# Міністерство освіти і науки України Львівський національний університет імені Івана Франка Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра програмування

## Лабораторна робота

Функції Лаґерра з курсу "Виробнича практика"

> Виконав: студент групи ПМІ-21 Дудинець Олександр Іванович

**Мета роботи:** здобути практичні навички використання многочленів Лаґерра, їхніх прямих та обернених перетворень.

## Перетворення Лагера

```
[1]: import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import ipywidgets as widgets
from typing import Callable
```

#### 1.5.1 Многочлени Лаґерра

Функція, що обчислює многочлен Лаґерра порядку n, для заданого значення аргументу t та параметрів beta та sigma

```
[2]: def laguerre_polymonials(
             t: float,
             n: int,
             beta: float = 2.0,
             sigma: float = 4.0
     ) -> float:
         Функція для обчислення многочлену Лаґерра
                         Значення аргументу
         :param t:
         :param n:
                         Степінь многочлена Лаґерра
         :param beta: Параметр бета
         :param sigma: Параметр сигма
         :return:
                         Значення многочлена Лаґерра
         11 11 11
         # Валідація вхідних даних
         if beta < 0:
             raise ValueError('Value "beta" must be positive')
         if sigma < beta:</pre>
             raise ValueError('Value "sigma" must be greater than beta')
         if n < 0:
             raise ValueError('Value "n" must be positive')
         # Найкращі випадки
         1_prev_prev = np.sqrt(sigma) * np.exp(-beta * t / 2)
         l_prev = np.sqrt(sigma) * (1 - sigma * t) * np.exp(-beta * t / 2)
         if n == 0:
```

```
return l_prev_prev

if n == 1:
    return l_prev

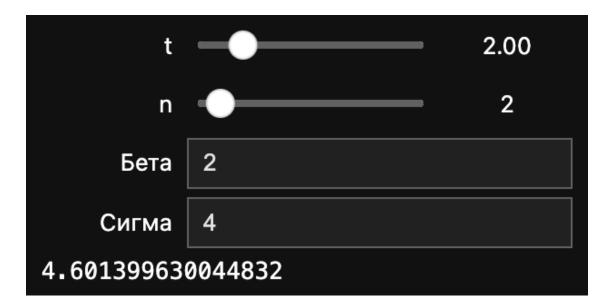
# Обчислення

for i in range(2, n + 1):
    temp = l_prev
    l_prev = (2 * i - 1 - sigma * t) * l_prev / i - (i - 1) * l_prev_prev / i
    l_prev_prev = temp

return l_prev
```

```
[3]: widgets.interact(
         laguerre_polymonials,
         t=widgets.FloatSlider(
             value=2,
             min=0,
             \max=10,
             step=0.1,
             description='t'
         ),
         n=widgets.IntSlider(
             value=2,
             min=0,
             \max=20,
             step=1,
             description='n'
         ),
         beta=widgets.FloatText(
             value=2,
             min=0,
             \max=10,
             step=0.1,
             description='Beta'
         sigma=widgets.FloatText(
             value=4,
             min=0,
             \max=10,
             step=0.1,
             description='Сигма'
         )
     )
```

[3]: <function \_\_main\_\_.laguerre\_polymonials(t: float, n: int, beta: float = 2.0, sigma: float = 4.0) -> float>



#### 1.5.2 Табуляція многочленів Лаґерра

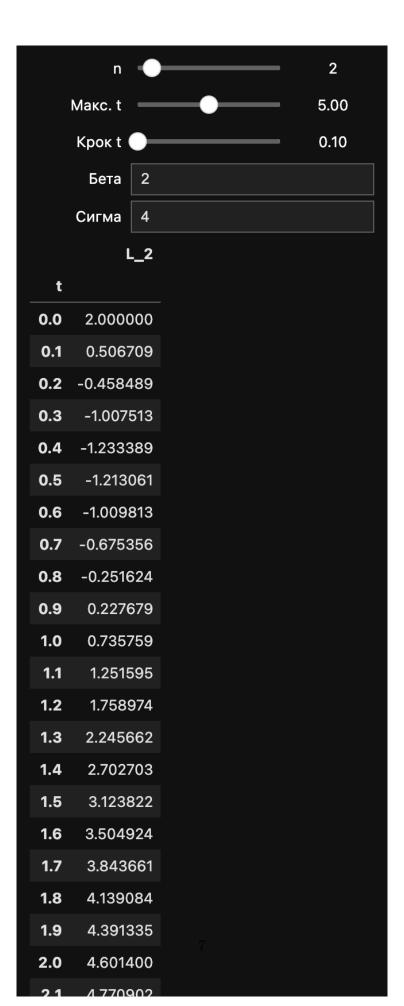
Функція, що табулює многочлен Лаґерра порядку n від 0 до t тах

```
[4]: def laguerre_polynomials_tabulation(
             n: int,
             t_max: float,
             t_step: float = 0.1,
             beta: float = 2.0,
             sigma: float = 4.0
     ) -> pd.DataFrame:
         11 11 11
         Функція для табуляції многочленів Лаґерра
         :param n:
                     Степінь многочлена Лаґерра
         :param t_max: Максимальне значення аргументу
         :param\ t\_step: Крок аргументу
         :param beta: Параметр бета
         :param sigma: Параметр сигма
         :return:
                        DataFrame з табульованими значеннями
         11 11 11
         # Валідація вхідних даних
         if beta < 0:
             raise ValueError('Value "beta" must be positive')
         if sigma < beta:
             raise ValueError('Value "omega" must be greater than beta')
         if n < 0:
             raise ValueError('Value "n" must be positive')
         if t_max < 0:</pre>
             raise ValueError('Value "t_max" must be positive')
         if t_step < 0:</pre>
             raise ValueError('Value "t_step" must be positive')
         # Табуляція
         t = np.arange(0, t_max, t_step)
         return pd.DataFrame(
             data={
                 f'L_{n}': [laguerre_polymonials(t=i, n=n, beta=beta, sigma=sigma)_
      \rightarrowfor i in t]
         ).set_index('t')
```

```
[5]: widgets.interact(
         laguerre_polynomials_tabulation,
         n=widgets.IntSlider(
             value=2,
             min=0,
             \max=20,
             step=1,
             description='n'
         t_max=widgets.FloatSlider(
             value=5,
             min=0,
             \max=10,
             step=0.1,
             description='Makc. t'
         ),
         t_step=widgets.FloatSlider(
             value=0.1,
             min=0.1,
             \max=1,
             step=0.1,
             description='Kpok t'
         ),
         beta=widgets.FloatText(
             value=2,
             min=0,
             max=10,
             step=0.1,
             description='Beta'
         ),
         sigma=widgets.FloatText(
             value=4,
             min=0,
             \max=10,
             step=0.1,
             description='Curma'
         )
     )
```

```
interactive(children=(IntSlider(value=2, description='n', max=20), →FloatSlider(value=5.0, description='Maxc. t...
```

```
[5]: <function __main__.laguerre_polynomials_tabulation(n: int, t_max: float, t_step:
    float = 0.1, beta: float = 2.0, sigma: float = 4.0) ->
    pandas.core.frame.DataFrame>
```



#### 1.5.3 Обчислювальний експеримент

Функція, що визначає найменше значення аргументу t, при якому всі поліноми Лаґерра порядку від 0 до n max — менші за epsilon

```
[6]: def experiment(
             n_{max}: int = 20,
             epsilon: float = 1e-3,
             t_max: float = 100,
             t_points: int = 1000,
             beta: float = 2.0,
             sigma: float = 4.0
     ) -> tuple[float, pd.DataFrame]:
         Функція для проведення обчислювального експерименту. Пошук такого t, що_{\sqcup}
      \hookrightarrow /laguerre_polymonials(n, t)/ < epsilon для усix n \in [0, N]
         :param n_max:
                              Верхня межа степеня многочлена Лаґерра
                             Точність
         :param epsilon:
         :param t_max:
                             Максимальне значення аргументу
         :param t_points:
                             Kiль\kappaicmь moчо\kappa для \epsiloniд 0 до t_max
         :param beta:
                             Параметр бета
         :param sigma:
                             Параметр сигма
                             Кортеж з t та DataFrame з табульованими значеннями
         :return:
         .....
         # Валідація вхідних даних
         if n_max < 0:
             raise ValueError('Value "N" must be positive')
         if epsilon < 0:
             raise ValueError('Value "epsilon" must be positive')
         if t_max < 0:</pre>
             raise ValueError('Value "t_max" must be positive')
         if t_points < 0:</pre>
             raise ValueError('Value "t_points" must be positive')
         # Пошук t
         T = np.linspace(0, t_max, t_points)
         N = range(0, n_max + 1)
         suitable_t = None
         for t in T:
             is_t_suitable = True
             for n in N:
```

```
if abs(laguerre_polymonials(t=t, n=n, beta=beta, sigma=sigma)) > 
      →epsilon:
                     is_t_suitable = False
                     break
             if is_t_suitable and suitable_t is None:
                 suitable_t = t
                 break
         # Табуляція
         return suitable_t, pd.DataFrame(
             data={
                 'n': N,
                 'L_n': [laguerre_polymonials(t=suitable_t, n=n, beta=beta,_
      ⇒sigma=sigma) for n in N]
             }
         ).set_index('n')
[7]: t, df = experiment()
     print(f't = \{t\}')
     df
    t = 79.07907907907908
[7]:
                  L_n
    n
     0
        9.066138e-35
     1 -2.858701e-32
     2
       4.478343e-30
     3 -4.647081e-28
       3.593209e-26
     5 -2.208132e-24
       1.123332e-22
     7 -4.865604e-21
    8 1.831625e-19
     9 -6.087176e-18
     10 1.808168e-16
     11 -4.848845e-15
     12 1.183547e-13
     13 -2.647728e-12
     14 5.460659e-11
     15 -1.043487e-09
     16 1.855654e-08
     17 -3.082750e-07
     18 4.800407e-06
     19 -7.027805e-05
     20 9.699021e-04
```

#### 1.5.4 Обчислення значень інтегралів

Функція для обчислення прямого перетворення Лаґерра за допомогою апроксимації інтегралу методом прямокутників

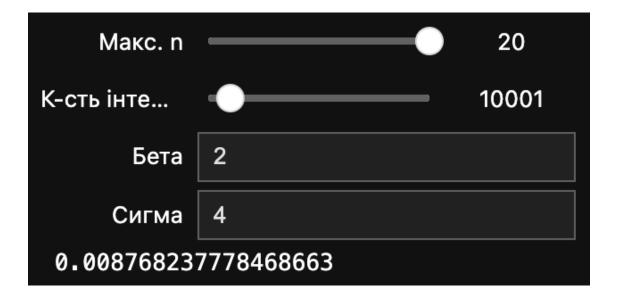
```
[8]: def quad(
             f: Callable[[float], float],
             a: float,
             b: float,
             int_points: int = 10000
     ) -> float:
         11 11 11
         Функція для обчислення наближеного значення інтегралу методом прямокутників
                             Функція, яку інтегруємо
         :param f:
                            Початок інтервалу
         :param a:
         :param b:
                             Кінець інтервалу
         :param int_points: Кількість точок для інтегрування
         :return: Значення інтегралу
         11 11 11
         x = np.linspace(a, b, int_points)
         s = sum([f(i) for i in x])
         return s * abs(b - a) / int_points
     def laguerre_transform(
             f: Callable[[float], float],
             n_max: int,
             int_points: int = 10000,
             beta: float = 2.0,
             sigma: float = 4.0
     ) -> float:
         .....
         Функція для обчислення перетворення Лаґерра
                             Функція, яку перетворюємо
         :param f:
         :param n_max: Верхня межа степеня многочлена Лаґерра (N)
         :param int_points: Кількість точок для інтегрування
         :param beta:
                           Параметр бета
         :param sigma:
                           Параметр сигма
         :return:
                          Значення перетворення Лаґерра
         11 11 11
         if n_max < 0:
             raise ValueError('Value "n_max" must be positive')
```

```
if int_points < 0:</pre>
        raise ValueError('Value "t_step" must be positive')
    # Функція для інтегрування
    def integrand(t):
        alpha = sigma - beta
        return f(t) * laguerre_polymonials(t=t, n=n_max, beta=beta, sigma=sigma)_
 \rightarrow* np.exp(-alpha * t)
    # Верхня межа інтегрування
    t_max = experiment(n_max=n_max, beta=beta, sigma=sigma)[0]
    return quad(integrand, 0, t_max, int_points)
widgets.interact(
    laguerre_transform,
    f=widgets.fixed(lambda t: np.exp(-t ** 2)),
    n_max=widgets.IntSlider(
        value=20,
       min=0,
        \max=20,
        step=1,
        description='Makc. n'
    int_points=widgets.IntSlider(
        value=10000,
        min=1,
        \max = 100000,
        step=1000,
        description='K-сть інтервалів розбиття для інтегрування'
    ),
    beta=widgets.FloatText(
        value=2,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Beta'
    ),
    sigma=widgets.FloatText(
        value=4,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Curma'
    )
```

)

interactive(children=(IntSlider(value=20, description='Maxc. n', max=20), →IntSlider(value=10000, description='...

[8]: <function \_\_main\_\_.laguerre\_transform(f: Callable[[float], float], n\_max: int, int\_points: int = 10000, beta: float = 2.0, sigma: float = 4.0) -> float>



#### 1.5.5 Перетворення Лаґерра

Функція для табулювання прямого перетворення Лаґерра порядку від 0 до n\_max

```
[9]: def laguerre_transform_tabulation(
             f: Callable[[float], float],
             n_max: int,
             int_points: int = 10000,
             beta: float = 2.0,
             sigma: float = 4.0
     ) -> pd.DataFrame:
         11 11 11
         Функція для табулювання перетворення Лаґерра
                             Функція, яку перетворюємо
         :param f:
                            Верхня межа степеня многочлена Лаґерра (N)
         :param n_max:
         :param int_points: Кількість точок для інтегрування
                            Параметр бета
         :param beta:
         :param sigma:
                            Параметр сигма
                            DataFrame з табульованими значеннями
         :return:
         11 11 11
         # Валідація вхідних даних
         if n_max < 0:
             raise ValueError('Value "n_max" must be positive')
         if int_points < 0:</pre>
             raise ValueError('Value "t_step" must be positive')
         # Табулювання
         N = range(0, n_max)
         return pd.DataFrame(
             data={
                 'n': N,
                 f'L_n': [laguerre_transform(f=f, n_max=n, beta=beta,_
      →int_points=int_points, sigma=sigma) for n in N]
             }
         ).set_index('n')
```

```
[10]: # Визначення функції

def f(t):

    if t >= 2 * np.pi:

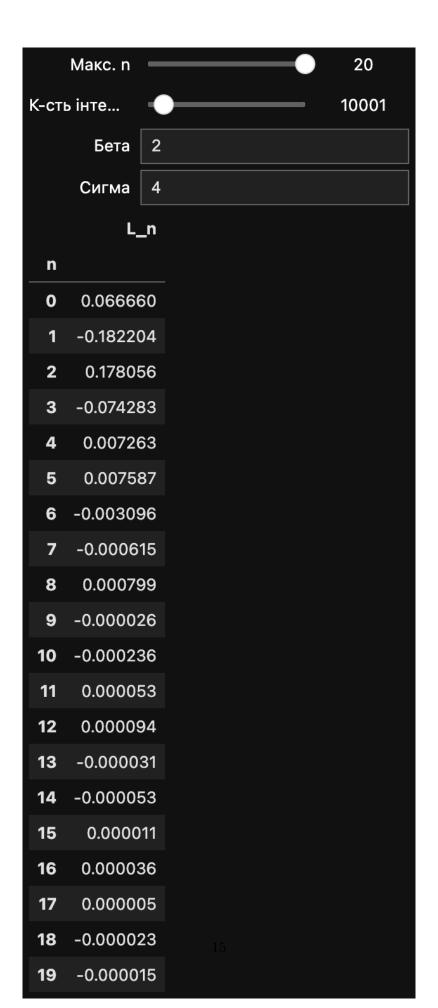
        return 0

    return np.sin(t - np.pi / 2) + 1

# Табулювання
```

```
widgets.interact(
    laguerre_transform_tabulation,
    f=widgets.fixed(f),
    n_max=widgets.IntSlider(
        value=20,
        min=0,
        \max=20,
        step=1,
        description='Makc. n'
    ),
    int_points=widgets.IntSlider(
        value=10000,
        min=1,
        \max = 100000,
        step=1000,
        description='K-сть інтервалів розбиття для інтегрування'
    beta=widgets.FloatText(
        value=2,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Beta'
    ),
    sigma=widgets.FloatText(
        value=4,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Curma'
    )
)
```

interactive(children=(IntSlider(value=20, description='Makc. n', max=20), \_\_



#### 1.5.6 Обернене перетворення Лаґерра

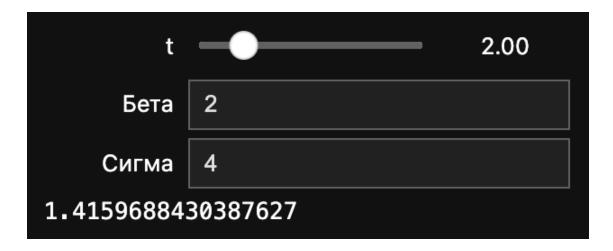
Функція для обчислення оберненого перетворення Лаґерра. Приймає послідовність коєфіцієнтів h, які можна отримати з табуляції перетворення Лаґерра

```
[11]: def inverse_laguerre_transform(
              h: list[float],
              t: float,
              beta: float = 2.0,
              sigma: float = 4.0
      ) -> float:
          11 11 11
          Функція для обчислення оберненого перетворення Лаґерра
                          Довільна послідовність дійсних чисел
          :param h:
          :param t:
                         Значення аргументу
          :param beta: Параметр бета
          :param sigma: Параметр сигма
          :return:
                          Значення оберненого перетворення Лагерра
          11 11 11
          # Обчислення
          return sum([h[k] * laguerre_polymonials(t=t, n=k, beta=beta, sigma=sigma)_u
       →for k in range(0, len(h))])
```

```
[12]: # Отримуємо послідовність h з табуляції перетворення Лаґерра
      h = laguerre_transform_tabulation(
          f=f,
          n_{max}=20,
          int_points=10000
      )['L_n'].tolist()
      widgets.interact(
          inverse_laguerre_transform,
          h=widgets.fixed(h),
          t=widgets.FloatSlider(
              value=2,
              min=0,
              max=10.
              step=0.1,
              description='t'
          ),
          beta=widgets.FloatText(
              value=2,
              min=0,
              max=10,
              step=0.1,
```

```
description='BeTa'
),
sigma=widgets.FloatText(
value=4,
min=0,
max=10,
step=0.1,
description='Curma'
)
)
```

[12]: <function \_\_main\_\_.inverse\_laguerre\_transform(h: list[float], t: float, beta:
 float = 2.0, sigma: float = 4.0) -> float>



### 1.5.7 Графік функції Лаґерра

Функція для побудови графіку многочленів Лаґерра порядку від 0 до n\_max

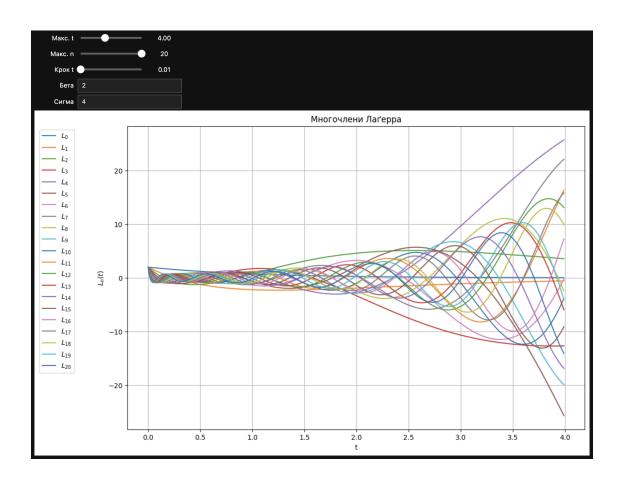
```
[13]: def laguerre_polynomials_plot(
              t_max: float,
              n_max: int,
              t_step: float = 0.01,
              beta: float = 2.0,
              sigma: float = 4.0
      ) -> None:
          11 11 11
          Функція для побудови графіку многочленів Лаґерра
          :param t_max: Максимальне значення аргументу
          :рагат п_тах: Верхня межа степеня многочлена Лаґерра
          :param t_step: Крок аргументу
          :param beta: Параметр бета
          :param sigma: Параметр сигма
          :return:
                          None
          11 11 11
          plt.figure(figsize=(12, 8))
          for n in range(0, n_max + 1):
              l_n_tabulation = laguerre_polynomials_tabulation(
                  t_max=t_max,
                  t_step=t_step
              )
              plt.plot(l_n_tabulation.index, l_n_tabulation[f'L_{n}'], label='$L_{'}+_
       →str(n) + '}$')
          plt.title('Многочлени Лагерра')
          plt.xlabel('t')
          plt.ylabel('$L_n(t)$')
          plt.grid()
          plt.legend(
              loc='upper left',
              bbox_to_anchor=(-0.2, 1)
          )
          plt.show()
```

```
value=20,
        min=0,
        \max=20,
        step=1,
        description='Makc. n'
    ),
    t_max=widgets.FloatSlider(
        value=4,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Makc. t'
    ),
    t_step=widgets.FloatSlider(
        value=0.01,
        min=0.01,
        \max=1,
        step=0.01,
        description='Kpok t'
    ),
    beta=widgets.FloatText(
        value=2,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Beta'
    ),
    sigma=widgets.FloatText(
        value=4,
        min=0,
        \max=10,
        step=0.1,
        description='Сигма'
    )
)
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=4.0, description='Maxc. t', max=10.0), 

→IntSlider(value=20, description...
```

```
[14]: <function __main__.laguerre_polynomials_plot(t_max: float, n_max: int, t_step:
    float = 0.01, beta: float = 2.0, sigma: float = 4.0) -> None>
```



# **1.5.8** Графік $\widetilde{f}^{N}(t), t \in [0, 2\pi]$

Функція для побудови графіків прямого, оберненого перетворення Лаґерра та початкової функції

```
[15]: def laguerre_transform_plot(
              f: Callable[[float], float],
              n_max: int,
              t_max: float = np.pi * 2,
              t_step: float = 0.01,
              int_points: int = 10000,
              beta: float = 2.0,
              sigma: float = 4.0
      ) -> None:
          n n n
          Функція для побудови графіку перетворення Лаґерра
          :param f:
                              Функція, яку перетворюємо
                             Верхня межа степеня многочлена Лаґерра (N)
          :param n_max:
          :param t_max:
                             Максимальне значення аргументу
          : param t_step: Крок аргументу
          :param int_points: Кількість точок для інтегрування
          :param beta:
                             Параметр бета
          :param sigma:
                              Параметр сигма
                              None
          :return:
          11 11 11
          # Обчислення послідовності h
          laguerre_transform_tabulation_values = laguerre_transform_tabulation(
              f=f,
              n_max=n_max,
              int_points=int_points,
              beta=beta,
              sigma=sigma
          h = laguerre_transform_tabulation_values['L_n'].tolist()
          # Табулювання
          T = np.arange(0, t_max, t_step)
          inverse_laguerre_transform_tabulation = pd.DataFrame(
              data={
                  't': T,
                  'h': [inverse_laguerre_transform(h=h, t=t, beta=beta, sigma=sigma)_
       \hookrightarrowfor t in T]
              }
          ).set_index('t')
```

```
# Побудова графіків
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.subplots_adjust(hspace=0.5)
plt.suptitle(f'\Gammapa\phiix \ \widetilde{\{f\}}^N(t), t\\in[0, {t_max}]$')
# Перетворення Лаґерра
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(
    laguerre_transform_tabulation_values.index,
    laguerre_transform_tabulation_values['L_n'],
plt.title(f'Перетворення Лагерра, N = {n_max}')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel(r'$L_{N}$')
plt.grid()
# Обернене перетворення Лаґерра
plt.subplot(2, 1, 2)
initial_function_tabulation = pd.DataFrame(
    data={
        't': T,
        'f': [f(t) for t in T]
    }
).set_index('t')
plt.plot(
    initial_function_tabulation.index,
    initial_function_tabulation['f'],
    label='Початкова функція',
    linewidth=6,
    color='black',
    alpha=0.25
)
plt.plot(
    inverse_laguerre_transform_tabulation.index,
    inverse_laguerre_transform_tabulation['h'],
    label='Обернене перетворення Лагерра',
    linewidth=1,
    color='green'
)
plt.title('Обернене перетворення Лагерра')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel(r'$\widetilde{f}^N(t)$')
plt.legend()
plt.grid()
```

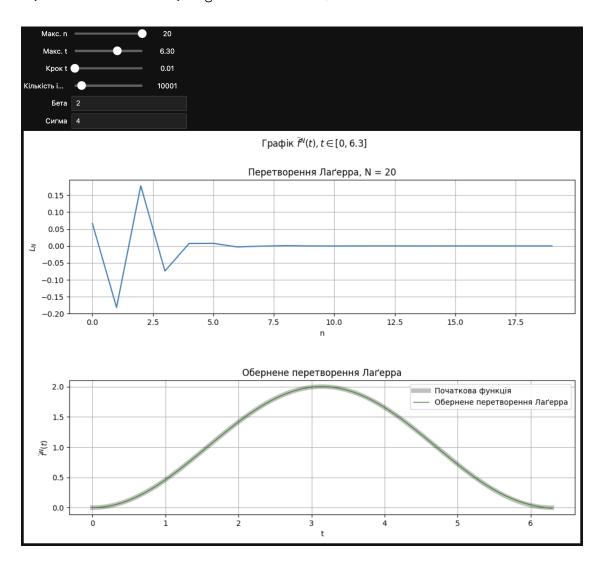
```
plt.show()
```

```
[16]: widgets.interact(
          laguerre_transform_plot,
          f=widgets.fixed(f),
          n_max=widgets.IntSlider(
              value=20,
              min=0,
              \max=20,
              step=1,
              description='Makc. n'
          t_max=widgets.FloatSlider(
              value=2 * np.pi,
              min=0,
              \max=10,
              step=0.1,
              description='Makc. t'
          ),
          t_step=widgets.FloatSlider(
              value=0.01,
              min=0.01,
              \max=1,
              step=0.01,
              description='Kpok t'
          int_points=widgets.IntSlider(
              value=10000,
              min=1,
              max=100000,
              step=1000,
              description='Кількість інтервалів розбиття для інтегрування'
          ),
          beta=widgets.FloatText(
              value=2,
              min=0,
              \max=10,
              step=0.1,
              description='Beta'
          sigma=widgets.FloatText(
              value=4,
              min=0,
              \max=10,
              step=0.1,
              description='Сигма'
          )
```

)

interactive(children=(IntSlider(value=20, description='Maxc. n', max=20), →FloatSlider(value=6.283185307179586,...

[16]: <function \_\_main\_\_.laguerre\_transform\_plot(f: Callable[[float], float], n\_max:
 int, t\_max: float = 6.283185307179586, t\_step: float = 0.01, int\_points: int =
 10000, beta: float = 2.0, sigma: float = 4.0) -> None>



# Графік $\widetilde{g}^N(t), t \in [0,1]$

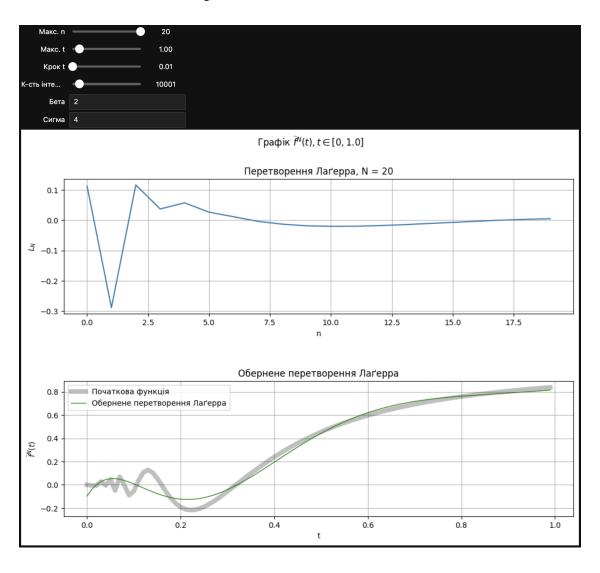
Побудова графіків прямого, оберненого перетворення Лаґерра для власної функції д

```
[17]: def g(t):
          if t != 0:
              return t * np.sin(1 / t)
          return 0
      widgets.interact(
          laguerre_transform_plot,
          f=widgets.fixed(g),
          n_max=widgets.IntSlider(
              value=20,
              min=0,
              \max=20,
              step=1,
              description='Makc. n'
          ),
          t_max=widgets.FloatSlider(
              value=1,
              min=0,
              \max=10,
              step=0.1,
              description='Makc. t'
          ),
          t_step=widgets.FloatSlider(
              value=0.01,
              min=0.01,
              \max=1,
              step=0.01,
              description='Kpok t'
          ),
          int_points=widgets.IntSlider(
              value=10000,
              min=1,
              max=100000,
              step=1000,
              description='K-сть інтервалів розбиття для інтегрування'
          ),
          beta=widgets.FloatText(
              value=2,
              min=0,
              \max=10,
              step=0.1,
              description='Beta'
          ),
```

```
sigma=widgets.FloatText(
    value=4,
    min=0,
    max=10,
    step=0.1,
    description='Curma'
)
```

interactive(children=(IntSlider(value=20, description='Maxc. n', max=20), →FloatSlider(value=1.0, description='...

[17]: <function \_\_main\_\_.laguerre\_transform\_plot(f: Callable[[float], float], n\_max:
 int, t\_max: float = 6.283185307179586, t\_step: float = 0.01, int\_points: int =
 10000, beta: float = 2.0, sigma: float = 4.0) -> None>



#### Висновок

У лабораторній роботі було розглянуто використання многочленів Лаґерра у контексті обчислення їхнього прямого та оберненого перетворення. Були реалізовані функції для обчислення многочленів, їхньої табуляції, проведення обчислювального експерименту для знаходження оптимального значення аргументу t та обчислення перетворень.

В результаті роботи було показано, як можна використовувати многочлени Лаґерра для перетворення функцій та як здійснювати обернене перетворення для відновлення початкових функцій. Проведено аналіз та вивчення залежностей між параметрами многочленів Лаґерра та їхніми властивостями.

Окремий акцент був зроблений на побудові графіків многочленів Лаґерра для різних значень степенів. Це дозволило візуально спостерігати їхні властивості та залежність від параметрів.

Також було проведено аналіз двох функцій, одна з яких була задана, а інша — власна. Для них було побудовано графіки перетворення Лаґерра та оберненого перетворення, що дозволило візуально спостерігати схожість графіку оберненого перетворення та початкової функції.

Отже, лабораторна робота надала можливість здобути практичні навички використання многочленів Лаґерра.