Document de travail (Working Paper)

"Eléments d'un modèle latitude-profondeur très simple — Application à l'injection de "CO2 idéalisée" dans l'océan"

Deleersnijder, Eric

Référence bibliographique

Deleersnijder, Eric. *Eléments d'un modèle latitude-profondeur très simple — Application à l'injection de "CO2 idéalisée" dans l'océan.* (2006) 8 pages

Eléments d'un modèle latitude-profondeur très simple – Application à l'injection de "CO2 idéalisé" dans l'océan

Eric Deleersnijder, 19-24 janvier 2006

Circulation méridienne

Soient les coordonnées spatiales y et z, la première étant associée à la latitude tandis que la seconde représente la distance au fond de l'océan, qui est supposé horizontal. Le domaine d'intérêt est défini par les inégalités

$$0 \leq y \leq L \ , \quad 0 \leq z \leq H \ , \tag{1}$$

où L et H sont des constantes positives. L'interface océan-atmosphère est situé en $z=H$, tandis que le fond correspond à $z=0$. Les frontières sud et nord du domaine sont définies respectivement par les relations $y=0$ et $y=L$.

On se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. La circulation méridienne est supposée indépendante du temps. La composante méridienne de la vitesse[1], $v(y,z)$, et la vitesse verticale[2], $w(y,z)$, vérifient l'équation de continuité

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ . \tag{2}$$

D'autre part, l'imperméabilité des frontières du domaine impose que la vitesse satisfasse les contraintes suivantes:

$$\left[v(y,z)\right]_{y=0,L} = 0 = \left[w(y,z)\right]_{z=0,H} \ . \tag{3}$$

On peut déduire la vitesse de la fonction de courant méridienne $\psi(y,z)$ selon

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \ , \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial y} \ . \tag{4}$$

On impose que la fonction de courant soit égale à une constante[3] sur la frontière du domaine d'intérêt:

$$\left[\psi(y,z)\right]_{y=0,L} = 0 = \left[\psi(y,z)\right]_{z=0,H} \ . \tag{5}$$

La vitesse (4) satisfait l'équation de continuité et les relations (5) sont équivalentes aux conditions d'imperméabilité (3). Il reste maintenant à donner une expression plausible de la fonction de courant méridienne.

Une idéalisation acceptable de la circulation méridienne de l'Atlantique consiste à supposer que la fonction de courant méridienne présente un seul extremum, en réalité un maximum[4], situé à proximité de la surface et de la frontière nord du domaine. Si les coordonnées de ce maximum sont (y_0, z_0), on a donc

$$\frac{L - y_0}{L} << 1 \quad \text{et} \quad \frac{H - z_0}{H} << 1 \ . \tag{6}$$

[1] Positive vers le nord.

[2] Positive vers le haut.

[3] Sans perte de généralité, on peut prescrire que cette constante soit nulle.

[4] De la sorte, la circulation de surface est dirigée vers le nord, tandis que la circulation profonde est dirigée vers le sud.

Le maximum de la fonction de courant, $\Psi = \psi(y_0,z_0)$, désigne le débit qui traverse toute courbe allant du point (y_0,z_0) à un point de la frontière du domaine; il s'agit d'une mesure de l'intensité de la circulation méridienne. Finalement, il convient de souligner que la fonction de courant doit être dérivable — sans quoi l'on ne pourrait en déduire un champ de vitesse au moyen des relations (4).

Soient la fonction $\varphi(\xi,\xi_0)$ et sa dérivée $\varphi'(\xi,\xi_0)$ par rapport à ξ:

$$\varphi(\xi,\xi_0) = \frac{\xi(2\xi_0 - \xi)}{\xi_0^2}\chi(\xi_0 - \xi) \ , \tag{7}$$

$$\varphi'(\xi,\xi_0) = \frac{2(\xi_0 - \xi)}{\xi_0^2}\chi(\xi_0 - \xi) \ , \tag{8}$$

où χ désigne la fonction de Heaviside, qui vaut l'unité si son argument est positif et zéro dans le cas contraire. Une expression de la fonction de courant qui satisfait les contraintes exprimées plus haut est alors

$$\begin{aligned}\psi(y,z) = \Psi\,[&\varphi(y,y_0)\varphi(z,z_0) + \varphi(y,y_0)\varphi(H-z,H-z_0) \\ &+ \varphi(L-y,L-y_0)\varphi(H-z,H-z_0) + \varphi(L-y,L-y_0)\varphi(z,z_0)]\ .\end{aligned} \tag{9}$$

Les composantes de la vitesse qui lui sont associées valent

$$\begin{aligned}v(y,z) = \Psi\,[&-\varphi(y,y_0)\varphi'(z,z_0) + \varphi(y,y_0)\varphi'(H-z,H-z_0) \\ &+ \varphi(L-y,L-y_0)\varphi'(H-z,H-z_0) - \varphi(L-y,L-y_0)\varphi'(z,z_0)]\ ,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}w(y,z) = \Psi\,[&\varphi'(y,y_0)\varphi(z,z_0) + \varphi'(y,y_0)\varphi(H-z,H-z_0) \\ &- \varphi'(L-y,L-y_0)\varphi(H-z,H-z_0) - \varphi'(L-y,L-y_0)\varphi(z,z_0)]\ .\end{aligned} \tag{11}$$

A l'évidence, il est facile d'évaluer numériquement en tout point du domaine d'intérêt les expressions (9)-(11). Toutefois, pour obtenir une vitesse non divergente sur une grille donnée, il est préférable de dériver numériquement la fonction de courant, à condition que les points où sont définies la fonction de courant et les composantes de la vitesse soient “bien choisis”.

Traceur provenant de l'atmosphère

On considère un traceur passif, qui pourrait être du “CO2 idéalisé”. Ce traceur est produit ou injecté dans l'atmosphère et s'introduit dans l'océan en traversant l'interface air-mer. Si $C(t,y,z)$ désigne la concentration de ce traceur à l'instant *t* au point (y,z), alors celle-ci est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(vC - K_h\frac{\partial C}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(wC - K_v\frac{\partial C}{\partial z}\right), \tag{12}$$

où K_h et K_v désignent respectivement la diffusivité horizontale et la diffusivité verticale. Dans un modèle simple, on peut considérer que la première est une constante, mais, si l'on veut éviter l'implémentation d'un algorithme d'ajustement convectif, il faut que la seconde dépende de la position de telle sorte qu'elle puisse être utilisée pour représenter la convection profonde[5]. Si l'on fait l'hypothèse que l'eau profonde se forme dans la région définie par les

[5] Marotzke J., 1991, Influence of convective adjustment on the stability of the thermohaline circulation, *Journal of Physical Oceanography*, 21(6), 903-907

inégalités $y_0 \le y \le L$ et $0 \le z \le H$, on pourrait adopter la paramétrisation suivante de la diffusivité verticale:

$$K_v(y) = \begin{cases} K_v^- & \text{si } 0 \le y < y_0 \\ K_v^+ & \text{si } y_0 \le y \le L \end{cases} , \tag{13}$$

où K_v^- et K_v^+ sont des constantes telles que[6]

$$K_v^- \ll K_v^+ . \tag{14}$$

Il est sans doute inutile de préciser que les diffusivités doivent être strictement positives, c'est-à-dire $K_h, K_v > 0$.

Le fond de l'océan et ses frontières latérales sont imperméables. Il convient donc d'imposer les conditions aux limites suivantes:

$$\left[K_h \frac{\partial C}{\partial y}\right]_{y=0,L} = 0 = \left[K_v \frac{\partial C}{\partial z}\right]_{z=0} . \tag{15}$$

Si k désigne la *piston velocity*, on paramétrise le flux de traceur pénétrant dans l'océan selon

$$\left[K_v \frac{\partial C}{\partial z}\right]_{z=H} = k[C^a - C(t,y,H)] , \tag{16}$$

où C^a désigne la “concentration atmosphérique équivalente” du traceur. Par souci de simplicité, on supposera que k et C^a sont des constantes.

Si l'on suppose que la concentration est nulle à l'instant initial,

$$C(0,y,z) = 0 , \tag{17}$$

on pourra simuler la pénétration progressive du traceur dans l'océan. Néanmoins, la “concentration finale” est indépendante du champ initial. En effet, quel que soit le champ de concentration initial $C(0,y,z)$, on a

$$\lim_{t \to \infty} C(t,y,z) = C^a . \tag{18}$$

La concentration d'âge du traceur étudié[7], $\alpha(t,y,z)$, est régie par l'équation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = C - \frac{\partial}{\partial y}\left(v\alpha - K_h \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(w\alpha - K_v \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) . \tag{19}$$

L'imperméabilité du fond de l'océan et des frontières latérales impose

$$\left[K_h \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]_{y=0,L} = 0 = \left[K_v \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right]_{z=0} . \tag{20}$$

On suppose que l'âge des particules du traceur est nul dans l'atmosphère, ce qui conduit à

$$\left[K_v \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right]_{z=H} = -k\alpha(t,y,H)] . \tag{21}$$

Ainsi, l'âge du traceur,

---

[6] Pour la modélisation “off-line” des traceurs proposées ici, la diffusivité verticale dans la région de formation d'eau profonde doit être nettement plus petite que celle qui prévaudrait dans un modèle “on-line”, où la convection profonde est intermittente.

[7] Voir les publications de la *Constituent-oriented Age and Residence time Theory* (CART), ou le site web associé, http://www.climate.be/CART

$$a(t,y,z) \;=\; \frac{\alpha(t,y,z)}{C(t,y,z)}\,, \tag{22}$$

est une mesure du temps qui s'est écoulé depuis que les particules de traceur ont quitté l'atmosphère — pour pénétrer dans l'océan.

L'âge du traceur n'est pas nul à la surface de l'océan. En effet, un échantillon d'eau pris en surface est susceptible de contenir un mélange de particules jeunes — qui viennent de pénétrer dans l'océan — et de particules plus âgées — qui sont dans l'océan depuis longtemps. Il pourrait être intéressant de comparer l'âge du traceur avec l'âge de l'eau et l'âge de l'eau de surface[8].

Injection de traceur dans l'océan

On pourrait maintenant examiner comment l'océan réagit aux variations temporelles de la concentration atmosphérique du traceur. Toutefois, il me paraît plus pertinent ou intéressant d'aborder un problème différent, celui de l'injection directe de gaz dans l'océan[9]. On suppose que l'on "dépose" en t=0 une masse unitaire de gaz au point de coordonnées (Y,Z). On souhaite maximiser le temps moyen que les particules de ce gaz mettront pour atteindre l'atmosphère. La nature chimique du gaz est identique à celui étudié dans la section précédente —du "CO2 idéalisé", par exemple —, mais on étudie uniquement le devenir des particules injectées en (Y,Z). Par conséquent, à l'instant initial, la concentration atmosphérique de ce gaz-là est nulle, et on peut supposer qu'elle le restera, car on suppose que l'atmosphère est tellement grande que le dégazage depuis l'océan des particules étudiées induit une variation de concentration négligeable.

La concentration océanique $\tilde{C}(t,y,z)$ du gaz injecté est la solution du problème différentiel suivant:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} \;=\; -\frac{\partial}{\partial y}\left(v\tilde{C} - K_h \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\right) \;-\; \frac{\partial}{\partial z}\left(w\tilde{C} - K_v \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z}\right), \tag{23}$$

$$\left[K_h \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\right]_{y=0,L} \;=\; 0 \;=\; \left[K_v \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z}\right]_{z=0}, \tag{24}$$

$$\left[K_v \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z}\right]_{z=H} \;=\; -k\,\tilde{C}(t,y,H)\,, \tag{25}$$

$$\tilde{C}(0,y,z) \;=\; \delta(y-Y)\,\delta(z-Z)\,, \tag{26}$$

où δ désigne la fonction de Dirac, de telle sorte que

$$\int_0^L \int_0^H \tilde{C}(0,y,z)\,dy\,dz \;=\; 1\,. \tag{27}$$

[8] Deleersnijder E., A. Mouchet, E.J.M. Delhez and J.-M. Beckers, 2002, Transient behaviour of water ages in the World Ocean, *Mathematical and Computer Modelling*, 36, 121-127

[9] Il s'agit d'une des "solutions technologiques" — partielles — les plus controversées au problème du réchauffement global. De telles approches sont à l'étude dans nombre de pays industrialisés. Voir, par exemple, la page web appartenant au DOE suivante http://www.fe.doe.gov/programs/sequestration/ocean/

A l'aide de CART, on peut calculer l'âge de ce traceur; on voit immédiatement qu'il est égal à t, le temps écoulé. Ceci n'a pas d'intérêt. Par contre, il est très utile d'estimer le temps de résidence du gaz, qui est le temps moyen que les particules étudiées mettront pour quitter l'océan. Ce temps caractéristique vaut[10]

$$\theta \;=\; \int_0^{\infty}\int_0^{L}\int_0^{H} \tilde{C}(t,y,z)\, dz\, dy\, dt \ . \tag{28}$$

Cette approche "directe" du temps de résidence pose un problème pratique considérable: il faut résoudre numériquement le problème différentiel (23)-(26) autant de fois qu'il y a de points où l'on souhaite estimer le temps de résidence. Ainsi, pour obtenir ce dernier en tous les points de la grille, il faut faire un nombre de *runs* du modèle égal au nombre de points de grille. Le coût d'une telle opération est probablement prohibitif. Heureusement, il existe une approche adjointe/inverse du temps de résidence[11], qui est beaucoup moins coûteuse.

Le temps de résidence peut être obtenu en tout point du domaine[12] en résolvant le problème différentiel suivant

$$0 \;=\; 1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\theta + K_h \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w\theta + K_v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) , \tag{29}$$

$$\left[K_h \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0,L} \;=\; 0 \;=\; \left[K_v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=0} , \tag{30}$$

$$\left[K_v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=H} \;=\; -k\,\theta(y,H) \ . \tag{31}$$

Pour obtenir une approximation numérique de la solution du problème différentiel elliptique (29)-(31), il faudra résoudre un système d'équations algébriques linéaires d'une taille conséquente. L'élimination de Gauss risque d'être trop coûteuse. On peut avoir recours à une librairie d'algèbre linéaire ou programmer soi-même une méthode itérative. Parmi celles-ci, la plus simple dans le contexte actuel — mais pas la plus efficace — consiste à résoudre le problème parabolique suivant:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \;=\; 1 - \frac{\partial}{\partial y}\left(-v\Theta - K_h \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-w\Theta - K_v \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) , \tag{32}$$

$$\left[K_h \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right]_{y=0,L} \;=\; 0 \;=\; \left[K_v \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right]_{z=0} , \tag{33}$$

$$\left[K_v \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right]_{z=H} \;=\; -k\,\Theta(t,y,H) \ , \tag{34}$$

$$\Theta(0,y,z) \;=\; \Theta_i(y,z) \ , \tag{35}$$

où τ désigne un pseudo-temps. Les termes différentiels ci-dessus sont semblables à ceux des problèmes qui régissent la concentration d'un traceur ou la concentration d'âge, à ceci près que

[10] L'intégrale triple (28) a bien la dimension d'un temps car la dimension de $\tilde{C}(t,y,z)$ est l'inverse du carré d'une longueur, comme le confirme (27).

[11] Delhez E.J.M., A.W. Heemink and E. Deleersnijder, 2004, Residence time in a semi-enclosed domain from the solution of an adjoint problem, *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 61, 691-702

[12] Il est maintenant opportun de considérer le temps de résidence comme une fonction de la position, que l'on peut noter $\theta(y,z)$.

le sens de la vitesse est inversée. Pour résoudre le problème (23)-(26), on peut donc ré-utiliser avec des modifications minimes le *solver* que l'on aura développé pour les problèmes directs évoqués ci-dessus. Pour tout champ initial $\Theta_i(y,z)$, le temps de résidence est alors

$$\theta(y,z) = \lim_{\tau \to \infty} \Theta(\tau,y,z) . \tag{36}$$

Etablir la validité de cette dernière limite est quasiment trivial.

A l'évidence, le maximum du temps de résidence est susceptible d'être situé au fond de l'océan ou, en tout cas, à une grande profondeur. Le coût du dispositif d'injection augmente sans doute avec la profondeur. Mais, le coût pour la société — dû au réchauffement global — est une fonction décroissante du temps de résidence. On pourrait formuler un problème d'optimalisation de coût amusant. Une version simpliste consisterait à trouver le point d'injection (Y,Z) qui minimiserait la fonction de coût suivante:

$$J = \mu_0 - \mu_1\theta(Y,Z) + \mu_2(H-Z) , \tag{37}$$

où μ_0, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives appropriées.

Illustration unidimensionnelle

Pour acquérir une certaine intuition quant au "fonctionnement" du système étudié, il est utile de considérer un problème simplifié pour lequel existe une solution analytique simple. Ainsi, on peut ignorer les variations méridionales et considérer un problème unidimensionnel dans le domaine d'intérêt défini par les inégalités $0 \le z \le H$. De surcroît, on va se placer à l'état stationnaire. Toutes les inconnues du problème sont donc des fonctions de la coordonnée verticale z. Si la constante κ est la diffusivité verticale, alors ces variables sont les solutions des problèmes différentiels ordinaires suivants:

$$0 = \kappa \frac{d^2C}{dz^2} , \left[\frac{dC}{dz}\right]_{z=0} = 0 , \left[\kappa \frac{dC}{dz}\right]_{z=H} = k[C^a - C(H)] , \tag{38}$$

$$0 = C + \kappa \frac{d^2\alpha}{dz^2} , \left[\frac{d\alpha}{dz}\right]_{z=0} = 0 , \left[\kappa \frac{dC}{dz}\right]_{z=H} = -k\alpha(H) , \tag{39}$$

$$0 = 1 + \kappa \frac{d^2\theta}{dz^2} , \left[\frac{d\theta}{dz}\right]_{z=0} = 0 , \left[\kappa \frac{d\theta}{dz}\right]_{z=H} = -k\theta(H) , \tag{40}$$

L'âge du traceur dont la concentration et la concentration d'âge sont les solutions de (38) et (39) est

$$a(z) = \frac{\alpha(z)}{C(z)} . \tag{41}$$

Il peut aussi être instructif d'évaluer l'âge de l'eau[13], $a_w(z)$, qui est la solution du problème différentiel

$$0 = 1 + \kappa \frac{d^2 a_w}{dz^2} , \left[\frac{da_w}{dz}\right]_{z=0} = 0 , a_w(H) = 0 . \tag{42}$$

Après quelques calculs, on obtient

[13] A l'état stationnaire, l'âge de l'eau est égal à l'âge de l'eau de surface.

$$C(z) = C^a , \tag{43}$$

$$\alpha(z) = \frac{H^2}{2\kappa}\left[(1-\sigma^2)+\beta^{-1}\right]C^a , \tag{44}$$

$$a(z) = \frac{H^2}{2\kappa}\left[(1-\sigma^2)+\beta^{-1}\right] , \tag{45}$$

$$\theta(z) = \frac{H^2}{2\kappa}\left[(1-\sigma^2)+\beta^{-1}\right] , \tag{46}$$

$$a_w(z) = \frac{H^2}{2\kappa}(1-\sigma^2) , \tag{47}$$

où σ est une coordonnée verticale normalisée,

$$\sigma = \frac{z}{H} , \tag{48}$$

tandis que le paramètre adimensionnel β représente la *piston velocity* normalisée,

$$\beta = \frac{Hk}{2\kappa} . \tag{49}$$

Pour des raisons physiques qui ne sont pas claires pour moi, l'âge du traceur est égal au temps de résidence! Par ailleurs, si l'on augmente la *piston velocity*, le paramètre β augmente, de telle sorte que l'âge du traceur et le temps de résidence se rapprochent de l'âge de l'eau. A la limite $\beta \to \infty$, la concentration du traceur et l'âge de celui-ci tendent vers les valeurs que l'on obtiendrait en imposant des conditions de Dirichlet à la surface de l'océan, c'est-à-dire $C(H) = C^a$ et $\alpha(H) = 0$ — et donc $a(H) = 0$. En examinant les conditions aux limites impliquant la *piston velocity*, on se rend compte que ce résultat est conforme l'intuition la plus élémentaire. Finalement, la distance au fond du point de rejet qui minimise la fonction de coût (37) vaut

$$Z_{opt} = \min\left(H, \frac{\mu_2\kappa}{\mu_1}\right) , \tag{50}$$

Au vu du temps de résidence et de la fonction de coût choisie, on comprend sans peine que la distance optimale, Z_{opt}, ne doit pas dépendre de la *piston velocity*. Par contre, je ne comprends pas bien pourquoi la position optimale du point de rejet ne peut pas être le fond de l'océan, tandis qu'il pourrait être situé à la surface.

Un autre modèle simple unidimensionnel est la boucle de Munk[14]. Il offre l'avantage de comprendre à la fois des processus diffusifs et advectifs, tandis que le modèle examiné plus haut négligeait l'advection — alors que celle-ci est généralement plus importante que la diffusion. Les conditions aux limites à appliquer aux extrémités de la boucle devront faire l'objet d'un examen attentif[15].

---

[14] Munk W.H., 1966,Abyssal recipes, *Deep-Sea Research*, 13, 707-730

[15] Si s désigne l'abscisse curviligne mesurant la distance à la surface le long de la boucle de Munk et si L représente la longueur de cette dernière, je pense que les conditions à appliquer sur le traceur atmosphérique au “point surface” sont $\left[C(t,s)\right]_{s=0^+}^{s=L^-} = 0$ et $\left[\kappa\frac{\partial C}{\partial s}\right]_{s=0^+}^{s=L^-} = k[C^a - C(t,0^+)]$. On peut s'inspirer de ceci pour établir les conditions à appliquer aux autres variables.

Formulation adimensionnelle

Il est impératif d'examiner la sensibilité de tout modèle aux paramètres qu'il contient. Ici, le nombre de paramètres dimensionnels n'est pas négligeable. On en compte sept: L, H, Ψ, K_h, K_v^-, K_v^+ et k. Faire varier indépendamment tous ces paramètres et analyser les résultats est un travail de grande ampleur. Il est souhaitable de réduire le nombre de paramètres à considérer. Pour ce faire, il faut adopter une formulation adimensionnelle du problème.

On peut introduire des variables indépendantes adimensionnelles comme suit:

$$\tilde{t} = \frac{t}{LH/\Psi} \ , \ \ \tilde{y} = \frac{y}{L} \ , \ \ \tilde{z} = \frac{z}{H} \ . \tag{51}$$

Les variables hydrodynamiques adimensionnelles sont:

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\Psi} \ , \ \ \tilde{v} = \frac{v}{\Psi/H} \ , \ \ \tilde{w} = \frac{v}{\Psi/L} \ . \tag{52}$$

Les variables diagnostiques adimensionnelles peuvent être définies comme suit:

$$C' = \frac{C}{C^a} \ , \ \ \alpha' = \frac{\alpha}{C^a LH/\Psi} \ , \ \ a' = \frac{a}{LH/\Psi} \ , \ \ \tilde{C}' = \frac{\tilde{C}}{1/(LH)} \ , \ \ \theta' = \frac{\theta}{LH/\Psi} \ . \tag{53}$$

Ainsi, l'échelle de vitesse horizontale et l'échelle de vitesse verticale ont tout naturellement été choisies comme étant Ψ/H et Ψ/L — en plein accord avec (4). Par ailleurs, le temps caractéristique est le temps advectif, c'est-à-dire $L/(\Psi/H) = H/(\Psi/L) = LH/\Psi$.

Sous forme adimensionnelle, les équations feront apparaître deux nombres de Péclet,

$$Pe_h = \frac{\Psi L}{HK_h} \ , \ \ Pe_v = \frac{\Psi H}{LK_v^-} \ , \tag{54}$$

ainsi que les rapport adimensionnels K_v^+/K_v^- et Hk/K_v^-. Il conviendra d'étudier la sensibilité des solutions adimensionnelles à tous ces paramètres ou, à tout le moins, à un nombre bien choisi d'entre eux.
