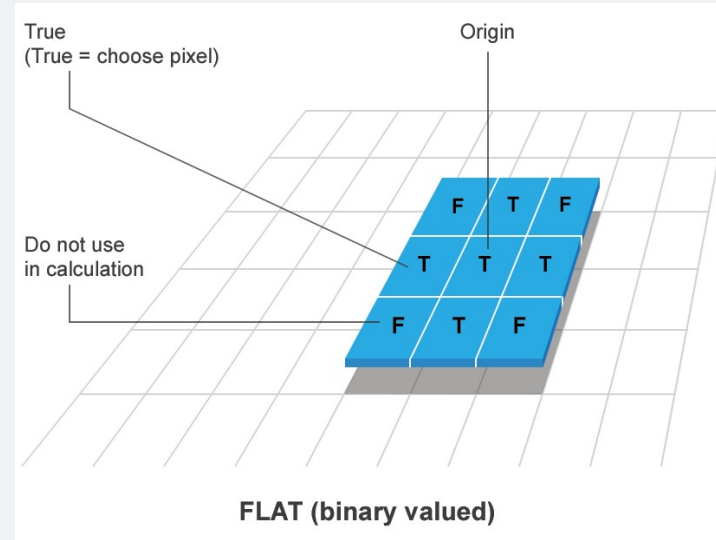
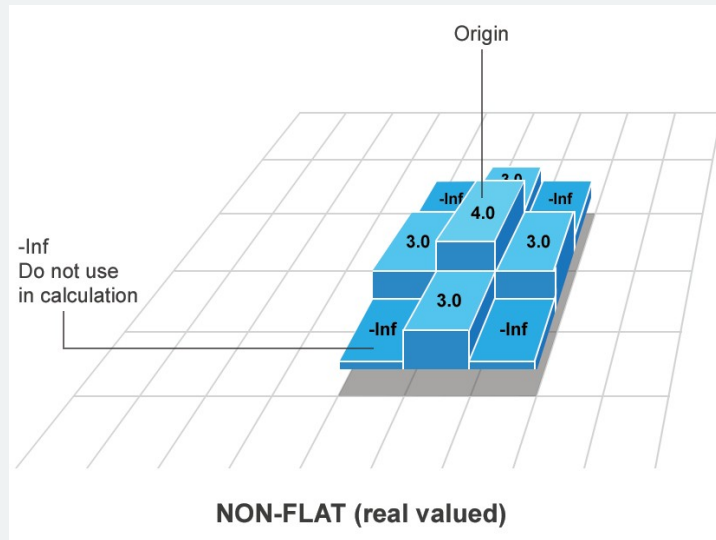
- Os elementos podem ser divididos em duas subcategorias: **não planos (nonflat)** e **planos (flat)**;
  - Elementos não planos possuem elementos finitos que podem ser utilizados como offsets aditivos na computação de operações morfológicas computacionais;
  - Esses elementos não planos são menos utilizados, de modo que trabalharemos apenas com **elementos estruturantes planos**.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

# Morfologia em Imagens em Tons de Cinza

- A imagem abaixo contém representações de elementos estruturantes do tipo não planos e planos.



# Erosão em Escala de Cinza

- A **erosão** de  $f$  por um elemento estruturante plano denotado por  $b$  em qualquer posição  $(x, y)$  é definida como o valor mínimo da imagem na região coincidente com  $b$  quando a origem de  $b$  está em  $(x, y)$

$$[f \ominus b](x, y) = \min_{(s, t) \in b} \{f(x + s, y + t)\}$$

- A erosão em qualquer posição é determinada pela seleção do valor mínimo de todos os valores de  $f$  contidos na região que coincide com  $b$ .

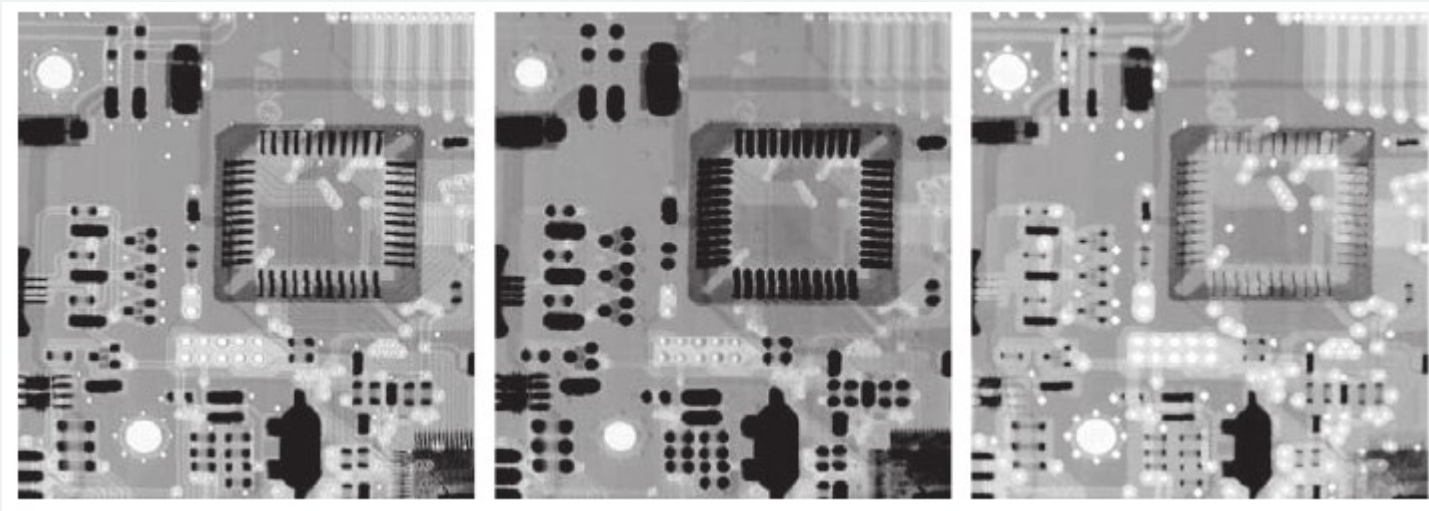
# Dilatação em Escala de Cinza

- A **dilatação** de  $f$  por um elemento estruturante plano denotado por  $b$  em qualquer posição  $(x, y)$  é definida como o valor máximo da imagem na região coincidente com  $b$  quando a origem de  $b$  está em  $(x, y)$ :

$$[f \oplus b](x, y) = \max_{(s, t) \in \hat{b}} \{f(x - s, y - t)\}$$

# Morfologia em Imagens em Tons de Cinza

- A imagem abaixo contém uma imagem de raio-x de  $448 \times 425$  pixels e o resultado das operações de erosão e dilatação, com um elemento estruturante de raio de 2 pixels.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

# Abertura e Fechamento em Escala de Cinza

- Operações de **abertura** e **fechamento** em níveis de cinza possuem o mesmo comportamento das operações na forma binária;
- A abertura  $f$ , por um elemento estruturante  $b$ , é dada por:

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$$

- O fechamento  $f$ , por um elemento estruturante  $b$ , é dado por:

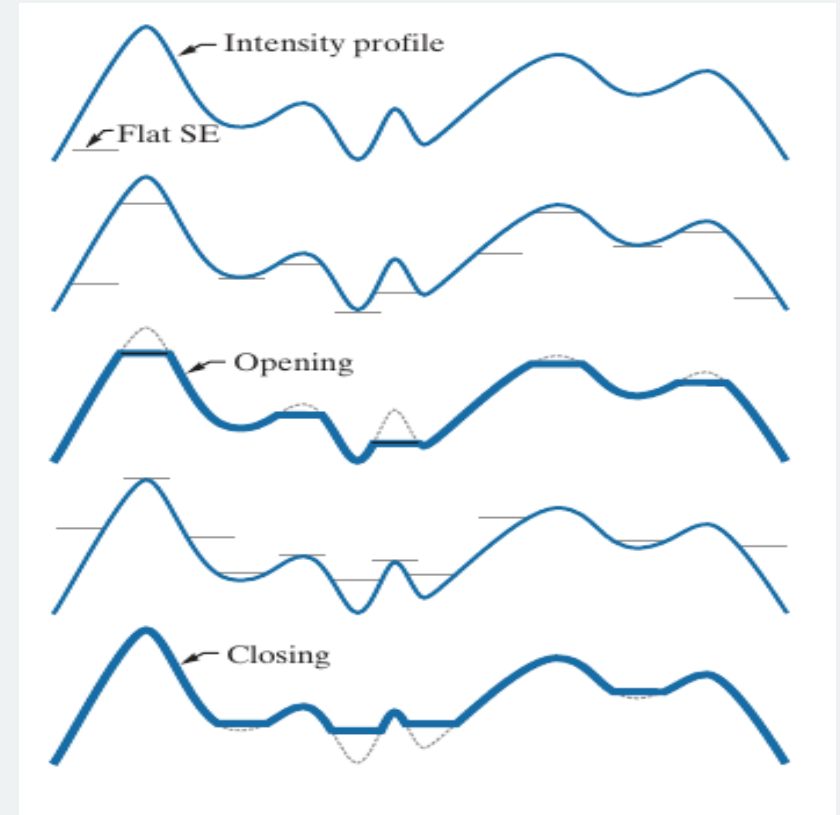
$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$$

- Essas operações são duais, em relação ao complemento e reflexão:

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b}$$

# Abertura e Fechamento em Escala de Cinza

- As operações de abertura e fechamento morfológicos podem ser vistas na imagem ao lado
- Pode-se perceber que a operação de abertura tende a remover picos, suavizando a imagem, sem afetar partes escuras;
- A operação de fechamento tende a remover os vales, removendo pontos mais baixos das imagens, frequentemente associados aos ruídos.



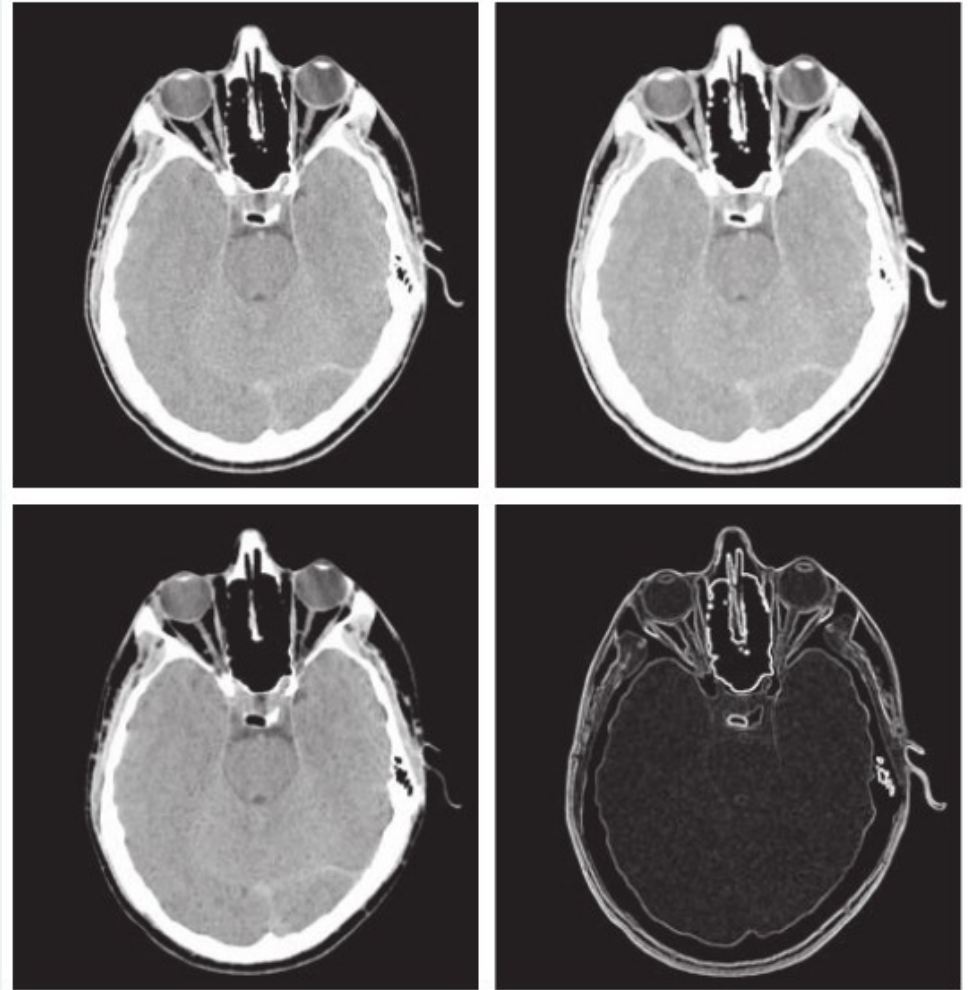
Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

# Gradiente Morfológico

- Dilatação e erosão podem ser combinados com a operação de subtração de imagens, de forma a obter o gradiente morfológico de imagens em tom de cinza
- O **Gradiente Morfológico** é dado por:

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

- A diferença entre a dilatação e a erosão tende valorizar as regiões de borda e remover as áreas homogêneas, produzindo um efeito de gradiente.





## Top-hat e Bottom-hat

- As transformações **Top-hat** e **Bottom-hat** (ou **Black-hat**) são definidas a partir da subtração das imagens das operações de abertura e fechamento;
- **Top-hat / White-hat** é definida como a subtração da imagem original pela imagem resultante após a operação de abertura:

$$T_{\text{hat}}(f) = f - (f \circ b)$$

- **Bottom-hat / Black-hat** é definida como a subtração da imagem original pela imagem resultante após a operação de fechamento:

$$B_{\text{hat}}(f) = (f \bullet b) - f$$

# Top-hat

- A operação de **top-hat** é utilizada para extração de pequenos elementos e detalhes de imagens
  - É capaz de acentuar objetos claros em imagens escuras.



# Bottom-hat

- A operação de **bottom-hat** é também utilizada para extração de pequenos elementos e detalhes de imagens
  - É capaz de acentuar objetos escuros em imagens claras.



# Referências

## Referências

- Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. **Digital Image Processing - 4th Edition.** 2018. Pearson. ISBN: 978-9353062989.
- Agostinho Brito Jr. **Processamento digital de imagens - Slides de Aula.** 2018.
- OpenCV. **Hit-or-Miss.** 2023. Disponível em :  
[https://docs.opencv.org/4.x/db/d06/tutorial\\_hitOrMiss.html](https://docs.opencv.org/4.x/db/d06/tutorial_hitOrMiss.html)
- Ivaylo Strandjev (StackOverflow). **What is the difference between thinning and skeletonizing?**. 2014. Disponível em:  
<https://stackoverflow.com/questions/27517491/what-is-the-difference-between-thinning-and-skeletonizing>

## Referências

- Mathworks. **Structuring Elements**. 2022. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/images/structuring-elements.html>
- OpenCV. **Morphological Transformations**. 2023. Disponível em : [https://docs.opencv.org/4.x/d9/d61/tutorial\\_py\\_morphological\\_ops.html](https://docs.opencv.org/4.x/d9/d61/tutorial_py_morphological_ops.html)
- GeeksforGeeks. **Top Hat and Black Hat Transform using Python-OpenCV**. 2023. Disponível em: <https://www.geeksforgeeks.org/top-hat-and-black-hat-transform-using-python-opencv/>