

# Advanced Programming & Maths

Tuur Vanhoutte

15 maart 2021

# Inhoudsopgave

<b>1 Basisfuncties in de wiskunde</b>	<b>1</b>
1.1 Functies . . . . .	1
1.2 Veelterm en veeltermfuncties . . . . .	2
1.3 Bijzondere veeltermfuncties . . . . .	2
1.3.1 Constante functie . . . . .	3
1.3.2 Lineaire functie . . . . .	3
1.3.3 Tweedegraadsfunctie . . . . .	3
1.3.4 Derdegraadsfunctie . . . . .	5
1.3.5 Exponentiële functie . . . . .	5
<b>2 Exponentiële verbanden in data</b>	<b>6</b>
2.1 Lineaire groei . . . . .	6
2.2 Exponentiële groei . . . . .	7
2.3 Van groeipercentage naar groefactor	7
2.3.1 Percentage naar factor . . . . .	7
2.3.2 Factor naar percentage . . . . .	8
2.4 Voorbeeld . . . . .	8
2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename . . . . .	9
2.5.1 Oefening: Combinatie van groefactoren? . . . . .	9
<b>3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning</b>	<b>10</b>
3.1 Logistische groei . . . . .	10
3.1.1 Voorbeeld . . . . .	10
3.1.2 De groei . . . . .	10
3.1.3 Functievoorschrift . . . . .	10
3.1.4 Voorbeeld . . . . .	11
3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie . . . . .	11
3.2 Regression analysis . . . . .	12
3.2.1 Lineair regressiemodel . . . . .	12
3.2.2 Logistisch regressiemodel . . . . .	13
3.2.3 Lineair vs logistisch regressiemodel . . . . .	14
3.2.4 Meerdere inputfactoren . . . . .	14
3.3 Softmax functie . . . . .	14
3.3.1 Kansen . . . . .	15
3.3.2 Model . . . . .	15
3.3.3 Wiskundig . . . . .	16
3.4 Logistic regression cost function . . . . .	16
3.4.1 Success meten . . . . .	16
3.4.2 Kostenfunctie $J(\theta)$ . . . . .	17
3.4.3 Oefening . . . . .	18
3.4.4 Extra . . . . .	18
<b>4 Pandas library</b>	<b>18</b>
4.1 Inleiding . . . . .	18
4.1.1 Welke data verwerken? . . . . .	19
4.2 Pandas.core . . . . .	19
4.3 Series . . . . .	19
4.4 DataFrame . . . . .	19
4.4.1 Select data from DataFrame . . . . .	20
4.4.2 Veelgebruikte commandos bij dataframes . . . . .	21

4.5	Loc vs iloc . . . . .	22
4.5.1	iloc . . . . .	22
4.5.2	loc . . . . .	22
4.6	Plotten met pandas . . . . .	23
4.6.1	Dataframe plotten . . . . .	23
4.6.2	Series plotten . . . . .	24
4.7	Demo: Iris Dataset . . . . .	24
4.8	Complexe bewerkingen . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Normaaldistributie</b>	<b>26</b>
5.1	Doelstelling . . . . .	26
5.2	Inleiding . . . . .	26
5.3	Basisbegrippen . . . . .	26
5.3.1	Kenmerken . . . . .	27
5.3.2	Verdeling . . . . .	28
5.3.3	Gevolg: Kansberekening . . . . .	28
5.3.4	Wiskundig . . . . .	28
5.4	Standaard normaalverdeling . . . . .	29
5.4.1	Standardizeren van een normaalverdeling . . . . .	29
5.5	Kansberekening . . . . .	30
5.5.1	Via tabellen . . . . .	31
5.6	Z-score . . . . .	31
5.6.1	Wiskundig . . . . .	31
5.6.2	Voorbeeld . . . . .	31
5.6.3	Nut . . . . .	32
5.7	Scheefheid . . . . .	32
5.7.1	Berekening . . . . .	32
5.8	Kurtosis . . . . .	33
5.8.1	Wiskundig . . . . .	33
5.9	Anomaly detection . . . . .	33
5.9.1	Detectiemethode 1 . . . . .	34
5.9.2	Detectiemethode 2 . . . . .	34
5.9.3	Detectiemethode 3 . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Kansrekening</b>	<b>35</b>
6.1	Basiskennis . . . . .	35
6.1.1	Voorbeeld . . . . .	35
6.2	Kansdefinitie van Laplace . . . . .	35
6.2.1	Wiskundige notatie . . . . .	36
6.2.2	Gecombineerd experiment . . . . .	36
6.3	Somregel . . . . .	37
6.3.1	Wiskundig . . . . .	37
6.3.2	Algemene somregel . . . . .	38
6.4	Complementregel . . . . .	38
6.5	Samengesteld experiment (stochastisch exp) . . . . .	38
6.5.1	Trekking met teruglegging . . . . .	39
6.5.2	Trekking zonder teruglegging . . . . .	39
6.6	Permutaties . . . . .	40
6.6.1	Voorbeeld: . . . . .	40
6.6.2	Oefening . . . . .	40
6.7	Combinaties . . . . .	40
6.7.1	Wiskundig . . . . .	40

6.7.2	Voorbeeld . . . . .	41
6.7.3	Oefening . . . . .	41
6.8	Theoretische en empirische kansen . . . . .	41
6.8.1	Theoretische kansen: . . . . .	41
6.8.2	Empirische kansen . . . . .	41
6.8.3	Voorbeeld . . . . .	41
6.8.4	Voorbeeld 2 . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Voorwaardelijke kans</b> . . . . .	<b>42</b>
7.1	Doelstelling . . . . .	42
7.2	Situering . . . . .	42
7.3	Voorbeeld . . . . .	43
7.4	Wiskundig . . . . .	43
7.4.1	Gevolg: productregel . . . . .	43
7.4.2	Algemene productregel . . . . .	44
7.5	Oefening 1 . . . . .	44
7.5.1	Opgave . . . . .	44
7.5.2	Oplossing . . . . .	44
7.6	Oefening 2 . . . . .	45
7.6.1	Opgave . . . . .	45
7.6.2	Oplossing . . . . .	45
7.7	Onafhankelijke gebeurtenissen . . . . .	45
7.7.1	Voorbeeld . . . . .	45
7.7.2	Gevolg: Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen . . . . .	46
7.8	Productregel algemeen . . . . .	46
7.8.1	Oefening 1 . . . . .	46
7.8.2	Oefening 2 . . . . .	46
7.9	Regel van Bayes . . . . .	47
7.9.1	Toepassingsdomein . . . . .	47
7.9.2	Formule van Bayes (eenvoudige vorm) . . . . .	47
7.9.3	Voorbeeld . . . . .	47
7.10	Regel van Bayes (variant 1) . . . . .	48
7.11	Regel van Bayes (variant 2) . . . . .	49
7.12	Regel van Bayes (algemeen) . . . . .	49
7.13	Bayesiaans leren: toepassing in machine learning . . . . .	50
7.14	Naïve Bayes Spam Filter . . . . .	51
7.14.1	Herkennen van een spam bericht . . . . .	51
7.14.2	Parameters . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Logging</b> . . . . .	<b>52</b>
8.1	Inleiding . . . . .	52
8.1.1	Waarom? . . . . .	52
8.1.2	Opzet . . . . .	53
8.1.3	Logging levels . . . . .	53
8.2	Basis logging . . . . .	53
8.2.1	Spelregels . . . . .	53
8.2.2	Format logbericht . . . . .	53
8.2.3	Naar een file loggen . . . . .	54
8.2.4	Toegepast . . . . .	54
<b>9</b>	<b>Threading</b> . . . . .	<b>55</b>
9.1	Doelstelling . . . . .	55

9.2	Wat zijn threads? . . . . .	55
9.3	Process vs Thread . . . . .	55
9.3.1	Process . . . . .	56
9.3.2	Thread . . . . .	56
9.4	De threading library . . . . .	57
9.4.1	Thread aanmaken . . . . .	57
9.4.2	Andere methods . . . . .	57
9.4.3	Timer . . . . .	57
9.5	Multithreading . . . . .	58
9.5.1	Python Thread Management . . . . .	58
9.6	Thread toestanden . . . . .	59
9.7	Opgelet met threads! . . . . .	59
9.8	Wanneer threads gebruiken? . . . . .	59
9.9	Thread-class . . . . .	59
9.9.1	Maken van een nieuwe thread-klasse . . . . .	59
9.9.2	Opstarten van een thread . . . . .	60
9.10	Threading-synchronisation . . . . .	60
9.10.1	Join-methode . . . . .	60
9.10.2	Thread locking . . . . .	60
9.10.3	Condition . . . . .	61
9.11	Daemon vs not-daemon threads . . . . .	62
9.12	Multithreaded queue . . . . .	62
9.12.1	Queue . . . . .	62
9.12.2	Threading + queue . . . . .	63
9.12.3	Queue programming . . . . .	63
<b>10</b>	<b>Network Programming</b> . . . . .	<b>64</b>
10.1	Doelstelling . . . . .	64
10.2	Basisbegrippen . . . . .	64
10.2.1	Client-server programming . . . . .	64
10.2.2	Poorten (ports) . . . . .	64
10.2.3	Sockets . . . . .	64
10.2.4	Client-server communicatie . . . . .	65
10.3	Network programming in Python . . . . .	65
10.3.1	Socket Module . . . . .	65
10.3.2	Serversocket opzetten . . . . .	66
10.3.3	Serversocket laten wachten op connecties . . . . .	66
10.3.4	Clientsocket opzetten . . . . .	67
10.3.5	Communicatie tussen server & client . . . . .	67
10.3.6	Communicatie tussen server en client: lezen en schrijven naar een bestand . . . . .	68
<b>11</b>	<b>Tkinter</b> . . . . .	<b>68</b>
11.1	Doelstelling . . . . .	68
11.2	GUI in Python? . . . . .	69
11.2.1	Tkinter: een goede start . . . . .	69
11.3	Tkinter: basisbegrippen . . . . .	69
11.3.1	Start . . . . .	69
11.3.2	Frame . . . . .	70
11.3.3	Geometry management . . . . .	71
11.3.4	Beschikbare widgets . . . . .	71
11.3.5	Top level windows . . . . .	71
11.4	Demo . . . . .	72

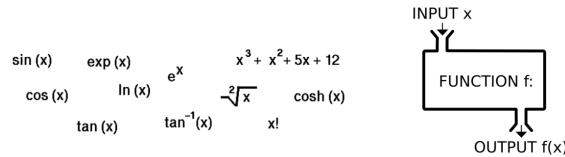
<b>12 Network &amp; threading</b>	<b>73</b>
12.1 Doelstelling . . . . .	73
12.2 Multithreaded server . . . . .	73
12.2.1 Basistechniek . . . . .	74
12.2.2 Werking in Python . . . . .	74
12.3 GUI server . . . . .	75
12.3.1 Communicatie vanuit workerthreads naar GUI . . . . .	75
12.3.2 Demo netwerken 5 . . . . .	76
12.3.3 To-do's . . . . .	76
<b>13 Objectserialisation</b>	<b>77</b>
13.1 Doelstelling . . . . .	77
13.2 Uitgangssituatie . . . . .	77
13.3 Serialiseren in Python: de Pickle library . . . . .	77
13.3.1 Pickling . . . . .	78
13.3.2 Unpickling . . . . .	78
13.3.3 Wat kan pickled en unpickled worden? . . . . .	79
13.3.4 Pickle: valkuilen . . . . .	79
13.4 Library jsonpickle . . . . .	80
13.5 Serialiseren in Python: toegepast in Networking . . . . .	80
13.5.1 Demo . . . . .	80
<b>14 Matrices</b>	<b>81</b>
14.1 Wat is matrix? . . . . .	81
14.1.1 Voorstellen van een matrix . . . . .	81
14.1.2 Soorten matrices . . . . .	81
14.1.3 Gelijke matrices . . . . .	82
14.2 Som & verschil . . . . .	82
14.2.1 Voorbeelden . . . . .	83
14.3 Scalair veelvoud . . . . .	83
14.3.1 Voorbeeld . . . . .	83
14.4 Eigenschappen matrix operaties . . . . .	83
14.4.1 Commutativiteit . . . . .	83
14.4.2 Associativiteit . . . . .	83
14.4.3 Neutraal element = $O_{m \times n}$ . . . . .	84
14.4.4 Eigenschappen met scalaire veelvoud . . . . .	84
14.5 Getransponeerde matrix . . . . .	84
14.5.1 Voorbeelden . . . . .	84
14.5.2 Eigenschappen . . . . .	84
14.6 Vermenigvuldigen van matrices . . . . .	85
14.6.1 Wiskundig . . . . .	85
14.6.2 Voorbeeld . . . . .	85
14.6.3 Eigenschappen . . . . .	85
14.7 Determinant van een matrix . . . . .	86
14.7.1 Notatie . . . . .	86
14.7.2 Toepassingen: . . . . .	86
14.7.3 Berekenen van de determinant . . . . .	86
14.7.4 Berekenen van de determinant: 2de methode (makkelijker) . . . . .	86
14.8 Inverse matrix . . . . .	86
14.8.1 Notatie . . . . .	86
14.8.2 Voorwaarden voor het bestaan van een inverse matrix . . . . .	86
14.8.3 Berekenen van inverse matrix . . . . .	87

14.8.4 Snelle methode voor inverse matrix van 2x2 matrix . . . . .	87
14.8.5 Eigenschappen inverse matrix . . . . .	87
14.9 Toepassingen . . . . .	88
14.9.1 Oplossen van stelsels . . . . .	88

# 1 Basisfuncties in de wiskunde

## 1.1 Functies

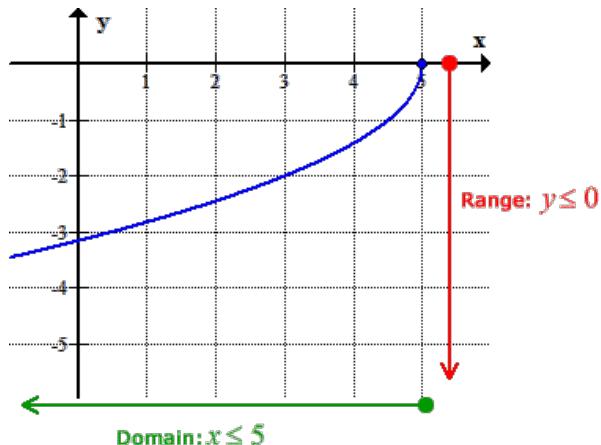
**Definitie 1.1 (Reële functie)** Een reële functie is een relatie in  $\mathbb{R}$  waarbij elke waarde  $x$  hoogstens één beeldwaarde  $f(x)$  heeft



Figuur 1: Voorbeelden reële functies

**Definitie 1.2** Voor elke functie geldt: er bestaat een ...

- (i) ... domein van de functie (domain)
- (ii) ... beeld van de functie (range)
- (iii) ... functievoorschrift van de functie

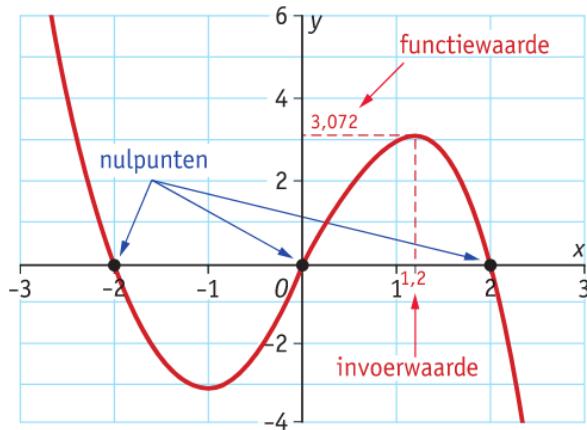


Figuur 2: Domein, bereik, functievoorschrift

$$f : \text{domein} \rightarrow \text{bereik} : x \rightarrow y = f(x)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = x^3 - 4x$$

**Definitie 1.3** Elke functie kan nulpunten hebben.



Figuur 3:  $y = -x^3 + 4x$

Verloop van een functie wordt via een tekenschema verduidelijkt:

$x$		-2		0		2	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Figuur 4: Tekenschema

## 1.2 Veelterm en veeltermfuncties

**Definitie 1.4 (Veelterm)**

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

**Definitie 1.5 (Veeltermfunctie)**

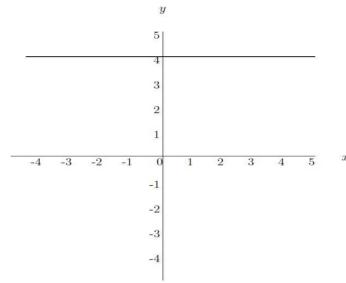
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

*Graad van veelterm = n als  $a_n \neq 0$*

## 1.3 Bijzondere veeltermfuncties

- Constante functie:  $f(x) = 4$
- Lineaire functie:  $f(x) = 4$
- Tweedegraadsfunctie:  $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- Derdegraadsfunctie:  $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
- Exponentiële functie:  $f(x) = 2^x$
- Logaritmische functie:  $(fx) = \log_2(x)$

### 1.3.1 Constante functie



Figuur 5:  $y = 4$

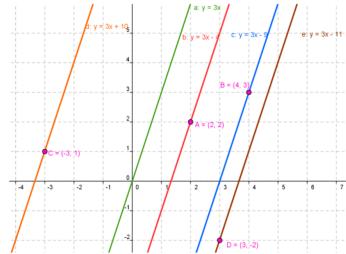
### 1.3.2 Lineaire functie

#### Definitie 1.6 (Lineaire functie)

$$f(x) = ax + b \quad (3)$$

Voorbeeld:  $f(x) = 3x + 6$

- Betekenis van  $a$ : de richtingscoëfficiënt (rico)
- Betekenis van  $b$ : het snijpunt met de  $y$ -as
- Nulpunt:  $f(x) = 0$   
 $\Leftrightarrow 3x + 6 = 0$   
 $\Leftrightarrow 3x = -6$   
 $\Leftrightarrow x = -2$



Figuur 6: Meerdere evenwijdige lineaire functies

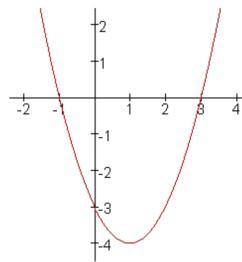
Evenwijdige rechten als: als  $a_1 = a_2$

Loodrechte rechten als: als  $a_1 \cdot a_2 = -1$

### 1.3.3 Tweedegraadsfunctie

#### Definitie 1.7

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \quad (4)$$



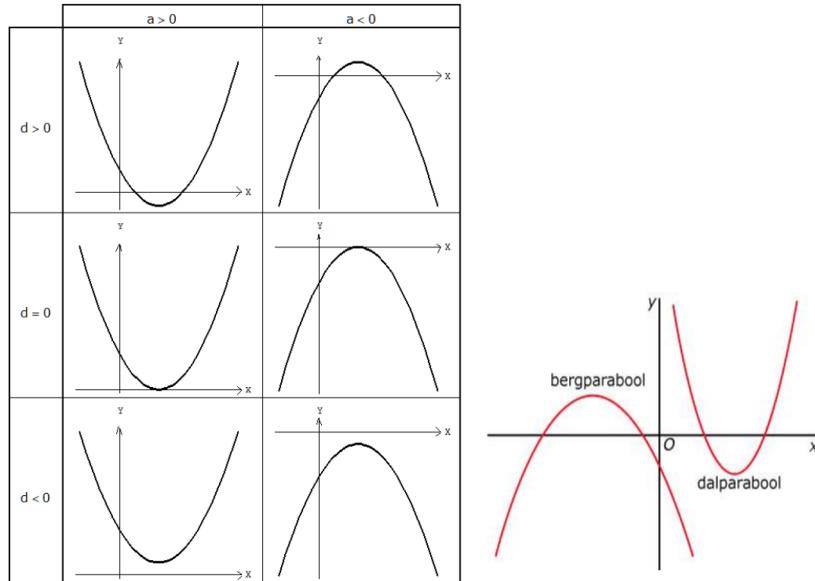
Figuur 7:  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

- Betekenis van  $a$ : positief  $\Rightarrow$  dalparabool, negatief  $\Rightarrow$  bergparabool
- Nulpunten: via de discriminant berekenen:

**Definitie 1.8 (Discriminant)** Bij een tweedegraadsvergelijking is de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac \quad (5)$$

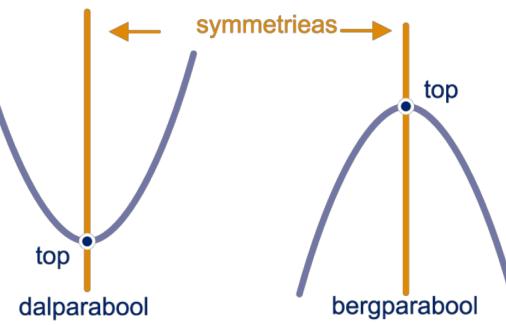
- Geval 1:  $D > 0 \Rightarrow$  de functie heeft 2 nulpunten
- Geval 2:  $D = 0 \Rightarrow$  de functie heeft 1 nulpunt
- Geval 3:  $D < 0 \Rightarrow$  de functie heeft géén nulpunten



Figuur 8: De discriminant toont de nulpunten

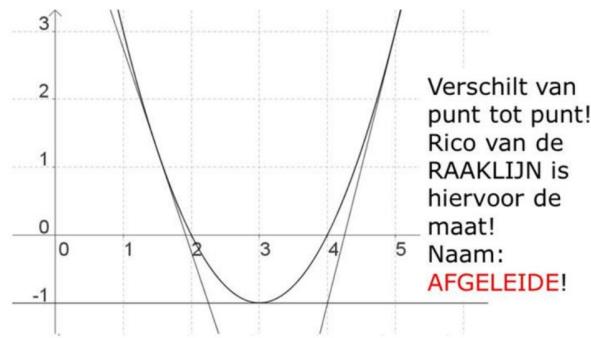
**Nulpunten berekenen:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (6)$$



Figuur 9: Symmetrieas:  $x = \frac{-b}{2a}$

Voorbeeld:



Figuur 10:  $y = x^2 - 6x + 8$

#### 1.3.4 Derdegraadsfunctie

**Definitie 1.9 (Derdegraadsfunctie)**

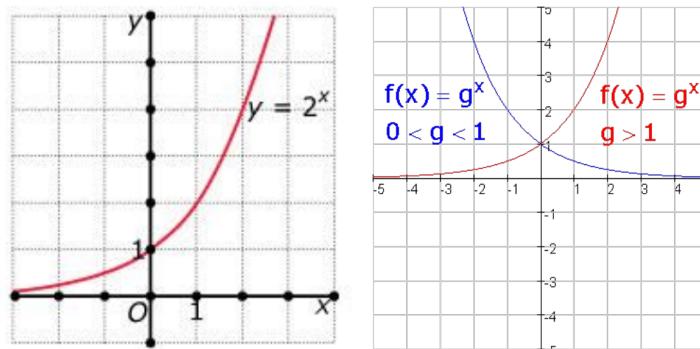
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0) \quad (7)$$

#### 1.3.5 Exponentiële functie

**Definitie 1.10 (Exponentiële functie)**

$$f(x) = a^{g(x)} \quad (8)$$

Met grondtal  $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

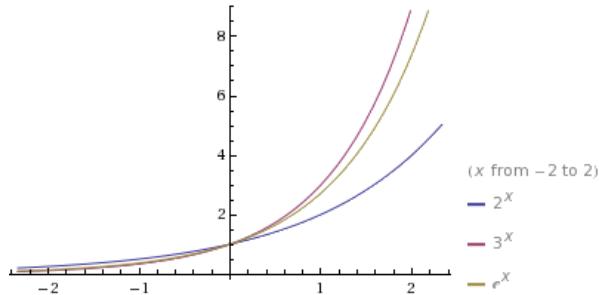


- Betekenis van a: groeifactor
- Wanneer stijgend?
- Wanneer dalend?
- Nulpunten:
- Vaststelling beeld functie

**Definitie 1.11 (Constante van Euler)**

$$e \approx 2.718281828\dots \quad (9)$$

$f(x) = e^x$  is een bijzondere exponentiële functie



Figuur 11: Verschil tussen  $2^x$ ,  $3^x$  en  $e^x$

## 2 Exponentiële verbanden in data

### 2.1 Lineaire groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt hetzelfde getal **opgeteld**
- Grafiek is een rechte
- Algemene formule ( $N$  = aantal,  $t$  = tijd,  $b$ : beginhoeveelheid):

$$N = a \cdot t + b \quad (10)$$

$t$	0	1	2	3	4	5
N	750	780	810	840	870	900
	+30	+30	+30	+30	+30	+30

Figuur 12: Lineaire groei

## 2.2 Exponentiële groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal **vermenigvuldigd**
- Grafiek is een exponentiële functie
- **Algemene formule:**

$$N = b \cdot g^t \quad (11)$$

$t$	0	1	2	3	4
N	1280	1600	2000	2500	3125
	x1,25	x1,25	x1,25	x1,25	x1,25

Figuur 13: Exponentiële groei

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND					
jaar	1998	2002	2006	2010	2014
aantal km	17 600	21 500	26 200	32 000	39 000

Figuur 14: Voorbeeld exponentiële groei met groeifactor  $\approx 1.22$

## 2.3 Van groeipercentage naar groeifactor

De toename/afname wordt vaak ook procentueel uitgedrukt

- Een jaarlijkse toename van 14.6%
- Een jaarlijkse afname van 14.6%

**Definitie 2.1 (Groeifactor)** De groeifactor is de factor die per tijdseenheid wordt vermenigvuldigd met de vorige waarde.

### 2.3.1 Percentage naar factor

$$g = \frac{p + 100}{100}\% \quad (12)$$

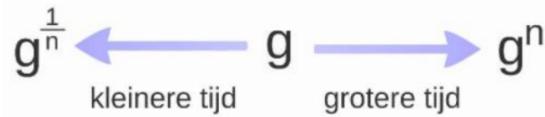
$$\begin{aligned} 100\% + 14,6\% &= 114,6\% = 1,146 \\ \times 1,146 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 100\% - 14,6\% &= 85,4\% = 0,854 \\ \times 0,854 \end{aligned}$$

Figuur 15: Van groeipercentage naar groeifactor

### 2.3.2 Factor naar percentage

$$0,765 = 76,5\% - 100\% = -23,5\%$$

Figuur 16: Van groefactor naar groeipercentage



#### Voorbeeld

De groefactor per uur is gelijk aan 3.

De groefactor per 2 uur is gelijk aan  $3^2 = 9$

De groefactor per 20 minuten is gelijk aan  $3^{\frac{1}{3}} = 1,44$ .

Figuur 17: Let op: hier gebeuren vaak fouten bij het omrekenen

### 2.4 Voorbeeld

Een hoeveelheid groeit exponentieel. Na 5u is  $N = 82$  en na 12u is  $N = 246$ .

Stel de formule van  $N$  op.

#### Oplossing

$$N = b \cdot g^t \quad (13)$$

Stap 1: groefactor berekenen per tijdseenheid:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Na 5u} \rightarrow N = 82 \\ \text{Na 12u} \rightarrow N = 246 \end{array} \right\} \Delta = 7u \rightarrow 164$$

Groeifactor voor 7 uren:  $\frac{246}{82} = 3$

Groeifactor voor 1 uur:  $3^{1/7} \approx 1.170$

Stap 2: 1 punt nemen waarvan we  $N$  weten:

Gekozen punt: (5, 82)

$$82 = b \cdot (1.170)^5$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{82}{1.170}^5 \approx 37$$

$$\Leftrightarrow N = 37 \cdot 1.170^t$$

## 2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename

**Definitie 2.2 (Verdubbelingstijd)** *De verdubbelingstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid verdubbeld is.*

*De verdubbelingstijd  $t$  kan je berekenen met:*

$$g^t = 2 \quad (14)$$

### Oefening

De populatie neemt toe met 8.3% per jaar. Bereken de verdubbelingstijd:

$$\begin{aligned} g^t &= 2 \\ \Leftrightarrow (1.083)^t &= 2 \\ \Leftrightarrow \log(1.083^t) &= \log(2) \\ \Leftrightarrow t \cdot \log(1.083) &= \log(2) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\log(2)}{\log(1.083)} \\ \Leftrightarrow t &= 8.69 \text{ jaar} \end{aligned}$$

**Definitie 2.3 (Halveringstijd)** *De halveringstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid gehalveerd is.*

*De halveringstijd  $t$  kan je berekenen met:*

$$g^t = 1/2 \quad (15)$$

### 2.5.1 Oefening: Combinatie van groeifactoren?

Een hoeveelheid neemt eerst 5 jaar lang met vast percentage (\*) toe, om daarna nog 3 jaar met 10% per jaar toe te nemen. Na 8 jaar is de totale hoeveelheid verdubbeld.

(\*) Bereken het jaarlijkse groeipercentage in de eerste 5 jaren.

### Oplossing

We weten:

- Eerste 5 jaar: toename met vast percentage
- Volgende 3 jaar: toename met 10% (= factor van 1.1)
- Na 8 jaar: hoeveelheid verdubbeld (= factor van 2)

$$g^5 \cdot 1.1^3 = 2$$

We moeten  $g$  vinden:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow g^5 &= \frac{2}{1.1^3} \\ \Leftrightarrow g &= \sqrt[5]{\frac{2}{1.1^3}} \end{aligned}$$

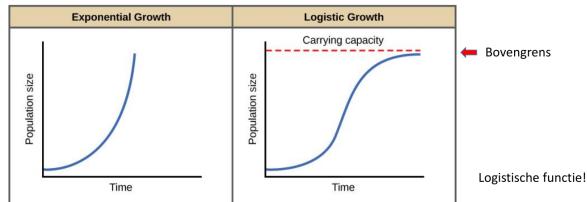
### 3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning

#### 3.1 Logistische groei

##### 3.1.1 Voorbeeld

Startsituatie: een bos (bv 10km<sup>2</sup>) waarin een konijnenepidemie uitbreekt. Boswachter houdt de populatie van de konijnen bij. Wat stelt hij vast?

De groei van de populatie verloopt volgens een typisch patroon (niet exponentieel):



Figuur 18: De rode lijn is de bovengrens

##### 3.1.2 De groei

= de mate van toename

- Hangt af van hoeveel er al zijn tegenover hoeveel er nog bij kunnen
- Heel sterke verandering bij start, op het einde heel kleine verandering
- Hangt dus ook af van de tijd

**Definitie 3.1 (De logistische groei)** *De logistische groei is de mate van toename, afhankelijk van hoeveel er nog bij kan en hoeveel er al is*

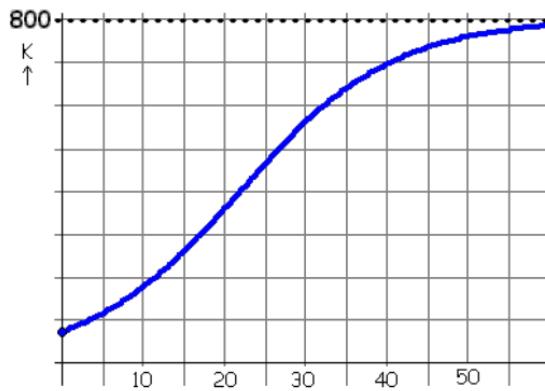
$$\frac{\text{Hoeveel er nog bij kan}}{\text{Hoeveel er al is}} = B \cdot g^t \quad (16)$$

- $t$  = de tijd,
- $B$  en  $g$  = constanten

##### 3.1.3 Functievoorschrift

$$y = \frac{G}{1 + B \cdot g^t} \quad (17)$$

- $t$  = de tijd
- $B$  en constanten
- $G$  = bovengrens



Figuur 19: Grafiek logistische groei met  $G = 800$

### 3.1.4 Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door:

$$N = \frac{2500}{1 + 5.5 \cdot 0.74^t}$$

waarbij  $N$  = aantal vissen,  $t$  = tijd

**Beredeneer:** Wanneer bereiken we het 'verzadigingsniveau'

Als  $t$  heel groot is:

- Dan wordt  $0.74^t \approx 0$
- Dan wordt  $5.5 \cdot 0.74^t \approx 0$
- Dan wordt  $N \approx 2500$
- $\Rightarrow$  Het meer is 'verzadigd'

### 3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie

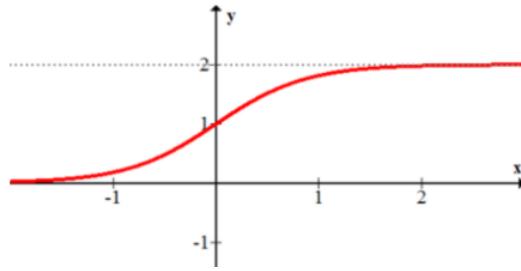
**Definitie 3.2 (Logistische functie)** De wiskundige notatie voor een logistische functie is:

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \tag{18}$$

met  $a, b, c$  constanten waarbij de constante  $c$  de belangrijkste is:

$c$  drukt uit wat de maximumwaarde kan zijn

$$f(x) = \frac{2}{1 + 0.1^x}$$



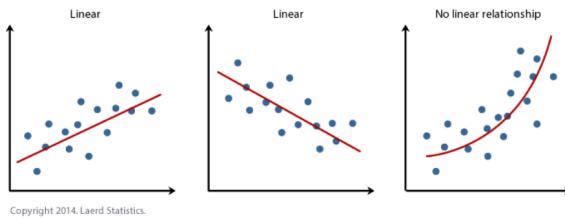
## 3.2 Regression analysis

Regressieanalyse:

- Is er een (voorspellend) verband tussen 2 variabelen
- Heeft de ene variabele een invloed op de andere variabele



Figuur 20: Regressieanalyse

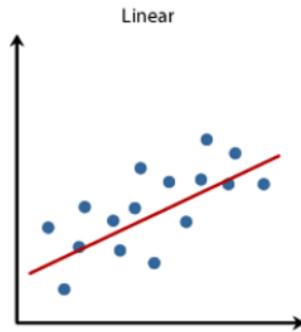


Figuur 21: Lineaire vs niet-lineaire samenhang

### 3.2.1 Lineair regressiemodel

Enkelvoudige vorm:

- 1 inputwaarde  $x$
- via lineaire functie  $h_{\theta}(x) = \theta_0 + \theta_1 x$

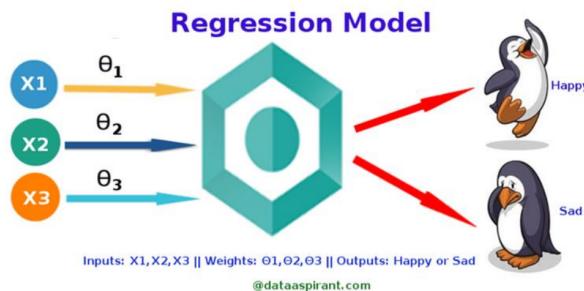


- Aan de hand van de opgestelde functie doe je een voorspelling
- **Doel:** een zo goed mogelijke lineaire functie opstellen
- $\Rightarrow$  zoektocht naar de beste  $\theta_0$  en  $\theta_1$

### 3.2.2 Logistisch regressiemodel

Logistische regressie = **Classificatie-algoritme**

Zoeken naar een model dat uitkomst (2 mogelijkheden) voorspelt mbv inputwaarden. Elke input-waarde heeft een zeker belang (gewicht).



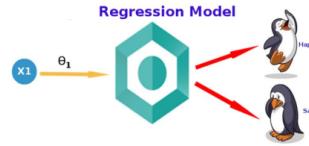
Figuur 22: 3 inputs met elk een bepaald gewicht, die een uitkomst zoekt (2 mogelijkheden)

Vereenvoudiging:

- 1 inputwaarde  $x$
- Logistische functie  $p = \frac{1}{1+e^{-(b_0+b_1x)}}$

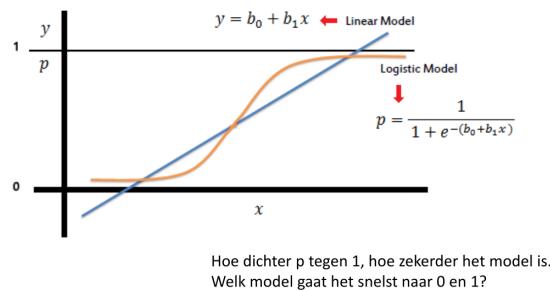
Uitkomst:

- de persoon slaagt als  $h_\theta(x) \geq 0.5$
- de persoon slaagt niet als  $h_\theta(x) < 0.5$



Figuur 23: 1 inputwaarde  $x$ , met twee uitkomsten

### 3.2.3 Lineair vs logistisch regressiemodel



Figuur 24: Hoe dichter  $p$  tegen 1, hoe zekerder het model is

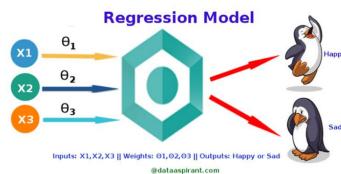
Welk model gaat het snelst naar 0 en 1?

- Het logistische model
- Daarom is het logistische model beter voor classificatie: je splitst de groep op in 2

### 3.2.4 Meerdere inputfactoren

Zelfde redenering:

- Meerdere inputwaarden  $x_1, x_2, \dots$
- Gebruik  $\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots$



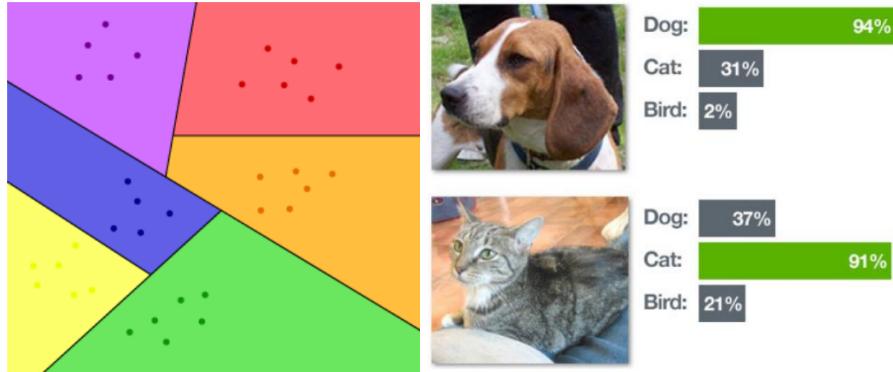
Figuur 25: Regressiemodel met meerdere inputfactoren

## 3.3 Softmax functie

Doelstelling:

- Model dat in staat is om data te gaan categoriseren
- Hoe?

- ⇒ Met behulp van verschillende inputvariabelen en bijhorende parameters



Figuur 26: Categoriseren met de softmax functie

### 3.3.1 Kansen

Kans dat de toestand tot groep A behoort:

- $\theta_{A,0} + \theta_{A,1}x_1 + \theta_{A,2}x_2$
- Voorbeeld:  $0.01 + 0.1x_1 + 0.1x_2$

Kans dat de toestand tot groep B behoort:

- $\theta_{B,0} + \theta_{B,1}x_1 + \theta_{B,2}x_2$
- Voorbeeld:  $0.1 + 0.2x_1 + 0.2x_2$

Kans dat de toestand tot groep C behoort:

- $\theta_{C,0} + \theta_{C,1}x_1 + \theta_{C,2}x_2$
- Voorbeeld:  $0.1 + 0.3x_1 + 0.3x_2$

### 3.3.2 Model

Het softmax-model berekent de mate van zekerheid dat een toestand tot een bepaalde categorie behoort.

vb: volgende quotiënt drukt uit hoe zeker hij is dat  $(z_1, z_2)$  tot categorie A behoort:

$$\frac{e^{\theta_{A,0} + \theta_{A,1}z_1 + \theta_{A,2}z_2}}{e^{\theta_{A,0} + \theta_{A,1}z_1 + \theta_{A,2}z_2} + e^{\theta_{B,0} + \theta_{B,1}z_1 + \theta_{B,2}z_2} + e^{\theta_{C,0} + \theta_{C,1}z_1 + \theta_{C,2}z_2}}$$

(analoog voor categorie B en C: vervang de teller)

$$\frac{e^{0.01 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.5}}{e^{0.01 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.5} + e^{0.1 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.5} + e^{0.1 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.5}} = 0.2945$$

Figuur 27: Betekenis: het model is 29% zeker dat  $(0.1, 0.5)$  tot categorie A behoort. Bereken zelf als oefening voor B en C

### 3.3.3 Wiskundig

Het gebruikte model wordt via volgende wiskundige formule algemeen beschreven:

$$\frac{e^{x_k}}{\sum_{i=1}^n e^{x_i}} \quad (19)$$

waarbij:

- $x_k = \theta_{k,0} + \theta_{k,1}x_1 + \theta_{k,2}x_2 + \cdots + \theta_{k,m}x_m$
- n = aantal groepen
- m = het aantal meetcriteria

## 3.4 Logistic regression cost function

Het model:

$$h_\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^\top x}} \quad (20)$$

waarbij:

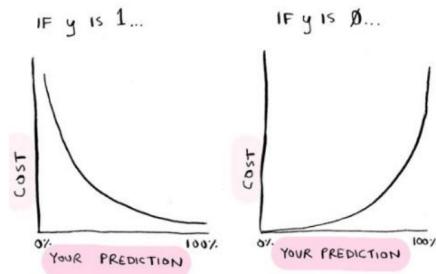
- $\theta^\top x = \theta_0 + \theta_1x_1 + \theta_2x_2$
- $h_\theta$  drukt uit wat de kans is dat voor opgegeven  $x_1$  en  $x_2$  de waarneming tot 1 groep behoort
- $x_1$  en  $x_2$  zijn de inputwaardes
- $\theta_1$  en  $\theta_2$  zijn gewichten (hoe belangrijk is de input)
- **Doel:** vinden van de beste gewichten zodat de voorspelling == de werkelijkheid

### 3.4.1 Success meten

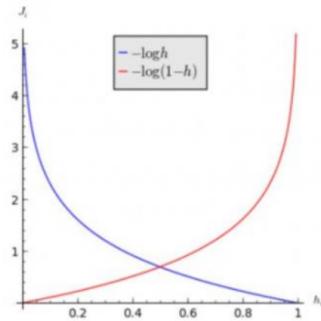
**Stel:** je maakt een logistisch regressiemodel die bepaalt of een object een groene appel of een tennisbal is.

- Bepalen van de kostenfunctie  $J(\theta)$  met als doel deze zo laag mogelijk te brengen
- kost = afwijking tegenover de werkelijke situatie
- werkelijkheid kan 2 situaties zijn:
  - Indien de werkelijkheid een groene appel is  $\Rightarrow y = 1$
  - Indien de werkelijkheid géén groene appel is  $\Rightarrow y = 0$

Hoe ziet zo'n kostfunctie er dan uit?

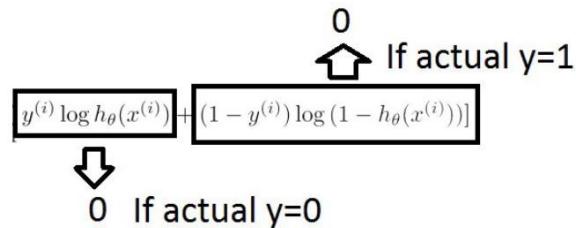


Figuur 28: Als  $y = 1$  en  $y = 0$



$$\begin{cases} -\log(h_\theta(x)) & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Hoe brengen we 2 mogelijke situaties in 1 functie samen?



Figuur 29

### 3.4.2 Kostenfunctie $J(\theta)$

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m Cost(h_\theta(x_i), y_i) \quad (21)$$

Kostenfunctie beschouwt alle gevallen:

- Telkens kost berekenen
- Som bepalen

- Op einde gemiddelde berekenen

**Logistic regression cost function**

$$\begin{aligned}
 J(\theta) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)}) \\
 &= -\frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^m \left[ y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log (1 - h_\theta(x^{(i)})) \right] \right]
 \end{aligned}$$

↑ 0 If actual y=1  
 ↓ 0 If actual y=0

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)})$$

$$\text{Cost}(h_\theta(x), y) = \begin{cases} -\log(h_\theta(x)) & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Note:  $y = 0$  or  $1$  always

Figuur 30: Overzicht kostenfunctie

### 3.4.3 Oefening

Bereken zelf even de kost uit het voorbeeld uit de cursus Machine Learning. Het model is van de vorm:  $h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2)$

Met  $x_1 = \text{rondheid}$  en  $x_2 = \text{groenheid}$ .

Veronderstel na training:  $\theta_0 = -40, \theta_1 = 4, \theta_2 = 4$

Met volgende waarnemingen:

- appel = meting rondheid 8, groenheid 6
- geen appel = meting rondheid 5, groenheid 4.5

### 3.4.4 Extra

Mooie blogpost: <https://adit.io/posts/2016-03-13-Logistic-Regression.html>

## 4 Pandas library

### 4.1 Inleiding

- Doelstelling:
  - Nut van de pandas library kunnen situeren
  - Data-analyse: basisbewerkingen
- Pandas = ‘Python Data Analysis Library’
- Pandas bouwt op de NumPy library
- Officiële website: <https://pandas.pydata.org/>
- Goede start: <http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/10min.html>

#### 4.1.1 Welke data verwerken?

- csv-files
- txt-files
- Excel-files
- Databases

### 4.2 Pandas.core

Beschikbare datastructuren:

- Series (1D)
- DataFrame (2D)
- Panel (3D)

### 4.3 Series

Bestemd voor 1-dimensionale data:

'a one-dimension labeled array capable of holding any data'

- Subklasse van numpy-ndarray
- Data: elk soort datatype
- Geordende index
- Duplicaten mag (maar niet optimaal)

	index	values
A	→	5
B	→	6
C	→	12
D	→	-5
E	→	6.7

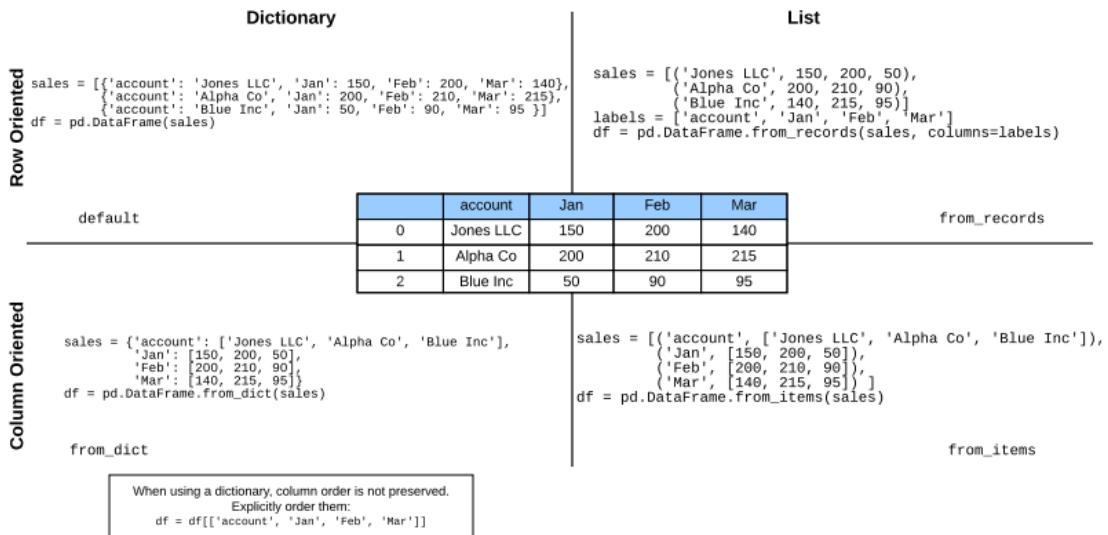
Figuur 31: Elk element heeft een index

### 4.4 DataFrame

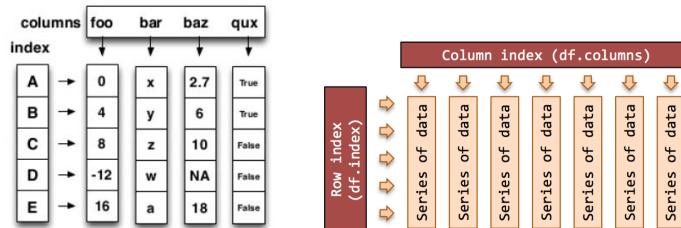
Bestemd voor meer-dimensionale data

- Subklasse van numpy-ndarray
- Elke kolom kan ander datatype hebben
- Rij en kolom index
- Grootte wijzigbaar (invoegen/verwijderen van rijen en kolommen)

## Creating Pandas DataFrames from Python Lists and Dictionaries



Figuur 32: DataFrames maken uit Python lists en dictionaries



Figuur 33: Elk element heeft een rij en kolom

### 4.4.1 Select data from DataFrame

Via operator [] selecteer je een kolom:

	Feb	Jan	Mar	account
0	200	150	140	Jones LLC
1	210	200	215	Alpha Co
2	90	50	95	Blue Inc

Figuur 34: Voorbeeld DataFrame

```

1 # selecteer de kolom Jan uit dataframe
2 df['Jan']
3
4 # analoog: elke kolom is dus een attribuut van dataframe
5 df.Jan
6
7 # returnwaarde: Series-object

```

```

8    0    150
9    1    200
10   2    50
11  Name: Jan, dtype: int64

```

**Via operator [] selecteer je een kolom & krijg je een dataframe terug:**

```

1  >> df[['Jan']]
2  # returns:
3      Jan
4  0    150
5  1    200
6  2    50
7
8  >> df[['Jan', 'Mar']]
9  # returns:
10     Jan      Mar
11    0    150    140
12    1    200    215
13    2     50     95

```

**Via de operator [] en met een conditie:**

	Feb	Jan	Mar	account
0	200	150	140	Jones LLC
1	210	200	215	Alpha Co
2	90	50	95	Blue Inc

Figuur 35: Voorbeeld DataFrame

```

1  >> df[df.Jan > 60]
2  # returns:
3      Feb      Jan      Mar      account
4  0    200    150    140    Jones LLC
5  1    210    200    215    Alpha Co
6
7  >> df[np.logical_and(df.Jan > 100, df.Feb <= 200)]
8  # returns:
9      Feb      Jan      Mar      account
10   0    200    150    140    Jones LLC
11
12 >> df[df.account.str.startswith('Alpha')]
13 # test deze eens zelf uit als oefening :)

```

#### 4.4.2 Veelgebruikte commandos bij dataframes

1  df.shape	# geeft de dimensie als een tuple terug
2  df.info()	# oplijsting van de aanwezige kolommen
3  df.head([aantal])	# eerste vijf/aantal rijen
4  df.tail([aantal])	# laatste vijf/aantal rijen
5  df.index	# geef de index-kolom weer

```

6 df.columns      # geef de kolomnamen weer
7 df.describe()   # geef snel overzicht van statistische data
8 df.T            # transponeer data (rij -> kol, kol -> rij)
9 df.sort_index() # sorteert op basis van index
10 df.sort_values() # sorteren op één of meerdere kolommen

```

## 4.5 Loc vs iloc

### 4.5.1 iloc

= Integer-location based indexing / selection by position

- Nut: selecteren van rijen en kolommen via rij/kolomnummer
- Syntax: data.iloc[<row>, <column>]
- Returnwaarde:
  - Indien 1 **rij** ⇒ series-object
  - Indien meerdere **rijen**: ⇒ dataframe-object
  - 1 of meerdere **kolommen**: ⇒ dataframe-object

**iloc-voorbeelden:**

```

1 # Rows:
2 data.iloc[0] # first row of data frame
3 data.iloc[1] # second row of data frame
4 data.iloc[-1] # last row of data frame
5
6 # Columns:
7 data.iloc[:,0] # first column of data frame
8 data.iloc[:,1] # second column of data frame
9 data.iloc[:, -1] # last column of data frame
10
11 data.iloc[0:5] # first five rows of dataframe
12
13 # first two columns of data frame with all rows
14 data.iloc[:, 0:2]
15
16 # 1st, 4th, 7th, 25th row + 1st 6th 7th columns.
17 data.iloc[[0,3,6,24], [0,5,6]]
18
19 # first 5 rows and 5th, 6th, 7th columns of data frame
20 data.iloc[0:5, 5:8]

```

### 4.5.2 loc

= label based indexing / selection

- Nut: selecteren van rijen en kolommen via label / via conditionele look-up
- Syntax: data.loc[<row>, <column>]
- Returnwaarde:

- Indien 1 rij/kol ⇒ series-object
- Indien meerdere rijen: ⇒ dataframe-object
- 1 of meerdere kolommen: ⇒ dataframe-object

#### loc-voorbeelden:

	cars_per_cap	country	drives_right
US	809	United States	True
AUS	731	Australia	False
JAP	588	Japan	False
IN	18	India	False
RU	200	Russia	True
MOR	70	Morocco	True
EG	45	Egypt	True

Figuur 36: Voorbeeld dataframe

```

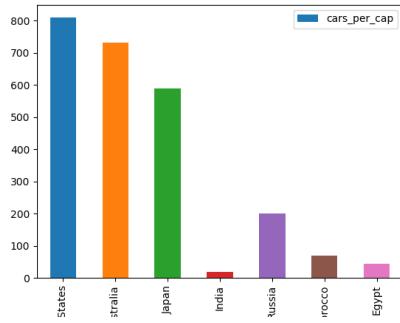
1 reviews.loc[:2, "score"] # return type =
2
3 reviews.loc[:2, ["score", "title"]] # return type =
4
5 # select column "score" where value of index <= 5
6 reviews.loc[:5, "score"]
7
8 # select columns "country" and "cars_per_cap" where rowindex is "US" or "RU"
9 cars.loc[ ["US","RU"] , ["country","cars_per_cap"]]
10
11 # select columns "country" and "cars_per_cap" where rowindex is from "US" to "RU"
12 cars.loc[ "US " : "RU " , ["country","cars_per_cap"]]
13
14 # selectie rijen hoeft niet altijd op basis van row-index te zijn
15 # select columns "country" and "drives_right", voor de landen 'Japan' en 'India'
16 cars.loc[ cars.country.isin( ['Japan', 'India'] ) , ['country','drives_right']]
```

## 4.6 Plotten met pandas

### 4.6.1 Dataframe plotten

```

1 # print(cars[['country', 'cars_per_cap']])
2 # werkwijze 1:
3 cars[['country', 'cars_per_cap']].plot(kind='bar', legend=True)
4 # werkwijze 2:
5 cars.plot(x='country', y='cars_per_cap', kind='bar', legend=True)
6
7 plt.show()
```



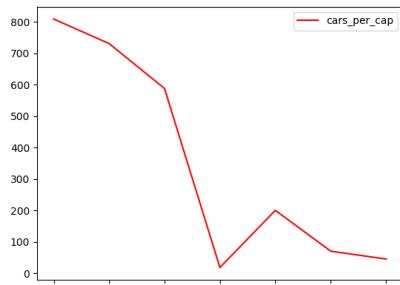
Figuur 37: Resultaat

#### 4.6.2 Series plotten

```

1 # werkwijsje 1:
2 plt.plot(cars['cars_per_cap'])
3 # werkwijsje 2:
4 plt.plot(cars['cars_per_cap'].plot(color='r', legend=True))
5
6 plt.show()

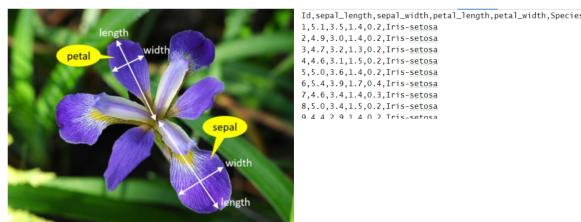
```



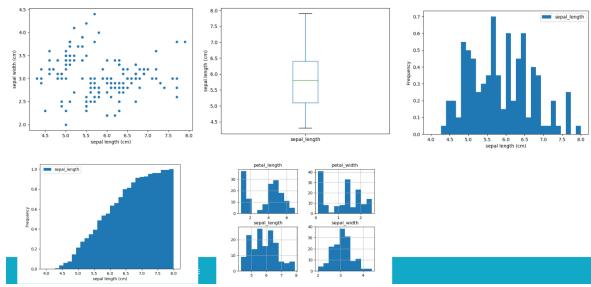
Figuur 38: Resultaat

#### 4.7 Demo: Iris Dataset

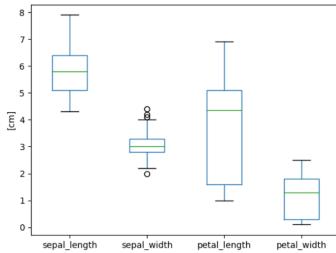
(Zie DemoPandas.zip op Leho voor de code)



Figuur 39: Een iris bestaat uit petals & sepals, met elk hun breedte en lengte



Figuur 40: Plotten van de beschikbare data (demo5.py)

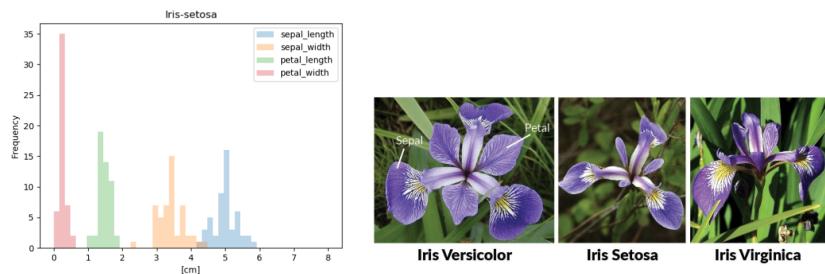


Figuur 41: Vergelijken van de lengtes en breedtes adhv box-plots (demo6.py)

```

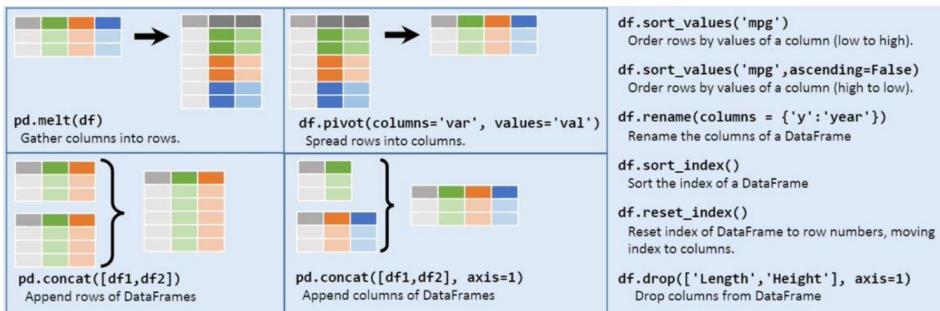
1 # filteren van data
2 result_check = iris['Species'] == 'Iris-setosa'
3 # print(type(result_check)) == TODO
4 filtered_setosa = iris.loc[result_check, :]
5 # of in 1 lijn:
6 filtered_setosa = iris.loc[iris['Species'] == 'Iris-setosa', :]

```



Figuur 42: Frequentiediagram voor de Iris-setosa soort (demo7.py)

## 4.8 Complexe bewerkingen



Figuur 43: Reshaping data: change the layout of a data set

(komen we later nog op terug)

## 5 Normaalverdeling

### 5.1 Doelstelling

- Het herkennen van de eigenschappen van de normaalverdeling
- Verband standaard normaalverdeling en Z-waarden
- Z-index, Z-score tabel

### 5.2 Inleiding

Wanneer komt een normaalverdeling voor?

- Grote aantallen onafhankelijke waarnemingen uit een willekeurige populatie
  - De lengte van personen
  - Productieprocessen die een bepaalde tijdsduur hebben
  - ...

### 5.3 Basisbegrippen

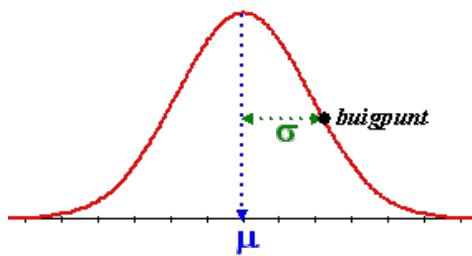
**Definitie 5.1 (Normaalverdeling)** *Een intervalwaarde dat afhankelijk is van oneindig aantal onafhankelijke factoren (die los van elkaar in werken) zal in de populatie een normaalverdeling vertonen (Gauss-curve)*



Figuur 44: Gauss-curve

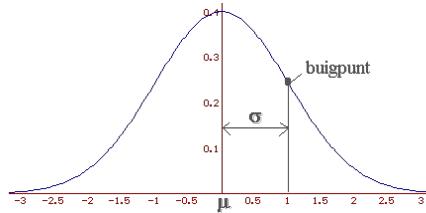
### 5.3.1 Kenmerken

- Klokvormig verloop
- 1 maximum = gemiddelde = mediaan ( $\mu$ )
- Uitslagen vooral geconcentreerd rond gemiddelde
- Frequentie daalt naarmate scores afwijken
- Twee buigpunten
- Symmetrie

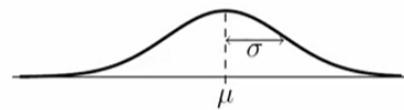


Figuur 45: Kenmerken Gauss-curve

- Standaarddeviatie (standaardafwijking)  $\sigma$  weerspiegelt mate van spreiding
- Wordt gemeten in de buigpunten

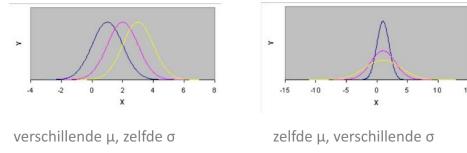


- Functie is volledig te beschrijven met het gemiddelde  $\mu$  en de Standaarddeviatie  $\sigma$



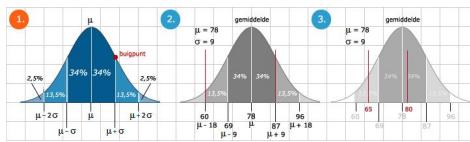
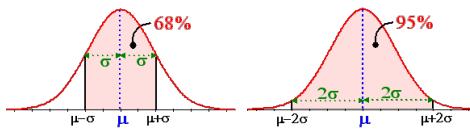
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Figuur 46: Notatiewijze



Figuur 47: Impact  $\mu$  en  $\sigma$

### 5.3.2 Verdeling



- Tussen beide buigpunten ( $\mu - \sigma, \mu + \sigma$ ):  $\approx 68\%$  van de populatie
- Tussen ( $\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma$ ):  $\approx 95\%$  van de populatie
- Tussen ( $\mu - 3 \cdot \sigma, \mu + 3 \cdot \sigma$ ):  $\approx 99\%$  van de populatie

### 5.3.3 Gevolg: Kansberekening

- Oppervlakte onder de grafiek = 100%
- Hiermee kunnen we nu uitdrukken wat de kans van een specifiek bereik kan zijn. Bv:
  - Met  $\mu = 78, \sigma = 9 \Rightarrow$  Kans dat  $x < 65$ ?
  - $\Rightarrow$  bereken oppervlakte links van 65

### 5.3.4 Wiskundig

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (22)$$

Standaardafwijking berekenen:

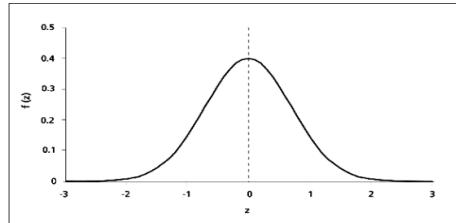
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n-1}} \quad (23)$$

- $\sigma$  = Standaarddeviatie van getallenreeks  $x$
- $x_i$  = de waarde van getal  $i$  in de getallenreeks
- $\mu$  = het gemiddelde van de getallenreeks
- $n$  = het aantal getallen in de proef

## 5.4 Standaard normaalverdeling

**Definitie 5.2 (Standaard normaalverdeling)** De standaardnormaalverdeling is een normaalverdeling waarbij:

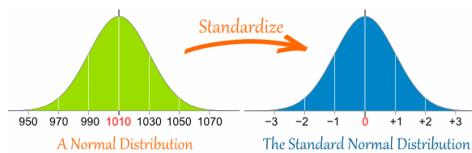
- $\mu = 0$
- $\sigma = 1$



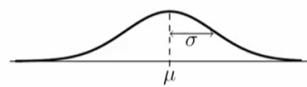
Figuur 48: Oppervlakte onder grafiek = 1

### 5.4.1 Standardizeren van een normaalverdeling

**Doel:** een normaalverdeling omzetten in een standaardnormaalverdeling waarbij  $\mu = 0$  en  $\sigma = 1$



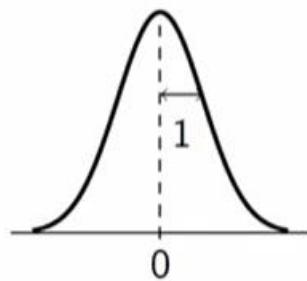
Figuur 49: Standardizeren



$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

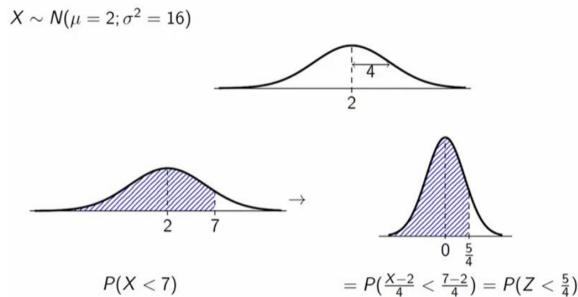
Figuur 50: Uitgangspunt: willekeurige normaalverdeling

- Verschuiven naar 0:  $X - \mu$
- samendrukken/uitrekken tot  $\sigma = 1$ :  $\frac{X-\mu}{\sigma}$



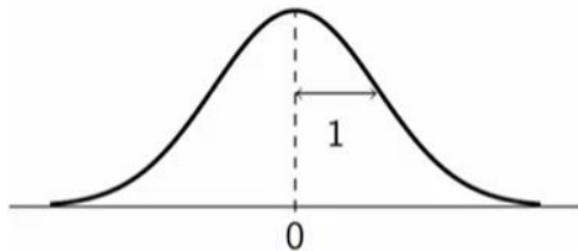
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Figuur 51: Gestandardiseerd: alle eigenschappen blijven bewaard, enkel de hoogte blijft hetzelfde



Figuur 52: Standardizeren: voorbeeld

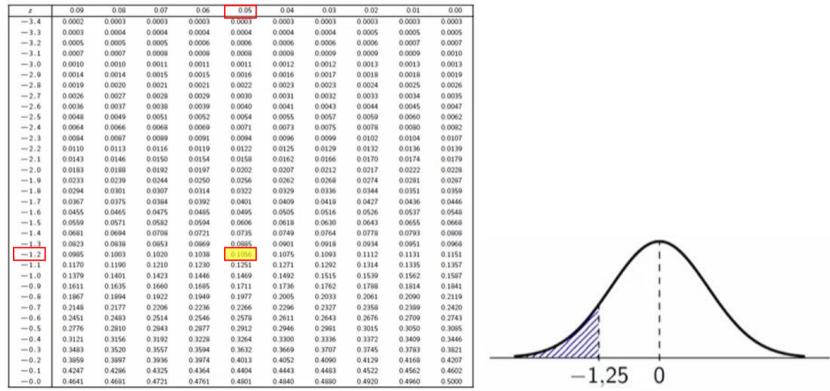
## 5.5 Kansberekening



Figuur 53:  $Z \sim N(0, 1) \rightarrow \mu = 0$  en standaardafwijking  $\sigma = 1$

- Grafiek beschrijft hoe waarschijnlijk uitkomsten zijn
- Uitkomsten dicht bij 0 waarschijnlijker dan in de staarten
- Kans = oppervlakte onder de grafiek, totale kans = 100% = 1

### 5.5.1 Via tabellen



Figuur 54: Kansberekening via tabellen: rijen = 1 getal na de komma, kolommen = 2de getal na de komma.  $P(Z < 1.25) = 0.1056$

- Symmetrie:  $P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) = 0.1056$
- Complement:  $P(Z < -1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$

## 5.6 Z-score

**Definitie 5.3 (Z-score)** Een Z-score geeft aan hoeveel standaardafwijkingen een observatie van het gemiddelde verwijderd is.

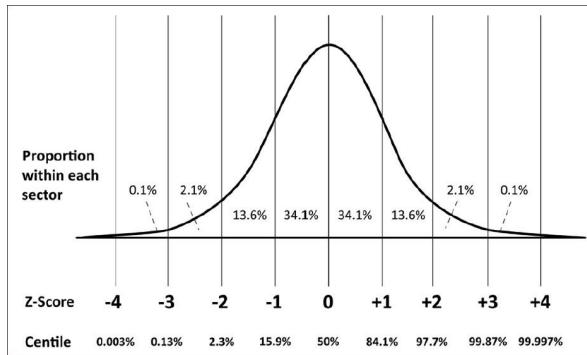
Je krijgt dus je plek ten opzichte van het gemiddelde, uitgedrukt in een standaard maat.

**Voordeel:** je weet direct hoe goed iemand scoort ten opzichte van de rest.

### 5.6.1 Wiskundig

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (24)$$

### 5.6.2 Voorbeeld



Figuur 55: Hoeveel standaarddeviations ( $\sigma$ ) zit een score van het gemiddelde  $\mu$

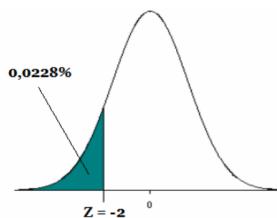
**Voorbeeld:** 20 studenten leggen een examen af.

- Gemiddelde  $\mu = 7/10$
- Standaardafwijking  $\sigma = 0.5$  (68% heeft score tussen [6.5, 7.5])
- Iemand heeft 6/10  $\Rightarrow z\text{-score} = -2 \Rightarrow 2 \cdot 0.5$  onder gemiddelde

### 5.6.3 Nut

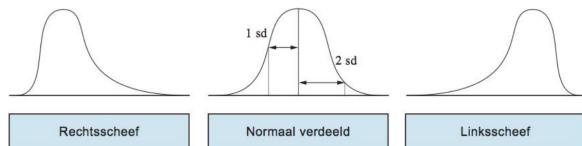
Z-score is eveneens een uitdrukking van de kans:

- Hoe (on)gebruikelijk is een score
- Bij vorig voorbeeld: 2.275% heeft een score  $\leq 6/10$



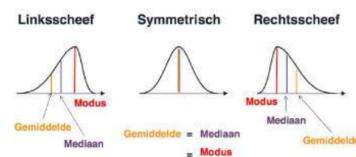
## 5.7 Scheefheid

Veel frequentieverdelingen hebben niet de vorm van de normaalverdeling. Ze zijn 'scheef'



Figuur 56: Scheefheid

- Linksscheef = gemiddelde is lager dan de mediaan
- Rechtsscheef = gemiddelde is hoger dan de mediaan



### 5.7.1 Berekening

De maat voor scheefheid kan berekend worden:

- Linksscheef: negatieve waarde
- Rechtsscheef: positieve waarde

$$Scheefheid = \left( \frac{(\sum(x-\bar{x})^3)}{\sum(x-\bar{x})^2} \right)^{3/2} \quad (25)$$

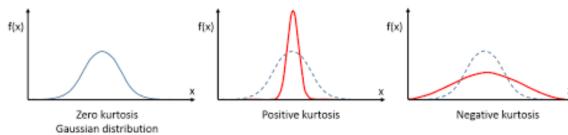
Interpretatie:

- Waarde tussen [-0.5, 0.5]: zeer goede normaalverdeling
- Waarde tussen [-1, 1]: redelijk goede normaalverdeling
- Waarde daarbuiten: geen goede normaalverdeling

## 5.8 Kurtosis

**Definitie 5.4 (Kurtosis)** *Kurtosis is de maat van de gepiektheid.*

*Je gaat na of de verdeling een scherpe top heeft of een nogal vlakke top.*



### 5.8.1 Wiskundig

TODO (26)

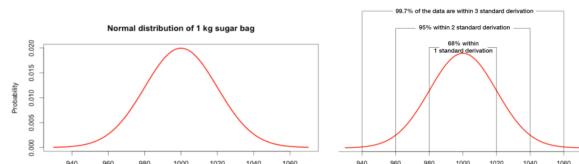
Interpretatie:

- 0 = normaalverdeling
- Minimum is -3: volledig plat
- Maximum is + inf

## 5.9 Anomaly detection

Voorbeeld: suikerfabriek produceert 1kg suikerzakken

- In werkelijkheid: nooit exact 1kg



Figuur 57: Verdeling 1kg suikerzak

**Definitie 5.5 (Anomalie)** *Een anomalie in een normaalverdeling is een onregelmatigheid of afwijking. Soms verdacht, soms niet.*

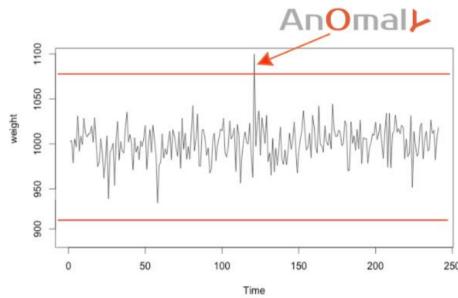
*"Anomaly detection (also outlier detection) is the identification of items, events or observations which do not conform to an expected pattern or other items in a dataset."*

### 5.9.1 Detectiemethode 1

= Minimum- en maximumgrens vastleggen

Bv:

- wanneer een waarde kleiner is dan  $\mu - 4\sigma$  (920 gram)
- wanneer een waarde groter is dan  $\mu + 4\sigma$  (1080 gram)



### 5.9.2 Detectiemethode 2

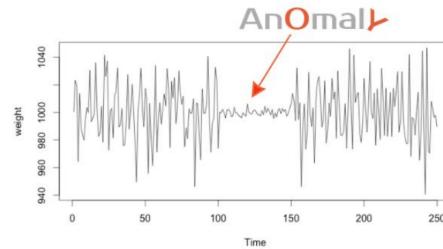
= detecteren van een zeldzame verdeling die afwijkt van de normaalverdeling

Bv:

- 4 opeenvolgende waarden die vallen in de buitengrenzen  $\mu - 3\sigma$  en  $\mu + 3\sigma$
- Kans voor 1 waarde: 0.3%
- Kans voor 4 opeenvolgende waardes:  $(0.3\%)^4 = (0.003)^4 = 0.00000000081$

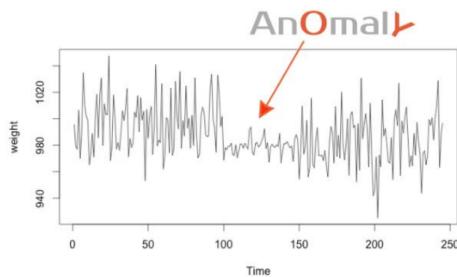
Bv:

- 50 opeenvolgende waarden die vallen in de buitengrenzen  $\mu - \sigma$  en  $\mu + \sigma$
- Kans voor 1 waarde: 68%
- Kans 50 opeenvolgende waardes:  $(0.68)^{50} = 4.221 \cdot 10^{-9}$



### 5.9.3 Detectiemethode 3

Volledige verschuiving van de normaalverdeling



Figuur 58: Oplossing: gebruik van window

## 6 Kansrekening

Doelstelling:

- Basiskennis kansrekening
- Definitie van Laplace
- Somregel kunnen toepassen
- Wet van de grote getallen
- Wat is een empirische kans?

### 6.1 Basiskennis

Kansrekenen = waarschijnlijkheidsrekenen

- Vrij jonge tak in de wiskunde
- ‘Rekenen over wat er nog niet is’

#### 6.1.1 Voorbeeld

Wat is de kans dat je 6 ogen gooit met een dobbelsteen?

- Kans op gooien van 1 = 1/6
- Kans op gooien van 2 = 1/6
- ...
- Kans op gooien van x = 1/6 = 16.7%

1 = aantal gunstige uitkomsten

6 = aantal mogelijke uitkomsten

### 6.2 Kansdefinitie van Laplace

**Definitie 6.1 (Kansdefinitie van Laplace)** *Bij een kansenexperiment is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan:*

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

### 6.2.1 Wiskundige notatie

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad (27)$$

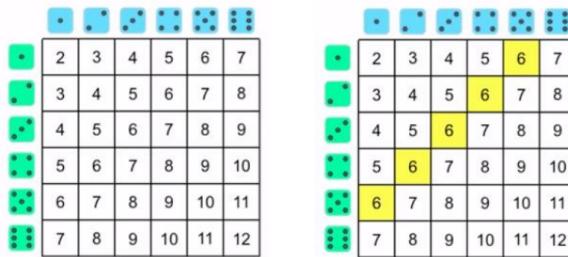
- Met  $A$ : een gebeurtenis
- Met  $\Omega$ : alle mogelijkheden ('het universum') ( $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ )
- Met  $\#A$ : aantal elementen (uitkomsten) die voldoen aan deze gebeurtenis
- Met  $\#\Omega$ : aantal elementen uit universum
- Voorwaarde: alle mogelijke uitkomsten zijn even waarschijnlijk

### 6.2.2 Gecombineerd experiment

**Bv:** je gooit 2 dobbelstenen

Wat is de kans op de gebeurtenis 'de som is 6 ogen'?

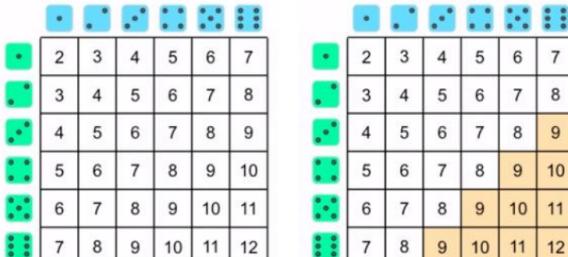
- $P(\text{som} == 2) = \frac{1}{36}$
- $P(\text{som} == 6) = \frac{5}{36}$



Figuur 59: Kans dat de som 6 ogen is

Wat is de kans op de gebeurtenis 'de som is minstens 9 ogen'?

- $P(\text{som} \geq 9) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$



Figuur 60: Kans dat de som minstens 9 ogen is

**Oefening:** je gooit met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelsteen

- Wat is de kans op de gebeurtenis met beide dobbelstenen evenveel gooien?

4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

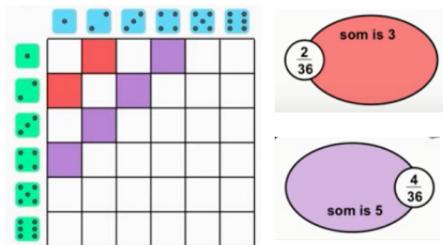
Figuur 61: Kansentabel opstellen

- $P(\text{beide dobbelstenen evenveel}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Wat is de kans dat de som van de ogen minstens 8 is?
  - Opnieuw kansentabel opstellen  $\Rightarrow \frac{15}{36}$

### 6.3 Somregel

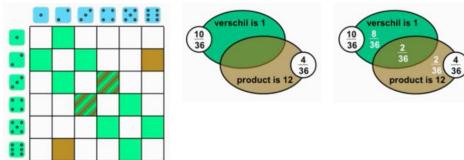
Bv: Je gooit met 2 dobbelstenen

- Wat is de kans op ‘som is 3 **of** som is 5’



Figuur 62: Geen overlap:

- Wat is de kans op ‘verschil is 1 **of** product is 12’



Figuur 63: Er is overlap: gevaar voor dubbeltelling  $\Rightarrow$  verschil aftrekken

#### 6.3.1 Wiskundig

- De gebeurtenis dat A of B beide optreden =  $A \cup B$  ‘vereniging’
- De gebeurtenis dat A of B tegelijkertijd optreden =  $A \cap B$  ‘doorsnede’

**Definitie 6.2 (Somregel)** De kans dat de vereniging zich voordoet ‘som-regel’:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (28)$$

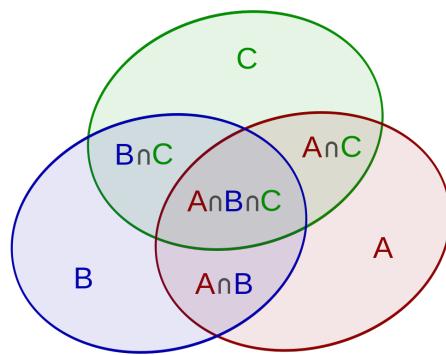
Als  $P(A \cap B)$  leeg is, dan geldt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (29)$$

### 6.3.2 Algemene somregel

Voor 3 gebeurtenissen A,B,C

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad (30)$$



Figuur 64:  $A \cap B \cap C$  moet terug opgeteld worden want hij werd te veel afgetrokken

## 6.4 Complementregel

1 dobbelsteen:

- Je gooit een 6
- Alle andere mogelijke gebeurtenissen = complement

**Definitie 6.3 (Complementregel)** Een gebeurtenis  $G$  en de complement-gebeurtenis  $G_{complement}$  vormen samen alle mogelijkheden

$$\begin{aligned} P(G) + P(G_{complement}) &= 1 \\ P(G) &= 1 - P(G_{complement}) \end{aligned} \quad (31)$$

## 6.5 Samengesteld experiment (stochastisch exp)

Een samengesteld kansexperiment: hetzelfde experiment wordt een aantal keer herhaald

Verschillende oplossingsmethodes mogelijk:

- Kansboom
- Combinaties

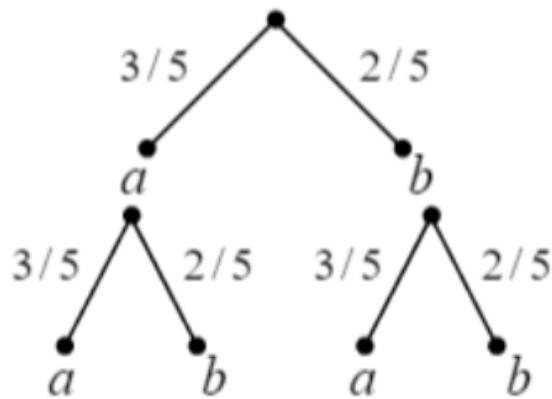
**Voorbeeld:** in een vaas liggen 5 briefjes waarop telkens 1 letter staat: 3 briefjes met de letter A en twee briefjes met de letter B

2 mogelijkheden:

- trekking met teruglegging
- trekking zonder teruglegging

### 6.5.1 Trekking met teruglegging

Uit de vaas wordt lukraak een letter getrokken. Deze wordt genoteerd en teruggelegd. Vervolgens trekken we opnieuw een letter.



Figuur 65: Verloop voorgesteld via een kansboom

- Uitkomstenverzameling:  $U = \{AA, AB, BA, BB\}$
- Elke tak = bijhorende deelkans

**Definitie 6.4 (Onafhankelijke deelexperimenten)** *Kansen bij de tweede trekking zijn onafhankelijk van het resultaat van de eerste trekking*

Wat is  $P(AB)$ ?

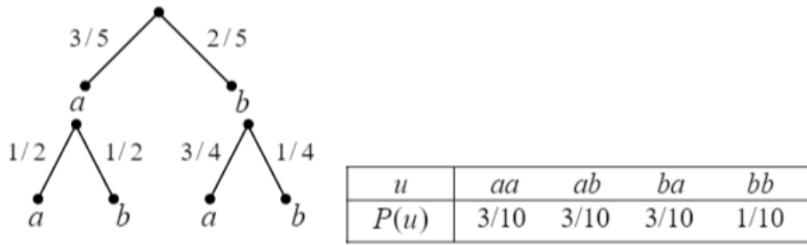
- $N$  = groot aantal herhalingen
- $\frac{3}{5}N$  keer leveren een A op
- $\frac{2}{5}N$  keer leveren een B op
- **Gevolg:**  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}N$  keer volgen de weg AB
- $\Rightarrow P(AB) = \frac{6}{25}$

$u$	$aa$	$ab$	$ba$	$bb$
$P(u)$	$9/25$	$6/25$	$6/25$	$4/25$

**Productregel voor kansen:** De kans op een weg is gelijk aan het product van de kansen langs die weg

### 6.5.2 Trekking zonder teruglegging

Uit de vaas wordt lukraak een letter genomen. Deze wordt genoteerd en **niet** teruggelegd. Vervolgens trekken we een nieuwe letter



Figuur 66: We vermenigvuldigen opnieuw de kansen

**Definitie 6.5 (Afhankelijke deelexperimenten)** *Kansen bij de tweede trekking zijn afhankelijk zijn van het resultaat van de eerste trekking*

## 6.6 Permutaties

**Definitie 6.6 (Permutatie)** *Een permutatie van een verzameling elementen is een herschikking/herordening ervan.*

⇒ volgorde is van belang!

### 6.6.1 Voorbeeld:

Je organiseert een wedstrijd voor 10 hardlopers. Op hoeveel manieren kan ik de gouden/zilveren/bronzen medaille gaan verdelen?

- Volgorde van belang!
- Aantal permutaties van 3 uit 10:  $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

### 6.6.2 Oefening

Een reclameblok bestaat uit 9 items: 2 over eten, 3 over reizen, 4 over auto's

1. Op hoeveel manieren kunnen deze items gerangschikt worden?
2. Op hoeveel manieren kunnen deze items gerangschikt worden als de items over reizen direct na elkaar komen?

TODO: oplossing oefeningen

## 6.7 Combinaties

**Definitie 6.7 (Combinaties)** *Een combinatie is een aantal manieren om  $k$  dingen uit  $n$  dingen te kiezen zonder dat de volgorde van belang is.*

### 6.7.1 Wiskundig

'n boven k' of 'uit n kies ik er k'

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad (32)$$

### 6.7.2 Voorbeeld

Uit 63 studenten worden er 8 gekozen om deel te nemen aan de studentenparticipatie

$$\binom{63}{8} = \frac{63!}{(63-8)! \cdot 8!} = 3872894697$$

### 6.7.3 Oefening

We gooien met 5 identieke munstukken. Wat is de kans dat we 3 of 4 keer kop gooien?

- Gevraagd:  $P(3 \text{ keer kop of } 4 \text{ keer kop})$
- Totaal =  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$
- Aantal gunstige:
  - 3x kop:  $\binom{5}{3} = 10$
  - 4x kop:  $\binom{5}{4} = 5$
- Resultaat: somregel =  $P(3 \text{ keer kop of } 4 \text{ keer kop}) = \frac{10}{32} + \frac{5}{32}$
- TODO

## 6.8 Theoretische en empirische kansen

### 6.8.1 Theoretische kansen:

- Eenvoudige kansberekeningen: gooien van een dobbelsteen, kans dat je 5 gooit
- Dit is een ‘theoretische’ of ‘a priori’ kans:
  - De kans op een gebeurtenis is vooraf berekenbaar

### 6.8.2 Empirische kansen

- Complexere kansberekening
- Uitkomst niet eenvoudig berekenbaar

### 6.8.3 Voorbeeld

We gooien 60 keer met een dobbelsteen, hoeveel vijven verwacht je hierbij?

- Verwachting: 10x 1, 10x 2, 10x 3, ...
- Maar is de werkelijkheid = verwachting?
- Relatieve frequentie:  $\frac{\text{frequentie aantal worpen}}{60} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

**Definitie 6.8 (De wet van de grote getallen)** Wanneer we een experiment heel vaak herhalen komt de relatieve frequentie steeds dichter in de buurt van de kans op de gebeurtenis.



Figuur 67: De wet van grote getallen

- Nuttig wanneer we kans niet vooraf kunnen berekenen.
- Door het experiment heel vaak te herhalen, kunnen we de kans afleiden.
- Hierdoor mogelijkheid tot uitspraak over experiment in toekomst
- Dit heet **de empirische kans**: de kans gebaseerd op waarneming

#### 6.8.4 Voorbeeld 2

Experiment met duimspijker: op hoeveel manieren kan hij bij een worp op de grond komen?

- We bekijken de kans  $P(\text{punt omlaag})$  en  $P(\text{punt omhoog})$
- Is dat wel 50/50?
- Theoretische kans niet te bepalen...
- Door experiment uit te voeren: de empirische kans  $P(\text{punt omhoog}) \approx 0.58$

## 7 Voorwaardelijke kans

### 7.1 Doelstelling

- Voorwaardelijke kansen berekenen
- Onafhankelijke gebeurtenissen herkennen
- Regel van Bayes kennen en toepassen

### 7.2 Situering

Een patiënt heeft mogelijk last van griep, verkoudheid, of beide.

- Een verkouden patiënt heeft met 60% kans last van hoestbuien, met 10% kans op hoofdpijnklachten
- Een patiënt met griep heeft kans 20% op hoestbuien, met 70% kans op hoofdpijn

Vragen

1. De patient vertelt dat hij last heeft van hoestbuien. Hoe groot is de kans dat hij griep heeft?
2. Hij zegt dat hij ook last heeft van hoofdpijn. Hoe groot is de kans nu dat hij griep heeft?

### 7.3 Voorbeeld

Voorwaardelijke kans: kans die aan een voorwaarde voldoet

		geslacht		
		jongen	meisje	
		0	8	13
sport	0	5	8	13
	1	22	17	39
	> 1	12	7	19
		39	32	71

Bereken exact de kans dat een willekeurig gekozen...

1. ... leerling 1 sport beoefend?
  - $P(\text{leerling 1 sport}) = 39/71$
2. ... leerling een jongen is en niet sport?
  - $P(\text{jongen 1 sport}) = 5/71$
3. ... meisje meer dan 1 sport beoefend
  - $P(\text{meisje } >1 \text{ sport}) = 7/32$
4. ... niet-sportende leerling een jongen is?
  - $P(\text{niet sportende jongen}) = 5/12$
5. ... meisje aan sport beoefend?
  - $P(\text{meisje doet sport}) = \frac{17+7}{32} = \frac{3}{4}$

Bij voorwaardelijke kansen bekijk je slechts een deel van de groep. Het aantal mogelijke uitkomsten waar je door deelt is dus een deelgroep

### 7.4 Wiskundig

De kans dat B onder de voorwaarde van A gebeurt:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (33)$$

Indien alle elementen in A en B evenwaardig zijn:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} \quad (34)$$

#### 7.4.1 Gevolg: productregel

We weten:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Daaruit volgt:

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) \quad (35)$$

De kans dat A en B samen voorkomen:

- = kans op B onder voorwaarde van A \* kans op A
- = kans op A onder voorwaarde van B \* kans op B

### 7.4.2 Algemene productregel

Met 3 verzamelingen:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(ABC) \\ &= P(C|AB) \cdot P(AB) \\ &= P(C|AB) \cdot P(B|A) \cdot P(A) \end{aligned} \quad (36)$$

**Algemeen:**

$$P(ABC \dots Z) = P(Z|ABC \dots Y) \cdot \dots \cdot P(C|AB)P(B|A)P(A) \quad (37)$$

## 7.5 Oefening 1

### 7.5.1 Opgave

Drie machines  $M_1, M_2, M_3$  produceren items:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
percentage productie	20	30	50
percentage defect	1	2	3

We kiezen willekeurig 1 item uit de totale productie.

Wat is de kans dat dit item kapot is?

Figuur 68: Opgave

### 7.5.2 Oplossing

Je vermenigvuldigt voor elke machine het productiepercentage met het defect percentage voor die machine. Die kansen tel je op:

$$P(D|M_1) \cdot P(M_1) + P(D|M_2) \cdot P(M_2) + P(D|M_3) \cdot P(M_3) \quad (38)$$

$$= 0.01 \cdot 0.02 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.5 \quad (39)$$

$$= 0.023 \quad (40)$$

## 7.6 Oefening 2

### 7.6.1 Opgave

Drie machines  $M_1, M_2, M_3$  produceren items:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
percentage productie	20	30	50
percentage defect	1	2	3

We kiezen willekeurig 1 item uit de totale productie, en dit blijkt kapot te zijn.

Wat is de kans dat dit item door  $M_2$  gemaakt is?

Figuur 69: Opgave

### 7.6.2 Oplossing

$$P(M_2|D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|M_2) \cdot P(M_2)}{P(D)} \quad (41)$$

$$= \frac{0.02 \cdot 0.3}{TODO} \quad (42)$$

$$= \quad (43)$$

## 7.7 Onafhankelijke gebeurtenissen

### 7.7.1 Voorbeeld

In een groep van 65 jongeren is er onderzoek gedaan of ze wel of niet sporten

3 gebeurtenissen:

- A: een leerling sport
- B: een leerling is een jongen
- C: een leerling is een meisje

		<b>geslacht</b>		
		jongen	meisje	
<b>sport</b>	wel	11	44	55
	niet	2	8	10
	totaal	13	52	65

- Kans dat een leerling sport:  $P(A) = \frac{55}{65} = \frac{11}{13}$
- Kans dat een leerling sport onder voorwaarde dat het een jongen is:  $P(A|B) = \frac{11}{13}$
- **Vaststelling:** of een leerling sport beoefend is onafhankelijk of het een jongen is

Wanneer gebeurtenis A en B onafhankelijk zijn geldt  $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$

- Kans dat leerling een jongen is:  $P(B) = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$

- Kans dat leerling een jongen is onder de voorwaarde dat hij sport:  $P(B|A) = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$

Wanneer gebeurtenis A en B onafhankelijk zijn geldt  $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$  en dus ook  $P(B \text{ voorwaarde } A) = P(B)$

### 7.7.2 Gevolg: Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen

Indien A en B onafhankelijk zijn, dan is de kans dat B onder voorwaarde van A gebeurt:

- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$

Productregel wordt dan:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B) \quad (44)$$

## 7.8 Productregel algemeen

Voor een n-tal willekeurige gebeurtenissen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  geldt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (45)$$

Men schrijft dit kort als:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (46)$$

### 7.8.1 Oefening 1

**Opgave:** controleer of het hebben van blauwe ogen al dan niet afhankelijk is van het geslacht

	Blauwe ogen	Geen blauwe ogen	
Jongen	15	5	20
Meisje	30	10	40
	45	15	

Figuur 70: Opgave

**Oplossing:**

### 7.8.2 Oefening 2

**Opgave:** controleer of kans op bloedgroep AB al dan niet onafhankelijk is van de waarde Rh+

	AB	O	
Rh+	15	155	170
Rh-	5	25	30
	20	180	

Figuur 71: Opgave

## 7.9 Regel van Bayes

### 7.9.1 Toepassingsdomein

- Belangrijkste deel uit kansrekening
- Toepassing in medische en genetische diagnostiek, AI, organisatie van dataverkeer, wetenschappelijk onderzoek

Een test op *HIV* is 90% betrouwbaar: als een persoon *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.9, en als een persoon geen *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.1. De kans op *HIV* is 0.05.

Een dame ondergaat de test en de uitslag is positief. Wat is de kans dat zij *HIV* heeft?

Figuur 72: Voorbeeld 1

Een test op *HIV* is 90% betrouwbaar: als een persoon *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.9, en als een persoon geen *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.1. De kans op *HIV* is 0.05.

Een dame ondergaat de test en de uitslag is positief. Wat is de kans dat zij *HIV* heeft?

Figuur 73: Voorbeeld 2

### 7.9.2 Formule van Bayes (eenvoudige vorm)

Uit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ en } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

volgt:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

dus:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (47)$$

### 7.9.3 Voorbeeld

De kans dat een zekere kerncentrale oververhit raakt (O) is  $1 \cdot 10^{-7}$ , de kans dat een lek (L) ontstaat is  $1 \cdot 10^{-8}$ , maar als er eenmaal een lek is, is de kans groot dat de centrale oververhit raakt: 0.1.

Wat is de kans dat de centrale gaat lekken als hij oververhit raakt?

$$P(L|O) = \frac{P(L \cap O)}{P(O)} = \frac{P(O|L) \cdot P(L)}{P(O)}$$

Dus:

$$P(L|O) = \frac{0.1 \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-7}} = 0.01$$

## 7.10 Regel van Bayes (variant 1)

We beschouwen van een gebeurtenis  $H$  ook zijn complement  $\bar{H}$ .

Ter herinnering:

- $P(B) + P(\bar{B}) = 1$
- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
- $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$

Daaruit volgt:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \quad (48)$$

$$= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \quad (49)$$

Een test op  $HIV$  is 90% betrouwbaar: als een persoon  $HIV$  heeft is de kans op een positieve uitslag 0.9, en als een persoon geen  $HIV$  heeft is de kans op een positieve uitslag 0.1. De kans op  $HIV$  is 0.05.

Een dame ondergaat de test en de uitslag is positief. Wat is de kans dat zij  $HIV$  heeft?

De gevraagde kans is  $P(HIV|POS)$ . In de notatie van de Stelling van Bayes wordt dat  $H = HIV$  en  $E = POS$ .

Met de Stelling van Bayes:

$$P(HIV|POS) = \frac{P(POS|HIV)P(HIV)}{P(POS|HIV)P(HIV) + P(POS|\bar{HIV})P(\bar{HIV})}.$$

Daarmee

$$P(HIV|POS) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95} = 0.32.$$

Figuur 74: Voorbeeld 1

Een test op  $HIV$  is 90% betrouwbaar: als een persoon  $HIV$  heeft is de kans op een positieve uitslag 0.9, en als een persoon geen  $HIV$  heeft is de kans op een positieve uitslag 0.1. De kans op  $HIV$  is 0.05.

Een dame ondergaat de test en de uitslag is positief. Wat is de kans dat zij  $HIV$  heeft?

De gevraagde kans is  $P(HIV|POS)$ . In de notatie van de Stelling van Bayes wordt dat  $H = HIV$  en  $E = POS$ .

Met de Stelling van Bayes:

$$P(HIV|POS) = \frac{P(POS|HIV)P(HIV)}{P(POS|HIV)P(HIV) + P(POS|\bar{HIV})P(\bar{HIV})}.$$

Daarmee

$$P(HIV|POS) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95} = 0.32.$$

Figuur 75: Voorbeeld 2

## 7.11 Regel van Bayes (variant 2)

We beschouwen van een gebeurtenis  $H$  ook zijn complement  $\bar{H}$ , waarbij nu geldt dat  $P(H) = P(\bar{H})$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})} \quad (50)$$

$$= \frac{P(E|H)}{P(E|H) + P(E|\bar{H})} \quad (51)$$

## 7.12 Regel van Bayes (algemeen)

Verzameling  $B$  in verschillende gevallen onderverdeeld  $(B_1, B_2, \dots, B_n)$  die elkaar uitsluiten:  $B_i \cap B_j = \emptyset$  als  $i \neq j$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \quad (52)$$

**Vb.** Een restaurant schenkt Bordeaux, Beaujolais en Merlot. Wanneer een gast geen keuze kan maken kiest de ober, kans 0.6 dat hij Bordeaux, 0.3 dat hij Beaujolais en 0.1 dat hij Merlot kiest. Bij elk van deze wijnen zijn er gasten die het niet smaakt. Stel dat de kans daarop voor Bordeaux, Beaujolais en Merlot respectievelijk 0.01, 0.04 en 0.2 is. Een gast krijgt een door de ober gekozen wijn en vindt die niet lekker.

Wat is de kans dat het Bordeaux is?

$H_1$ : de wijn is Bordeaux,  $H_2$ : de wijn is Beaujolais,  $H_3$ : de wijn is Merlot.  $E$ : de gast vindt de wijn niet lekker.

$H_1$ : de wijn is Bordeaux,  $H_2$ : de wijn is Beaujolais,  $H_3$ : de wijn is Merlot.  $E$ : de gast vindt de wijn niet lekker.

$$P(H_1|E) = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{\sum_{j=1}^3 P(E|H_j)P(H_j)} = \frac{0.01 \cdot 0.6}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1} = 0.1578947.$$

Wat is de kans dat het Beaujolais is?

$$P(H_2|E) = \frac{P(E|H_2)P(H_2)}{\sum_{j=1}^3 P(E|H_j)P(H_j)} = \frac{0.04 \cdot 0.3}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1} = 0.3357995. \quad P(H_3|E) = \frac{P(E|H_3)P(H_3)}{\sum_{j=1}^3 P(E|H_j)P(H_j)} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1} = 0.5263158.$$

Figuur 76: Voorbeeld algemene regel van Bayes

## 7.13 Bayesiaans leren: toepassing in machine learning

**Def.** *Bayesiaans leren* heeft (in essentie) de volgende vorm:

Er zijn een aantal *hypotheses*  $H_1, \dots, H_n$  die samen de uitkomstenruimte vormen.

De hypotheses zijn meer of minder waarschijnlijk: de (initiële) bijbehorende verdeling is de *a-priori* verdeling, de kansen  $P(H_i)$  zijn de *a-priori* kansen.

Na het verkrijgen van nieuwe informatie/data/gebeurtenis  $E$  worden de kansen van de hypotheses aangepast volgens de stelling van Bayes:

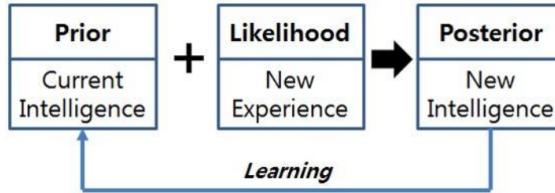
$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(E | H_j)P(H_j)}.$$

De kansen  $P(H_i | E)$  zijn de *a-posteriori* kansen. De kansen  $P(E | H_i)$  zijn de *likelihoods* van  $E$ .

Na het verkrijgen van nieuwe informatie/data/gebeurtenis  $E$  worden de kansen van de hypotheses aangepast volgens de stelling van Bayes:

$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(E | H_j)P(H_j)}.$$

De kansen  $P(H_i | E)$  zijn de *a-posteriori* kansen. De kansen  $P(E | H_i)$  zijn de *likelihoods* van  $E$ .



Na het verkrijgen van nieuwe informatie/data/gebeurtenis  $E$  worden de kansen van de hypotheses aangepast volgens de stelling van Bayes:

$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(E | H_j)P(H_j)}.$$

De kansen  $P(H_i | E)$  zijn de *a-posteriori* kansen. De kansen  $P(E | H_i)$  zijn de *likelihoods* van  $E$ .

Leren:

Op grond van telkens nieuwe data  $E_1, E_2, \dots$  wordt de verdeling van de hypotheses voortdurend aangepast,  $P_0, P_1, P_2, \dots$ :

- $P_0$  is de *a-priori* verdeling, waarbij  $P_0(H_i) = P(H_i)$ .
- Na het verkrijgen van data  $E_1$  wordt de nieuwe verdeling  $P_1$ , waarbij  $P_1(H_i) = P_0(H_i | E_1)$ .
- Na het verkrijgen van data  $E_2$  wordt de nieuwe verdeling  $P_2$ , waarbij  $P_2(H_i) = P_1(H_i | E_2)$ .
- Etc.

Figuur 77: TODO: tekst ipv images

## 7.14 Naïve Bayes Spam Filter

**Doelstelling:** Regel van Bayes kennen en toepassen om een eenvoudige spam-filter te programmeren.

- Gegeven een bepaalde spamfilter
- Email komt in spamfolder: hoe groot is de kans dat het effectief spam is?
  - $P(\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\text{spam}) \cdot P(\text{spam})}{P(\text{message})}$
  - Waarbij:  $P(\text{spam}|\text{message})$  = de kans dat een email uit spamfolder effectief spam is
  - En:  $P(\text{message}|\text{spam})$  = de kans op klassificatie spam door deze filter
- Email komt in inbox: hoe groot is de kans dat het geen spam is?
  - $P(\neg\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\neg\text{spam}) \cdot P(\neg\text{spam})}{P(\text{message})}$
  - Waarbij:  $P(\neg\text{spam}|\text{message})$  = de kans dat een email uit inbox effectief geen spam is
  - En:  $P(\text{message}|\neg\text{spam})$  = de kans op klassificatie geen spam door deze filter

Veronderstel: nieuwe e-mail zit in de spam-folder:

Kans dat gegeven e-mail uit spamfolder effectief spam is

$$P(\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\text{spam})P(\text{spam})}{P(\text{message})}$$

Veronderstel: nieuwe e-mail zit in de inbox:

Kans dat gegeven e-mail uit inbox effectief geen spam is

$$P(\neg\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\neg\text{spam})P(\neg\text{spam})}{P(\text{message})}$$

Figuur 78: Als links  $>$  rechts  $\Rightarrow$  email naar spamfolder, anders email naar inbox

Een gegeven e-mail (message) wordt dus herkend als spam als:

- $P(\text{spam}|\text{message}) > P(\neg\text{spam}|\text{message})$
- Merk op dat  $P(\text{message})$  geen invloed heeft op de beslissing
- Dus:  $P(\text{message}|\text{spam}) \cdot P(\text{spam}) > P(\text{message}|\neg\text{spam}) \cdot P(\neg\text{spam})$

### 7.14.1 Herkennen van een spam bericht

Doel:

- Berekenen van  $P(\text{message}|\text{spam}) P(\text{spam})$
- Berekenen van  $P(\text{message}|\text{not spam}) P(\text{not spam})$

Message:

- opeenvolging van woorden ( $w_1, w_2, \dots, w_n$ )
- volgorde niet belangrijk
- elk woord is onafhankelijk van het andere woord

Berekenen van  $P(\text{message}|\text{spam}) P(\text{spam})$ :

$$\begin{aligned}
P(\text{message}|\text{spam}) &= P(w_1, w_2, \dots, w_n | \text{spam}) \\
&= P(w_1 | \text{spam}) \cdot P(w_2 | \text{spam}) \cdots \cdots P(w_n | \text{spam}) \\
&= \prod_{i=1}^n P(w_i | \text{spam})
\end{aligned}$$

Berekenen van  $P(\text{message}|\neg\text{spam})P(\neg\text{spam})$ :

$$\begin{aligned}
P(\text{message}|\text{spam}) &= P(w_1, w_2, \dots, w_n | \neg\text{spam}) \\
&= \prod_{i=1}^n P(w_i | \neg\text{spam})
\end{aligned}$$

Onze filter classificeert een message als spam als:

$$\frac{P(\text{spam}) \prod_{i=1}^n P(w_i | \text{spam})}{P(\neg\text{spam}) \prod_{i=1}^n P(w_i | \neg\text{spam})} > \text{threshold}$$

prior                              likelihood

Figuur 79

### 7.14.2 Parameters

- $P(\text{spam})$
- $P(\neg\text{spam})$
- $P(\text{woord}|\text{spam})$ 
  - = woord aantal keer gevonden in spam messages, gedeeld door aantal spam messages
- $P(\text{woord}|\neg\text{spam})$

Meer info: zie labo-oefening week3B

## 8 Logging

### 8.1 Inleiding

#### 8.1.1 Waarom?

- Diagnose van een specifiek probleem
- Normale flow van een applicatie controleren
- Gebeurtenissen registreren
- Werken met verschillende niveau's: niet elk logbericht is even belangrijk
- Flexibere manier nodig dan enkel maar print-statements

### 8.1.2 Opzet

- Je wenst zelf niveau van loggen bepalen
- Formaat van logbericht vooraf definieren
- Locatie (scherm/bestand/...) vooraf vastleggen

### 8.1.3 Logging levels

Level	Wanneer te gebruiken?
DEBUG	Gedetailleerde info, typisch bestemd voor de diagnose van een probleem
INFO	Bevestiging van zaken die verondersteld werden te lukken
WARNING	Indicatie dat er iets onverwacht gebeurd is, of iets dat in de nabije toekomst zal plaatsvinden (bv: 'disk space low')
ERROR	Door een ernstig probleem was de software niet in staat om een bepaalde functie uit te voeren
CRITICAL	Zeer ernstig probleem dat het programma verhindert om verder te zetten

## 8.2 Basis logging

```
1 # stap 1: niveau instellen (DEBUG, INFO, WARNING, ERROR, CRITICAL)
2 logging.basicConfig(level=logging.CRITICAL)
3
4 # stap 2: voorzie code van log-methodes op gewenste plaatsen
5 logging.debug("dit is een debug log")
6 logging.info("dit is een inf log")
7 ...
8 logging.critical("dit is een critical log")
```

### 8.2.1 Spelregels

- Er wordt pas gelogd als het niveau van de logmethode gelijk of groter is dan het ingesteld logniveau

```
1 logging.basicConfig(level=logging.ERROR) # stel loggingniveau in
2 logging.debug("...") # Niet gelogd
3 logging.info("...") # Niet gelogd
4 logging.warning("...") # Niet gelogd
5 logging.error("...") # Wel gelogd
6 logging.critical("...") # Wel gelogd
```

### 8.2.2 Format logbericht

```
1 # Voorbeeld 1
2 logging.basicConfig(level=logging.ERROR, format="*** %(message)s ***")
3 # Voorbeeld 2
4 logging.basicConfig(level=logging.DEBUG,
5                     format"%(asctime)s\t%(levelname)s -- %(processName)s%(filename)s:%(lineno)s -- %(message)s")
```

### 8.2.3 Naar een file loggen

```
1 logging.basicConfig(
2     filename='logging.txt',
3     level=logging.DEBUG,
4     format"%(asctime)s - %(message)s"
5 )
```

### 8.2.4 Toegepast

(zie ook demos)

```
1 @studentennummer.setter
2 def studentennummer(self, value):
3     if isinstance(value, int):
4         self.__studentennummer = value
5     else:
6         logging.error("Geen geldig studentennummer: %s" % value)
7         raise ValueError("Geen geldig studentennummer!")
```

```
1 @staticmethod
2 def inlezen_studenten(bestandsnaam):
3     studenten = []
4     try:
5         logging.info("Bestand %s inlezen" % bestandsnaam)
6         fo = open(bestandsnaam)
7         lijn = fo.readline() # eerste lijn = niets mee doen
8         lijn = fo.readline()
9         while (lijn != ""):
10            lijn = lijn.rstrip('\n')
11            delen = lijn.split(';')
12            try:
13                student = Student(delen[0], delen[1], delen[2], delen[3], int(delen[4]))
14                studenten.append(student)
15            except:
16                logging.debug("Ongeldig lijn bij inlezen file: %s" % lijn)
17                lijn = fo.readline() # lees volgende lijn in
18            logging.info("Bestand volledig ingelezen")
19            fo.close()
20        except FileNotFoundError as ex:
21            logging.error("Bestand niet gevonden")
22            raise ex
23    return studenten
```

```
1 @staticmethod
2 def opslaan_studenten(bestandsnaam, studenten):
3     try:
4         logging.info("Start opslaan studenten naar bestand: %s" % bestandsnaam)
5         fo = open(bestandsnaam, "w")
6         fo.write("Naam;Voornaam;StudentenNummer;Opleiding;Geboortejaar\n")
7         for student in studenten:
```

```

8         fo.write(student.naam + ";" + student.voornaam + ";" + str(student.studentnummer) + ";")
9     fo.close()
10    logging.info("Opslaan studenten voltooid")
11 except FileNotFoundError as ex:
12     logging.error("Bestand niet gevonden")
13     raise ex
14 except Exception as ex:
15     logging.error("Onverwachte fout: %s" % ex)

```

Meer info: <https://docs.python.org/3.9/howto/logging.html#logging-basic-tutorial>

## 9 Threading

### 9.1 Doelstelling

- In python een thread-klasse kunnen programmeren
- Threads op elkaar kunnen afstemmen

### 9.2 Wat zijn threads?

Thread: 'flow of control through a program'

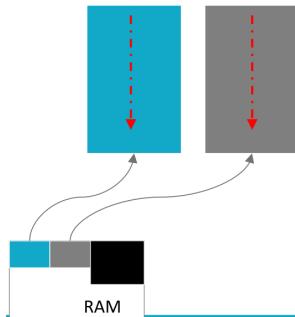
- Heeft geen gescheiden geheugengebruik
- Deelt deze met andere threads gecreëerd door hetzelfde programma
- Kan wel nog lokale variabelen hebben: elke thread heeft zijn eigen stack met lokale variabelen

### 9.3 Process vs Thread

PROCESSES	THREADS
Processes don't share memory	Threads share memory
Spawning/switching processes is expensive	Spawning/switching threads is less expensive
Processes require more resources	Threads require fewer resources (are sometimes called lightweight processes)
No memory synchronisation needed	You need to use synchronisation mechanisms to be sure you're correctly handling the data

Figuur 80: Overzicht

### 9.3.1 Process

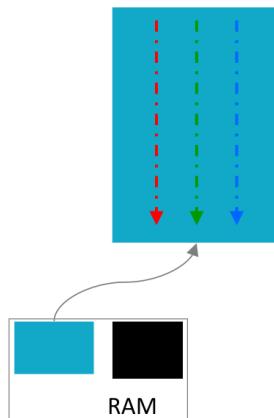


Figuur 81: Twee processen

Twee processen:

- Elk eigen geheugenruimte (virtual address space)
- Gescheiden code
- Data gescheiden
- CPU beslist welk proces uitgevoerd wordt

### 9.3.2 Thread



Figuur 82: 3 threads in 1 proces

- Zelfde geheugenruimte (virtual address space)
- Zelfde code wordt gedeeld
- Data kan gedeeld worden
- Voor elke thread: soort virtual CPU

2 types threads in python:

- User-level threads: eigen ontwikkelde threads

- Kernel-level threads: low-level threads veroorzaakt door operating system

## 9.4 De threading library

```

import threading
import time
from threading import Thread

def sleepMe(i):
    print(f"++Thread {i} started: {threading.current_thread()}")
    time.sleep(10)
    print(f"++Thread {i} is finished")

# main-thread afprinten
print(threading.main_thread())

for i in range(1,10):
    th = Thread(target=sleepMe, args=(i, ))
    th.start()
    print(f"\nCurrent Thread count: {threading.active_count()}.")

```

Figuur 83: De threading library

### 9.4.1 Thread aanmaken

```

1 # Via de constructor van de thread klasse
2 th = Thread(target=sleepMe, args=(i, ))

```

Mogelijke parameters:

- group: a special parameter which is reserved for future extension
- target: the callable object to be invoked by the run method(), if None: nothing will be started
- name: our threads name
- args: arguments tuple for target invocation, defaults to ()
- kwargs: dictionary keyword argument to invoke the base class constructor

### 9.4.2 Andere methods

```

1 # huidige thread wordt in slaaptoestand gebracht (voor x seconden)
2 time.sleep(x)
3 # geeft het aantal active threads weer
4 # Vergeet ook de main-thread niet mee te tellen
5 threading.active_count()
6 # Main-thread opvragen:
7 threading.main_thread()
8 # Overlopen van huidige threads:
9 print("Active threads:")
10 for thread in threading.enumerate():
11     print(f">Thread name is {thread.getName()}")

```

### 9.4.3 Timer

Uitvoeren van een thread na een specifieke tijd laten opstarten

```

1 import threading
2
3 def delayed():
4     print("I am printed after 5 seconds")
5
6 print("Demo timer")
7 thread = threading.Timer(5, delayed)
8 thread.start()
9 print("thread is opgestart")
10
11 # output:
12 > "Demo timer"
13 > "thread is opgestart"
14 > "I am printed after 5 seconds!"

```

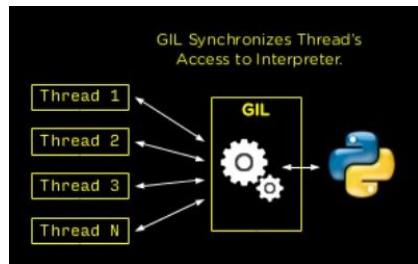
## 9.5 Multithreading

Veronderstelling dat meerdere threads ‘gelijktijdig’ uitgevoerd worden:

- Processing core switcht heel snel tussen de verschillende threads en geeft zo de impressie dat ze dat ze gelijktijdig plaatsvinden
- De keuze tussen de threads wordt bepaald door de context

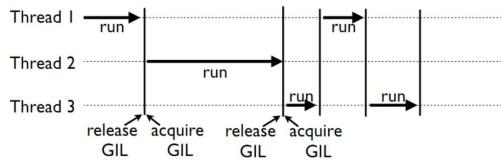
### 9.5.1 Python Thread Management

- Memory management is not thread-safe!
- Global Interpreter Lock (GIL):
  - Slechts 1 thread kan van de python interpreter gebruikmaken
  - Hierdoor kunnen python threads niet helemaal gelijktijdig uitgevoerd worden
  - GIL gaat dus de verschillende threads serialiseren naar de interpreter



Figuur 84: GIL

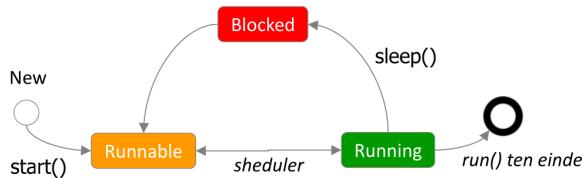
Elke thread dient een GIL-lock te verkrijgen:



## 9.6 Thread toestanden

Een thread kan in verschillende toestanden bevinden:

- Runnable state: thread is aangemaakt
- Running state: thread is gestart
- Blocked: sleeping, wachten tot een andere thread klaar is, wachten op data, ...



Figuur 85: Schema thread toestanden

## 9.7 Opgelet met threads!

- Een thread dat ten einde is, kan niet nogmaals uitgevoerd worden
- Python VM heeft geen thread management: het is niet mogelijk aan threads prioriteiten te hangen

## 9.8 Wanneer threads gebruiken?

- Bij I/O bound processing
- Beperkte CPU-intensieve operaties

## 9.9 Thread-class

### 9.9.1 Maken van een nieuwe thread-klasse

Werkwijze:

1. maak een klasse die erft van de `Thread` class
2. overschrijf de `__init__` methode: geef eventueel parameters langs deze weg door
3. overschrijf de `__run__` methode

```

1 class MyThread(threading.Thread):
2
3     def __init__(self, threadID, name, counter, delay):
4         threading.Thread.__init__(self)
5         self.threadID = threadID
6         self.name = name
7         self.counter = counter
8         self.delay = delay
9
10    def run(self):
11        print(f"Starting {self.name}")
12        while self.counter >= 0:
13            time.sleep(self.delay)
14            print(f"{self.name}: {time.ctime(time.time())} -> counter: {self.counter}")
15            self.counter -= 1
16        print(f"Exiting {self.name}")

```

Figuur 86: Voorbeeld MyThread-kLASSE

### 9.9.2 Opstarten van een thread

1. Maak een object van de thread-kLASSE
2. Voer de methode `start()` uit

```

1 # create threads
2 thread1 = MyThread(1, "Thread-1", 10, 1)
3 thread2 = MyThread(1, "Thread-1", 20, 2)
4
5 # start new threads
6 thread1.start()
7 thread2.start()

```

## 9.10 Threading-synchronisation

### 9.10.1 Join-methode

Laat toe op een bepaalde thread te wachten

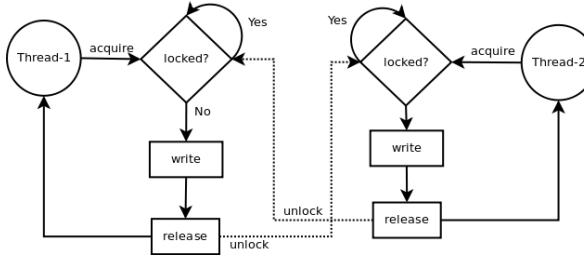
```

1 # create threads
2 thread1 = MyThread(1, "Thread-1", 10, 1)
3 thread2 = MyThread(1, "Thread-2", 20, 2)
4
5 # start new threads
6 thread1.start()
7 thread2.start()
8
9 thread1.join()
10 thread2.join()
11 print("Exiting Main thread")

```

### 9.10.2 Thread locking

Locking mechanisme: lock-objecten controleren de toegang tot een gemeenschappelijk data-object



Figuur 87: Schema 2 threads met locking

```

1 # Vooraf: thread-lock-object aanmaken
2 myThreadLock = threading.Lock()
3
4 # in de run-methode:
5 # - lock aanvragen
6 # - lock vrijgeven
7
8 def run(self):
9     print(f"Starting {self.name}")
10    while MyThread.global_counter >= 0:
11        myThreadLock.acquire()
12        print(f"{self.name}: {time.ctime(time.time())} -> counter: {MyThread.global_counter}")
13        MyThread.global_counter -= 1
14        myThreadLock.release()
15        time.sleep(self.delay)
16    print(f"Exiting {self.name}")

```

### 9.10.3 Condition

Condition mechanisme:

- Analoog als lock, maar nu verwittigen we ook andere threads
- Gebruikt in pattern: Producer/Consumer pattern

```

1 # condition object
2 condition = threading.Condition()
3
4 # gebruik op de juiste plaats:
5 def consumer(cond):
6     """ Wait for the condition and use the resource """
7     logging.debug("Starting consumer thread")
8     with cond:
9         cond.wait()
10        logging.debug("Resource is available to consumer")
11
12 def producer(cond):
13     """ Set up the resource to be used by the consumer """
14     logging.debug("Starting producer thread")
15     with cond:
16         logging.debug("Making resources available")

```

```
17     cond.notifyAll()
```

#### Uitvoering:

```
1 condition = threading.Condition()  
2  
3 c1 = threading.Thread(name='c1', target=consumer, args=(condition, ))  
4 c2 = threading.Thread(name='c2', target=consumer, args=(condition, ))  
5 p = threading.Thread(name='p', target=producer, args=(condition, ))  
6  
7 c1.start()  
8 time.sleep(0.2)  
9 c2.start()  
10 time.sleep(0.2)  
11 p.start()
```

#### Output:

```
1 2018-03-13 09:32:16,235 (c1) Starting consumer thread  
2 2018-03-13 09:32:16,435 (c2) Starting consumer thread  
3 2018-03-13 09:32:16,635 (p ) Starting producer thread  
4 2018-03-13 09:32:16,643 (p ) Making resources available  
5 2018-03-13 09:32:16,644 (c1) Resource is available to consumer  
6 2018-03-13 09:32:16,644 (c2) Resource is available to consumer
```

## 9.11 Daemon vs not-daemon threads

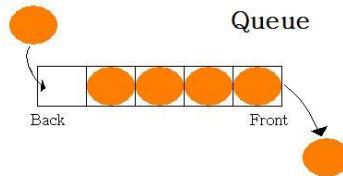
Tot nu toe: elke thread heeft dezelfde prioriteit

- Dit is niet steeds nodig: sommige threads mogen/kunnen onderbroken worden (zonder gevaar op verlies van data)
- Werkwijze: via methode set\_daemon() op true plaatsen

## 9.12 Multithreaded queue

Een queue en threads kunnen heel nauw samenwerken met elkaar

### 9.12.1 Queue



Figuur 88: Queue

Method	Description
get()	It will give an item from the queue
put()	It adds an item to the queue.
qsize()	This method will return a total number of elements in the queue.
Empty()	If the queue is empty it will return true else false.
Full()	If the queue is full the method will return true else false.

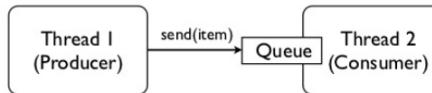
```

1  from Queue import Queue
2
3  q = Queue([maxsize])           # create a queue
4  q.put(item)                  # put an item on the queue
5  q.get()                      # get an item from the queue
6  q.empty()                    # check if empty
7  q.full()                     # check if full

```

### 9.12.2 Threading + queue

Threading is soms eenvoudiger indien ze in een producer/consumer model geplaatst worden. Ze geven data via een queue door aan elkaar.



- Voordeel: een queue heeft geen locks nodig.
- Heeft bovendien zijn eigen signaalmechanisme:

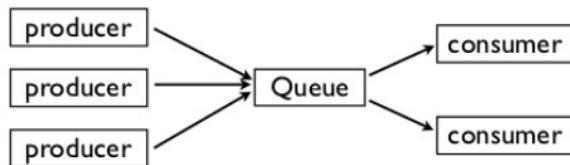
```

1  q.task_done()                 # signal that work is done
2  q.join()                      # wait for all work to be done
3
4  # in producer thread:
5  for item in produce_items():
6      q.put(item)
7  q.join()                      # wait for consumer
8
9
10 # in consumer thread:
11 while True:
12     item = q.get()
13     consume_item(item)
14     q.task_done()

```

### 9.12.3 Queue programming

Er zijn heel veel verschillende werkwijzen om een queue te integreren. Geen beperking in het aantal producers/consumers:



Figuur 89: Meerdere producers/consumers met een queue

## 10 Network Programming

### 10.1 Doelstelling

- Basisbegrippen in network programming kunnen definiëren
- Gebruik van sockets
- Networking - Socket Programming kunnen situeren & programmeren in Python

### 10.2 Basisbegrippen

#### 10.2.1 Client-server programming

- Client-server is het omgekeerde van peer-to-peer
- Host machine = machine waarop de server draait
- Client connecteert naar server's host machine
- Server levert bepaalde services
- Client & server kunnen ook op 1 machine draaien

#### 10.2.2 Poorten (ports)

- Eerder abstract concept: geen hardware
- Poort = een logische connectie naar een computer
- Identificeert zich met een nummer tussen 1 en 65535
- Netwerkprogrammeur zal explicet een poort van een machine refereren als er een server programma op draait
- Poortnrs tussen 1 en 1023: standard services
- Achter elke gebruikte poort schuilt dus een server programma, wachtend voor een request (aanvraag) als client connectie wil maken dan heeft het het overeenkomstig poortnummer van de service nodig

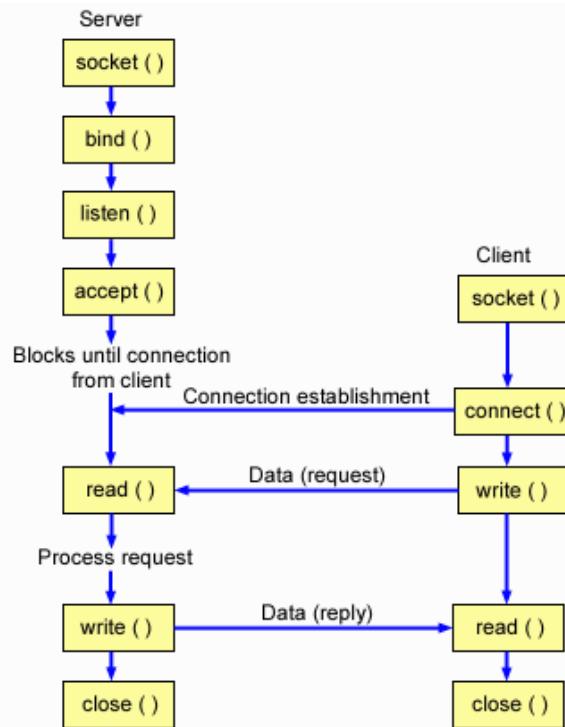
#### 10.2.3 Sockets

= representeert een connectie tussen 2 applicaties

- Ook hier logisch abstract concept: geen hardware
- Wijst op één van de twee eindpunten van een communicatielink tss twee processen

- client wil connectie  $\Rightarrow$  creeert hiervoor socket
- idem langs serverzijde: socket verzorgt communicatie met de client
- zo kan 1 poort geassocieerd worden met vele sockets

#### 10.2.4 Client-server communicatie



Figuur 90

Een communicatielink gecreëerd via TCP-sockets is een connectie-georiënteerde link: de connectie tussen client & server blijft open gedurende de dialoog

Twee types processen:

- Server
- Client

Stappen:

1. aanmaken van een server socket
2. aanmaken van een socket door de client

### 10.3 Network programming in Python

#### 10.3.1 Socket Module

Creatie van een socket:

```

1 s = socket.socket (socket_family , socket_type , protocol = 0)

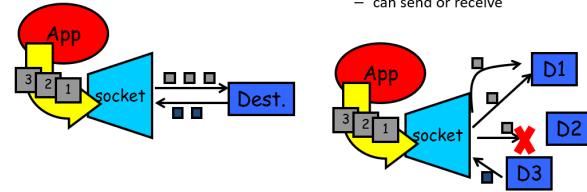
```

- socket\_family = representeert the transport mechanism.
  - Vb: AF\_INET: AF\_INET gebruikt (host, port) waarbij host een string of IP-adres is, en port een integer is
- socket\_type = dit is SOCK\_STREAM (connection-oriented protocols) or SOCK\_DGRAM (connectionless protocols)

TCP socket (SOCK_STREAM)	UDP socket (SOCK_DGRAM)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Connection oriented TCP</li> <li>• Reliable delivery</li> <li>• In-order guaranteed</li> <li>• Three way handshake</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Connectionless UDP</li> <li>• Unreliable delivery</li> <li>• No-order guarantees</li> <li>• No notion of "connection"</li> </ul>

- protocol = meestal niet gespecificeerd, standaard = 0

- SOCK\_STREAM
  - a.k.a. TCP
  - reliable delivery
  - in-order guaranteed
  - connection-oriented
  - bidirectional
- SOCK\_DGRAM
  - a.k.a. UDP
  - unreliable delivery
  - no order guarantees
  - no notion of "connection" – app indicates dest. for each packet
  - can send or receive



Figuur 91: Socket types

### 10.3.2 Serversocket opzetten

```

1 # create a socket object
2 serversocket = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_STREAM)

3
4 # get local machine name
5 host = socket.gethostname()
6 port = 9999

7
8 # bind to the port
9 serversocket.bind((host, port))

10
11 # queue up to 5 requests
12 serversocket.listen(5)

```

### 10.3.3 Serversocket laten wachten op connecties

We wachten tot we verbinding hebben met de client:

```

1 while True:
2     logging.info("Waiting for a client")
3
4     # establish a connection
5     socket_to_client, addr = serversocket.accept()
6     logging.info("Got a connection from %s" % str(addr))

```

#### 10.3.4 Clientsocket opzetten

```

1 logging.info("Making connection to server")
2
3 # create a socket object
4 socket_to_server = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_STREAM)
5
6 # get local machine name
7 host = socket.gethostname()
8 port = 9999
9
10 # connection to hostname on the port
11 socket_to_server.connect((host, port))

```

#### 10.3.5 Communicatie tussen server & client

Bv: server communiceert 1 bericht terug naar de client

##### Server

```

1 while True:
2     logging.info("Waiting for a client")
3
4     # establish a connection
5     socket_to_client, addr = serversocket.accept()
6     logging.info("Got a connection from %s" % str(addr))
7
8     # send a message to the client
9     msg = 'Thank you for connecting!' + "\r\n"
10    socket_to_client.send(msg.encode('ascii'))
11
12    logging.info("Connection closed with client")
13    socket_to_client.close()

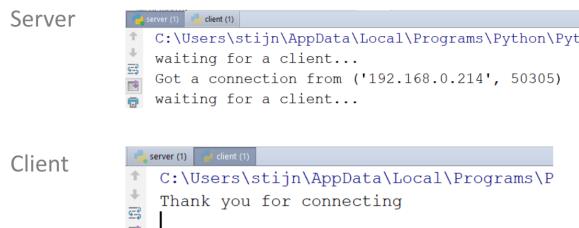
```

##### Client

```

1 # receive no more than 1024 bytes:
2 msg = socket_to_server.recv(1024)
3 print(msg.decode('ascii'))

```



Figuur 92: Resultaat

### 10.3.6 Communicatie tussen server en client: lezen en schrijven naar een bestand

#### Server

```

1 while True:
2     logging.info("Waiting for a client")
3     # establish a connection
4     socket_to_client, addr = serversocket.accept()
5     logging.info("Got a connection from %s" % str(addr))
6
7     # opzetten van input en outputstreams
8     io_stream_client = socket_to_client.makefile(mode='rw')
9     io_stream_client.write("Thank you for connecting!\n")
10    io_stream_client.flush()
11
12    # connectie sluiten
13    logging.info("Connection closed with client")
14    socket_to_client.close()

```

#### Client

```

1 # connection to hostname on the port
2 socket_to_server.connect((host, port))
3
4 # opzetten van input en outputStreams
5 io_stream_server = socket_to_server.makefile(mode='rw')
6
7 # receive message from server
8 msg = io_stream_server.readline()
9 print(msg)
10
11 logging.info("Close connection with server")
12 socket_to_server.close()

```

## 11 Tkinter

### 11.1 Doelstelling

- Eenvoudige GUI opbouwen via de Tkinter library

## 11.2 GUI in Python?

- PyQt5
- Tkinter: provides a powerful object-oriented interface to the Tk GUI toolkit
- wxPython: an open source Python interface for wxWindows <http://wxpython.org/>

### 11.2.1 Tkinter: een goede start

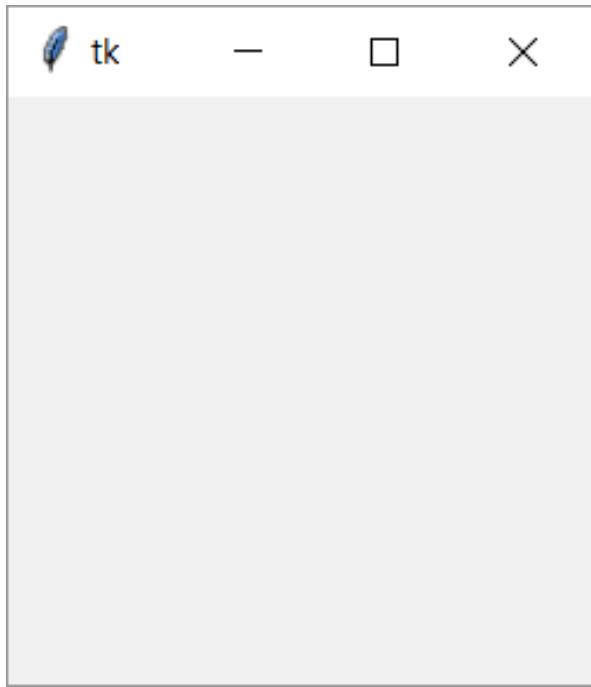
- <https://realpython.com/python-gui-tkinter/>
- [https://www.python-course.eu/python\\_tkinter.php](https://www.python-course.eu/python_tkinter.php)
- <https://pythonprogramming.net/python-3-tkinter-basics-tutorial/>

## 11.3 Tkinter: basisbegrippen

### 11.3.1 Start

- Importeer de Tkinter module
- Maak een GUI application main window
- Voeg 1 van de geschikte widgets toe aan de GUI applicatie
- Gebruik de main-event loop om weer te geven

```
1 import tkinter  
2  
3 top = tkinter.Tk()  
4 # << code to add widgets will go here ... >>  
5 top.mainloop()
```

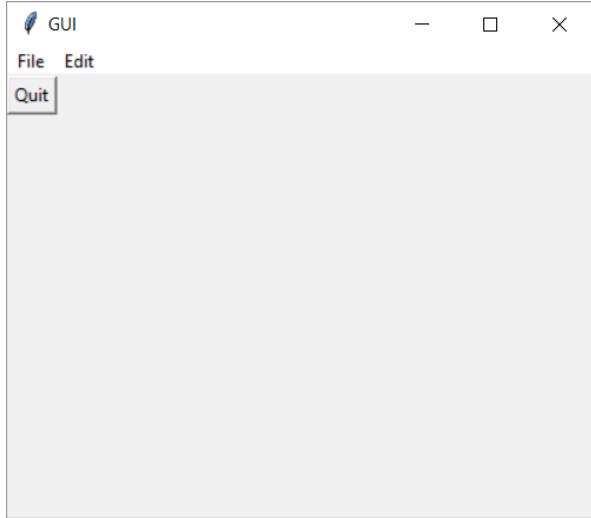


Figuur 93: Basisvenster

### 11.3.2 Frame

The frame widget is used as a container widget to organize other widgets

```
1 class Window(Frame):
2     def __init__(self, master=None):
3         pass # code here
4
5     # creation of init window
6     def init_window(self):
7         pass # code here
8
9     def client_exit(self):
10        pass # code here
11
12     def showImg(self):
13        pass # code here
14
15     def showText(self):
16        pass # code here
17
18 root = Tk()
19 root.geometry("400x300")
20 app = Window(root)
21 root.mainloop()
```



Figuur 94: Resultaat

#### 11.3.3 Geometry management

- place = positions widgets at absolute locations
- grid = arranges widgets in a grid
- pack = pack widgets into a cavity

#### 11.3.4 Beschikbare widgets

Button	Notebook
canvas	tk_optionMenu
checkbutton	panedwindow
combobox	progressbar
entry	radiobutton
frame	scale
label	scrollbar
labelframe	separator
listbox	sizegrip
menu	spinbox
menubutton	tekst
message	treeview

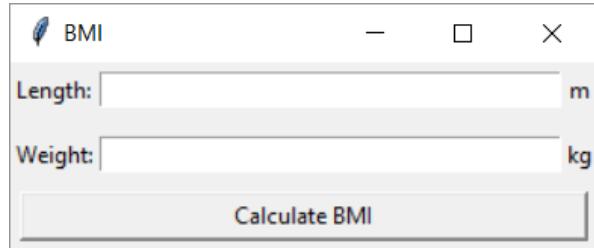
Figuur 95: Widgets

#### 11.3.5 Top level windows

- tk\_chooseColor - pops up a dialog box for the user to select a color.
- tk\_choosedirectory - pops up a dialog box for the user to select a directory.
- tk\_dialog - creates a modal dialog and waits for a response.

- `tk_getOpenFile` - pops up a dialog box for the user to select a file to open.
- `tk_getSaveFile` - pops up a dialog box for the user to select a file to save.
- `tk_messageBox` - pops up a message window and waits for a user response.
- `tk_popup` - posts a popup menu.
- `toplevel` - creates and manipulates toplevel widgets.

## 11.4 Demo



Figuur 96: Resultaat van de demo

```

1  class Window(Frame):
2
3  def __init__(self, master=None):
4      Frame.__init__(self, master)
5      self.master = master
6      self.init_window()
7
8  #Creation of init_window
9  def init_window(self):
10     # changing the title of our master widget
11     self.master.title("BMI")
12     # self.master.geometry("400x300")
13
14     # allowing the widget to take the full space of the root window
15     self.pack(fill=BOTH, expand=1)
16
17     Label(self, text="Length:").grid(row=0)
18     Label(self, text="Weight:", pady=10).grid(row=1)
19
20     self.entry_length = Entry(self, width = 40)
21     self.entry_weight = Entry(self, width = 40)
22     self.entry_length.grid(row=0, column=1, sticky=E+W, pady=(5, 5))
23     self.entry_weight.grid(row=1, column=1, sticky=E+W)
24
25     Label(self, text="m").grid(row=0,column=2)
26     Label(self, text="kg", pady=10).grid(row=1,column=2)
27
28     self.buttonCalculate = Button(self, text="Calculate BMI" ,
29         command=self.calculateBmi)
30     self.buttonCalculate.grid(row=2, column=0, columnspan=3,

```

```

31     pady=(0, 5), padx=(5, 5), sticky=N+S+E+W)
32
33     Grid.rowconfigure(self, 2, weight=1)
34     Grid.columnconfigure(self, 1, weight=1)
35
36
37 def calculateBmi(self):
38     try:
39         length = float(self.entry_length.get())
40         weight = float(self.entry_weight.get())
41         bmi = weight / (length * length)
42         messagebox.showinfo("BMI", "Your body mask index is %.2f" % bmi)
43     except:
44         messagebox.showinfo("BMI", "Something has gone wrong...")
45
46
47 root = Tk()
# root.geometry("400x300")
app = Window(root)
root.mainloop()

```

Zie andere demos op leho.

## 12 Network & threading

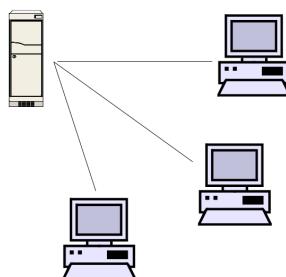
### 12.1 Doelstelling

- Basisbegrippen in network programming kunnen definiëren
- Gebruik van sockets
- Networking - Socket Programming kunnen situeren & programmeren in Python

### 12.2 Multithreaded server

Tot nu toe is er een fundamentele beperking met de server die we geprogrammeerd hebben: er is maar 1 connectie met 1 client. Uiteraard is dit niet van toepassing op real-life voorbeelden uit de praktijk

**Oplossing:** Multithreaded server



Figuur 97: Multithreaded server

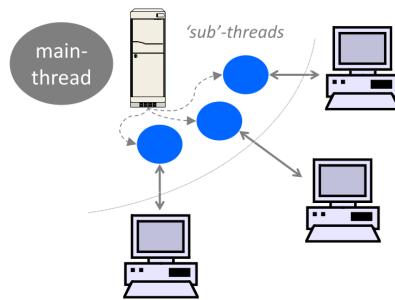
### 12.2.1 Basistechniek

De basistechniek is gebaseerd op een **twee-stappen proces**:

1. De main-thread alloceert individuele threads voor inkomende messages
2. De thread die instaat voor elke individuele thread, handelt elke interactie tss client en server

#### Gevolgen

- Main-thread mag "vergeten" dat een client ingelogd is, omdat een andere thread de communicatie verder afhandelt.
- Main-thread mag weer wachten op nieuwe clients
- Indien er een probleem met één client is, heeft dit geen effect op de andere clients of op algemene service!



### 12.2.2 Werking in Python

Per client word een object van de klasse ClientHandler aangemaakt. Dit is een threadklasse: thread opstarten via start()

```
serversocket = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_STREAM)

# get local machine name
host = socket.gethostname()

port = 9999

# bind to the port
serversocket.bind((host, port))

# queue up to 5 requests
serversocket.listen(5)

while True:
    print("waiting for a client...")

    # establish a connection
    clientsocket, addr = serversocket.accept()
    print("Got a connection from %s" % str(addr))
    clh = ClientHandler(clientsocket)
    clh.start()
    print("Current Thread count: %i." % threading.active_count())
```

```

class ClientHandler(threading.Thread):
    def __init__(self, socketclient):
        threading.Thread.__init__(self)
        self.socket_to_client = socketclient

    def run(self):
        io_stream_client = self.socket_to_client.makefile(mode='rw')
        print("waiting...")
        comando = io_stream_client.readline().rstrip('\n')
        while (comando != "CLOSE"):
            getal1 = io_stream_client.readline().rstrip('\n')
            print("Number 1: %s" % getal1)
            getal2 = io_stream_client.readline().rstrip('\n')
            print("Number 2: %s" % getal2)

            sum = int(getal1) + int(getal2)

            io_stream_client.write("%s\n" % sum)
            io_stream_client.flush()

            comando = io_stream_client.readline().rstrip('\n')

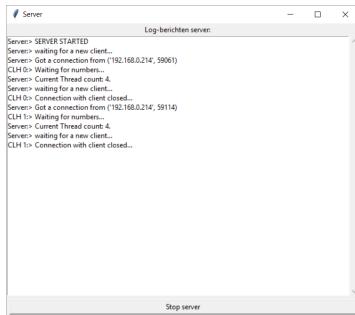
        print("Connection closed...")
        self.socket_to_client.close()

```

Figuur 98: ClientHandler klasse

- In constructor: socket meegeven
- Run-methode verzorgt alle communicatie met de client

## 12.3 GUI server



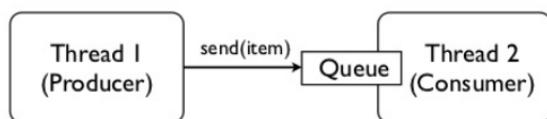
Figuur 99: Demo GUI server

### 12.3.1 Communicatie vanuit workerthreads naar GUI

- Oproepen van een GUI-functie vanuit worker-threads is **NIET** aanbevolen.
- Een GUI-functie is verantwoordelijkheid van de main-thread
- Oplossing: gebruik van een queue

#### Gebruik van een queue

- We laten de workerthreads een message-queue opvullen
- Binnen GUI server wordt deze queue geobserveerd, en de geplaatste berichten verwerkt:



- Bijkomend voordeel: geen GUI-methodes in worker threads

### 12.3.2 Demo netwerken 5

```

class ServerWindow(Frame):
    def __init__(self, master=None):
        Frame.__init__(self, master)
        self.master = master
        self.init_window()
        self.init_messages_queue()
        self.init_server()

    # Creation of init_window
    def init_window(self):...

    def init_server(self):
        # server - init
        self.server = SommenServer(socket.gethostname(), 9999, se

    def afsluiten_server(self):...

    def print_messages_from_queue(self):
        message = self.messages_queue.get()
        while message != "CLOSE_SERVER":
            self.lstnumbers.insert(END, message)
            self.messages_queue.task_done()
            message = self.messages_queue.get()
        print("queue stop")

    def init_messages_queue(self):
        self.messages_queue = Queue()
        t = Thread(target=self.print_messages_from_queue)
        t.start()

```

Figuur 100: De ServerWindow klasse

```

class ClientHandler(threading.Thread):

    numbers_clienthandlers = 0

    def __init__(self, socketclient, messages_queue):
        threading.Thread.__init__(self)
        #connectie with client
        self.socketclient = socketclient
        #message queue -> link to gui server
        self.messages_queue = messages_queue
        #id clienthandler
        self.id = ClientHandler.numbers_clienthandlers
        ClientHandler.numbers_clienthandlers += 1

```

Figuur 101: De ClientHandler klasse

### 12.3.3 To-do's

- Zorg ervoor dat alle threads correct kunnen afgesloten worden

- Zorgt het sluiten van de serversocket ervoor dat geconnecteerde clients niet meer kunnen communiceren?
- Event mbt sluiten van de GUI verzorgen zowel langs client/server.

## 13 Objectserialisation

### 13.1 Doelstelling

- Bespreken wat serialisatie betekent en context kunnen schetsen
- Geserialiseerde objecten kunnen wegschrijven naar File
- Objecten kunnen inlezen vanuit File
- Hoe vermijden we dat attribuut meegeserialiseerd wordt?

### 13.2 Uitgangssituatie

Tijdens het runnen van een programma:

- Meerdere objecten worden gecreëerd
- Objecten worden verder uitgebreid

Het aanmaken van deze objecten vraagt tijd. Vaak is er veel info nodig om de objecten te creëren.  
Hoe kunnen we objecten bewaren?

Mogelijke oplossingen zijn:

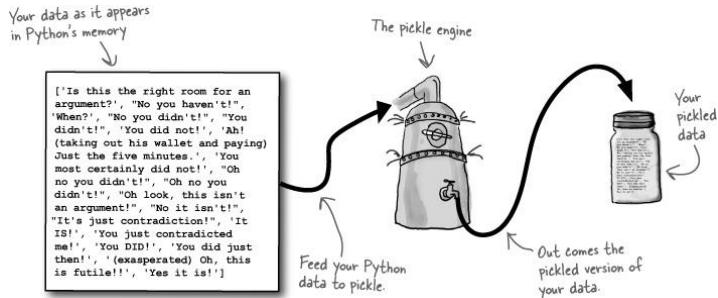
1. Info uit objecten als text in File wegschrijven: zie vroeger (File I/O)!
2. Objecten bewaren in File = serialiseren van objecten.

### 13.3 Serialiseren in Python: de Pickle library

The pickle module implements binary protocols for serializing and de- serializing a Python object structure. 'Pickling' is the process whereby a Python object hierarchy is converted into a byte stream, and 'unpickling' is the inverse operation, whereby a byte stream (from a binary file or bytes-like object) is converted back into an object hierarchy. Pickling (and unpickling) is alternatively known as 'serialization', 'marshalling', [1] or 'flattening'; however, to avoid confusion, the terms used here are 'pickling' and 'unpickling'.

<https://docs.python.org/3/library/pickle.html>

### 13.3.1 Pickling



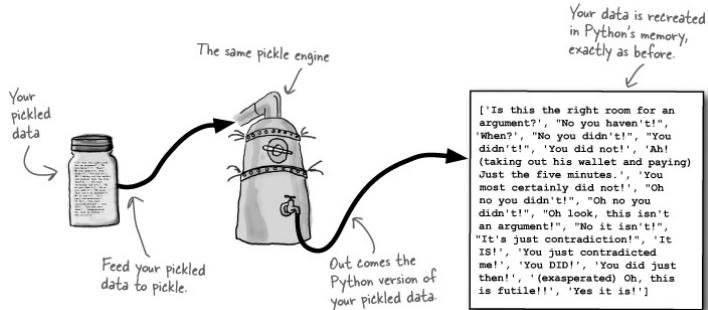
Figuur 102: Pickling

```

1 import pickle
2
3 dict = {1: 'mct', 2: 'ipo', 3: 'devine', 4: 'dae'}
4 print(dict)
5
6 my_writer_obj = open('data.txt', mode='wb')
7 pickle.dump(dict, my_writer_obj)
8 my_writer_obj.close()

```

### 13.3.2 Unpickling



Figuur 103: Unpickling

```

1 my_writer_obj = open('data.txt', mode='rb')
2 dict_howest = pickle.load(my_writer_obj)
3 print(dict_howest)

```

Met eigen klasse(s) analoog. Klasse student erft van klasse Persoon.



Figuur 104

### 13.3.3 Wat kan pickled en unpickled worden?

De volgende types kunnen worden gepickled:

- None, True en False
- integers, floating point numbers
- strings, bytes, bytearrays
- tuples, lists, sets, dictionaries met pickleable objects
- functies gedefinieerd 'at the top level' van een module (dus geen lambdas)
- ingebouwde functies at top level
- klassen die gedefinieerd zijn at top level
- instanties van zo'n klassen waarvan `__dict__()` of het resultaat van `__getstate__()` pickleable is

### 13.3.4 Pickle: valkuilen

Wat met klasse-attributen? (zie demo)

"When a class instance is unpickled, its `__init__()` method is usually not invoked. The default behaviour first creates an uninitialized instance and then restores the saved attributes."

```

1 import pickle
2
3 from data.Persoon import Persoon
4
5 my_writer_obj = open("student.txt", mode='rb')
6 s1 = pickle.load(my_writer_obj)
7 my_writer_obj.close()
8
9 # test
10 print(s1)
11 print("Aantal objecten klasse Persoon: %d" % Persoon.geef_aantal_personen())
12
13 # output:
14 >> Student COLPAERT, Barbara (2018)
15 >> Aantal objecten klasse Persoon: 0

```

**Oplossing:** overschrijf de methode `__getstate__()` of `__setstate__()` in dataklasse:

- `__getstate__()` = classes can further influence how their instances are pickled

- `__setstate__(state)` = upon unpickling, if the class defines `__setstate__()`, it is called with the unpickled state

```

1 def __setstate__(self, state):
2     # restore instance attributes
3     self.__dict__.update(state)
4 Persoon.__aalant_personen += 1

```

## 13.4 Library jsonpickle

jsonpickle is a Python library for serialization and deserialization of complex Python objects to and from JSON.

<https://jsonpickle.github.io/>

Voordeelen:

- Snel
- Human readable
- Geen beveiligingsproblemen
- Kan geparsed worden door alle programmeertalen

Pickle is traag, onveilig, en kan alleen in Python geparsed worden. Het enige voordeel van pickle is dat het arbitraire Python objecten kan serialiseren, terwijl beide JSON en MessagePack limieten hebben op welke data ze kunnen uitschrijven.

<pre> import jsonpickle from data.Person import Person from data.Student import Student student = Student("Colpaert", "Barbara", 19931252, "IPO", 2018) print(student)  my_writer_obj = open("student.txt", mode="w") json_data = jsonpickle.encode(student) print(json_data) my_writer_obj.write(json_data) my_writer_obj.close() </pre>	<pre> import jsonpickle from data.Person import Person my_writer_obj = open("student.txt", mode="r") json_data = my_writer_obj.read() print(json_data) print(type(json_data))  #convert_json-data --&gt; Person student = jsonpickle.decode(json_data) print(student) print(type(student)) </pre>
Opslaan object	Ophalen object

Figuur 105: Jsonpickle

Pickle vs jsonpickle: <https://www.benfrederickson.com/dont-pickle-your-data/>

## 13.5 Serialiseren in Python: toegepast in Networking

### 13.5.1 Demo

(zie `demo_networking.zip`)

De demo is herwerkt zodat tussen client en clienthandler(server) objecten van eigen klasse(s) worden heen en weer gestuurd.

1. List met objecten van de klasse Som wordt langs clientside klaargezet
2. Clienthandler ontvangt de list, en berekent 1 voor 1 de sommen
3. Dezelfde list wordt naar de client teruggestuurd

Voor demos met pickle, zie demo 6 & 7.

Voor demos met jsonpickle, zie demo 8.

## 14 Matrices

### 14.1 Wat is matrix?

- Een tweedimensionale array van getallen
- Bestaat uit rijen en kolommen
- 4 rijen bij 3 kolommen: 4 bij 3 matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Een matrix is een rechthoekig getallenschema, getallen geordend in rijen en kolommen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ met } A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} = \text{matrix met 2 rijen, 3 kolommen}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ met } b \in \mathbb{R}^{4 \times 2} = \text{matrix met 4 rijen, 2 kolommen}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ met } C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} = \text{matrix met 2 rijen, 2 kolommen}$$

#### 14.1.1 Voorstellen van een matrix

Door middel van subscriptnotatie:  $a_{ij}$  = element op de  $i^{\text{de}}$  rij,  $j^{\text{de}}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

#### 14.1.2 Soorten matrices

**Vierkante matrix:**  $m = n$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & \sqrt{2} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Rijmatrix:**  $m = 1$

$$B = [1 \quad -1 \quad -3 \quad 8 \quad -6 \quad 7]$$

**Kolommatrix:**  $n = 1$

$$C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Nulmatrix:** alle  $a_{ij} = 0$

$$O_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hoofddiagonaal van een matrix =  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$

**Eenheidsmatrix I:** vierkante matrix met overal 0, behalve 1 op de hoofddiagonaal:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 14.1.3 Gelijke matrices

Twee matrices zijn gelijk als:

- ze dezelfde afmetingen hebben
- de corresponderende elementen gelijk zijn

## 14.2 Som & verschil

- Als je twee matrices wil optellen/aftrekken, moeten de matrices dezelfde dimensie hebben:
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\begin{aligned} A \pm B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3n} + b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \\ A \pm B &\in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

### 14.2.1 Voorbeelden

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -5 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & -6 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

## 14.3 Scalair veelvoud

We vermenigvuldigen elk element in de matrix met een scalair  $\lambda$

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{mxn}$$

### 14.3.1 Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -3$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 & -3 \\ -3 & -21 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

## 14.4 Eigenschappen matrix operaties

$A, B, C \in \mathbb{R}^{mxn}, \lambda \in \mathbb{R}$

### 14.4.1 Commutativiteit

$$A + B = B + A$$

### 14.4.2 Associativiteit

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

#### 14.4.3 Neutraal element = $O_{mxn}$

$$A + O_{mxn} = A = O_{mxn} + A$$

#### 14.4.4 Eigenschappen met scalaire veelvoud

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$A(\mu B) = \mu(AB)$$

### 14.5 Getransponeerde matrix

Een getransponeerde matrix  $A^T$  is een matrix waarbij we rijen en kolommen matrix verwisselen

$$A \in \mathbb{R}^{mxn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T \in \mathbb{R}^{nxm}$$

#### 14.5.1 Voorbeelden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{pmatrix}$$

#### 14.5.2 Eigenschappen

$$(AT)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

## 14.6 Vermenigvuldigen van matrices

Gegeven matrix  $A$  en matrix  $B$  waarbij  $A \in \mathbb{R}^{r \times c}$  en  $B \in \mathbb{R}^{s \times d}$

$A$  en  $B$  kunnen vermenigvuldigd worden als:

- het aantal kolommen van  $A$  moet gelijk zijn aan het aantal rijen van  $B$

De dimensie van de resulterende matrix is:

- (het aantal rijen van  $A$ ) x (het aantal rijen van  $B$ )

### 14.6.1 Wiskundig

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad [2 \times 2] \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad [2 \times 3]$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix} \quad [2 \times 3]$$

Figuur 106

### 14.6.2 Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} (1 \times 0 + 2 \times 6 + 0 \times -3) & (1 \times -2 + 2 \times 2 + 0 \times -1) & (1 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 7) \\ (-4 \times 0 + 1 \times 6 + 5 \times -3) & (-4 \times -2 + 1 \times 2 + 5 \times -1) & (-4 \times 1 + 1 \times 0 + 5 \times 7) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 \\ -9 & 5 & 31 \end{pmatrix}$$

### 14.6.3 Eigenschappen

- Geen commutativiteit:  $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Nuldelers:  $x$  heet een nuldeler als  $x \neq 0$  en er bestaat  $y$  zodat  $xy = 0$  of  $yx = 0$

#### Voorbeeld nuldeler:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  is een nuldeler omdat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Macht van een matrix:

- Voorbeeld:  $A^3 = A \cdot A \cdot A$
- Enkel mogelijk bij vierkante matrices

- Transponeren:  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- Eenheidsmatrix  $I_n$  is neutraal element:  $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Extra toelichting: <https://www.youtube.com/watch?v=HmngGKVzdic>

## 14.7 Determinant van een matrix

= een speciaal getal dat kan worden berekend uit de elementen van een matrix

### 14.7.1 Notatie

De determinant van een **vierkante matrix** wordt aangeduid met:

$\det(A)$  of  $|A|$

### 14.7.2 Toepassingen:

- Oplossen van lineaire stelsels
- Testen van inverteerbaarheid van een matrix

### 14.7.3 Berekenen van de determinant

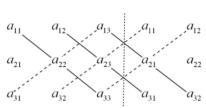
- Bij  $1 \times 1$ -matrix: het getal in de matrix = de determinant
- Bij  $2 \times 2$ -matrix:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

- Bij een  $3 \times 3$ -matrix:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

### 14.7.4 Berekenen van de determinant: 2de methode (makkelijker)

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$


## 14.8 Inverse matrix

### 14.8.1 Notatie

- Voor een getal: In  $\mathbb{R}$ :  $ab = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a} = a^{-1}$
- Voor een matrix: In  $\mathbb{R}^{n \times n}$ :  $AB = I_n \Leftrightarrow B = A^{-1}$

Als er zo'n inverse bestaat zodat  $AB = I_n = BA$  dan noemen we B de inverse matrix van A

### 14.8.2 Voorwaarden voor het bestaan van een inverse matrix

- Matrix is vierkant
- De determinant is verschillend van 0

- $\det(A) \neq 0$  dan is  $A$  **regulier** en  $A^{-1}$  bestaat
- $\det(A) = 0$  dan is  $A$  **singulier** en  $A^{-1}$  bestaat niet

#### 14.8.3 Berekenen van inverse matrix

Door middel van **rij-operaties**:

1. We voegen de matrix  $A$  samen met de eenheidsmatrix  $I_n$ . Dan bekomen we :  $(A|I_n)$
2. Via rij-operaties op de samengevoegde matrix reduceren we de matrix tot we aan de linkerkant de eenheidsmatrix bekomen
3. Aan de rechterkant bekomen we de inverse matrix  $A^{-1}$

$$(A|I_n) \xrightarrow{\text{rij-operaties}} (I_n|A^{-1})$$

Toegelaten rij-operaties:

- Rijen wisselen
- Rij vermenigvuldigen met een getal
- Rijen optellen

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \\ \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Figuur 107: Rij-operaties

#### 14.8.4 Snelle methode voor inverse matrix van 2x2 matrix

Algemene formule 2x2 matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

#### 14.8.5 Eigenschappen inverse matrix

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

## 14.9 Toepassingen

### 14.9.1 Oplossen van stelsels

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{matrix-notatie}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot T$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot T$$

$$X = A^{-1} \cdot T$$