Processamento e Análise de Imagens

Operações Matemáticas Básicas

Felipe Augusto Lima Reis

PUC Minas

Operações Lógicas e Aritméticas

Operações elemento a elemento e entre matrizes

- Uma operação elemento a elemento pode envolver duas ou mais imagens, sendo realizadas pixel por pixel
  - Um produto elemento a elemento entre duas imagens é definido como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- Um produto entre matrizes é definido como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Nota: As operações elemento a elemento são muito comuns, em alguns casos são mais utilizadas que as multiplicações de matrizes.

Operações Aritméticas

- Operações aritméticas podem e são frequentemente executadas sobre imagens
  - Adição: $s(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$
  - Subtração: $d(x, y) = f(x, y) – g(x, y)$
  - Multiplicação: $p(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$
  - Divisão: $v(x, y) = f(x, y) \div g(x, y)$
- Essas operações são frequentemente utilizadas como etapas de análise de diferenças entre imagens, aumentar ou reduzir a intensidade de pixels, entre outras;
- As operações de matrizes por escalares também são executadas em imagens.

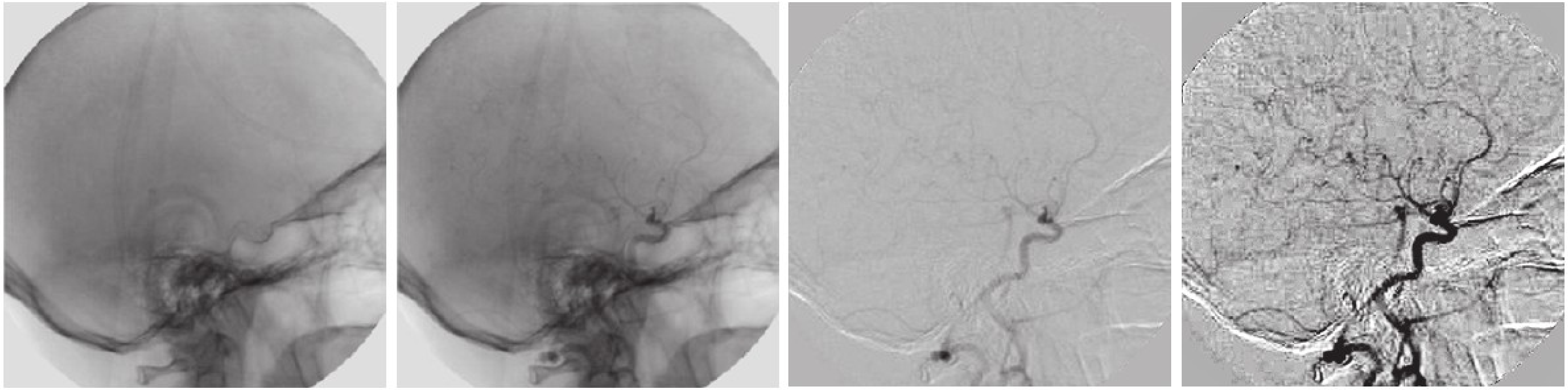
Operações Aritméticas – Exemplo 1

a b c

FIGURE 2.30 (a) Infrared image of the Washington, D.C. area. (b) Image resulting from setting to zero the least significant bit of every pixel in (a). (c) Difference of the two images, scaled to the range [0, 255] for clarity. (Original image courtesy of NASA.)

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Operações Aritméticas – Exemplo 2

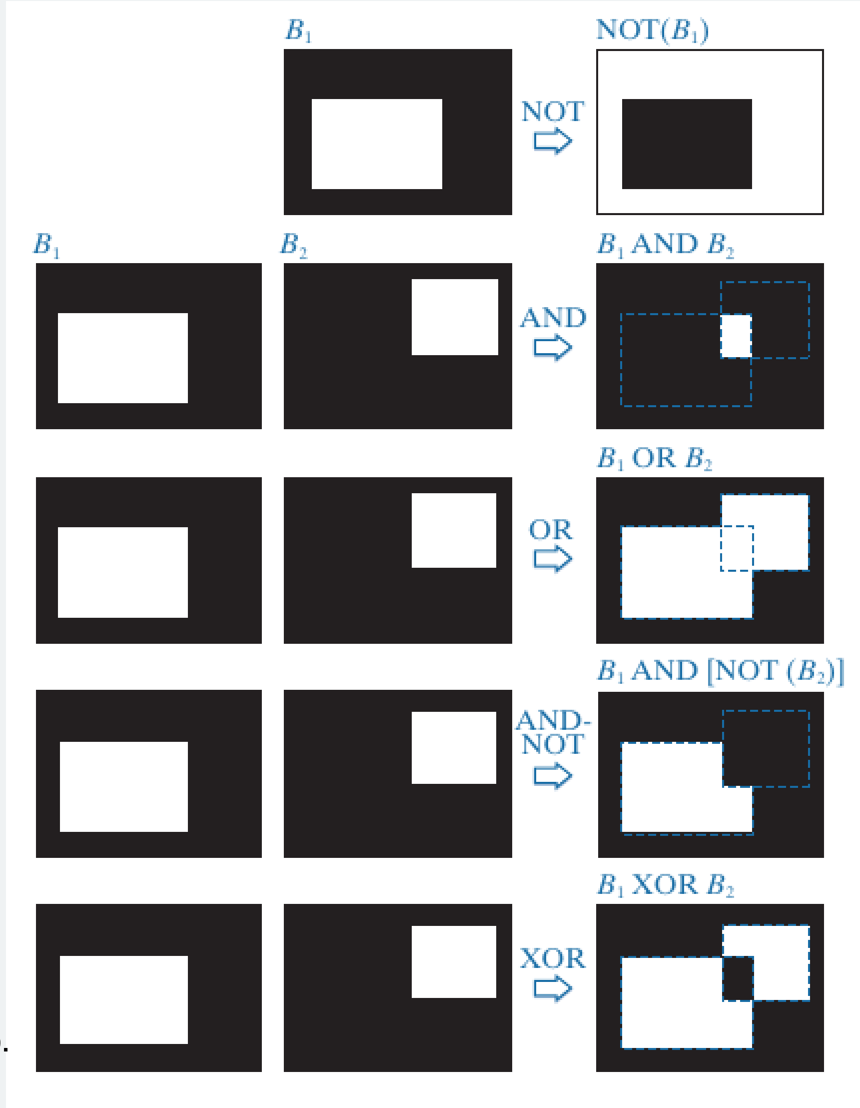


Digital subtraction angiography. (a) Mask image. (b) A live image. (c) Difference between (a) and (b). (d) Enhanced difference image. (Figures (a) and (b) courtesy of the Image Sciences Institute, University Medical Center, Utrecht, The Netherlands.)

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Operações lógicas

- Operadores lógicos podem ser aplicados a imagens
  - Expressões e propriedades lógicas também podem ser aplicadas às imagens
    - Ex.: Leis comutativas, distributivas, associativas e de DeMorgan.

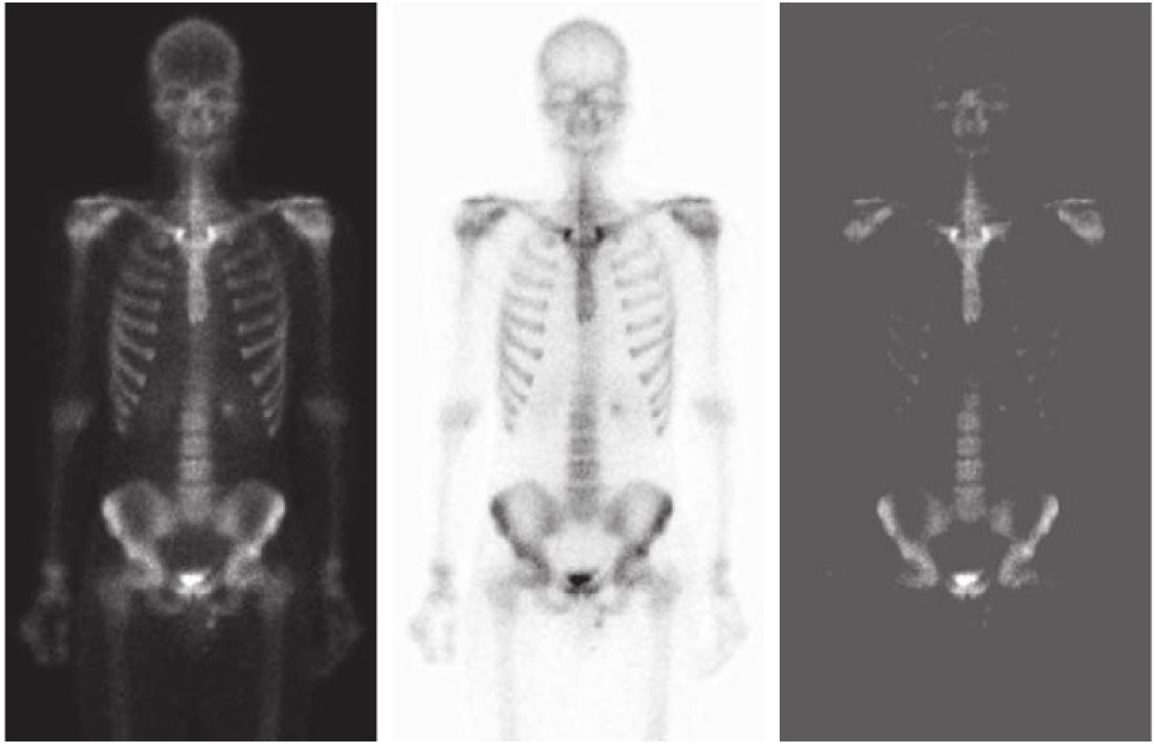


Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Operações lógicas

a b c

FIGURE 2.36
Set operations involving grayscale images. (a) Original image. (b) Image negative obtained using grayscale set complementation. (c) The union of image (a) and a constant image. (Original image courtesy of G.E. Medical Systems.)



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Operações Espaciais

Operações espaciais

- Operações espaciais podem ser divididas em três grandes categorias:
  - Operações em um único pixel;
  - Operações na vizinhança;
  - Transformações espaciais geométricas.

Operações de um único pixel

- **Operações de um único pixel** correspondem ao tipo mais simples de operações em imagens digitais;
- Nessas operações, ocorre a mudança de intensidade individual dos pixels, usando uma função de transformação T, na forma

$$s = T(z)$$

  - onde z é a intensidade do pixel na imagem original e s é a intensidade mapeada correspondente do pixel na imagem processada.

Operações de vizinhança

- **Operações de vizinhança** geram pixels correspondentes na mesma coordenada em uma imagem de saída (processada), de modo que o valor do pixel é determinado pela operação na vizinhança
  - Ex.: operação para recuperar a média das intensidades dos pixels em uma região, coloração de superpixels.

Transformações geométricas

- As transformações geométricas em imagens digitais consistem de duas operações:
  - Transformações espaciais das coordenadas;
  - Interpolação de intensidade que atribui um valor de intensidade para os pixels transformados espacialmente.
- As transformações de coordenadas podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

  - onde (x, y) são coordenadas originais dos pixels e *(x’, y’)* são as coordenadas correspondentes a imagem transformada.

Transformações afins

- Dentre as **transformações geométricas**, destacam-se as **transformações afins**, que incluem escalamento, translação, rotação e cisalhamento;
  - A principal característica das transformações afins em 2-D é a preservação de pontos, linhas retas e planos;
  - Todas as transformações afins podem ser representadas usando a matriz 3x3 abaixo, onde o valor da matriz A pode ser alterado de acordo com a transformação desejada:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Utilizando uma matriz 2x2, não é possível realizar a operação de translação de valores.

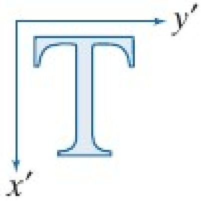
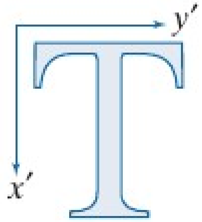
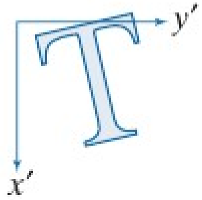
Transformações afins

- Dentre as **transformações geométricas**, destacam-se as **transformações afins**, que incluem escalamento, translação, rotação e cisalhamento;
  - Transformações afins podem ser aplicadas a imagens 2D’s ou 3’s;
  - Para imagens 2D’s, a última linha possui valores fixos
    - Em algumas bibliotecas, como OpenCV, utilizam-se matrizes 2x3, para representação das matrizes de transformações.

Links recomendados:

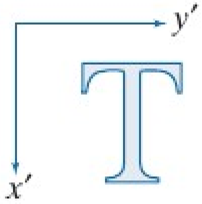
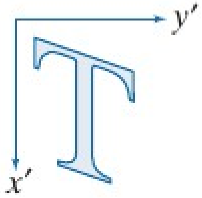
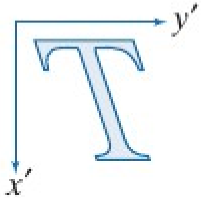
- https://www.algorithm-archive.org/contents/affine_transformations/affine_transformations.html

Transformações afins

Transformation Name	Affine Matrix, A	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Scaling/Reflection (For reflection, set one scaling factor to –1 and the other to 0)	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = c_x x$ $y' = c_y y$	
Rotation (about the origin)	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$	

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Transformações afins

Transformation Name	Affine Matrix, A	Coordinate Equations	Example
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & s_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + s_v y$ $y' = y$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = s_h x + y$	

Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

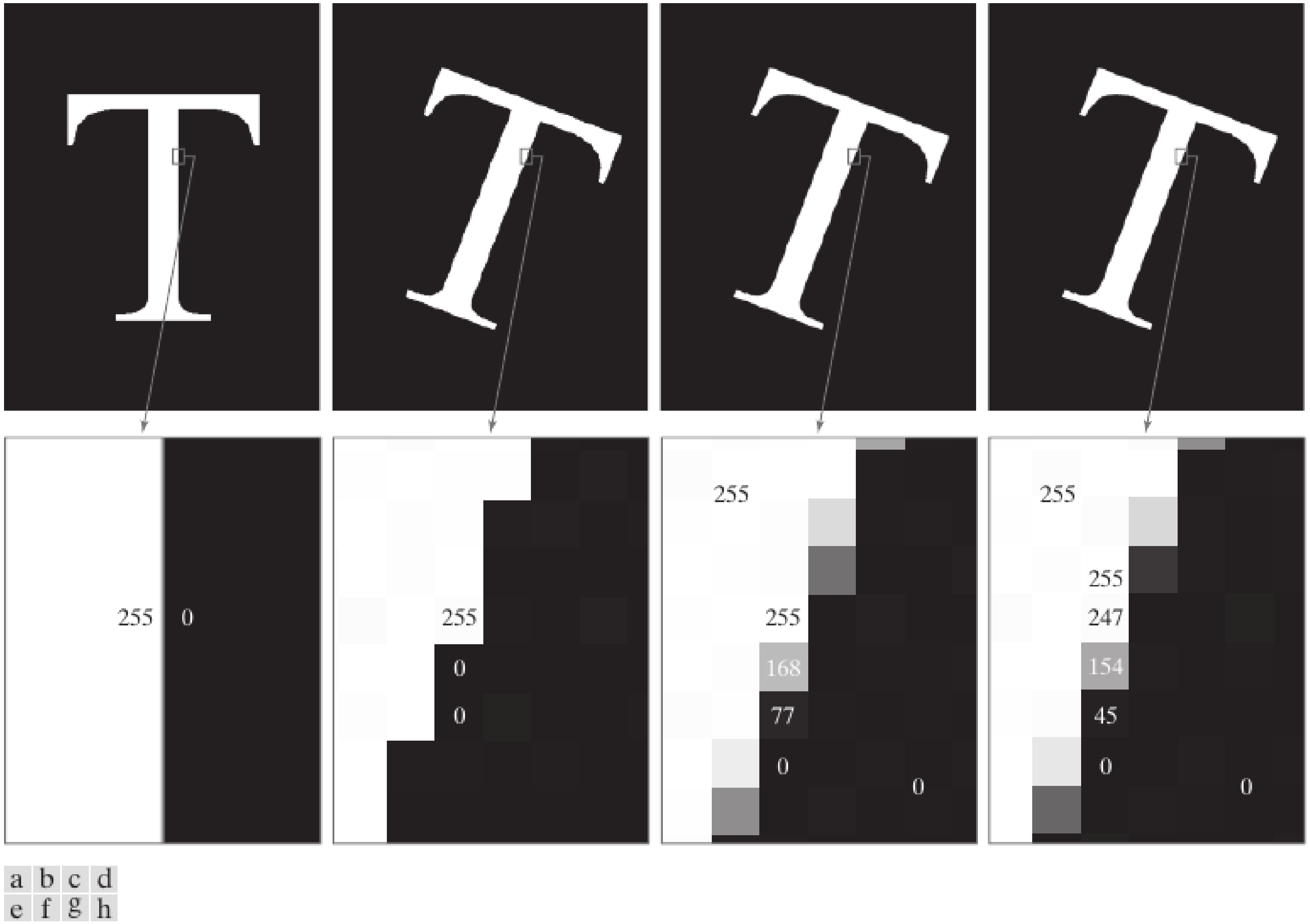
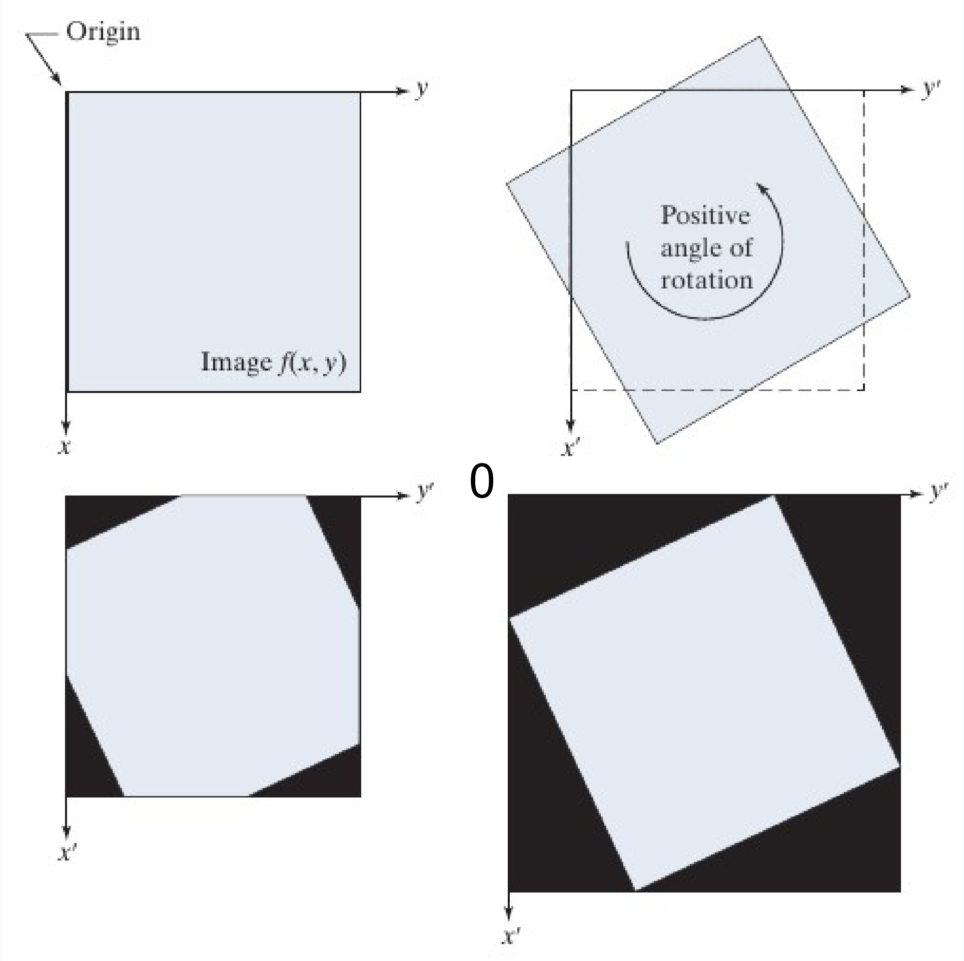


FIGURE 2.40 (a) A 541 × 421 image of the letter T. (b) Image rotated –21° using nearest-neighbor interpolation for intensity assignments. (c) Image rotated –21° using bilinear interpolation. (d) Image rotated –21° using bicubic interpolation. (e)-(h) Zoomed sections (each square is one pixel, and the numbers shown are intensity values).

Operações afins

- Operações de rotação podem requerer alterações no tamanho original da imagem, para que seja possível comportar todos os elementos da imagem original
  - Tal situação está exemplificada na figura ao lado.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Registro de imagens

- **Registro de imagens** é a operação utilizada para alinhar duas ou mais imagens
  - As imagens podem ter sido tiradas praticamente ao mesmo tempo usando sistemas / tecnologias diferentes
    - Ex.: scanner de ressonância magnética e scanner de tomografia, em exames médicos
  - As imagens podem ter sido tiradas em momentos diferentes (dias, meses, anos) usando um mesmo instrumento
    - Ex. 1: identificar construções via imagens aéreas, para cobrança de IPTU, via geoprocessamento;
    - Ex. 2: identificar o crescimento de plantações, via geoprocessamento.

Registro de imagens

- Registro de imagens requer análise quantitativa e comparação entre imagens
  - É necessária comparações entre imagens para compensar distorções geométricas causadas por variações de ângulos, distância, orientação, resolução dos sensores, translação na localização de objetos, entre outros;
  - Para isso, são utilizados pontos de controles (*tie points* ou *control points*), que correspondem a pontos onde a localização é conhecida precisamente;
  - Existem algoritmos para seleção desses pontos de controles de forma automática, além da existência de pontos artificiais, utilizados com este mesmo fim.

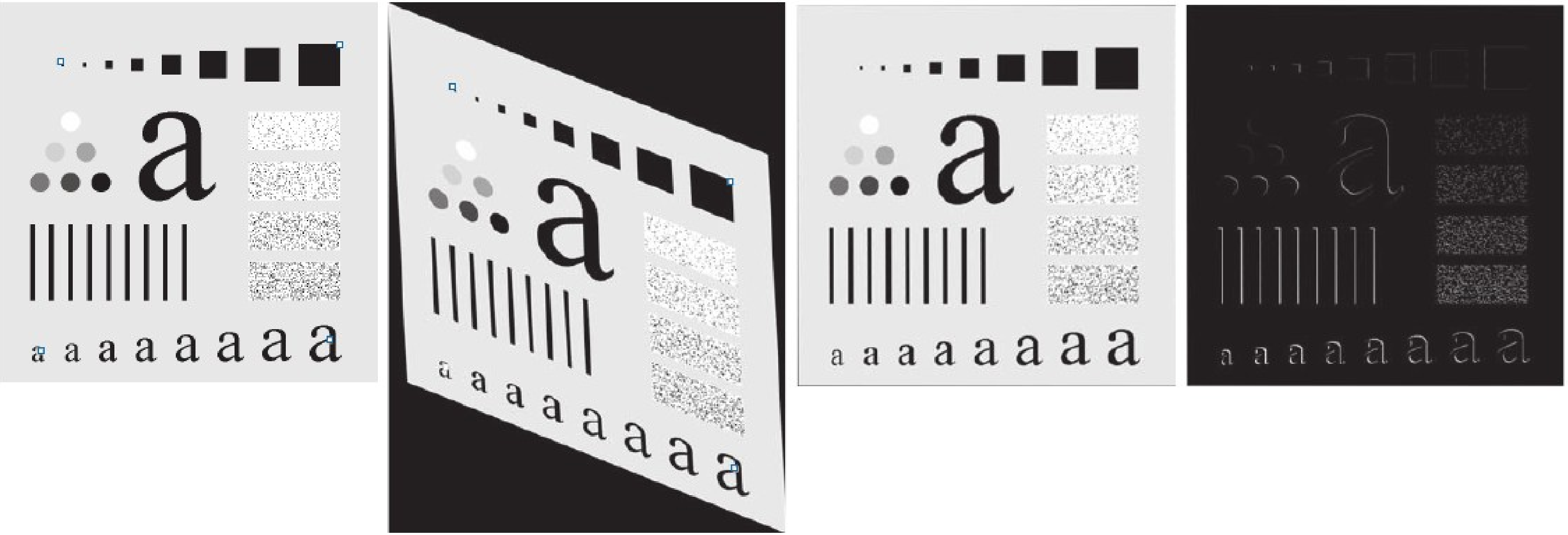
Registro de imagens

- Alguns sistemas de imagens possuem artefatos físicos (como pequenos objetos metálicos) codificados nos sensores de imagens
  - Esses artefatos produzem um conjunto conhecido de pontos diretamente em todas as imagens capturadas pelo sistema;
  - Os pontos gerados são utilizados como pontos de controle.
  - Normalmente os pontos de controle são quadrados – no entanto, pontos de controle mais complexos podem ser empregados para permitir melhor alinhamento das imagens.

Registro de imagens

- A imagem abaixo contém um exemplo de registro de imagens, e seus respectivos pontos de controle.

Image registration. (a) Reference image. (b) Input (geometrically distorted image). Corresponding tie points are shown as small white squares near the corners. (c) Registered (output) image (note the errors in the border). (d) Difference between (a) and (c), showing more registration errors.



Fonte: Gonzalez & Woods (2018).

Referências

Referências

- Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. **Digital Image Processing – 4th Edition.** 2018. Pearson. ISBN: 978-9353062989.
- Agostinho Brito Jr. **Processamento digital de imagens – Slides de Aula.** 2018.