Processamento e Análise de Imagens

Ana Carolina Conceição de Jesus

Engenharia da Computação (DCC)
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas)

25/02/2025

Operações Matemáticas Básicas

Sumário

Operações Matemáticas Básicas

Operações elemento a elemento e entre matrizes

- Uma operação elemento a elemento pode envolver duas ou mais imagens, sendo realizadas pixel por pixel
  - As operações elemento a elemento são muito comuns, em alguns casos são mais utilizadas que as multiplicações de matrizes
    - Um produto elemento a elemento entre duas imagens é definido

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- Um produto entre matrizes é definido como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Produto de Matrizes - Multiplicação Normal

Considerando duas matrizes A e B como segue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

O produto $A \times B$ é calculado da seguinte forma:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 5 + 2 \times 7) & (1 \times 6 + 2 \times 8) \\ (3 \times 5 + 4 \times 7) & (3 \times 6 + 4 \times 8) \end{pmatrix}$$

Resultado:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Considerando as mesmas matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A multiplicação elemento a elemento $(A \circ B)$ é feita simplesmente multiplicando os elementos correspondentes de A e B:

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 1 \times 5 & 2 \times 6 \\ 3 \times 7 & 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}$$

Resultado:

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}$$

Operações em Imagens

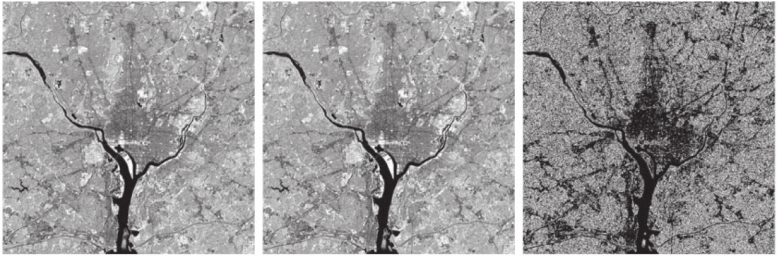
- Existem dois tipos de operações relacionadas ao processamento de imagens
  - Aritméticas
  - Lógicas
- Essas operações são frequentemente utilizadas como etapas de
  - Análise de diferenças entre imagens
  - Aumento ou redução da intensidade de pixels
  - Entre outras aplicações
- Além disso, as operações de matrizes por escalares também são executadas em imagens

Operações em Imagens

- As operações aritméticas podem e são frequentemente executadas sobre imagens
  - **Adição:** $s(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$
  - **Subtração:** $d(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$
  - **Multiplicação:** $p(x,y) = f(x,y) \times g(x,y)$
  - **Divisão:** $v(x,y) = f(x,y) \div g(x,y)$
- As operações lógicas podem ser aplicadas a imagens
  - Leis comutativas
  - Distributivas
  - Associativas
  - DeMorgan

Exemplos de operações aritméticas

Exemplo 01

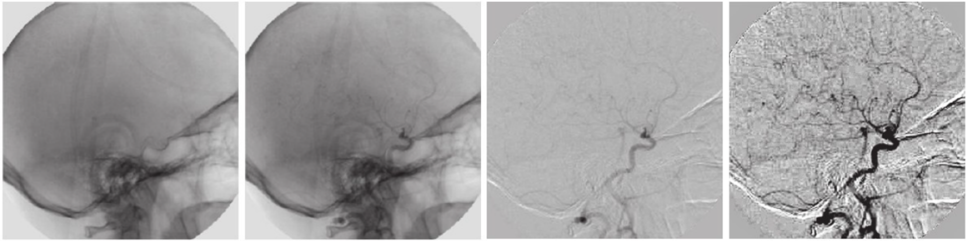


a b c

FIGURE 2.30 (a) Infrared image of the Washington, D.C. area. (b) Image resulting from setting to zero the least significant bit of every pixel in (a). (c) Difference of the two images, scaled to the range [0, 255] for clarity. (Original image courtesy of NASA.)

- Em A mostra a imagem original capturada na área de Washington
- Em B mostra a imagem tendo o bit mais significativo setado para zero
- E em C mostra a diferença entre as duas imagens, na escala [0, 255]

Exemplo 02



Digital subtraction angiography. (a) Mask image. (b) A live image. (c) Difference between (a) and (b). (d) Enhanced difference image. (Figures (a) and (b) courtesy of the Image Sciences Institute, University Medical Center, Utrecht, The Netherlands.)

- Em A temos uma máscara
- Em B temos uma imagem ao vivo
- Em C temos a diferença entre as A e B
- E em D temos a imagem melhorada

Operações aritméticas

Operação de Adição

Dada as matrizes $f(x,y)$ e $g(x,y)$ como segue:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A operação de adição é:

$$s(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Operação de Subtração

Dada as matrizes $f(x,y)$ e $g(x,y)$ como segue:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A operação de subtração é:

$$d(x,y) = f(x,y) - g(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Operação de Multiplicação

Dada as matrizes $f(x,y)$ e $g(x,y)$ como segue:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A operação de multiplicação é:

$$p(x,y) = f(x,y) \times g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando o produto:

$$p(x,y) = \begin{pmatrix} (1 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 0 + 2 \times 3) \\ (3 \times 2 + 4 \times 1) & (3 \times 0 + 4 \times 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Operação de Divisão

Dada as matrizes $f(x,y)$ e $g(x,y)$ como segue:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A operação de divisão é:

$$v(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{2} & \frac{8}{2} \\ \frac{10}{2} & \frac{12}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Operações Lógicas

Lei Comutativa

A operação lógica AND é comutativa, ou seja:

$$f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y) = g(x,y)\,\text{AND}\,f(x,y)$$

Exemplo: Dada as matrizes:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A operação AND é realizada como:

$$f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y) = \begin{pmatrix} 1\,\text{AND}\,0 & 0\,\text{AND}\,1 \\ 1\,\text{AND}\,1 & 1\,\text{AND}\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E:

$$g(x,y)\,\text{AND}\,f(x,y) = \begin{pmatrix} 0\,\text{AND}\,1 & 1\,\text{AND}\,0 \\ 1\,\text{AND}\,1 & 0\,\text{AND}\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lei Distributiva

A operação lógica AND distribui sobre a operação OR, ou seja:

$$f(x,y)\,\text{AND}\,(g(x,y)\,\text{OR}\,h(x,y)) = (f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y))\,\text{OR}\,(f(x,y)\,\text{AND}\,h(x,y))$$

Exemplo: Considerando $h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

$$f(x,y)\,\text{AND}\,(g(x,y)\,\text{OR}\,h(x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,\text{AND}\,\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,\text{OR}\,\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Primeiro, realizamos a operação OR entre $g(x,y)$ e $h(x,y)$:

$$g(x,y)\,\text{OR}\,h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E depois aplicamos o AND com $f(x,y)$:

$$f(x,y)\,\text{AND}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lei Associativa

A operação lógica AND é associativa, ou seja:

$$(f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y))\,\text{AND}\,h(x,y) = f(x,y)\,\text{AND}\,(g(x,y)\,\text{AND}\,h(x,y))$$

Exemplo: Dada as matrizes $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e $h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

Primeiro, realizamos a operação no lado esquerdo:

$$(f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y))\,\text{AND}\,h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{AND} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E no lado direito: $f(x,y)\,\text{AND}\,(g(x,y)\,\text{AND}\,h(x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{AND} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

O resultado é o mesmo, confirmando a associatividade.

Leis de DeMorgan

As leis de DeMorgan afirmam que $\neg(f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y)) = \neg f(x,y)\,\text{OR}\,\neg g(x,y)$
Exemplo: Dada as matrizes:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A operação $\neg(f(x,y)\,\text{AND}\,g(x,y))$ resulta em:

$$\neg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{AND} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \neg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E a operação $\neg f(x,y)\,\text{OR}\,\neg g(x,y)$ resulta em:

$$\neg f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \neg g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

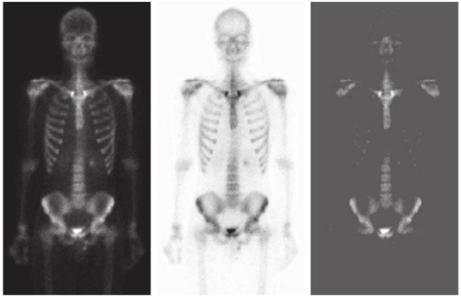
Logo:

$$\neg f(x,y)\,\mathrm{OR}\,\neg g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que confirma a Lei de DeMorgan

Exemplo de operação lógica

Exemplo 01



a b c

FIGURE 2.36 Set operations involving grayscale images. (a) Original image. (b) Image negative obtained using grayscale set complementation. (c) The union of image (a) and a constant image. (Original image courtesy of G.E. Medical Systems.)

- Em A mostra a imagem original
- Em B mostra a imagem negativa, obtida usando a escala de cinza e setando com o complementar
- E em C mostra a união de A e uma imagem constante

Operações espaciais

Operações espaciais

- Operações espaciais podem ser divididas em três grandes categorias
  - Operações em um único pixel
  - Operações na vizinhança
  - Transformações espaciais geométricas

Operações em um único pixel

- Operações de um único pixel correspondem ao tipo mais simples de operações em imagens digitais
- Nessas operações, ocorre a mudança de intensidade individual dos pixels, usando uma função de transformação T, na forma:

$$s = T(z)$$

- Onde z é a intensidade do pixel na imagem original e s é a intensidade mapeada correspondente do pixel na imagem processada

Operações de vizinhança

- Operações de vizinhança geram pixels correspondentes na mesma coordenada em uma imagem de saída (processada), de modo que o valor do pixel é determinado pela operação na vizinhança
- Ex.: operação para recuperar a média das intensidades dos pixels em uma região, coloração de superpixels.

Transformações geométricas

- As transformações geométricas em imagens digitais consistem de duas operações
  - Transformações espaciais das coordenadas;
  - Interpolação de intensidade que atribui um valor de intensidade para os pixels transformados espacialmente
- As transformações de coordenadas podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

- em que (x, y) são coordenadas originais dos pixels e (x', y') são as coordenadas correspondentes a imagem transformada

Transformações afins

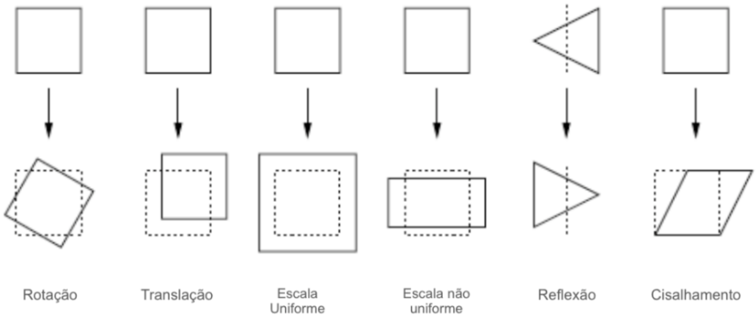
- Dentre as transformações geométricas, destacam-se as transformações afins, que incluem escalamento, translação, rotação e cisalhamento
  - A principal característica das transformações afins em 2-D é a preservação de pontos, linhas retas e planos
  - Todas as transformações afins podem ser representadas usando a matriz 3x3 abaixo, onde o valor da matriz A pode ser alterado de acordo com a transformação desejada

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathsf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

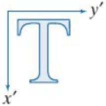
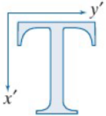
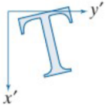
  - Utilizando uma matriz 2x2, não é possível realizar a operação de translação de valores

Transformações afins

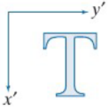
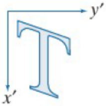
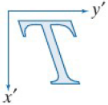
- Transformações afins podem ser aplicadas a imagens 2D's ou 3's
- Para imagens 2D's, a última linha possui valores fixos
  - Em algumas bibliotecas, como OpenCV, utilizam-se matrizes 2x3, para representação das matrizes de transformações



Transformações afins

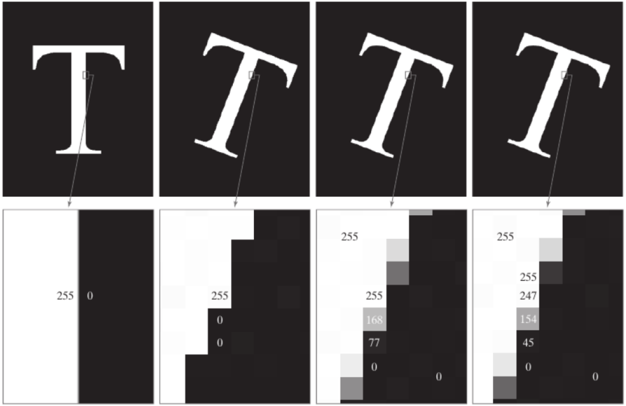
Transformation Name	Affine Matrix, A	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Scaling/Reflection (For reflection, set one scaling factor to –1 and the other to 0)	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = c_x x$ $y' = c_y y$	
Rotation (about the origin)	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$	

Transformações afins

Transformation Name	Affine Matrix, A	Coordinate Equations	Example
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & s_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + s_v y$ $y' = y$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = s_h x + y$	

Transformações afins

- Em B temos a imagem rotacionada -21° usando interpolação pelo vizinho mais próximo
- Em C temos a imagem rotacionada -21°, porém utilizando a interpolação bilinear
- Em D temos a imagem rotacionada -21°, porém utilizando a interpolação bicúbica
- De E-H estão sendo mostradas áreas de A-D com as intensidades de alguns pixels

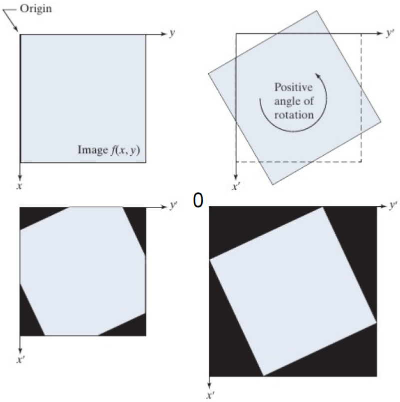


a b c d
e f g h

FIGURE 2.40 (a) A 541 × 421 image of the letter T. (b) Image rotated −21° using nearest-neighbor interpolation for intensity assignments. (c) Image rotated −21° using bilinear interpolation. (d) Image rotated −21° using bicubic interpolation. (e)-(h) Zoomed sections (each square is one pixel, and the numbers shown are intensity values).

Transformações afins

- Operações de rotação podem requerer alterações no tamanho original da imagem
- Isso, porque é preciso que seja possível comportar todos os elementos da imagem original
- Tal situação está exemplificada na figura ao lado



Registro de imagens

- Registro de imagens é a operação utilizada para alinhar duas ou mais imagens
- As imagens podem ter sido tiradas praticamente ao mesmo tempo usando sistemas / tecnologias diferentes
  - Ex.: scanner de ressonância magnética e scanner de tomografia, em exames médicos
- As imagens podem ter sido tiradas em momentos diferentes (dias, meses, anos) usando um mesmo instrumento
  - Ex. 1: identificar construções via imagens aéreas, para cobrança de IPTU, via geoprocessamento
  - Ex. 2: identificar o crescimento de plantações, via geoprocessamento

Registro de imagens

- Alguns sistemas de imagens possuem artefatos físicos (como pequenos objetos metálicos) codificados nos sensores de imagens
  - Esses artefatos produzem um conjunto conhecido de pontos diretamente em todas as imagens capturadas pelo sistema
  - Os pontos gerados são utilizados como pontos de controle e normalmente esses pontos são quadrados
  - No entanto, pontos de controle mais complexos podem ser empregados para permitir melhor alinhamento das imagens

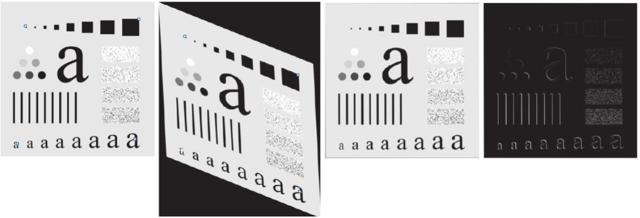


Image registration. (a) Reference image. (b) Input (geometrically distorted image). Corresponding tie points are shown as small white squares near the corners. (c) Registered (output) image (note the errors in the border). (d) Difference between (a) and (c), showing more registration errors.

Referências Bibliográficas

[1] GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. *Processamento digital de imagens*. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. E-book. ISBN 9788576054016. (Livro Eletrônico).

[2] CHOLLET, François. *Deep learning with Python*. 2nd ed. Shelter Island, NY: Manning Publications, c2021. E-book. ISBN 9781617296864. (Livro Eletrônico).

[3] Exemplos de interpolação

Obrigada

Ana Carolina C. de Jesus

https://www.linkedin.com

accj1990@gmail.com

accjesus@sga.pucminas.br

PUC Minas

"Todas as verdades são fáceis de compreender quando são descobertas; o objetivo é descobri-las."

Galileo Galilei, 1962