Processamento e Análise de Imagens

Processamento no Domínio da Frequência I

Felipe Augusto Lima Reis

PUC Minas

Introdução

Introdução

- Alguns tipos de degradações em imagens possuem tratamento muito complexo (ou mesmo impossível) no domínio espacial;
  - As degradações, no entanto, podem ser resolvidas mais facilmente forem tratadas em um domínio diferente;
  - Para isso, deve ser feita uma transformação da imagem do domínio espacial para um novo domínio;
  - Neste novo domínio, as degradações são evidenciadas, permitindo que sejam filtradas;
  - A imagem é, então, processada, mitigando suas imperfeições;
  - Finalizadas as correções, a imagem é retornada para o domínio espacial.

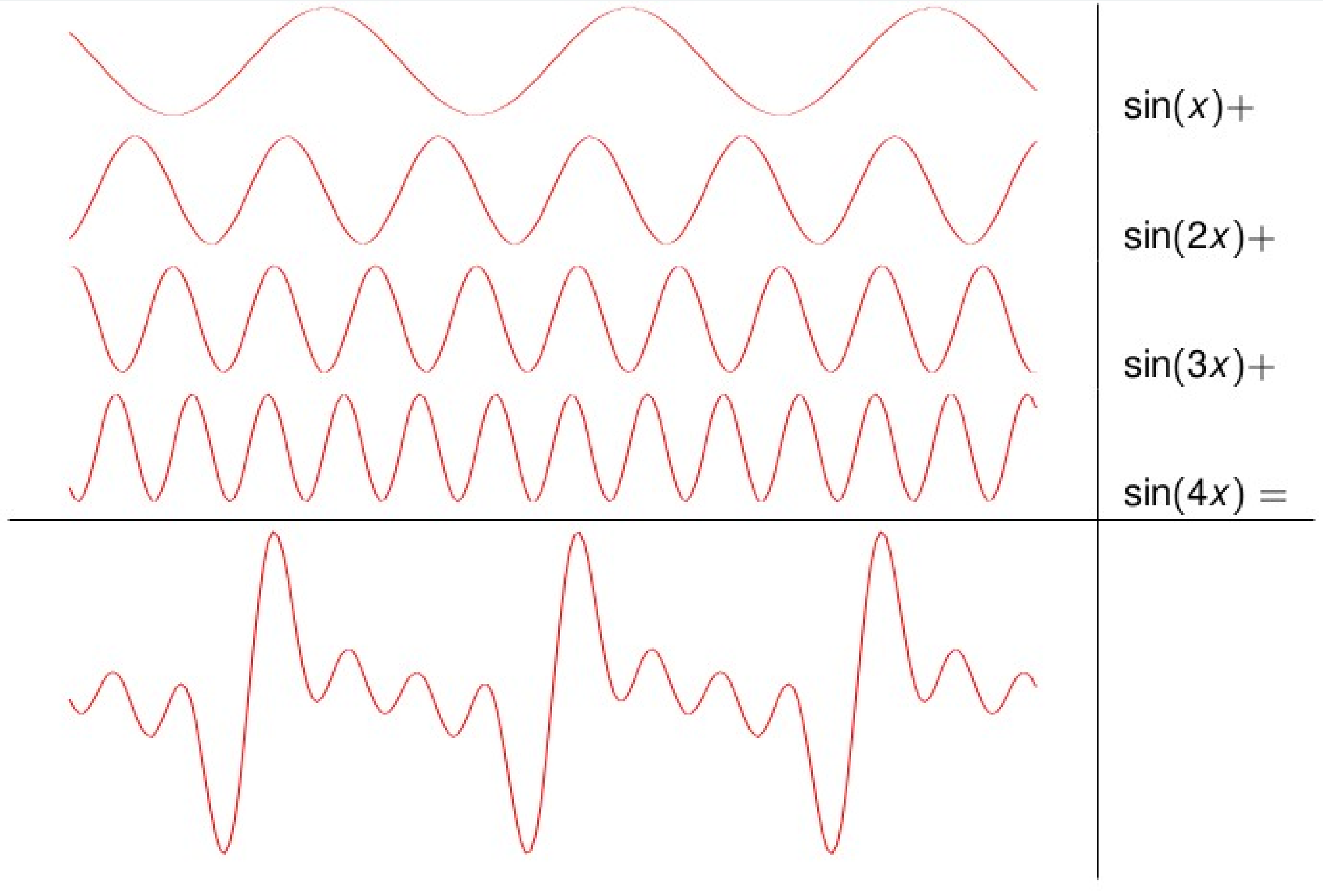
Introdução

- Para realizar a transformação da imagem no domínio espacial para um novo domínio, é utilizada frequentemente a Série de Fourier
  - A série de Fourier permite que um sinal periódico seja decomposto em uma soma de senos ou cossenos de frequências diferentes, ponderados por coeficientes;
  - A transformada de Fourier permite decompor sinais que não são periódicos;
  - Em ambos os casos, os coeficientes obtidos das transformações permitem recompor o sinal sem perda de informação;
  - O tratamento de sinais com a transformada de Fourier é dito como feito no **domínio da frequência**.

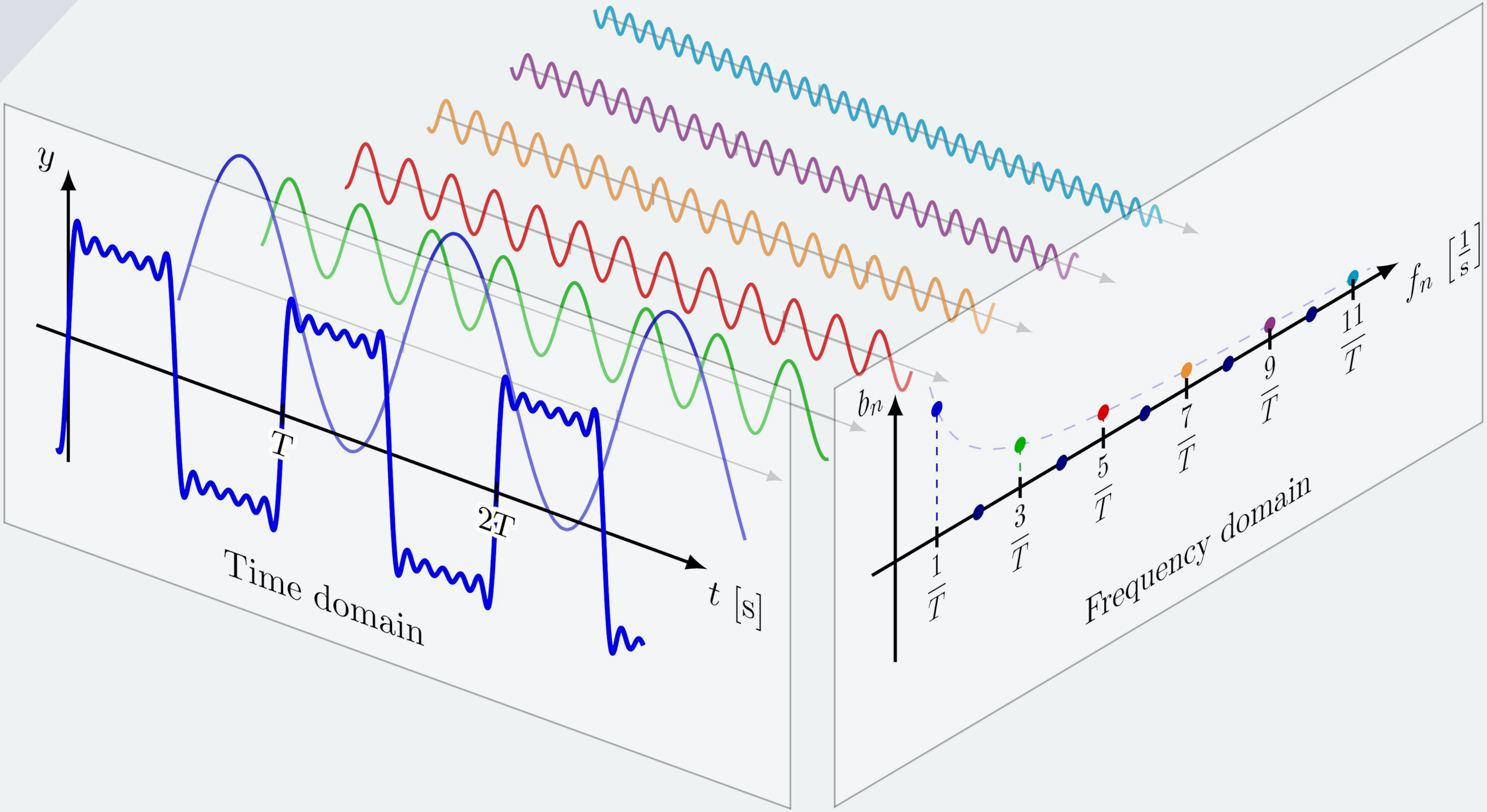
Séries e Transformadas de Fourier

Séries e Transformadas de Fourier

- A **Série de Fourier** é uma forma de série trigonométrica usada para representar funções infinitas e periódicas na forma de funções trigonométricas simples de senos e cossenos.
  - Independentemente da função e sua correspondente complexidade, desde que a mesma seja periódica, esta poderá ser representada como uma soma;
- A **Transformada de Fourier** é utilizada para representação de funções não periódicas (como aquelas sob uma área de uma curva) na forma da integral de senos e cossenos multiplicados por uma função de ponderação
  - A transformada de Fourier possui, segundo Gonzalez & Woods (2018) maior utilidade que as séries de Fourier;



Fonte: Brito Jr. (2018).



Fonte: O'Gorman (2023).

Séries e Transformadas de Fourier

- Tanto a série quanto a transformada de Fourier possuem como característica a possibilidade de reconstrução (recuperação) por meio de um processo inverso, sem perda de informação;
  - Tal característica possibilita que as representações trabalhem no domínio de Fourier (também chamado de domínio da frequência) e que depois possam retornar ao domínio original da função sem perda de informação;
- A transformada foi originalmente aplicada em problemas de difusão de calor
  - Ela apresenta diversas aplicações em disciplinas práticas;
  - O surgimento da **Transformada Rápida de Fourier** (*FFT – Fast Fourier Transform*) possibilitou uma revolução na área de processamento de sinais.

Série de Fourier

- A Série de Fourier consiste em uma função *f(t)* de uma variável contínua *t* periódica com um período *T*, que pode ser expressa como a soma de senos e cossenos multiplicados por coeficientes apropriados;
- A série possui a seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

  - onde:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt \qquad \text{for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Série de Fourier

- A série possui a seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

- A expansão dos senos e cossenos segue a seguinte fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

  - onde θ é o ângulo entre o vetor e o eixo real (coordenadas polares).

Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier de uma função contínua *f(t)* em uma variável contínua *t* é dada por:

$$\Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

  - onde μ é também uma função contínua
  - Uma vez que t é integrado, $\mathcal{F}\{f(t)\}$ é uma função de somente μ;
  - Logo, temos que $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mu)$.

Transformada de Fourier

- A Transformada Inversa de Fourier, para conversão de $F(\mu)$ de volta em $f(t)$, é dada por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

- A transformada inversa pode ser escrita como $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)\}$;
- O par de transformadas de Fourier é frequentemente f(t) $\Leftrightarrow$ $F(\mu)$.

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- A Transformada de Fourier, em sua versão discreta (DFT), é dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

- A transformada inversa, em sua versão discreta, é dada por:

$$f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

Transformada de Fourier

- Para duas dimensões, o par de transformadas de Fourier é dado por:

$$F(\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)}\,dt\,dz$$

$$f(t,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)e^{j2\pi(\mu t + \nu z)}\,d\mu\,d\nu$$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Para duas dimensões, o par de transformadas discretas de Fourier são dadas por:

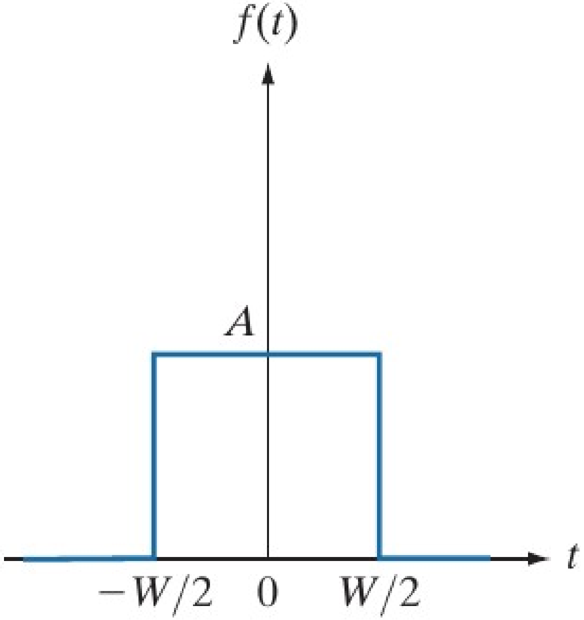
$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

  - A notação f(0), f(1), ..., f(M-1) denota que as amostras são espaçadas igualmente no espaço.

Transformada de Fourier - Exemplo

- O exemplo abaixo exibe o cálculo da Transformada de Fourier para uma função quadrática.

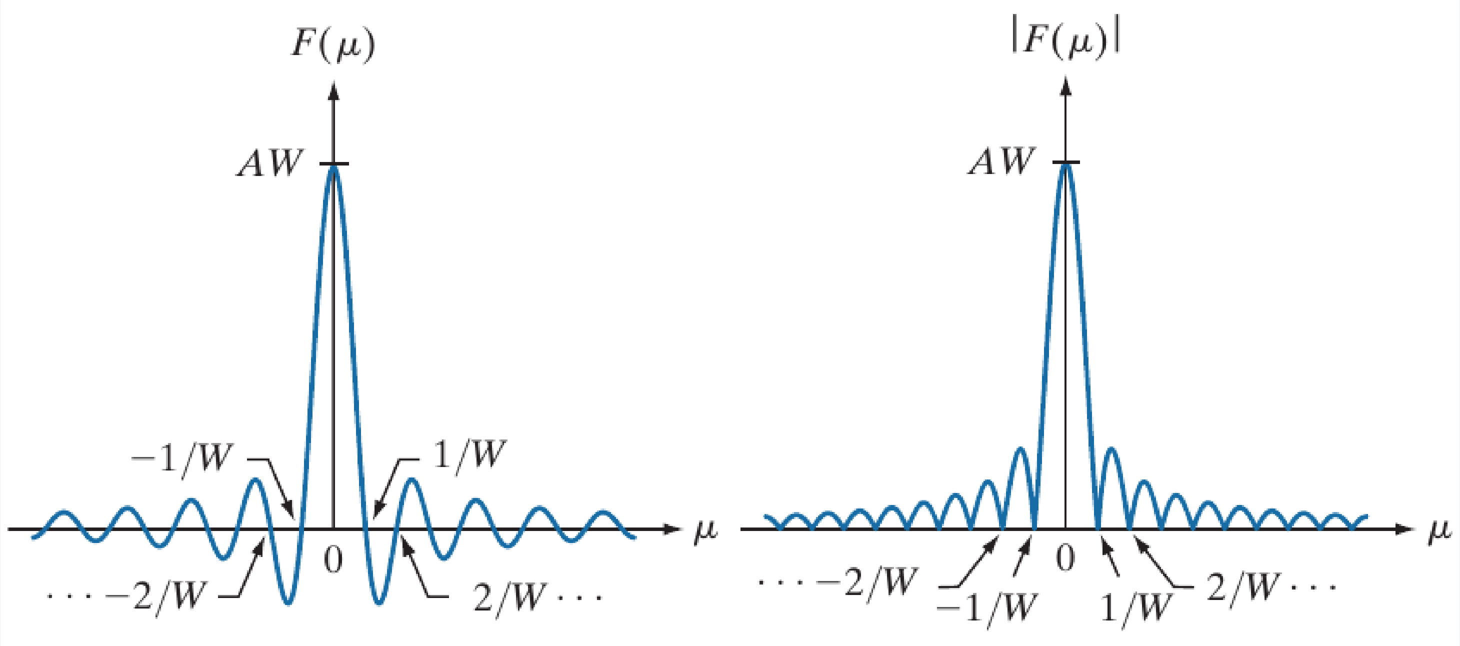


$$\begin{aligned}
F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi\mu t}dt \\
&= \frac{-A}{j2\pi\mu}\Big[e^{-j2\pi\mu t}\Big]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu}\Big[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W}\Big] \\
&= \frac{A}{j2\pi\mu}\Big[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W}\Big] \\
&= AW\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}
\end{aligned}$$

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Transformada de Fourier - Exemplo

- O gráfico resultante da Transformada de Fourier e seu respectivo espectro (magnitude da transformada – valor real) podem ser vistas na figura abaixo:

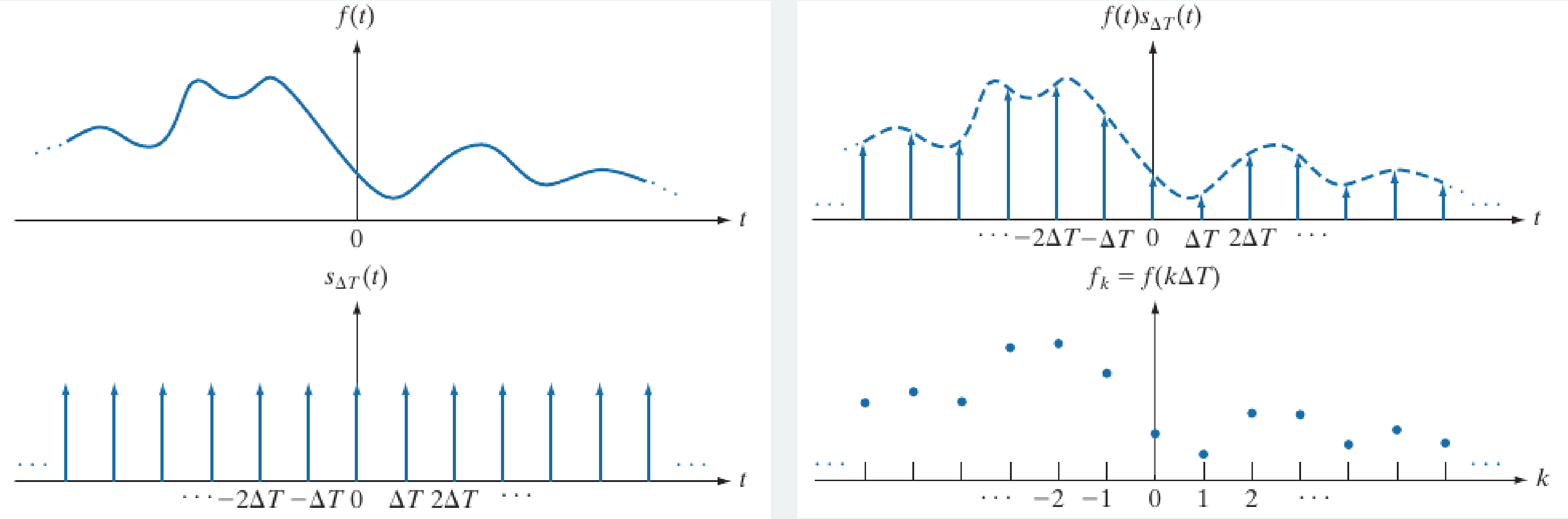


Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Amostragem de Funções

Amostragem de Funções

- Funções contínuas podem ser transformadas em uma sequência de valores discretos antes de serem processadas computacionalmente
  - Para isso, é necessário um processo de **amostragem** e **quantização**.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

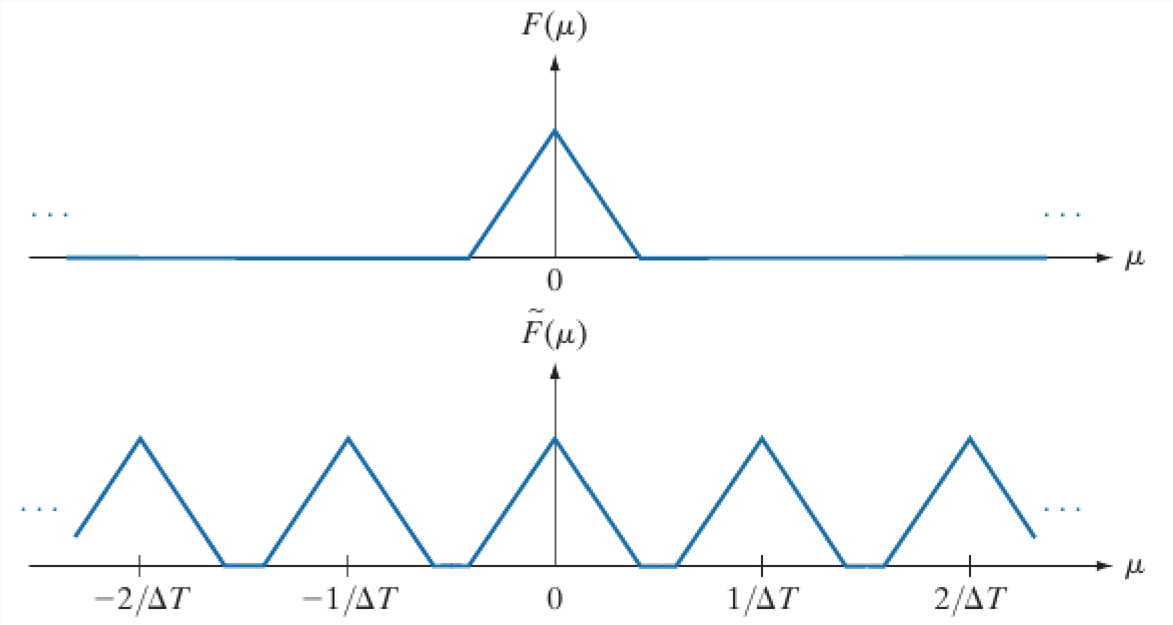
Amostragem de Funções

- De acordo com o **Teorema da Amostragem**, nenhuma informação é perdida se uma função contínua e limitada pela banda for representada por amostras adquiridas a uma taxa maior que o dobro do conteúdo de frequência mais alto de uma função
  - Infinitos termos são necessários em uma representação contínua da Série de Fourier;
  - Se um número finito de termos da série de Fourier pode ser calculado a partir desse sinal, esse sinal é considerado limitado por banda;
  - Se uma função f(t) cuja transformada de Fourier é zero para valores fora do intervalo finito $[-\mu_{max}, \mu_{max}]$ acima da origem, a função é dita limitada por banda.

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Amostragem de Funções

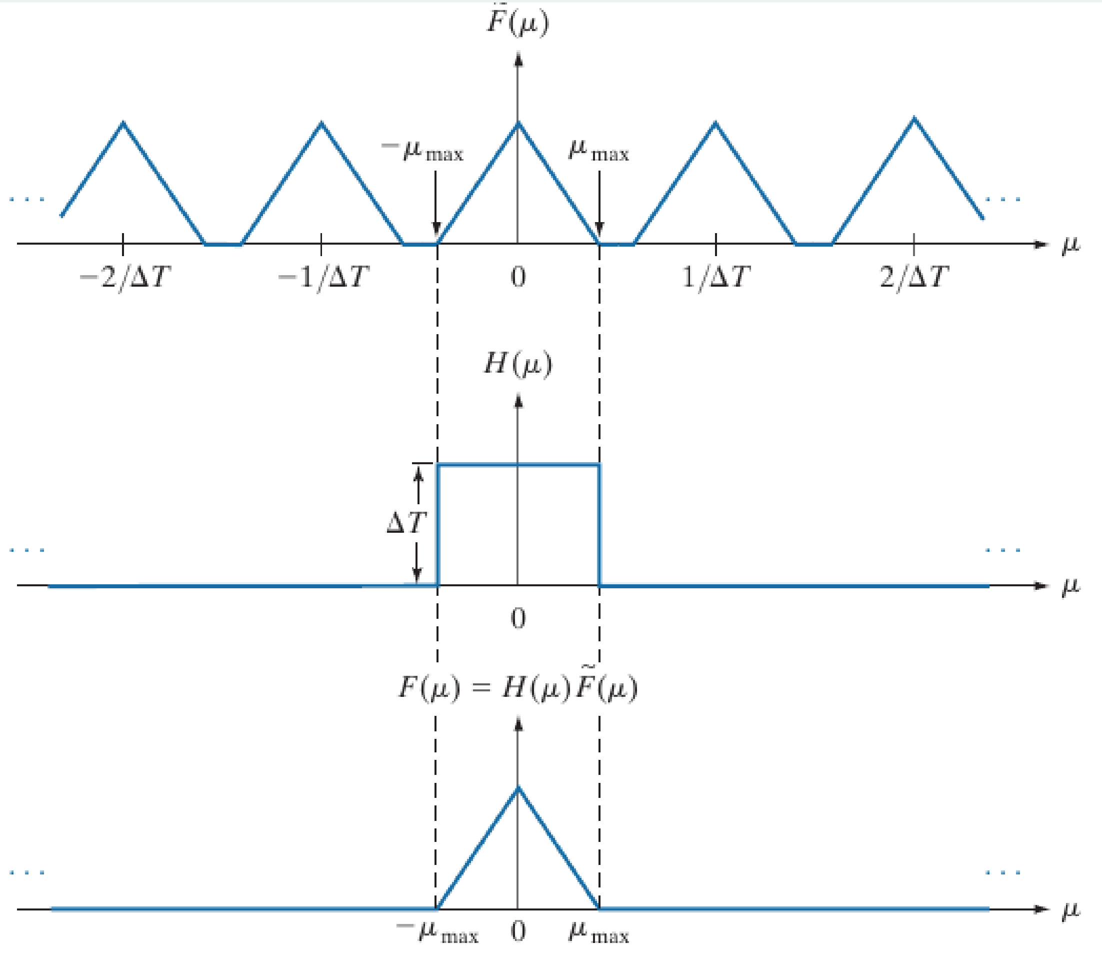
- Se uma função f(t) cuja transformada de Fourier é zero para valores fora do intervalo finito [$-\mu_{max}$, μ_{max}] acima da origem, a função é dita limitada por banda.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Amostragem de Funções

- Considerando a representação da transformada de Fourier de uma função amostrada, limitada por banda, podemos extrair um único período com um filtro ideal passa-baixo.



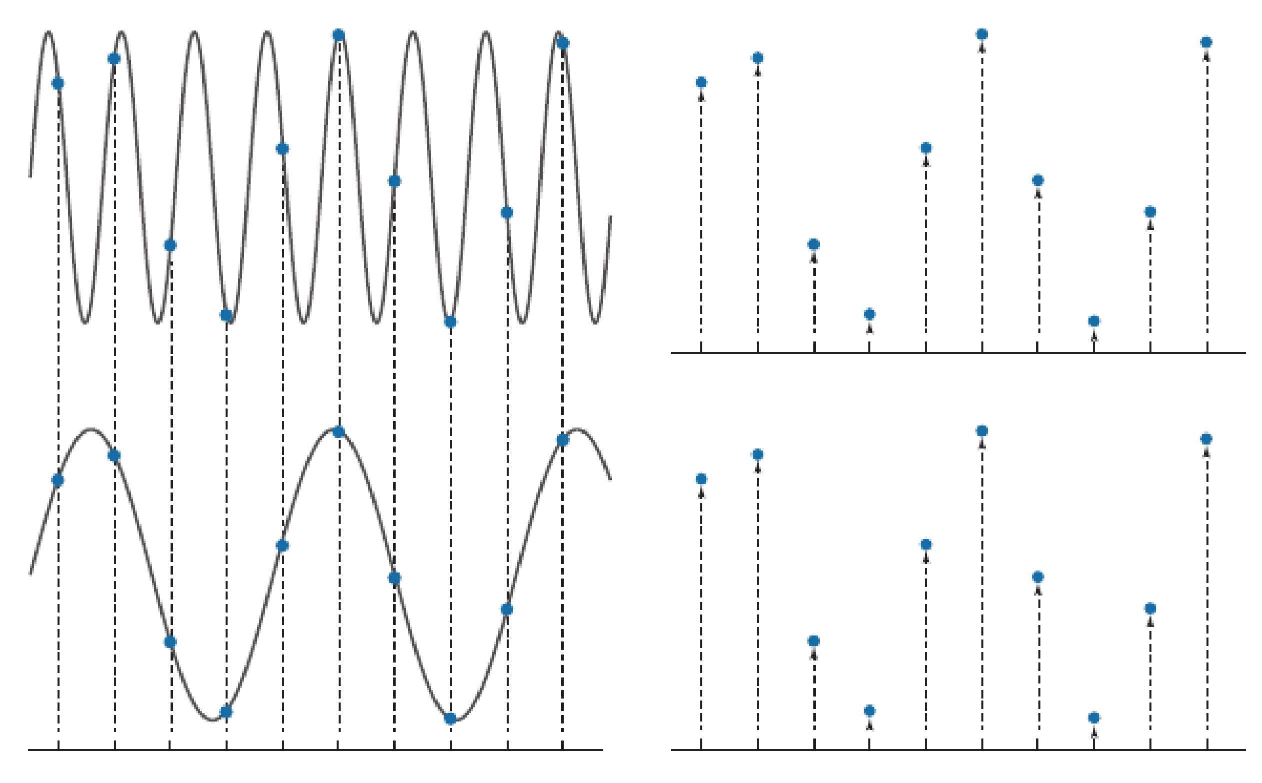
Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Amostragem de Funções - Aliasing

- **Aliasing** é uma expressão originada de alias (“pseudônimo”, em tradução literal);
- Na área de processamento de sinais, aliasing refere-se ao fenômeno que pode fazer com que sinais fiquem indistinguiveis de outros após a amostragem
  - Devido a uma amostragem indevida (sub-amostrada) duas funções completamente diferentes podem ter amostras coincidentes;
  - Duas funções com amostras coincidentes ficam indistinguíveis após o processo de amostragem.

Amostragem de Funções - Aliasing

- Um exemplo de aliasing pode ser visto na imagem ao lado
  - É possível observar que duas funções diferentes, quando sub-amostradas apresentam pontos semelhantes.
  - À partir da amostragem, não é possível diferir às funções originais.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Espectro de Fourier e Ângulos de Fases

Ângulos de Fases

- Uma vez que a transformada discreta de Fourier (DFT) é complexa, ela pode ser expressa na forma polar:

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v) = |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$$

  - com magnitude dada por:

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

  - que é denominada **Espectro de Fourier (ou da frequência)**, em que:

$$\phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

  - onde ϕ é o **ângulo de fase** ou a **fase do espectro**.

Ângulos de Fases

- O Espectro de Força é definido como:

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2$$
$$= R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

  - onde *R* e *I* são as partes reais e imaginárias, respectivamente.
- A transformada de Fourier de uma função real possui simetria do conjugado, indicando que o espectro possui simetria par em relação à origem:

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

  - enquanto o ângulo de fase possui simetria ímpar em relação à origem:

$$\phi(u,v) = -\phi(-u,-v)$$

Ângulos de Fases

- Considerando a equação da DFT, temos que a frequência do termo zero é proporcional à média de f(x, y), correspondente a:

$$F(0,0) = MN\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN\bar{f}$$

- Podemos considerar então que:

$$|F(0,0)| = MN\left|\bar{f}\right|$$

  - Como a constante de proporcionalidade *MN* geralmente é grande, *F(0, 0)* normalmente é o maior componente do espectro por um fator que pode ser várias ordens de grandeza maior do que outros termos.
  - Como os componentes de frequência *u* e *v* são zero na origem, *F(0, 0)* às vezes é chamado de **componente *dc* da transformada** T.

Correspondência entre domínios

Teorema da Convolução

- O **Teorema da Convolução** estabelece que, sob condições apropriadas, a transformada de Fourier de uma convolução de duas funções integráveis é igual ao produto das transformadas de Fourier de cada função.
  - A convolução em um domínio (ex.: domínio espacial) equivale a multiplicação em outro domínio (ex.: domínio da frequência).
  - Desse modo, o mesmo procedimento de filtragem pode ser realizado em ambos os domínios
    - Na prática, a escolha do domínio adequado de trabalho pode facilitar a análise e resolução do problema.

Teorema da Convolução

- Considerando a convolução de duas funções contínuas, *f(t)* e *h(t)*, para uma variável contínua *t* no domínio espacial, a convolução entre essas duas funções é denotada pelo operador ★ (comumente também é utilizado o operador *) é definido como:

$$(f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Teorema da Convolução

- Temos que a transformada da função, para μ no domínio da frequência, é dada por:

$$
\begin{aligned}
\Im\{(f \star h)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}\right]d\tau \\
&= H(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\mu\tau}\, d\boldsymbol{\tau} \\
&= H(\mu)F(\mu) \\
&= (H \bullet F)(\mu)
\end{aligned}
$$

Teorema da Convolução

- A **Transformada de Fourier** da convolução de duas funções no domínio espacial é igual ao produto no domínio da frequência das Transformadas de Fourier das duas funções.
  - Se tivermos o produto das duas transformadas, podemos obter a convolução no domínio espacial calculando a transformada inversa de Fourier.
  - Logo, $f \star h = H \bullet F$ correspondem a um par de transformada de Fourier

$$(f \star h)(t) \Leftrightarrow (H \bullet F)(\mu)$$

  - De forma similar, temos que:

$$(f \bullet h)(t) \Leftrightarrow (H \star F)(\mu)$$

Propriedades

Separabilidade

- A Transformada de Fourier 2-D é **linearmente separável**
    - Ela pode ser composta da transformada de Fourier 1-D das linhas seguida pelas transformada de Fourier 1-D das colunas resultantes (ou vice-versa)

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \frac{1}{MN}\sum_{0}^{M-1} e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \sum_{0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \\
f(x,y) &= \sum_{0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \sum_{0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\frac{vy}{N}}
\end{aligned}
$$

Translação (*Shifting Theorem*)

- A **translação** (ou **deslocamento**) de uma função deixa a magnitude inalterada e adiciona uma constante à fase
  - A magnitude indica “o valor de uma função”;
  - A fase indica “onde uma determinada função está”.

$$f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

Para $u_0 = M/2$ e $v_0 = N/2$,

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(u_0 x + v_0 y)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

Periodicidade

- A transformada de Fourier 2-D e sua inversa, assim como as correspondentes 1-D, são infinitamente periódicas nas direções *u* e *v*.

$$F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v) = F(u+M,v+N)$$

Rotação

- A **rotação** de uma função 2-D rotaciona a transformada de Fourier correspondente.

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad u = w\cos\phi \quad v = w\cos\phi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$$

Simetria do Conjugado

- Uma propriedade frequentemente adotada é que a transformada de Fourier de uma função real é *f(x, y)* possui **simetria do conjugado**.

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= F^*(-u,-v) \\
|F(u,v)| &= |F(-u,-v)|
\end{aligned}
$$

Distributividade

- A **propriedade distributiva** é aplicada à transformada de Fourier.

$$\mathscr{F}\{f_1(x,y) + f_2(x,y)\} = \mathscr{F}\{f_1(x,y)\} + \mathscr{F}\{f_2(x,y)\}$$

$$\mathscr{F}\{f_1(x,y)f_2(x,y)\} \neq \mathscr{F}\{f_1(x,y)\}\mathscr{F}\{f_2(x,y)\}$$

Escalamento

- Uma constante aplicada à função original altera o valor correspondente na transformada de Fourier.

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$$

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}F(u/a,v/b)$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- O uso da transformada de Fourier não seria prático caso fosse necessária a implementação direta das equações de DFT e IFT
  - A implementação utilizando força bruta das equações em 2-D tem custo $O((MN)^2)$;

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- A **Transformada Rápida de Fourier** (FFT - *Fast Fourier Transform*) é um algoritmo para processamento da DFT e da IFT
  - Para uma DFT 2-D, o algoritmo reduz o custo computacional do cálculo da transformada para O($MNlog_2MN$);
  - Para uma DFT 1-D, o algoritmo reduz o custo computacional de $O(N^2)$ para $O(NlogN)$.

Tamanho Imagem	Operações DFT por força bruta	Operações FFT
1024x1024	~ 1 trilhão de adições e multiplicações	~ 21 milhões de adições e multiplicações
2048x2048	~ 17 trilhões de adições e multiplicações	~ 92 milhões de adições e multiplicações

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- O algoritmo **FFT** moderno é atribuído ao trabalho de James Cooley and John Tukey, em 1965
  - Essa versão do algoritmo é denominada Cooley-Tukey-FFT e utiliza um mecanismo de divisão e conquista;
  - O FFT é considerado um dos mais importantes algoritmos da história da computação;
  - Frequentemente, é implementado em bibliotecas matemáticas e de processamento de imagens de diferentes linguagens
    - Ex.: Python (Numpy e OpenCV), Matlab, R, etc.

Resumo e Propriedades das DFTs

DFT - Propriedades

- Na imagem abaixo, podemos ver as propriedades de simetria entre 2D DFTs e suas respectivas inversas
  - *R(u, v)* e *I(u, v)* são as partes reais e imaginárias, respectivamente, de *F(u, v)*;

	Spatial Domain[†]		Frequency Domain[†]
1)	$f(x,y)$ real	$\Leftrightarrow$	$F^*(u,v) = F(-u,-v)$
2)	$f(x,y)$ imaginary	$\Leftrightarrow$	$F^*(-u,-v) = -F(u,v)$
3)	$f(x,y)$ real	$\Leftrightarrow$	$R(u,v)$ even; $I(u,v)$ odd
4)	$f(x,y)$ imaginary	$\Leftrightarrow$	$R(u,v)$ odd; $I(u,v)$ even
5)	$f(-x,-y)$ real	$\Leftrightarrow$	$F^*(u,v)$ complex
6)	$f(-x,-y)$ complex	$\Leftrightarrow$	$F(-u,-v)$ complex
7)	$f^*(x,y)$ complex	$\Leftrightarrow$	$F^*(-u,-v)$ complex

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

DFT - Propriedades

- Na imagem abaixo, podemos ver as propriedades de simetria entre 2D DFTs e suas respectivas inversas
  - *R(u, v)* e *I(u, v)* são as partes reais e imaginárias, respectivamente, de *F(u, v)*;

	Spatial Domain†		Frequency Domain†
8)	$f(x, y)$ real and even	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ complex and odd

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

DFT - Propriedades

- Na imagem abaixo, vemos exemplos de propriedades dos slides anteriores.

Property	$f(x)$		$F(u)$
3	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\Leftrightarrow$	$\{(10+0j),(-2+2j),(-2+0j),(-2-2j)\}$
4	$\{1j, 2j, 3j, 4j\}$	$\Leftrightarrow$	$\{(0+2.5j),(.5-.5j),(0-.5j),(-.5-.5j)\}$
8	$\{2, 1, 1, 1\}$	$\Leftrightarrow$	$\{5, 1, 1, 1\}$
9	$\{0, -1, 0, 1\}$	$\Leftrightarrow$	$\{(0+0j),(0+2j),(0+0j),(0-2j)\}$
10	$\{2j, 1j, 1j, 1j\}$	$\Leftrightarrow$	$\{5j, j, j, j\}$
11	$\{0j, -1j, 0j, 1j\}$	$\Leftrightarrow$	$\{0, -2, 0, 2\}$
12	$\{(4+4j), (3+2j), (0+2j), (3+2j)\}$	$\Leftrightarrow$	$\{(10+10j),(4+2j),(-2+2j),(4+2j)\}$
13	$\{(0+0j),(1+1j),(0+0j),(-1-j)\}$	$\Leftrightarrow$	$\{(0+0j),(2-2j),(0+0j),(-2+2j)\}$

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

DFT - Resumo

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x,y)$	$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u,v)$	$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
3) Spectrum	$\lvert F(u,v)\rvert = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2} \quad R = \text{Real}(F);\ I = \text{Imag}(F)$
4) Phase angle	$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$
5) Polar representation	$F(u,v) = \lvert F(u,v)\rvert e^{j\phi(u,v)}$
6) Power spectrum	$P(u,v) = \lvert F(u,v)\rvert^2$
7) Average value	$\bar{f} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = \frac{1}{MN}F(0,0)$

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Transformada Discreta de Fourier (DFT) - Resumo

	Name	Expression(s)
8)	Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u,v) = F(u+k_1M,v) = F(u,v+k_2N)$ $= F(u+k_1,v+k_2N)$ $f(x,y) = f(x+k_1M,y) = f(x,y+k_2N)$ $= f(x+k_1M,y+k_2N)$
9)	Convolution	$(f \bigstar h)(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$
10)	Correlation	$(f \star h)(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f^*(m,n)h(x+m,y+n)$
11)	Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.
12)	Obtaining the IDFT using a DFT algorithm	$MNf^*(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Referências

Referências

- Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. **Digital Image Processing – 4th Edition.** 2018. Pearson. ISBN: 978-9353062989.
- Agostinho Brito Jr. **Processamento digital de imagens – Slides de Aula.** 2018. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- Willy Wriggers. **Fourier Transform – Slides de Aula.** 2005. School of Health Information Sciences – University of Texas. Disponível em: https://biomachina.org/courses/imageproc/
- Liz O'Gorman. **The beauty of the Fourier series and Fourier transform.** 2023. Duke Institute for Brain Sciences Methods Meetings. Disponível em: https://dibsmethodsmeetings.github.io/fourier-transforms/