

Advanced Programming & Maths

Tuur Vanhoutte

12 mei 2021

Inhoudsopgave

1 Basisfuncties in de wiskunde	1
1.1 Functies	1
1.2 Veelterm en veeltermfuncties	2
1.3 Bijzondere veeltermfuncties	2
1.3.1 Constante functie	3
1.3.2 Lineaire functie	3
1.3.3 Tweedegraadsfunctie	3
1.3.4 Derdegraadsfunctie	5
1.3.5 Exponentiële functie	5
2 Exponentiële verbanden in data	6
2.1 Lineaire groei	6
2.2 Exponentiële groei	7
2.3 Van groeipercentage naar groefactor	7
2.3.1 Percentage naar factor	7
2.3.2 Factor naar percentage	8
2.4 Voorbeeld exponentiële groei	8
2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename	9
2.5.1 Oefening: Combinatie van groefactoren?	9
3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning	10
3.1 Logistische groei	10
3.1.1 Voorbeeld	10
3.1.2 De groei	10
3.1.3 Functievoorschrift	10
3.1.4 Voorbeeld	11
3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie	11
3.2 Regression analysis	12
3.2.1 Lineair regressiemodel	12
3.2.2 Logistisch regressiemodel	13
3.2.3 Lineair vs logistisch regressiemodel	14
3.2.4 Meerdere inputfactoren	14
3.3 Softmax functie	14
3.3.1 Kansen	15
3.3.2 Model	15
3.3.3 Wiskundig	16
3.4 Logistic regression cost function	16
3.4.1 Succes meten	16
3.4.2 Kostenfunctie $J(\theta)$	17
3.4.3 Oefening	18
3.4.4 Extra	18
4 Pandas library	18
4.1 Inleiding	18
4.1.1 Welke data verwerken?	19
4.2 Pandas.core	19
4.3 Series	19
4.4 DataFrame	19
4.4.1 Select data from DataFrame	20
4.4.2 Veelgebruikte commando's bij dataframes	21

4.5	Loc vs iloc	22
4.5.1	iloc	22
4.5.2	loc	22
4.6	Plotten met pandas	23
4.6.1	Dataframe plotten	23
4.6.2	Series plotten	24
4.7	Demo: Iris Dataset	24
4.8	Complexe bewerkingen	26
5	Normaaldistributie	26
5.1	Doelstelling	26
5.2	Inleiding	26
5.3	Basisbegrippen	26
5.3.1	Kenmerken	27
5.3.2	Verdeling	28
5.3.3	Gevolg: Kansberekening	28
5.3.4	Wiskundig	28
5.4	Standaard normaalverdeling	29
5.4.1	Standaardiseren van een normaalverdeling	29
5.5	Kansberekening	30
5.5.1	Via tabellen	31
5.6	Z-score	31
5.6.1	Wiskundig	31
5.6.2	Voorbeeld	31
5.6.3	Nut	32
5.7	Scheefheid	32
5.7.1	Berekening	32
5.8	Kurtosis	33
5.8.1	Wiskundig	33
5.9	Anomaly detection	33
5.9.1	Detectiemethode 1	34
5.9.2	Detectiemethode 2	34
5.9.3	Detectiemethode 3	35
6	Kansrekening	35
6.1	Basiskennis	35
6.1.1	Voorbeeld	36
6.2	Kansdefinitie van Laplace	36
6.2.1	Wiskundige notatie	36
6.2.2	Gecombineerd experiment	36
6.3	Somregel	37
6.3.1	Wiskundig	38
6.3.2	Algemene somregel	38
6.4	Complementregel	38
6.5	Samengesteld of stochastisch experiment	39
6.5.1	Trekking met teruglegging	39
6.5.2	Trekking zonder teruglegging	40
6.6	Permutaties	40
6.6.1	Voorbeeld:	40
6.6.2	Oefeningen	41
6.7	Combinaties	41
6.7.1	Wiskundig	41

6.7.2	Voorbeeld	41
6.7.3	Oefening	41
6.8	Theoretische en empirische kansen	41
6.8.1	Theoretische kansen:	41
6.8.2	Empirische kansen	42
6.8.3	Voorbeeld	42
6.8.4	Voorbeeld 2	42
7	Voorwaardelijke kans	42
7.1	Doelstelling	42
7.2	Situering	43
7.3	Voorbeeld	43
7.4	Wiskundig	44
7.4.1	Gevolg: productregel	44
7.4.2	Algemene productregel	44
7.5	Oefening 1	45
7.5.1	Opgave	45
7.5.2	Oplossing	45
7.6	Oefening 2	45
7.6.1	Opgave	45
7.6.2	Oplossing	45
7.7	Onafhankelijke gebeurtenissen	46
7.7.1	Voorbeeld	46
7.7.2	Gevolg: Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen	46
7.8	Productregel algemeen	46
7.8.1	Oefening 1	47
7.8.2	Oefening 2	47
7.9	Regel van Bayes	47
7.9.1	Toepassingsdomein	47
7.9.2	Formule van Bayes (eenvoudige vorm)	48
7.9.3	Voorbeeld	48
7.10	Regel van Bayes (variant 1)	48
7.11	Regel van Bayes (variant 2)	49
7.12	Regel van Bayes (algemeen)	49
7.13	Bayesiaans leren: toepassing in machine learning	50
7.13.1	Leren	50
7.14	Naïve Bayes Spam Filter	51
7.14.1	Herkennen van een spam bericht	51
7.14.2	Parameters	52
8	Logging	52
8.1	Inleiding	52
8.1.1	Waarom?	52
8.1.2	Opzet	53
8.1.3	Logging levels	53
8.2	Basis logging	53
8.2.1	Spelregels	53
8.2.2	Format logbericht	53
8.2.3	Naar een file loggen	54
8.2.4	Toegepast	54
9	Threading	55

9.1	Doelstelling	55
9.2	Wat zijn threads?	55
9.3	Process vs Thread	55
9.3.1	Process	56
9.3.2	Thread	56
9.4	De threading library	57
9.4.1	Thread aanmaken	57
9.4.2	Andere methods	57
9.4.3	Timer	57
9.5	Multithreading	58
9.5.1	Python Thread Management	58
9.6	Thread toestanden	59
9.7	Opgelet met threads!	59
9.8	Wanneer threads gebruiken?	59
9.9	Thread-class	59
9.9.1	Maken van een nieuwe thread-klasse	59
9.9.2	Opstarten van een thread	60
9.10	Threading-synchronisation	60
9.10.1	Join-methode	60
9.10.2	Thread locking	60
9.10.3	Condition	61
9.11	Daemon vs not-daemon threads	62
9.12	Multithreaded queue	62
9.12.1	Queue	62
9.12.2	Threading + queue	63
9.12.3	Queue programming	63
10	Network Programming	64
10.1	Doelstelling	64
10.2	Basisbegrippen	64
10.2.1	Client-server programming	64
10.2.2	Poorten (ports)	64
10.2.3	Sockets	64
10.2.4	Client-server communicatie	65
10.3	Network programming in Python	66
10.3.1	Socket Module	66
10.3.2	Serversocket opzetten	66
10.3.3	Serversocket laten wachten op connecties	67
10.3.4	Clientsocket opzetten	67
10.3.5	Communicatie tussen server & client	67
10.3.6	Communicatie tussen server en client: lezen en schrijven naar een bestand	68
11	Tkinter	68
11.1	Doelstelling	68
11.2	Manieren om een GUI in Python te bouwen	69
11.2.1	Tkinter: een goede start	69
11.3	Tkinter: basisbegrippen	69
11.3.1	Start	69
11.3.2	Frame	69
11.3.3	Geometry management	70
11.3.4	Beschikbare widgets	71
11.3.5	Top level windows	71

11.4 Demo	71
12 Network & threading	72
12.1 Doelstelling	72
12.2 Multithreaded server	73
12.2.1 Basistechniek	73
12.2.2 Werking in Python	73
12.3 GUI server	75
12.3.1 Communicatie vanuit workerthreads naar GUI	75
12.3.2 Demo netwerken 5	76
13 Objectserialisation	76
13.1 Doelstelling	76
13.2 Uitgangssituatie	77
13.3 Serialiseren in Python: de Pickle library	77
13.3.1 Pickling	77
13.3.2 Unpickling	78
13.3.3 Wat kan pickled en unpickled worden?	78
13.3.4 Pickle: valkuilen	79
13.4 Library jsonpickle	79
13.5 Serialiseren in Python: toegepast in Networking	80
13.5.1 Demo	80
14 Matrices	80
14.1 Wat is matrix?	80
14.1.1 Voorstellen van een matrix	81
14.1.2 Soorten matrices	81
14.1.3 Gelijke matrices	81
14.2 Som & verschil	82
14.2.1 Voorbeelden	82
14.3 Scalair veelvoud	82
14.3.1 Voorbeeld	83
14.4 Eigenschappen matrix operaties	83
14.4.1 Commutativiteit	83
14.4.2 Associativiteit	83
14.4.3 Neutraal element = $O_{m \times n}$	83
14.4.4 Eigenschappen met scalaire veelvoud	83
14.5 Getransponeerde matrix	83
14.5.1 Voorbeelden	84
14.5.2 Eigenschappen	84
14.6 Vermenigvuldigen van matrices	84
14.6.1 Wiskundig	84
14.6.2 Voorbeeld	84
14.6.3 Eigenschappen	85
14.7 Determinant van een matrix	85
14.7.1 Notatie	85
14.7.2 Toepassingen:	85
14.7.3 Berekenen van de determinant	85
14.7.4 Berekenen van de determinant: 2de methode (makkelijker)	86
14.8 Inverse matrix	86
14.8.1 Notatie	86
14.8.2 Voorwaarden voor het bestaan van een inverse matrix	86

14.8.3 Berekenen van inverse matrix	86
14.8.4 Snelle methode voor inverse matrix van 2x2 matrix	87
14.8.5 Eigenschappen inverse matrix	87
14.9 Toepassingen	87
14.9.1 Oplossen van stelsels	87
15 Eigenwaarden en eigenvectoren	87
15.1 Toepassing bij machine learning?	87
15.2 Eigenwaarden en eigenvectoren	88
15.2.1 Voorbeelden	88
15.2.2 Rekenregel	88
15.2.3 Terugvinden van eigenwaarden en eigenvectoren	88
15.2.4 Voorbeeld berekening eigenvector	89
15.3 Covariantie	89
15.3.1 Covariantie: positieve samenhang	89
15.3.2 Covariantie: negatieve samenhang	90
15.3.3 Wiskundig	90
15.3.4 Covariantie tussen meer dan 2 variabelen	90
15.3.5 Correlatiecoëfficiënt	90
16 Zoekalgoritmen in grafen	91
16.1 Doelstelling	91
16.2 Wat is een zoekalgoritme	91
16.2.1 A* (A-star)	91
16.3 Grafen terminologie	92
16.3.1 Basisterminologie	92
16.3.2 Pad	92
16.3.3 Cykel	93
16.3.4 Enkelvoudige graaf	93
16.3.5 Volledige graaf	93
16.4 Visualisatie: datastructuren voor grafen	94
16.4.1 Adjacentiematrix	94
16.4.2 Adjacentielijst	94
16.5 Kortste-pad probleem	95
16.5.1 Dijkstra	95
16.5.2 A-star algoritme	96
16.5.3 Programmeren van het A* algoritme	98
17 Geavanceerde Pandas functionaliteit	98
17.1 Doelstelling	98
17.2 Lambda expressions in Python	98
17.2.1 Lambda functions	98
17.2.2 Anonymous functions	98
17.2.3 Voorbeelden lambda-functions	99
17.3 Iterable, Enumerate	99
17.3.1 Enkele handige methodes	99
17.3.2 Iterable	100
17.3.3 Functie enumerate()	100
17.3.4 zip()	101
17.3.5 unzip()	101
17.3.6 Toepassing: Big data	101
17.4 List comprehensions	102

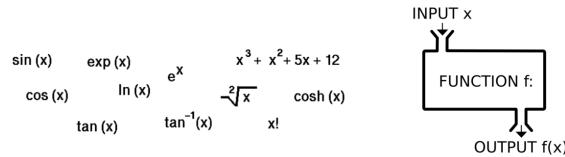
17.4.1 De klassieke manier: for-lus	102
17.4.2 Listcomprehension	102
17.4.3 Condities in listcomprehensions	103
17.4.4 Condities in dictionaries	103
17.5 Generator & Generator functions	103
17.5.1 Generator	103
17.5.2 Generator function	104
18 Decorators	105
18.1 Doelstelling	105
18.2 Vooraf: functies zijn ook objecten	105
18.3 Wat?	105
18.4 Uitbreiden van een functie	105
18.4.1 Via de oude manier	105
18.4.2 Via decorators	105
18.5 Toepassingen	106
18.5.1 Uitvoeringstijd	106
18.5.2 Sleep	106
19 Level up your python code	107
19.1 Enumerate	107
19.2 Dictionary: gebruik get()	107
19.3 Zip om meerdere lists gelijktijdig te overlopen	107
19.4 Alternatieven voor dict/list/set/tuple	108
20 Convoluties	108
20.1 Doelstelling	108
20.2 Convolutie	108
20.2.1 Voorbeeld 1	108
20.2.2 Voorbeeld 2	109
20.3 Wiskundig	109
20.4 Toepassing: filters	109
20.5 Toepassing: Image processing	110
20.5.1 Gray scaling	110
20.5.2 Edge detection	111
20.5.3 Punten in de buurt van een rand detecteren	112
20.5.4 Sobel Edge Detection	113
20.5.5 Alternatieve Edge Detection methodes	115
21 Reinforcement learning	115
21.1 Doelstelling	115
21.2 Situering binnen machine learning	116
21.3 Wat is reinforcement learning?	116
21.3.1 De betrokken partijen	116
21.3.2 Verloop	117
21.4 Voorbeelden	117
21.5 Markov Decision Process	117
21.5.1 Componenten	117
21.5.2 Diagram & notatie	118
21.6 Transitiekansen	118
21.7 Doel van de agent	118
21.7.1 Discount factor	119

21.8 Strategie (policy) in MDP	119
21.8.1 State-value functie	120
21.8.2 Action-value functie	120
21.8.3 Optimale strategie (policy)	120
21.8.4 Bellman optimality	121
21.9 Q-learning	121
21.9.1 Voorbeeld	121
21.9.2 Exploratie vs exploitatie	125
21.9.3 Toepassing	125

1 Basisfuncties in de wiskunde

1.1 Functies

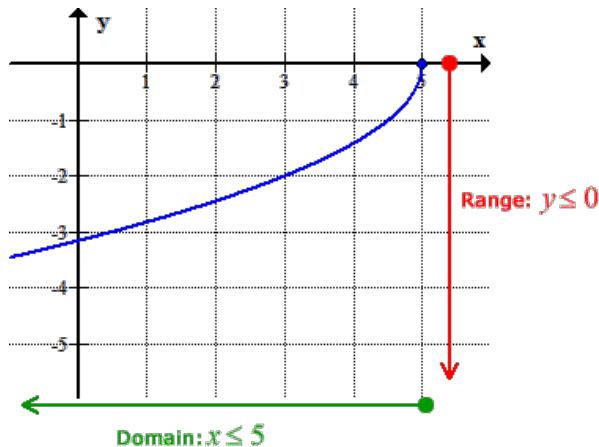
Definitie 1.1 (Reële functie) Een reële functie is een relatie in \mathbb{R} waarbij elke waarde x hoogstens één beeldwaarde $f(x)$ heeft



Figuur 1: Voorbeelden reële functies

Definitie 1.2 Voor elke functie geldt: er bestaat een ...

- (i) ... domein van de functie (domain)
- (ii) ... beeld van de functie (range)
- (iii) ... functievoorschrift van de functie

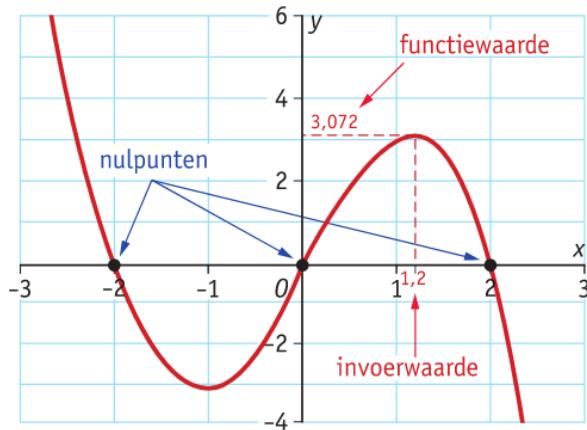


Figuur 2: Domein, bereik, functievoorschrift

$$f : \text{domein} \rightarrow \text{bereik} : x \rightarrow y = f(x)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = x^3 - 4x$$

Definitie 1.3 Elke functie kan nulpunten hebben.



Figuur 3: $y = -x^3 + 4x$

Verloop van een functie wordt via een tekenschema verduidelijkt:

x		-2		0		2	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Figuur 4: Tekenschema

1.2 Veelterm en veeltermfuncties

Definitie 1.4 (Veelterm)

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R})$

Definitie 1.5 (Veeltermfunctie)

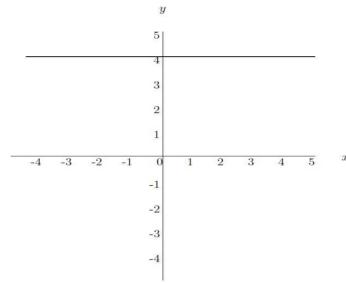
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

Graad van veelterm = n (als $a_n \neq 0$)

1.3 Bijzondere veeltermfuncties

- Constante functie: $f(x) = 4$
- Lineaire functie: $f(x) = 3x + 6$
- Tweedegraadsfunctie: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- Derdegraadsfunctie: $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
- Exponentiële functie: $f(x) = 2^x$
- Logaritmische functie: $f(x) = \log_2(x)$

1.3.1 Constante functie



Figuur 5: $y = 4$

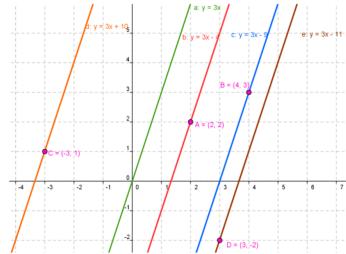
1.3.2 Lineaire functie

Definitie 1.6 (Lineaire functie)

$$f(x) = ax + b \quad (3)$$

Voorbeeld: $f(x) = 3x + 6$

- Betekenis van a : de richtingscoëfficiënt (rico)
- Betekenis van b : het snijpunt met de y -as
- Nulpunt: $f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow 3x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow 3x = -6$
 $\Leftrightarrow x = -2$



Figuur 6: Meerdere evenwijdige lineaire functies

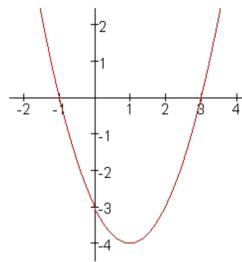
Evenwijdige rechten als: als $a_1 = a_2$

Loodrechte rechten als: als $a_1 \cdot a_2 = -1$

1.3.3 Tweedegraadsfunctie

Definitie 1.7

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \quad (4)$$



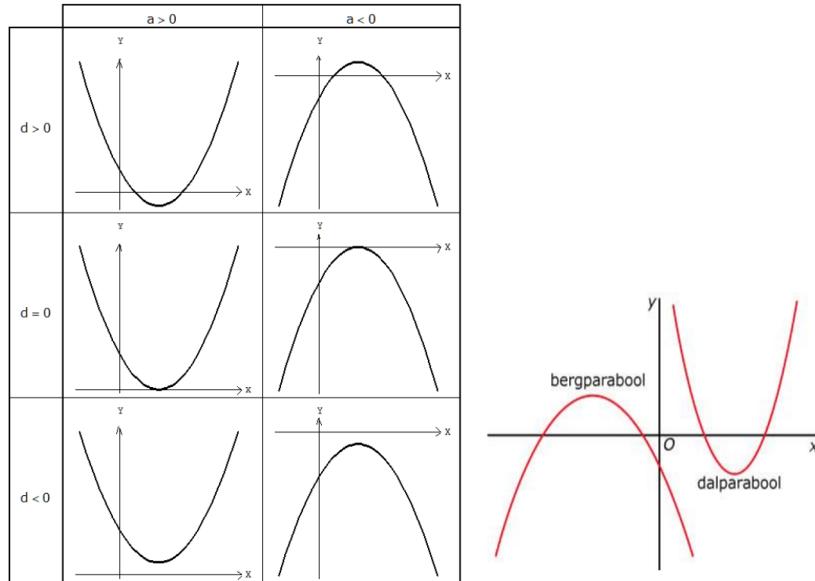
Figuur 7: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

- Betekenis van a : positief \Rightarrow dalparabool, negatief \Rightarrow bergparabool
- Nulpunten: via de discriminant berekenen:

Definitie 1.8 (Discriminant) Bij een tweedegraadsvergelijking is de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac \quad (5)$$

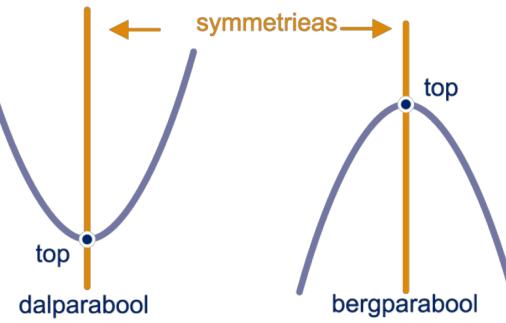
- Geval 1: $D > 0 \Rightarrow$ de functie heeft 2 nulpunten
- Geval 2: $D = 0 \Rightarrow$ de functie heeft 1 nulpunt
- Geval 3: $D < 0 \Rightarrow$ de functie heeft géén nulpunten



Figuur 8: De discriminant toont de nulpunten

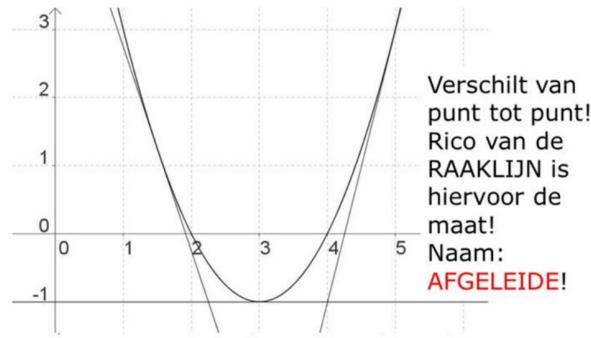
Nulpunten berekenen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (6)$$



Figuur 9: Symmetrieas: $x = \frac{-b}{2a}$

Hoe steil verloopt de grafiek?



Figuur 10: $y = x^2 - 6x + 8$

1.3.4 Derdegraadsfunctie

Definitie 1.9 (Derdegraadsfunctie)

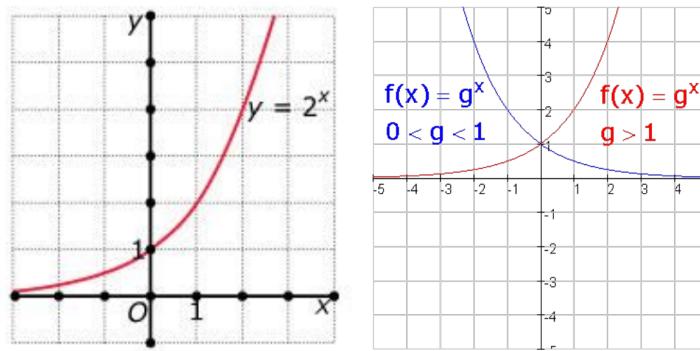
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0) \quad (7)$$

1.3.5 Exponentiële functie

Definitie 1.10 (Exponentiële functie)

$$f(x) = a^{g(x)} \quad (8)$$

Met grondtal $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

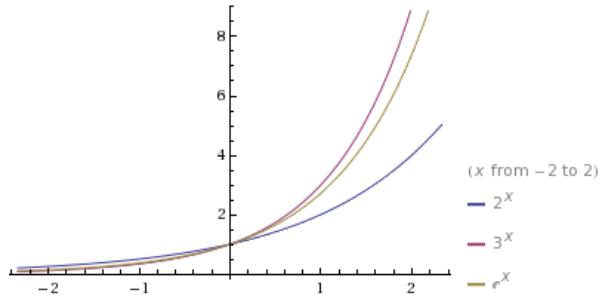


- Betekenis van a: groeifactor
- Wanneer stijgend?
- Wanneer dalend?
- Nulpunten:
- Vaststelling beeld functie

Definitie 1.11 (Constante van Euler)

$$e \approx 2.718281828\dots \quad (9)$$

$f(x) = e^x$ is een bijzondere exponentiële functie



Figuur 11: Verschil tussen 2^x , 3^x en e^x

2 Exponentiële verbanden in data

2.1 Lineaire groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt hetzelfde getal **opgeteld**
- Grafiek is een rechte
- **Algemene formule** (N = aantal, t = tijd, b = beginhoeveelheid):

$$N = a \cdot t + b \quad (10)$$

t	0	1	2	3	4	5
N	750	780	810	840	870	900
	+30	+30	+30	+30	+30	+30

Figuur 12: Lineaire groei

2.2 Exponentiële groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal **vermenigvuldigd**
- Grafiek is een exponentiële functie
- **Algemene formule** (N = aantal, t = tijd, b = beginhoeveelheid, g = groefactor):

$$N = b \cdot g^t \quad (11)$$

t	0	1	2	3	4
N	1280	1600	2000	2500	3125
	x1,25	x1,25	x1,25	x1,25	x1,25

Figuur 13: Exponentiële groei

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND					
jaar	1998	2002	2006	2010	2014
aantal km	17 600	21 500	26 200	32 000	39 000

Figuur 14: Voorbeeld exponentiële groei met groefactor ≈ 1.22

2.3 Van groeipercentage naar groefactor

De toename/afname wordt vaak ook procentueel uitgedrukt

- Een jaarlijkse toename van 14.6%
- Een jaarlijkse afname van 14.6%

Definitie 2.1 (Groefactor) De groefactor is de factor die per tijdseenheid wordt vermenigvuldigd met de vorige waarde.

2.3.1 Percentage naar factor

$$g = \frac{p + 100}{100}\% \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 100\% + 14,6\% &= 114,6\% = 1,146 \\ \times 1,146 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 100\% - 14,6\% &= 85,4\% = 0,854 \\ \times 0,854 \end{aligned}$$

Figuur 15: Van groeipercentage naar groefactor

2.3.2 Factor naar percentage

$$1,235 = 123,5\% - 100\% = 23,5\%$$

$$0,765 = 76,5\% - 100\% = -23,5\%$$

Figuur 16: Van groeifactor naar groeipercentage

$$\begin{array}{ccc} g^{\frac{1}{n}} & \xleftarrow{\text{kleinere tijd}} & g \xrightarrow{\text{grote tijd}} g^n \end{array}$$

Voorbeeld

De groeifactor per uur is gelijk aan 3.

De groeifactor per 2 uur is gelijk aan $3^2 = 9$

De groeifactor per 20 minuten is gelijk aan $3^{\frac{1}{3}} = 1,44$.

Figuur 17: Let op: hier gebeuren vaak fouten bij het omrekenen

2.4 Voorbeeld exponentiële groei

Een hoeveelheid groeit exponentieel. Na 5u is $N = 82$ en na 12u is $N = 246$.

Stel de formule van N op.

Oplossing

$$N = b \cdot g^t$$

Stap 1: groeifactor berekenen per tijdseenheid:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Na 5u} \rightarrow N = 82 \\ \text{Na 12u} \rightarrow N = 246 \end{array} \right\} \Delta = 7u \rightarrow 164$$

Groeifactor voor 7 uren: $\frac{246}{82} = 3$

Groeifactor voor 1 uur: $3^{1/7} \approx 1.170$

Stap 2: 1 punt nemen waarvan we N weten:

Gekozen punt: (5, 82)

$$82 = b \cdot (1.170)^5$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{82}{1.170}^5 \approx 37$$

$$\Leftrightarrow N = 37 \cdot 1.170^t$$

2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename

Definitie 2.2 (Verdubbelingstijd) De verdubbelingstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid verdubbeld is.

De verdubbelingstijd t kan je berekenen door het omrekenen van deze formule:

$$g^t = 2 \quad (13)$$

Oefening

De populatie neemt toe met 8.3% per jaar. Bereken de verdubbelingstijd:

$$\begin{aligned} g^t &= 2 \\ \Leftrightarrow (1.083)^t &= 2 \\ \Leftrightarrow \log(1.083^t) &= \log(2) \\ \Leftrightarrow t \cdot \log(1.083) &= \log(2) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\log(2)}{\log(1.083)} \\ \Leftrightarrow t &= 8.69 \text{ jaar} \end{aligned}$$

Definitie 2.3 (Halveringstijd) De halveringstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid gehalveerd is.

De halveringstijd t kan je berekenen door het omrekenen van deze formule:

$$g^t = 1/2 \quad (14)$$

2.5.1 Oefening: Combinatie van groeifactoren?

Een hoeveelheid neemt eerst 5 jaar lang met vast percentage (*) toe, om daarna nog 3 jaar met 10% per jaar toe te nemen. Na 8 jaar is de totale hoeveelheid verdubbeld.

(*) Bereken het jaarlijkse groeipercentage in de eerste 5 jaren.

Oplossing

We weten:

- Eerste 5 jaar: toename met vast percentage
- Volgende 3 jaar: toename met 10% (= factor van 1.1)
- Na 8 jaar: hoeveelheid verdubbeld (= factor van 2)

$$g^5 \cdot 1.1^3 = 2$$

We moeten g vinden:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow g^5 &= \frac{2}{1.1^3} \\ \Leftrightarrow g &= \sqrt[5]{\frac{2}{1.1^3}} \end{aligned}$$

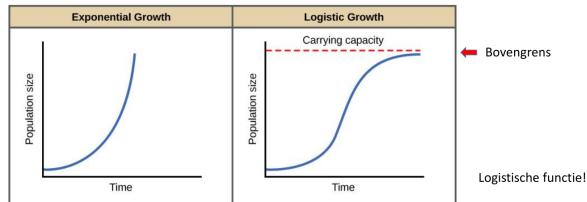
3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning

3.1 Logistische groei

3.1.1 Voorbeeld

Startsituatie: een bos (bv 10km²) waarin een konijnenepidemie uitbreekt. Boswachter houdt de populatie van de konijnen bij. Wat stelt hij vast?

De groei van de populatie verloopt volgens een typisch patroon (niet exponentieel):



Figuur 18: De rode lijn is de bovengrens

3.1.2 De groei

= de mate van toename

- Hangt af van hoeveel er al zijn tegenover hoeveel er nog bij kunnen
- Heel sterke verandering bij start, op het einde heel kleine verandering
- Hangt dus ook af van de tijd

Definitie 3.1 (De logistische groei) *De logistische groei is de mate van toename, afhankelijk van hoeveel er nog bij kan en hoeveel er al is*

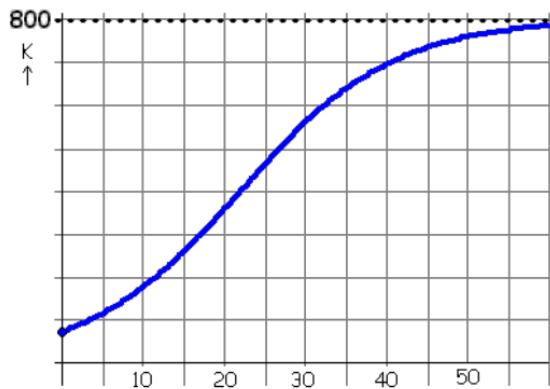
$$\frac{\text{Hoeveel er nog bij kan}}{\text{Hoeveel er al is}} = B \cdot g^t \quad (15)$$

- t = de tijd,
- B en g = constanten

3.1.3 Functievoorschrift

$$y = \frac{G}{1 + B \cdot g^t} \quad (16)$$

- t = de tijd,
- B en g = constanten,
- G = bovengrens



Figuur 19: Grafiek logistische groei met $G = 800$

3.1.4 Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door:

$$N = \frac{2500}{1 + 5.5 \cdot 0.74^t}$$

waarbij N = aantal vissen, t = tijd

Beredeneer: Wanneer bereiken we het 'verzadigingsniveau'

Als t heel groot is:

- Dan wordt $0.74^t \approx 0$
- Dan wordt $5.5 \cdot 0.74^t \approx 0$
- Dan wordt $N \approx 2500$
- \Rightarrow Het meer is 'verzadigd'

3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie

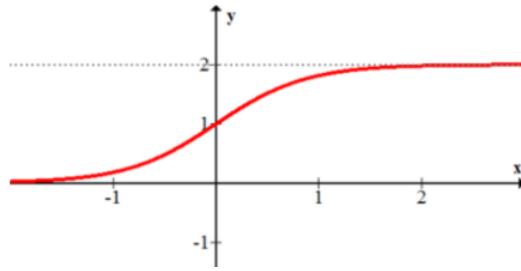
Definitie 3.2 (Logistische functie) De wiskundige notatie voor een logistische functie is:

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \tag{17}$$

met a, b, c constanten waarbij de constante c de belangrijkste is:

c drukt uit wat de maximumwaarde kan zijn

$$f(x) = \frac{2}{1 + 0.1^x}$$



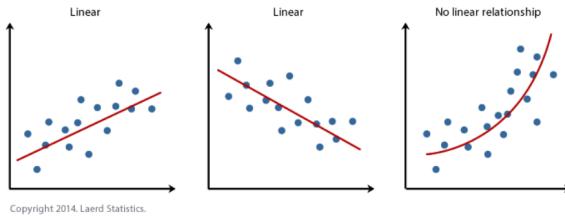
3.2 Regression analysis

Regressieanalyse:

- Is er een (voorspellend) verband tussen 2 variabelen
- Heeft de ene variabele een invloed op de andere variabele



Figuur 20: Regressieanalyse

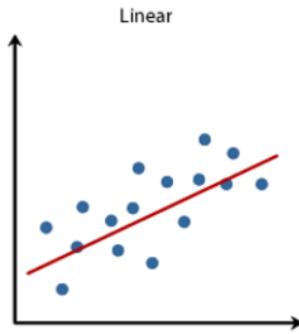


Figuur 21: Lineaire vs niet-lineaire samenhang

3.2.1 Lineair regressiemodel

Enkelvoudige vorm:

- 1 inputwaarde x
- via lineaire functie $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$

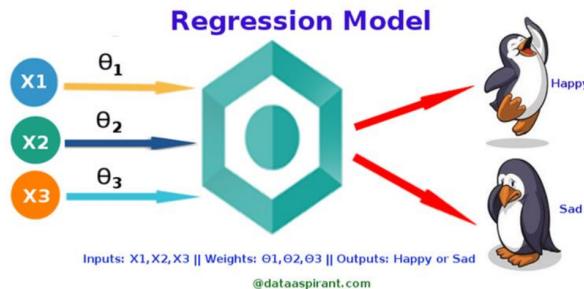


- Aan de hand van de opgestelde functie doe je een voorspelling
- **Doel:** een zo goed mogelijke lineaire functie opstellen
- \Rightarrow zoektocht naar de beste θ_0 en θ_1

3.2.2 Logistisch regressiemodel

Logistische regressie = **Classificatie-algoritme**

Zoeken naar een model dat uitkomst (2 mogelijkheden) voorspelt mbv inputwaarden. Elke inputwaarde heeft een zeker belang (gewicht).



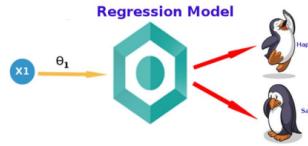
Figuur 22: 3 inputs met elk een bepaald gewicht, die een uitkomst zoekt (2 mogelijkheden)

Vereenvoudiging:

- 1 inputwaarde x
- Logistische functie $p = \frac{1}{1+e^{-(b_0+b_1x)}}$

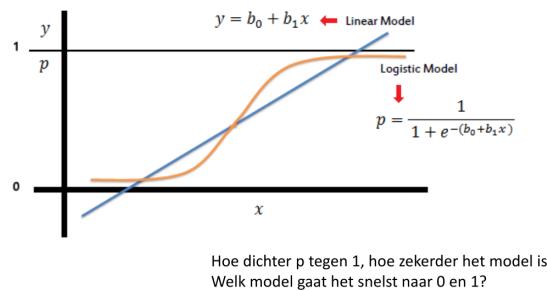
Uitkomst:

- de persoon slaagt als $h_\theta(x) \geq 0.5$
- de persoon slaagt niet als $h_\theta(x) < 0.5$



Figuur 23: 1 inputwaarde x , met twee uitkomsten

3.2.3 Lineair vs logistisch regressiemodel



Figuur 24: Hoe dichter p tegen 1, hoe zekerder het model is

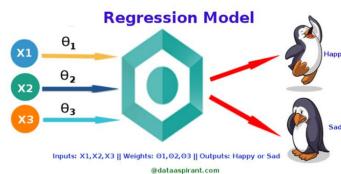
Welk model gaat het snelst naar 0 en 1?

- Het logistische model
- Daarom is het logistische model beter voor classificatie: je splitst de groep op in 2

3.2.4 Meerdere inputfactoren

Zelfde redenering:

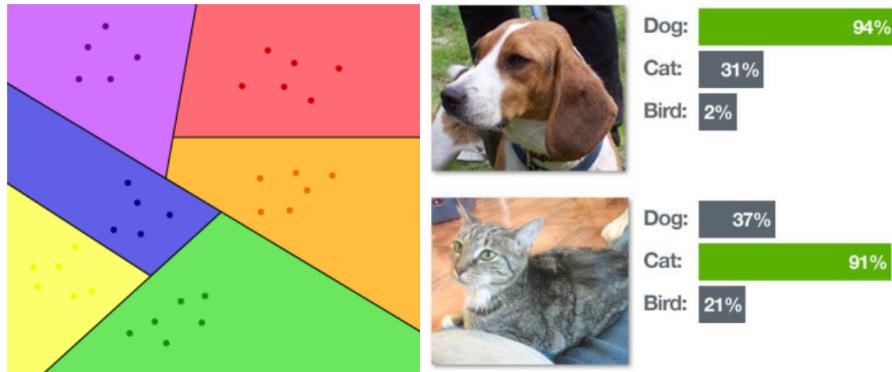
- Meerdere inputwaarden x_1, x_2, \dots
- Gebruik $\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots$



Figuur 25: Regressiemodel met meerdere inputfactoren

3.3 Softmax functie

Definitie 3.3 De softmax functie is een generalisatie van de logistische functie, die gebruikt kan worden om data te gaan categoriseren in verschillende klassen. Dat gebeurt met behulp van verschillende inputvariabelen en hun bijhorende parameters.



Figuur 26: 2 voorbeelden van categoriseren met de softmax functie

Let op: het is duidelijk dat softmax een probabilititeit zal geven aan elke klasse apart. De percentages tellen dus niet op tot 100%.

3.3.1 Kansen

We berekenen de kansen dus per categorie. Met het bovenstaande voorbeeld van de dierherkenning: stel dat we 2 variabelen x_1 en x_2 hebben, met x_1 de grootte van de oren en x_2 de grootte van de ogen. Dan kunnen we bijvoorbeeld stellen:

Kans dat de toestand tot groep A behoort:

- $\theta_{A,0} + \theta_{A,1}x_1 + \theta_{A,2}x_2$
- Voorbeeld: $0.01 + 0.1x_1 + 0.1x_2$

Kans dat de toestand tot groep B behoort:

- $\theta_{B,0} + \theta_{B,1}x_1 + \theta_{B,2}x_2$
- Voorbeeld: $0.1 + 0.2x_1 + 0.2x_2$

Kans dat de toestand tot groep C behoort:

- $\theta_{C,0} + \theta_{C,1}x_1 + \theta_{C,2}x_2$
- Voorbeeld: $0.1 + 0.3x_1 + 0.3x_2$

3.3.2 Model

Het softmax-model berekent de mate van zekerheid dat een toestand tot een bepaalde categorie behoort.

Volgende quotiënt drukt uit hoe zeker hij is dat (x_1, x_2) tot categorie A behoort, met (x_1, x_2) onze 2 variabelen:

$$\frac{e^{\theta_{A,0} + \theta_{A,1}x_1 + \theta_{A,2}x_2}}{e^{\theta_{A,0} + \theta_{A,1}x_1 + \theta_{A,2}x_2} + e^{\theta_{B,0} + \theta_{B,1}z_1 + \theta_{B,2}z_2} + e^{\theta_{C,0} + \theta_{C,1}z_1 + \theta_{C,2}z_2}}$$

(analoog voor categorie B en C: pas de teller aan)

$$\frac{e^{0.01+0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.5}}{e^{0.01+0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.5} + e^{0.1+0.2 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.5} + e^{0.1+0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.5}} = 0.2945$$

Figuur 27: Betekenis: het model is 29% zeker dat (0.1, 0.5) tot categorie A behoort. Bereken zelf als oefening voor B en C

3.3.3 Wiskundig

Het gebruikte model wordt via volgende wiskundige formule algemeen beschreven:

$$\frac{e^{x_k}}{\sum_{i=1}^n e^{x_i}} \quad (18)$$

waarbij:

- $x_k = \theta_{k,0} + \theta_{k,1}x_1 + \theta_{k,2}x_2 + \dots + \theta_{k,m}x_m$
- $n =$ aantal groepen
- $m =$ het aantal meetcriteria

3.4 Logistic regression cost function

Het model:

$$h_\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^\top x}} \quad (19)$$

waarbij:

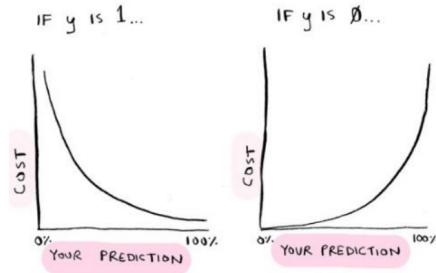
- $\theta^\top x = \theta_0 + \theta_1x_1 + \theta_2x_2$
- h_θ drukt uit wat de kans is dat voor opgegeven x_1 en x_2 de waarneming tot 1 groep behoort
- x_1 en x_2 zijn de inputwaardes
- θ_1 en θ_2 zijn gewichten (hoe belangrijk is de input)
- **Doeleind:** vinden van de beste gewichten zodat de voorspelling == de werkelijkheid

3.4.1 Succes meten

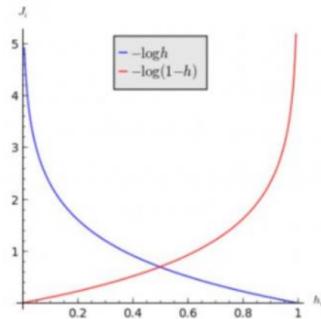
Stel: je maakt een logistisch regressiemodel die bepaalt of een object een groene appel of een tennisbal is.

- Bepalen van de kostenfunctie $J(\theta)$ met als doel deze zo laag mogelijk te brengen
- Kost = afwijking tegenover de werkelijke situatie
- Werkelijkheid kan 2 situaties zijn:
 - Indien de werkelijkheid een groene appel is $\Rightarrow y = 1$
 - Indien de werkelijkheid geen groene appel is $\Rightarrow y = 0$

Hoe ziet zo'n kostfunctie er dan uit?

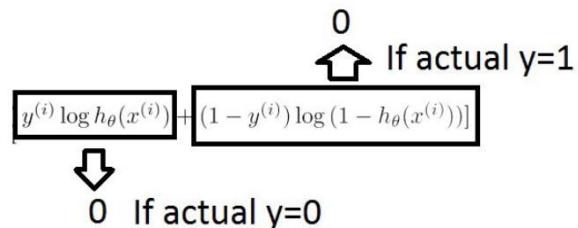


Figuur 28: Als $y = 1$ en $y = 0$



$$\begin{aligned} -\log(h_\theta(x)) & \quad \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \quad \text{if } y = 0 \end{aligned}$$

Hoe brengen we 2 mogelijke situaties in 1 functie samen?



Figuur 29: Samenbrengen van de 2 situaties in 1 formule

3.4.2 Kostenfunctie $J(\theta)$

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m Cost(h_\theta(x_i), y_i) \quad (20)$$

Kostenfunctie beschouwt alle gevallen:

- Telkens kost berekenen
- Som berekenen van alle kosten om de gemiddelde kost te bepalen

Logistic regression cost function

$$\begin{aligned}
 J(\theta) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)}) \\
 &= -\frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log (1 - h_\theta(x^{(i)})) \right]
 \end{aligned}$$

↓

0 If actual $y=1$

0 If actual $y=0$

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)})$$

$$\text{Cost}(h_\theta(x), y) = \begin{cases} -\log(h_\theta(x)) & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Note: $y = 0$ or 1 always

Figuur 30: Overzicht kostenfunctie

3.4.3 Oefening

Bereken zelf even de kost uit het voorbeeld uit de cursus Machine Learning. Het model is van de vorm: $h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2)$

Met x_1 = rondheid en x_2 = groenheid.

Veronderstel na training: $\theta_0 = -40, \theta_1 = 4, \theta_2 = 4$

Met volgende waarnemingen:

- appel = meting rondheid 8, groenheid 6
- geen appel = meting rondheid 5, groenheid 4.5

3.4.4 Extra

Mooie blogpost: <https://adit.io/posts/2016-03-13-Logistic-Regression.html>

4 Pandas library

4.1 Inleiding

- Doelstelling:
 - Nut van de Pandas library kunnen situeren
 - Data-analyse: basisbewerkingen
- Pandas = ‘Python Data Analysis Library’
- Pandas bouwt op de NumPy library
- Officiële website: <https://pandas.pydata.org/>
- Goede start: <http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/10min.html>

4.1.1 Welke data verwerken?

- csv-files
- txt-files
- Excel-files
- Databases

4.2 Pandas.core

Beschikbare datastructuren:

- Series (1D)
- DataFrame (2D)
- Panel (3D)

4.3 Series

Bestemd voor 1-dimensionale data:

'a one-dimension labeled array capable of holding any data'

- Subklasse van numpy-ndarray
- Data: elk soort datatype
- Geordende index
- Duplicaten mag (maar niet optimaal)

	index	values
A	→	5
B	→	6
C	→	12
D	→	-5
E	→	6.7

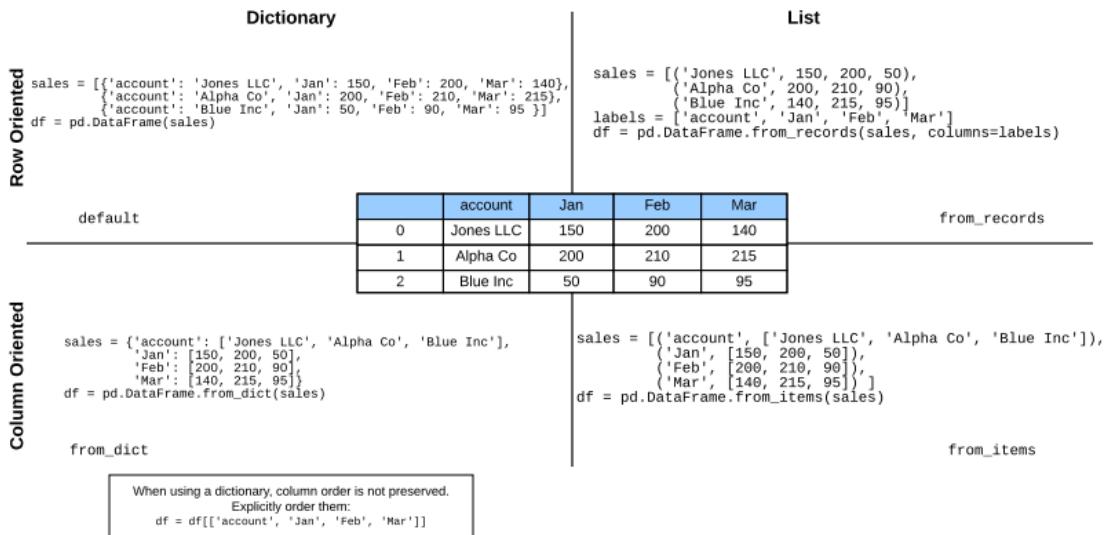
Figuur 31: Elk element heeft een index

4.4 DataFrame

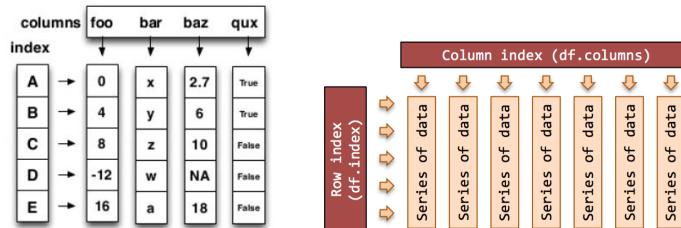
Bestemd voor meer-dimensionale data

- Subklasse van numpy-ndarray
- Elke kolom kan ander datatype hebben
- Rij en kolom index
- Grootte wijzigbaar (invoegen/verwijderen van rijen en kolommen)

Creating Pandas DataFrames from Python Lists and Dictionaries



Figuur 32: DataFrames maken uit Python lists en dictionaries



Figuur 33: Elk element heeft een rij en kolom

4.4.1 Select data from DataFrame

Via operator [] selecteer je een kolom:

	Feb	Jan	Mar	account
0	200	150	140	Jones LLC
1	210	200	215	Alpha Co
2	90	50	95	Blue Inc

Figuur 34: Voorbeeld DataFrame

```

1 # selecteer de kolom Jan uit dataframe
2 df['Jan']
3
4 # analoog: elke kolom is dus een attribuut van dataframe
5 df.Jan
6
7 # returnwaarde: Series-object

```

```

8    0    150
9    1    200
10   2    50
11  Name: Jan, dtype: int64

```

Via operator [] selecteer je een kolom & krijg je een dataframe terug:

```

1  >> df[['Jan']]
2  # returns:
3      Jan
4  0    150
5  1    200
6  2    50
7
8  >> df[['Jan', 'Mar']]
9  # returns:
10     Jan      Mar
11    0    150    140
12    1    200    215
13    2     50     95

```

Via de operator [] en met een conditie:

	Feb	Jan	Mar	account
0	200	150	140	Jones LLC
1	210	200	215	Alpha Co
2	90	50	95	Blue Inc

Figuur 35: Voorbeeld DataFrame

```

1  >> df[df.Jan > 60]
2  # returns:
3      Feb      Jan      Mar      account
4  0    200    150    140    Jones LLC
5  1    210    200    215    Alpha Co
6
7  >> df[np.logical_and(df.Jan > 100, df.Feb <= 200)]
8  # returns:
9      Feb      Jan      Mar      account
10   0    200    150    140    Jones LLC
11
12 >> df[df.account.str.startswith('Alpha')]
13 # test deze eens zelf uit als oefening :)

```

4.4.2 Veelgebruikte commando's bij dataframes

1 df.shape	# geeft de dimensie als een tuple terug
2 df.info()	# oplijsting van de aanwezige kolommen
3 df.head([aantal])	# eerste vijf/aantal rijen
4 df.tail([aantal])	# laatste vijf/aantal rijen
5 df.index	# geef de index-kolom weer

```

6 df.columns      # geef de kolomnamen weer
7 df.describe()   # geef snel overzicht van statistische data
8 df.T            # transponeer data (rij -> kol, kol -> rij)
9 df.sort_index() # sorteert op basis van index
10 df.sort_values() # sorteren op één of meerdere kolommen

```

4.5 Loc vs iloc

4.5.1 iloc

= Integer-location based indexing / selection by position

- Nut: selecteren van rijen en kolommen via rij/kolomnummer
- Syntax: data.iloc[<row>, <column>]
- Returnwaarde:
 - Indien 1 **rij** ⇒ series-object
 - Indien meerdere **rijen**: ⇒ dataframe-object
 - 1 of meerdere **kolommen**: ⇒ dataframe-object

iloc-voorbeelden:

```

1 # Rows:
2 data.iloc[0] # first row of data frame
3 data.iloc[1] # second row of data frame
4 data.iloc[-1] # last row of data frame
5
6 # Columns:
7 data.iloc[:,0] # first column of data frame
8 data.iloc[:,1] # second column of data frame
9 data.iloc[:, -1] # last column of data frame
10
11 data.iloc[0:5] # first five rows of dataframe
12
13 # first two columns of data frame with all rows
14 data.iloc[:, 0:2]
15
16 # 1st, 4th, 7th, 25th row + 1st 6th 7th columns.
17 data.iloc[[0,3,6,24], [0,5,6]]
18
19 # first 5 rows and 5th, 6th, 7th columns of data frame
20 data.iloc[0:5, 5:8]

```

4.5.2 loc

= label-based indexing / selection

- Nut: selecteren van rijen en kolommen via label / via conditionele look-up
- Syntax: data.loc[<row>, <column>]
- Returnwaarde:

- Indien 1 rij/kol ⇒ series-object
- Indien meerdere rijen: ⇒ dataframe-object
- 1 of meerdere kolommen: ⇒ dataframe-object

loc-voorbeelden:

	cars_per_cap	country	drives_right
US	809	United States	True
AUS	731	Australia	False
JAP	588	Japan	False
IN	18	India	False
RU	200	Russia	True
MOR	70	Morocco	True
EG	45	Egypt	True

Figuur 36: Voorbeeld dataframe

```

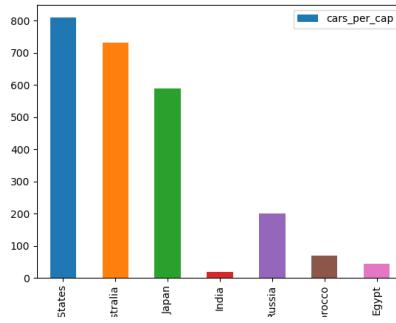
1 reviews.loc[:2, "score"] # return type =
2
3 reviews.loc[:2, ["score", "title"]] # return type =
4
5 # select column "score" where value of index <= 5
6 reviews.loc[:5, "score"]
7
8 # select columns "country" and "cars_per_cap" where rowindex is "US" or "RU"
9 cars.loc[ ["US","RU"] , ["country","cars_per_cap"]]
10
11 # select columns "country" and "cars_per_cap" where rowindex is from "US" to "RU"
12 cars.loc[ "US " : "RU " , ["country","cars_per_cap"]]
13
14 # selectie rijen hoeft niet altijd op basis van row-index te zijn
15 # select columns "country" and "drives_right", voor de landen 'Japan' en 'India'
16 cars.loc[ cars.country.isin( ['Japan', 'India'] ) , ['country','drives_right']]
```

4.6 Plotten met pandas

4.6.1 Dataframe plotten

```

1 # print(cars[['country', 'cars_per_cap']])
2 # werkwijze 1:
3 cars[['country', 'cars_per_cap']].plot(kind='bar', legend=True)
4 # werkwijze 2:
5 cars.plot(x='country', y='cars_per_cap', kind='bar', legend=True)
6
7 plt.show()
```



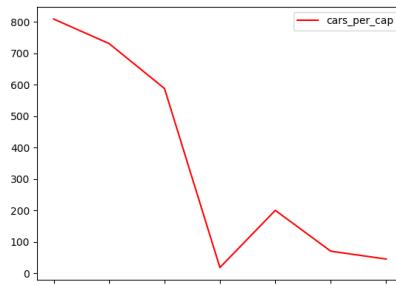
Figuur 37: Resultaat

4.6.2 Series plotten

```

1 # werkwijsje 1:
2 plt.plot(cars['cars_per_cap'])
3 # werkwijsje 2:
4 plt.plot(cars['cars_per_cap'].plot(color='r', legend=True))
5
6 plt.show()

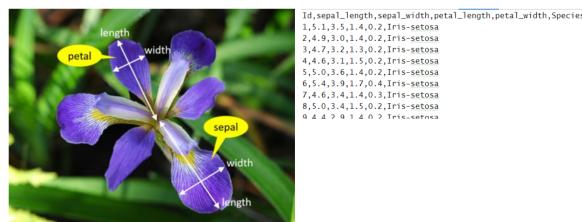
```



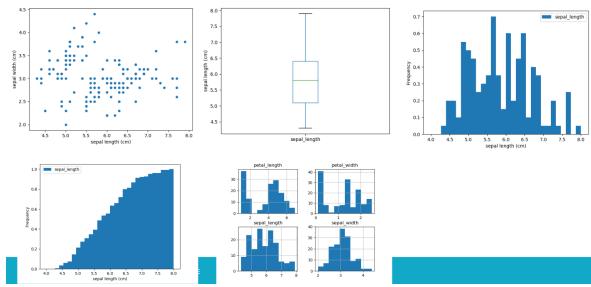
Figuur 38: Resultaat

4.7 Demo: Iris Dataset

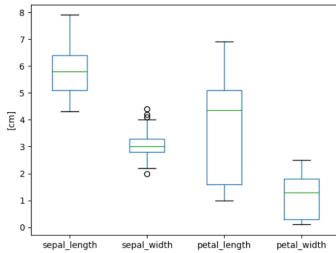
(Zie DemoPandas.zip op Leho voor de code)



Figuur 39: Een iris bestaat uit petals & sepals, met elk hun breedte en lengte



Figuur 40: Plotten van de beschikbare data (demo5.py)

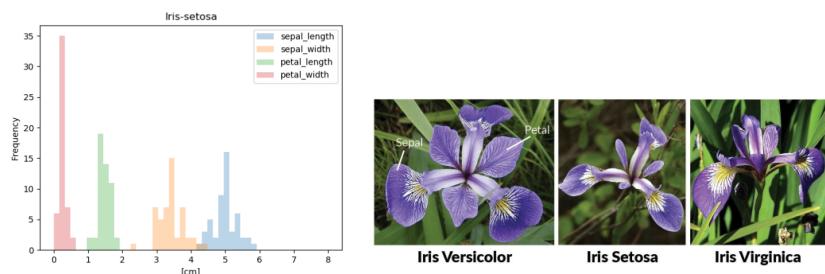


Figuur 41: Vergelijken van de lengtes en breedtes adhv box-plots (demo6.py)

```

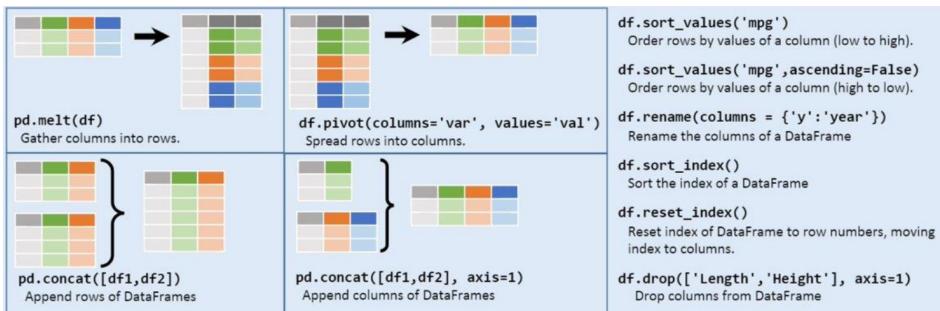
1 # filteren van data
2 result_check = iris['Species'] == 'Iris-setosa'
3 # print(type(result_check)) == <class 'pandas.core.series.Series'>
4 filtered_setosa = iris.loc[result_check, :]
5 # of in 1 lijn:
6 filtered_setosa = iris.loc[iris['Species'] == 'Iris-setosa', :]

```



Figuur 42: Frequentiediagram voor de Iris-setosa soort (demo7.py)

4.8 Complexe bewerkingen



Figuur 43: Reshaping data: change the layout of a data set

5 Normaalverdeling

5.1 Doelstelling

- Het herkennen van de eigenschappen van de normaalverdeling
- Verband standaard normaalverdeling en Z-waarden
- Z-index, Z-score tabel

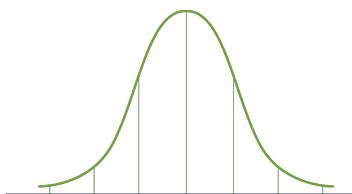
5.2 Inleiding

Wanneer komt een normaalverdeling voor?

- Grote aantallen onafhankelijke waarnemingen uit een willekeurige populatie
 - De lengte van personen
 - Productieprocessen die een bepaalde tijdsduur hebben
 - ...

5.3 Basisbegrippen

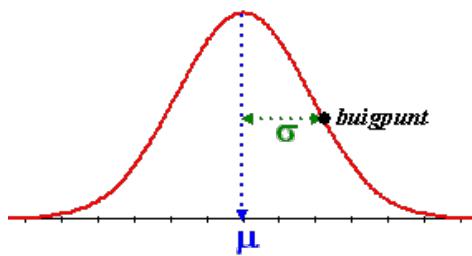
Definitie 5.1 (Normaalverdeling) *Een intervalwaarde dat afhankelijk is van oneindig aantal onafhankelijke factoren (die los van elkaar in werken) zal in de populatie een normaalverdeling vertonen (Gauss-curve)*



Figuur 44: Gauss-curve

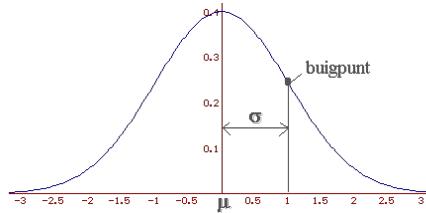
5.3.1 Kenmerken

- Klokvormig verloop
- 1 maximum = gemiddelde = mediaan (μ)
- Uitslagen vooral geconcentreerd rond gemiddelde
- Frequentie daalt naarmate scores afwijken
- Twee buigpunten: $(\mu - \sigma)$ en $(\mu + \sigma)$
- Symmetrie

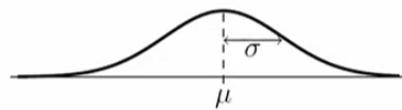


Figuur 45: Kenmerken Gauss-curve

- Standaarddeviatie (standaardafwijking) σ weerspiegelt mate van spreiding
- Wordt gemeten in de buigpunten

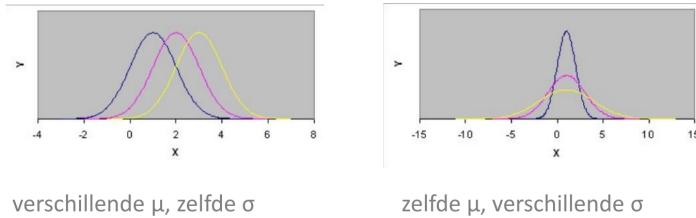


- Functie is volledig te beschrijven met het gemiddelde μ en de Standaarddeviatie σ



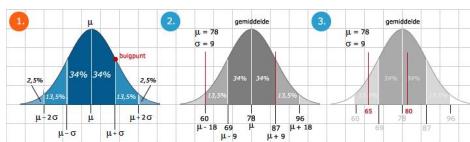
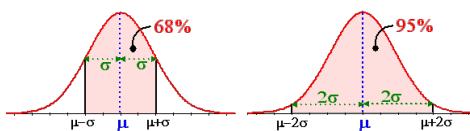
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Figuur 46: Notatiewijze



Figuur 47: Impact μ en σ

5.3.2 Verdeling



- Tussen beide buigpunten ($\mu - \sigma, \mu + \sigma$): $\approx 68\%$ van de populatie
 - Tussen ($\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma$): $\approx 95\%$ van de populatie
 - Tussen ($\mu - 3 \cdot \sigma, \mu + 3 \cdot \sigma$): $\approx 99\%$ van de populatie

5.3.3 Gevolg: Kansberekening

- Oppervlakte onder de grafiek = 100%
 - Hiermee kunnen we nu uitdrukken wat de kans van een specifiek bereik kan zijn. Bv:
 - Met $\mu = 78, \sigma = 9 \Rightarrow$ Kans dat $x < 65?$
 - \Rightarrow bereken oppervlakte links van 65

5.3.4 Wiskundig

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (21)$$

Standaardafwijking berekenen:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n-1}} \quad (22)$$

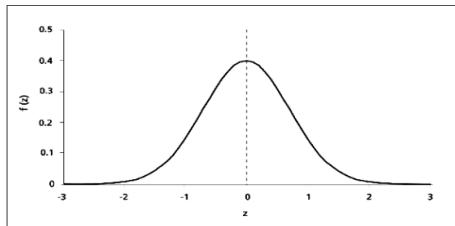
- σ = Standaarddeviatie van getallenreeks x
 - x_i = de waarde van getal i in de getallenreeks

- μ = het gemiddelde van de getallenreeks
- n = het aantal getallen in de proef

5.4 Standaard normaalverdeling

Definitie 5.2 (Standaard normaalverdeling) De standaardnormaalverdeling is een normaalverdeling waarbij:

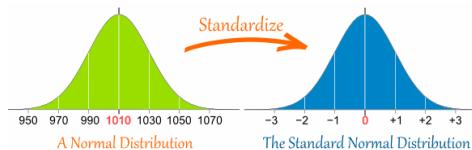
- $\mu = 0$
- $\sigma = 1$



Figuur 48: Oppervlakte onder grafiek = 1

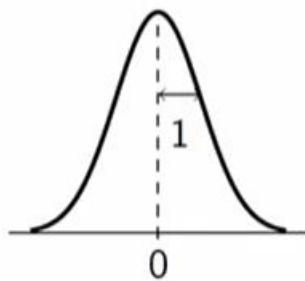
5.4.1 Standaardiseren van een normaalverdeling

Definitie 5.3 Een normaalverdeling omzetten in een standaardnormaalverdeling waarbij $\mu = 0$ en $\sigma = 1$ noemen we het standaardiseren van die normaalverdeling.



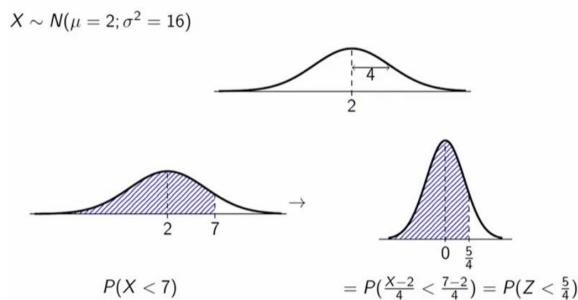
Figuur 49: Standaardiseren

- Willekeurige normaalverdeling: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Verschuiven naar 0: $X - \mu$
- samendrukken/uitrekken tot $\sigma = 1$: $\frac{X-\mu}{\sigma}$



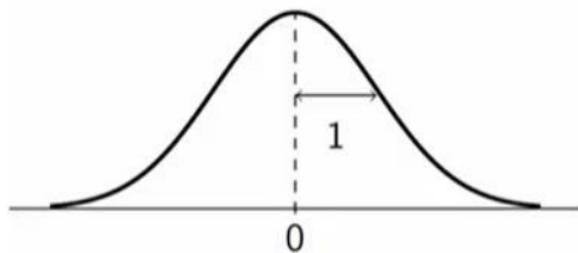
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Figuur 50: Gestandaardiseerd: alle eigenschappen blijven bewaard, enkel de hoogte blijft hetzelfde



Figuur 51: Standaardiseren: voorbeeld

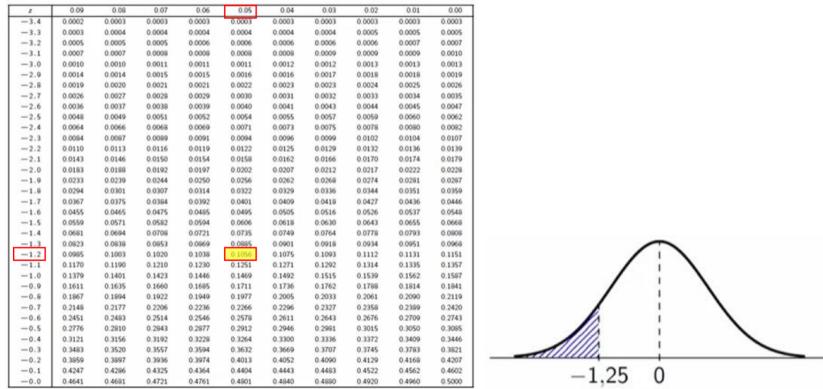
5.5 Kansberekening



Figuur 52: $Z \sim N(0, 1) \rightarrow \mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$

- Grafiek beschrijft hoe waarschijnlijk uitkomsten zijn
- Uitkomsten dicht bij 0 waarschijnlijker dan in de staarten
- Kans = oppervlakte onder de grafiek, totale kans = 100% = 1

5.5.1 Via tabellen



Figuur 53: Kansberekening via tabellen: rijen = 1 getal na de komma, kolommen = 2de getal na de komma. $P(Z < 1.25) = 0.1056$

- Symmetrie: $P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) = 0.1056$
- Complement: $P(Z < -1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$

5.6 Z-score

Definitie 5.4 (Z-score) Een Z-score geeft aan hoeveel standaardafwijkingen een observatie van het gemiddelde verwijderd is.

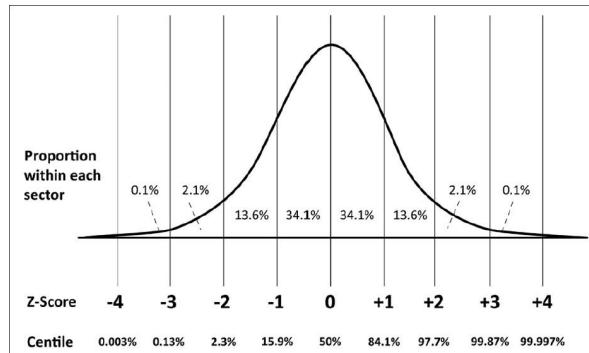
Je krijgt dus je plek ten opzichte van het gemiddelde, uitgedrukt in een standaard maat.

Voordeel: je weet direct hoe goed iemand scoort ten opzichte van de rest.

5.6.1 Wiskundig

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (23)$$

5.6.2 Voorbeeld



Figuur 54: Hoeveel standaarddeviations (σ) zit een score van het gemiddelde μ

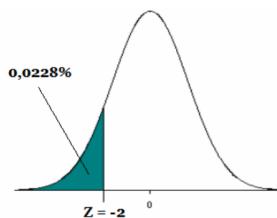
Voorbeeld: 20 studenten leggen een examen af.

- Gemiddelde $\mu = 7/10$
- Standaardafwijking $\sigma = 0.5$ (68% heeft score tussen [6.5, 7.5])
- Iemand heeft 6/10 $\Rightarrow z\text{-score} = -2 \Rightarrow 2 \cdot 0.5$ onder gemiddelde

5.6.3 Nut

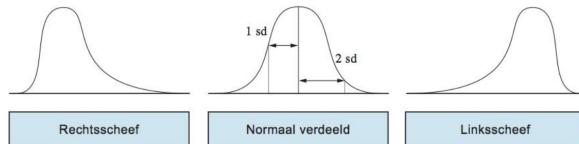
Z-score is eveneens een uitdrukking van de kans:

- Hoe (on)gebruikelijk is een score
- Bij vorig voorbeeld: 2.275% heeft een score $\leq 6/10$



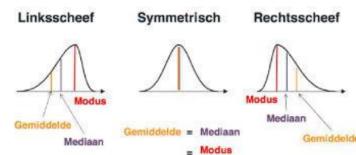
5.7 Scheefheid

Veel frequentieverdelingen hebben niet de vorm van de normaalverdeling. Ze zijn 'scheef'



Figuur 55: Scheefheid

- Linksscheef = gemiddelde is lager dan de mediaan
- Rechtsscheef = gemiddelde is hoger dan de mediaan



5.7.1 Berekening

De maat voor scheefheid kan berekend worden:

- Linksscheef: negatieve waarde
- Rechtsscheef: positieve waarde

$$Scheefheid = \left(\frac{(\sum(x-\bar{x})^3)}{\sum(x-\bar{x})^2} \right)^{3/2} \quad (24)$$

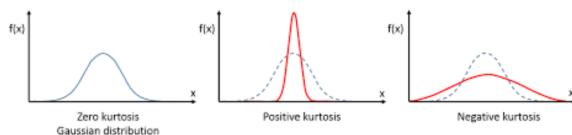
Interpretatie:

- Waarde tussen [-0.5, 0.5]: zeer goede normaalverdeling
- Waarde tussen [-1, 1]: redelijk goede normaalverdeling
- Waarde daarbuiten: geen goede normaalverdeling

5.8 Kurtosis

Definitie 5.5 (Kurtosis) *Kurtosis is de maat van de gepiektheid.*

Je gaat na of de verdeling een scherpe top heeft of een nogal vlakke top.



5.8.1 Wiskundig

$$Kurtosis = \left(\frac{\sum(x-\bar{x})^4}{\sum(x-\bar{x})^2} \right) - 3 \quad (25)$$

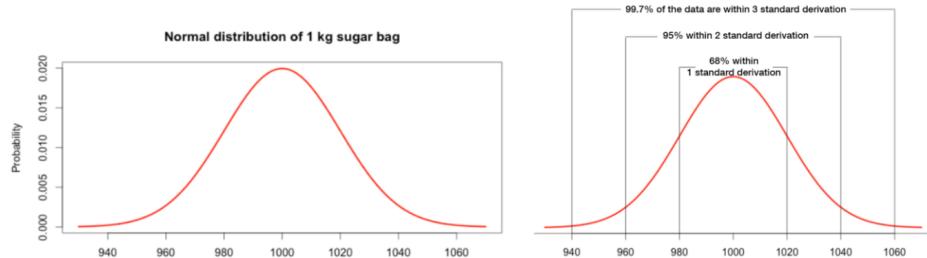
Interpretatie:

- 0 = normaalverdeling
- Minimum is -3: volledig plat
- Maximum is + inf

5.9 Anomaly detection

Voorbeeld: suikerfabriek produceert 1kg suikerzakken

- In werkelijkheid: nooit exact 1kg



Figuur 56: Verdeling 1kg suikerzak

Definitie 5.6 (Anomalie) Een anomalie in een normaalverdeling is een onregelmatigheid of afwijking
Soms verdacht, soms niet

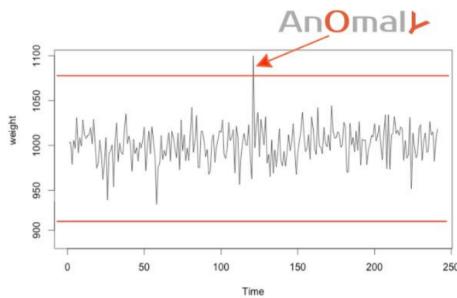
"Anomaly detection (also outlier detection) is the identification of items, events or observations which do not conform to an expected pattern or other items in a dataset."

5.9.1 Detectiemethode 1

= Minimum- en maximumgrens vastleggen

Bv:

- wanneer een waarde kleiner is dan $\mu - 4\sigma$ (920 gram)
- wanneer een waarde groter is dan $\mu + 4\sigma$ (1080 gram)



5.9.2 Detectiemethode 2

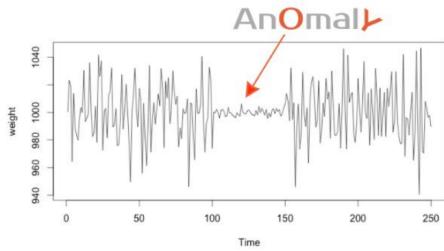
= detecteren van een zeldzame verdeling die afwijkt van de normaalverdeling

Bv:

- 4 opeenvolgende waarden die vallen in de buitengrenzen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$
- Kans voor 1 waarde: 0.3%
- Kans voor 4 opeenvolgende waarden: $(0.3\%)^4 = (0.003)^4 = 0.00000000081$
- Het is duidelijk dat 4 opeenvolgende waarden heel zelden voorkomen \Rightarrow anomalie

Bv:

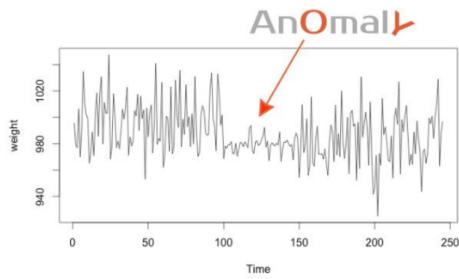
- 50 opeenvolgende waarden die vallen in de buitengrenzen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- Kans voor 1 waarde: 68%
- Kans 50 opeenvolgende waarden: $(0.68)^{50} = 4.221 \cdot 10^{-9}$
- Heel lage kans \Rightarrow anomalie



5.9.3 Detectiemethode 3

De tweede techniek kan dus een vreemde afwijking van de normaalverdeling detecteren, maar het kan geen anomalieën detecteren die van de ene sigma naar de andere gaan op een normale manier.

Om deze soort anomalie te detecteren moeten we kijken naar een ‘window’ van de laatste n elementen. Als het gemiddelde en de standaardafwijking te veel variëren in die window, kunnen we vaststellen dat er een anomalie is.



Figuur 57: Oplossing: gebruik van window

6 Kansrekening

Doelstelling:

- Basiskennis kansrekening
- Definitie van Laplace
- Somregel kunnen toepassen
- Wet van de grote getallen
- Wat is een empirische kans?

6.1 Basiskennis

Kansrekenen = waarschijnlijkheidsrekenen

- Vrij jonge tak in de wiskunde
- ‘Rekenen over wat er nog niet is’

6.1.1 Voorbeeld

Wat is de kans dat je 6 ogen gooit met een dobbelsteen?

- Kans op gooien van 1 = 1/6
- Kans op gooien van 2 = 1/6
- ...
- Kans op gooien van x = 1/6 = 16.7%

1 = aantal gunstige uitkomsten

6 = aantal mogelijke uitkomsten

6.2 Kansdefinitie van Laplace

Definitie 6.1 (Kansdefinitie van Laplace) Bij een kansexperiment is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan:

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

6.2.1 Wiskundige notatie

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad (26)$$

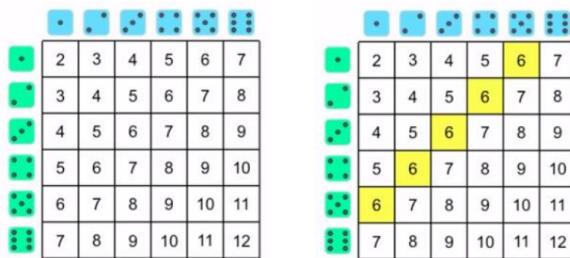
- Met A : een gebeurtenis
- Met Ω : alle mogelijkheden ('het universum') ($\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$)
- Met $\#A$: aantal elementen (uitkomsten) die voldoen aan deze gebeurtenis
- Met $\#\Omega$: aantal elementen uit universum
- Voorwaarde: alle mogelijke uitkomsten zijn even waarschijnlijk

6.2.2 Gecombineerd experiment

Bv: je gooit 2 dobbelstenen

Wat is de kans op de gebeurtenis 'de som is 6 ogen'?

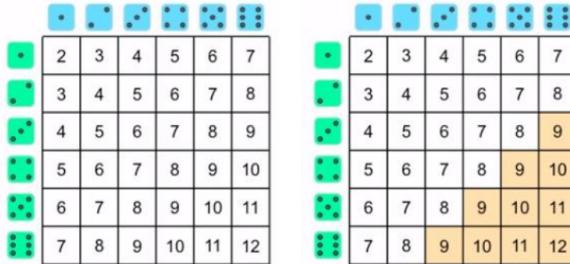
- $P(\text{som} == 2) = \frac{1}{36}$
- $P(\text{som} == 6) = \frac{5}{36}$



Figuur 58: Kans dat de som 6 ogen is

Wat is de kans op de gebeurtenis ‘de som is minstens 9 ogen’?

- $P(\text{som} \geq 9) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$



Figuur 59: Kans dat de som minstens 9 ogen is

Oefening: je gooit met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelsteen

- Wat is de kans op de gebeurtenis met beide dobbelstenen evenveel gooien?

4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Figuur 60: Kansentabel opstellen

- $P(\text{beide dobbelstenen evenveel}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

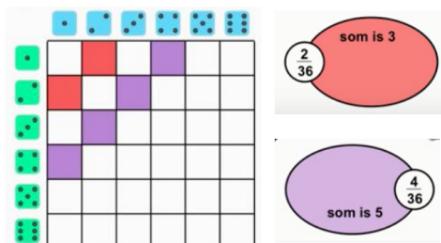
- Wat is de kans dat de som van de ogen minstens 8 is?

- Opnieuw kansentabel opstellen $\Rightarrow \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

6.3 Somregel

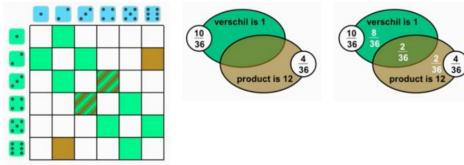
Bv: Je gooit met 2 dobbelstenen

- Wat is de kans op ‘som is 3 **of** som is 5’



Figuur 61: Geen overlap:

- Wat is de kans op ‘verschil is 1 **of** product is 12’



Figuur 62: Er is overlap: gevaar voor dubbeltelling \Rightarrow verschil aftrekken

6.3.1 Wiskundig

- De gebeurtenis dat A of B beide optreden = $A \cup B$ ‘vereniging’
- De gebeurtenis dat A of B tegelijkertijd optreden = $A \cap B$ ‘doorsnede’

Definitie 6.2 (Somregel) *De kans dat de vereniging zich voordoet ‘som-regel’:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (27)$$

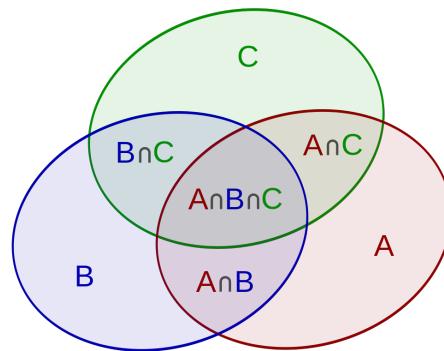
Als $P(A \cap B)$ leeg is, dan geldt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (28)$$

6.3.2 Algemene somregel

Voor 3 gebeurtenissen A,B,C

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (29)$$



Figuur 63: $A \cap B \cap C$ moet terug opgeteld worden want hij werd te veel afgetrokken

6.4 Complementregel

1 dobbelsteen:

- Je gooit een 6

- Verzameling van alle andere mogelijke gebeurtenissen = complement van die gebeurtenis
- Complement van een 6 gooien == alles behalve een 6 gooien

Definitie 6.3 De complementregel stelt dat een gebeurtenis G en zijn complement $G_{\text{complement}}$ samen alle mogelijkheden vormen.

$$\begin{aligned} P(G) + P(G_{\text{complement}}) &= 1 \\ \Leftrightarrow P(G) &= 1 - P(G_{\text{complement}}) \end{aligned} \quad (30)$$

6.5 Samengesteld of stochastisch experiment

Definitie 6.4 Een stochastisch kansenexperiment is een experiment dat een aantal keer herhaald wordt.

Verschillende oplossingsmethodes mogelijk:

- Kansboom
- Combinaties

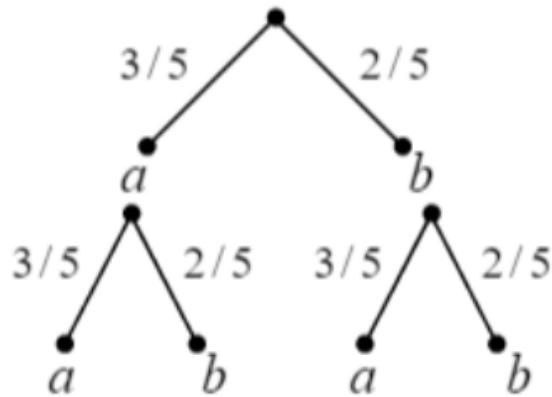
Voorbeeld: in een vaas liggen 5 briefjes waarop telkens 1 letter staat: 3 briefjes met de letter A en twee briefjes met de letter B

2 mogelijkheden:

- trekking met teruglegging
- trekking zonder teruglegging

6.5.1 Trekking met teruglegging

Uit de vaas wordt lukraak een letter getrokken. Deze wordt genoteerd en teruggelegd. Vervolgens trekken we opnieuw een letter.



Figuur 64: Verloop voorgesteld via een kansboom

- Uitkomstenverzameling: $U = \{AA, AB, BA, BB\}$
- Elke tak = bijhorende deelkans

Definitie 6.5 (Onafhankelijke deelexperimenten) Kansen bij de tweede trekking zijn onafhankelijk van het resultaat van de eerste trekking

Wat is $P(AB)$?

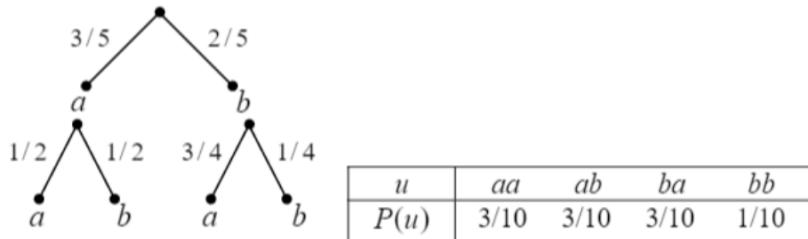
- $N =$ groot aantal herhalingen
- $\frac{3}{5}N$ keer leveren een A op
- $\frac{2}{5}N$ keer leveren een B op
- **Gevolg:** $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}N$ keer volgen de weg AB
- $\Rightarrow P(AB) = \frac{6}{25}$

u	aa	ab	ba	bb
$P(u)$	$9/25$	$6/25$	$6/25$	$4/25$

Productregel voor kansen: De kans op een weg is gelijk aan het product van de kansen langs die weg

6.5.2 Trekking zonder teruglegging

Uit de vaas wordt lukraak een letter genomen. Deze wordt genoteerd en niet teruggelegd. Vervolgens trekken we een nieuwe letter



Figuur 65: We vermenigvuldigen opnieuw de kansen

Definitie 6.6 (Afhankelijke deelexperimenten) Kansen bij de tweede trekking zijn afhankelijk van het resultaat van de eerste trekking

6.6 Permutaties

Definitie 6.7 (Permutatie) Een permutatie van een verzameling elementen is een herschikking of herordening ervan.

\Rightarrow volgorde is van belang!

6.6.1 Voorbeeld:

Je organiseert een wedstrijd voor 10 hardlopers.

Op hoeveel manieren kan ik de gouden/zilveren/bronzen medaille gaan verdelen?

- Volgorde van belang!
- Aantal permutaties van 3 uit 10: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

6.6.2 Oefeningen

Een reclameblok bestaat uit 9 items: 2 over eten, 3 over reizen, 4 over auto's

1. Op hoeveel manieren kunnen deze items gerangschikt worden?
 - $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362880$
2. Op hoeveel manieren kunnen deze items gerangschikt worden als de items over reizen direct na elkaar komen?
 - Aantal manieren om reizen te rangschikken: $3!$
 - Aantal manieren om de rest te rangschikken: $7!$
 - Eindoplossing: $3! \cdot 7!$

6.7 Combinaties

Definitie 6.8 (Combinaties) Een combinatie is een aantal manieren om k dingen uit n dingen te kiezen **zonder** dat de volgorde van belang is.

6.7.1 Wiskundig

'n boven k' of 'uit n kies ik er k'

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad (31)$$

6.7.2 Voorbeeld

Uit 63 studenten worden er 8 gekozen om deel te nemen aan de studentenparticipatie

$$\binom{63}{8} = \frac{63!}{(63-8)! \cdot 8!} = 3872894697$$

6.7.3 Oefening

We gooien met 5 identieke muntstukken. Wat is de kans dat we 3 **of** 4 keer kop gooien?

- Gevraagd: $P(3 \text{ keer kop of } 4 \text{ keer kop})$
- Totaal = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$
- Aantal gunstige:
 - 3x kop: $\binom{5}{3} = 10$
 - 4x kop: $\binom{5}{4} = 5$
- Resultaat: somregel = $P(3 \text{ keer kop of } 4 \text{ keer kop}) = \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{15}{32}$

6.8 Theoretische en empirische kansen

6.8.1 Theoretische kansen:

- Eenvoudige kansberekeningen: gooien van een dobbelsteen, kans dat je 5 gooit
- Dit is een 'theoretische' of 'a priori' kans:

- De kans op een gebeurtenis is vooraf berekenbaar

6.8.2 Empirische kansen

- Complexere kansberekening
- Uitkomst niet eenvoudig berekenbaar

6.8.3 Voorbeeld

We gooien 60 keer met een dobbelsteen, hoeveel vijven verwacht je hierbij?

- Verwachting: $10 \times 1, 10 \times 2, 10 \times 3, \dots$
- Maar is de werkelijkheid = verwachting?
- Relatieve frequentie: $\frac{\text{frequentie}}{\text{aantal worpen}} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

Definitie 6.9 (De wet van de grote getallen) Wanneer we een experiment heel vaak herhalen komt de relatieve frequentie steeds dichter in de buurt van de kans op de gebeurtenis.



Figuur 66: De wet van grote getallen

- Nuttig wanneer we kans niet vooraf kunnen berekenen.
- Door het experiment heel vaak te herhalen, kunnen we de kans afleiden.
- Hierdoor mogelijkheid tot uitspraak over experiment in toekomst
- Dit heet **de empirische kans**: de kans gebaseerd op waarneming

6.8.4 Voorbeeld 2

Experiment met duimspijker: op hoeveel manieren kan hij bij een worp op de grond komen?

- We bekijken de kans $P(\text{punt omlaag})$ en $P(\text{punt omhoog})$
- Is dat wel 50/50?
- Theoretische kans niet te bepalen...
- Door experiment uit te voeren: de empirische kans $P(\text{punt omhoog}) \approx 0.58$

7 Voorwaardelijke kans

7.1 Doelstelling

- Voorwaardelijke kansen berekenen

- Onafhankelijke gebeurtenissen herkennen
- Regel van Bayes kennen en toepassen

7.2 Situering

Een patiënt heeft mogelijk last van griep, verkoudheid, of beide.

- Een verkouden patiënt heeft met 60% kans last van hoestbuien, met 10% kans op hoofdpijnklachten
- Een patiënt met griep heeft kans 20% op hoestbuien, met 70% kans op hoofdpijn

Vragen

1. De patiënt vertelt dat hij last heeft van hoestbuien. Hoe groot is de kans dat hij griep heeft?
2. Hij zegt dat hij ook last heeft van hoofdpijn. Hoe groot is de kans nu dat hij griep heeft?

7.3 Voorbeeld

Voorwaardelijke kans: kans die aan een voorwaarde voldoet

		geslacht		
		jongen	meisje	
		0	5	13
sport	0	22	17	39
	1	12	7	19
	> 1	39	32	71

Bereken exact de kans dat een willekeurig gekozen...

1. ... leerling 1 sport beoefend?
 - $P(\text{leerling sport niet}) = 39/71$
2. ... leerling een jongen is en niet sport?
 - $P(\text{jongen 1 sport}) = 5/71$
3. ... meisje meer dan 1 sport beoefend
 - $P(\text{meisje } >1 \text{ sport}) = 7/32$
4. ... niet-sportende leerling een jongen is?
 - $P(\text{niet sportende leerling is jongen}) = 5/13$
5. ... meisje aan sport beoefend?
 - $P(\text{meisje doet sport}) = \frac{17+7}{32} = \frac{3}{4}$

Bij voorwaardelijke kansen bekijk je slechts een deel van de groep. Het aantal mogelijke uitkomsten waar je door deelt is dus een deelgroep

7.4 Wiskundig

De kans dat B onder de voorwaarde van A gebeurt:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (32)$$

Indien alle elementen in A en B evenwaardig zijn:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} \quad (33)$$

7.4.1 Gevolg: productregel

We weten:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Daaruit volgt:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(AB) \\ &= P(B|A) \cdot P(A) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) \end{aligned} \quad (34)$$

De kans dat A en B samen voorkomen:

- = (kans op B onder voorwaarde van A) * kans op A
- = (kans op A onder voorwaarde van B) * kans op B

7.4.2 Algemene productregel

Met 3 verzamelingen:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(ABC) \\ &= P(C|AB) \cdot P(AB) \\ &= P(C|AB) \cdot P(B|A) \cdot P(A) \end{aligned} \quad (35)$$

Algemeen:

$$P(ABC \dots Z) = P(Z|ABC \dots Y) \cdot \dots \cdot P(C|AB) \cdot P(B|A) \cdot P(A) \quad (36)$$

7.5 Oefening 1

7.5.1 Opgave

Drie machines M_1, M_2, M_3 produceren items:

	M_1	M_2	M_3
percentage productie	20	30	50
percentage defect	1	2	3

We kiezen willekeurig 1 item uit de totale productie.

Wat is de kans dat dit item kapot is?

Figuur 67: Opgave

7.5.2 Oplossing

Je vermenigvuldigt voor elke machine het productiepercentage met het defect percentage voor die machine. Die kansen tel je op:

$$\begin{aligned} P(D|M_1) \cdot P(M_1) + P(D|M_2) \cdot P(M_2) + P(D|M_3) \cdot P(M_3) \\ = 0.01 \cdot 0.2 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.5 \\ = 0.023 \end{aligned}$$

7.6 Oefening 2

7.6.1 Opgave

Drie machines M_1, M_2, M_3 produceren items:

	M_1	M_2	M_3
percentage productie	20	30	50
percentage defect	1	2	3

We kiezen willekeurig 1 item uit de totale productie, en dit blijkt kapot te zijn.

Wat is de kans dat dit item door M_2 gemaakt is?

Figuur 68: Opgave

7.6.2 Oplossing

$$\begin{aligned} P(M_2|D) &= \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(D|M_2) \cdot P(M_2)}{P(D)} \\ &= \frac{0.02 \cdot 0.3}{0.023} \\ &= 0.261 \end{aligned}$$

7.7 Onafhankelijke gebeurtenissen

7.7.1 Voorbeeld

In een groep van 65 jongeren is er onderzoek gedaan of ze wel of niet sporten

3 gebeurtenissen:

- A: een leerling sport
- B: een leerling is een jongen
- C: een leerling is een meisje

		<i>geslacht</i>		
		jongen	meisje	
<i>sport</i>	wel	11	44	55
	niet	2	8	10
	totaal	13	52	65

- Kans dat een leerling sport: $P(A) = \frac{55}{65} = \frac{11}{13}$
- Kans dat een leerling sport onder voorwaarde dat het een jongen is: $P(A|B) = \frac{11}{13}$
- **Vaststelling:** of een leerling sport beoefend is onafhankelijk of het een jongen is

Wanneer gebeurtenis A en B onafhankelijk zijn geldt $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$

- Kans dat leerling een jongen is: $P(B) = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$
- Kans dat leerling een jongen is onder de voorwaarde dat hij sport: $P(B|A) = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$

Wanneer gebeurtenis A en B onafhankelijk zijn geldt $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$ en dus ook $P(B \text{ voorwaarde } A) = P(B)$

7.7.2 Gevolg: Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen

Indien A en B onafhankelijk zijn, dan is de kans dat B onder voorwaarde van A gebeurt:

- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$

Productregel wordt dan:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B) \quad (37)$$

7.8 Productregel algemeen

Voor een n-tal willekeurige gebeurtenissen A_1, A_2, \dots, A_n geldt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (38)$$

Men schrijft dit kort als:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (39)$$

7.8.1 Oefening 1

Controleer of het hebben van blauwe ogen al dan niet afhankelijk is van het geslacht

	Blauwe ogen	Geen blauwe ogen	
Jongen	15	5	20
Meisje	30	10	40
	45	15	

Figuur 69: Opgave

7.8.2 Oefening 2

Controleer of kans op bloedgroep AB al dan niet onafhankelijk is van de waarde Rh+

	AB	O	
Rh+	15	155	170
Rh-	5	25	30
	20	180	

Figuur 70: Opgave

7.9 Regel van Bayes

7.9.1 Toepassingsdomein

- Belangrijkste deel uit kansrekening
- Toepassing in medische en genetische diagnostiek, AI, organisatie van dataverkeer, wetenschappelijk onderzoek

Een test op *HIV* is 90% betrouwbaar: als een persoon *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.9, en als een persoon geen *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.1. De kans op *HIV* is 0.05.

Een dame ondergaat de test en de uitslag is positief. Wat is de kans dat zij *HIV* heeft?

Figuur 71: Voorbeeld 1

De kans dat een email spam is, is 99%. Een spamfilter is 98% betrouwbaar: 98% van alle spam wordt als spam geclassificeerd en 2% van niet-spam wordt als spam geclassificeerd.

Een email wordt als spam geclassificeerd. Hoeveel is de kans dat het daadwerkelijk spam is toegenomen door deze informatie?

Figuur 72: Voorbeeld 2

7.9.2 Formule van Bayes (eenvoudige vorm)

Uit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ en } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

volgt:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

dus:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (40)$$

7.9.3 Voorbeeld

De kans dat een zekere kerncentrale oververhit raakt (O) is $1 \cdot 10^{-7}$, de kans dat een lek (L) ontstaat is $1 \cdot 10^{-8}$, maar als er eenmaal een lek is, is de kans groot dat de centrale oververhit raakt: 0.1.

Wat is de kans dat de centrale gaat lekken als hij oververhit raakt?

$$P(L|O) = \frac{P(L \cap O)}{P(O)} = \frac{P(O|L) \cdot P(L)}{P(O)}$$

Dus:

$$P(L|O) = \frac{0.1 \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-7}} = 0.01$$

7.10 Regel van Bayes (variant 1)

We beschouwen van een gebeurtenis H ook zijn complement \bar{H} .

Ter herinnering:

- $P(B) + P(\bar{B}) = 1$
- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
- $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$

Daaruit volgt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \end{aligned}$$

Dus als we $P(B)$ integreren in de formule van Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} \end{aligned} \quad (41)$$

Een test op *HIV* is 90% betrouwbaar: als een persoon *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.9, en als een persoon geen *HIV* heeft is de kans op een positieve uitslag 0.1. De kans op *HIV* is 0.05.

Een dame ondergaat de test en de uitslag is positief. Wat is de kans dat zij *HIV* heeft?

De gevraagde kans is $P(HIV|POS)$. In de notatie van de Stelling van Bayes wordt dat $H = HIV$ en $E = POS$.

Met de Stelling van Bayes:

$$P(HIV|POS) = \frac{P(POS|HIV)P(HIV)}{P(POS|HIV)P(HIV) + P(POS|\bar{HIV})P(\bar{HIV})}.$$

Daarmee

$$P(HIV|POS) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95} = 0.32.$$

Figuur 73: Voorbeeld 1

De kans dat een email spam is, is 99%. Een spamfilter is 98% betrouwbaar: 98% van alle spam wordt als spam geclassificeerd en 2% van niet-spam wordt als spam geclassificeerd.

Een email wordt als spam geclassificeerd. Hoeveel is de kans dat het daadwerkelijk spam is toegenomen door deze informatie?

H : de email is spam. \bar{H} : de email is geen spam. E : de email is als spam geclassificeerd.

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|\bar{H})P(\bar{H})} = \frac{0.98 \cdot 0.99}{0.98 \cdot 0.99 + 0.02 \cdot 0.01} = 0.9998.$$

Figuur 74: Voorbeeld 2

7.11 Regel van Bayes (variant 2)

We beschouwen van een gebeurtenis H ook zijn complement \bar{H} , waarbij nu geldt dat $P(H) = P(\bar{H})$. We kunnen dus bepaalde termen schrappen:

$$\begin{aligned} P(H|E) &= \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})} \\ &= \frac{P(E|H)}{P(E|H) + P(E|\bar{H})} \end{aligned} \tag{42}$$

7.12 Regel van Bayes (algemeen)

Verzameling B in verschillende gevallen onderverdeeld (B_1, B_2, \dots, B_n) die elkaar uitsluiten: $B_i \cap B_j = \emptyset$ als $i \neq j$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \tag{43}$$

Vb. Een restaurant schenkt Bordeaux, Beaujolais en Merlot. Wanneer een gast geen keuze kan maken kiest de ober, kans 0.6 dat hij Bordeaux, 0.3 dat hij Beaujolais en 0.1 dat hij Merlot kiest. Bij elk van deze wijnen zijn er gasten die het niet smaakt. Stel dat de kans daarop voor Bordeaux, Beaujolais en Merlot respectievelijk 0.01, 0.04 en 0.2 is. Een gast krijgt een door de ober gekozen wijn en vindt die niet lekker.

Wat is de kans dat het Bordeaux is?

H_1 : de wijn is Bordeaux, H_2 : de wijn is Beaujolais, H_3 : de wijn is Merlot. E : de gast vindt de wijn niet lekker.

H_1 : de wijn is Bordeaux, H_2 : de wijn is Beaujolais, H_3 : de wijn is Merlot. E : de gast vindt de wijn niet lekker.

$$P(H_1 | E) = \frac{P(E | H_1)P(H_1)}{\sum_{j=1}^3 P(E | H_j)P(H_j)} = \frac{0.01 \cdot 0.6}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1} = 0.1578947.$$

Wat is de kans dat het Beaujolais is?

$$P(H_2 | E) = \frac{P(E | H_2)P(H_2)}{\sum_{j=1}^3 P(E | H_j)P(H_j)} = \frac{0.04 \cdot 0.3}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1} = 0.3157895. \quad P(H_3 | E) = \frac{P(E | H_3)P(H_3)}{\sum_{j=1}^3 P(E | H_j)P(H_j)} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1} = 0.5263158.$$

Figuur 75: Voorbeeld algemene regel van Bayes

7.13 Bayesiaans leren: toepassing in machine learning

Definitie 7.1 Bayesiaans leren heeft in essentie de volgende vorm: Er zijn een aantal hypotheses H_1, \dots, H_n die samen de uitkomstenverzameling vormen.

De hypotheses zijn meer of minder waarschijnlijk: de (initiële) bijbehorende verdeling is de **a-priori verdeling**, de kansen $P(H_i)$ zijn de **a-priori kansen**

Na het verkrijgen van nieuwe informatie/data/gebeurtenis E worden de kansen van de hypotheses aangepast volgens de stelling van Bayes:

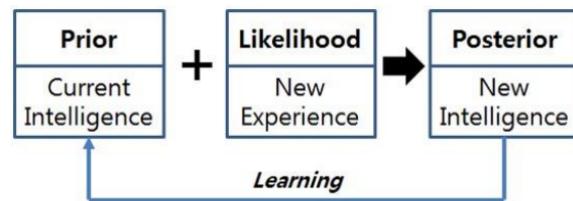
$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(E | H_j) \cdot P(H_j)} \quad (44)$$

- De kansen $P(H_i | E)$ zijn de **a-posteriori kansen**.
- De kansen $P(E | H_i)$ zijn de **likelihoods** van E

7.13.1 Leren

Op grond van telkens nieuwe data E_1, E_2, \dots wordt de verdeling van de hypotheses voortdurend aangepast: P_0, P_1, P_2, \dots

- P_0 is de a-priori verdeling, waarbij $P_0(H_i) = P(H_i)$
- Na het verkrijgen van data E_1 wordt de nieuwe verdeling P_1 , waarbij $P_1(H_i) = P_0(H_i | E_1)$
- Na het verkrijgen van data E_2 wordt de nieuwe verdeling P_2 , waarbij $P_2(H_i) = P_1(H_i | E_2)$
- ...



Figuur 76: Bayesiaans leren

7.14 Naïve Bayes Spam Filter

Doelstelling: Regel van Bayes kennen en toepassen om een eenvoudige spam-filter te programmeren.

- Gegeven een bepaalde spamfilter
- Email komt in spamfolder: hoe groot is de kans dat het effectief spam is?
 - $P(\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\text{spam}) \cdot P(\text{spam})}{P(\text{message})}$
 - Waarbij: $P(\text{spam}|\text{message})$ = de kans dat een email uit spamfolder effectief spam is
 - En: $P(\text{message}|\text{spam})$ = de kans op classificatie spam door deze filter
- Email komt in inbox: hoe groot is de kans dat het geen spam is?
 - $P(\neg\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\neg\text{spam}) \cdot P(\neg\text{spam})}{P(\text{message})}$
 - Waarbij: $P(\neg\text{spam}|\text{message})$ = de kans dat een email uit inbox effectief geen spam is
 - En: $P(\text{message}|\neg\text{spam})$ = de kans op classificatie geen spam door deze filter

Veronderstel: nieuwe e-mail zit in de spam-folder:

Kans dat gegeven e-mail uit spamfolder effectief spam is

$$P(\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\text{spam})P(\text{spam})}{P(\text{message})}$$

Veronderstel: nieuwe e-mail zit in de inbox:

Kans dat gegeven e-mail uit inbox effectief geen spam is

$$P(\neg\text{spam}|\text{message}) = \frac{P(\text{message}|\neg\text{spam})P(\neg\text{spam})}{P(\text{message})}$$

Figuur 77: Als links $>$ rechts \Rightarrow email naar spamfolder, anders email naar inbox

Een gegeven e-mail (message) wordt dus herkend als spam als:

- $P(\text{spam}|\text{message}) > P(\neg\text{spam}|\text{message})$
- Merk op dat $P(\text{message})$ geen invloed heeft op de beslissing
- Dus: $P(\text{message}|\text{spam}) \cdot P(\text{spam}) > P(\text{message}|\neg\text{spam}) \cdot P(\neg\text{spam})$

7.14.1 Herkennen van een spam bericht

Doel:

- Berekenen van $P(\text{message}|\text{spam}) P(\text{spam})$
- Berekenen van $P(\text{message}|\text{not spam}) P(\text{not spam})$

Message:

- opeenvolging van woorden (w_1, w_2, \dots, w_n)
- volgorde niet belangrijk
- elk woord is onafhankelijk van het andere woord

Berekenen van $P(\text{message}|\text{spam})P(\text{spam})$:

$$\begin{aligned}
P(\text{message}|\text{spam}) &= P(w_1, w_2, \dots, w_n | \text{spam}) \\
&= P(w_1 | \text{spam}) \cdot P(w_2 | \text{spam}) \cdots \cdots P(w_n | \text{spam}) \\
&= \prod_{i=1}^n P(w_i | \text{spam})
\end{aligned}$$

Berekenen van $P(\text{message}|\neg\text{spam})P(\neg\text{spam})$:

$$\begin{aligned}
P(\text{message}|\text{spam}) &= P(w_1, w_2, \dots, w_n | \neg\text{spam}) \\
&= \prod_{i=1}^n P(w_i | \neg\text{spam})
\end{aligned}$$

Onze filter classificeert een message als spam als:

$$\frac{P(\text{spam}) \prod_{i=1}^n P(w_i | \text{spam})}{P(\neg\text{spam}) \prod_{i=1}^n P(w_i | \neg\text{spam})} > \text{threshold}$$

$P(\text{spam}) \prod_{i=1}^n P(w_i | \text{spam})$
prior likelihood
 $P(\neg\text{spam}) \prod_{i=1}^n P(w_i | \neg\text{spam})$
prior likelihood

7.14.2 Parameters

- $P(\text{spam})$
- $P(\neg\text{spam})$
- $P(\text{woord}|\text{spam})$
 - = woord aantal keer gevonden in spam messages, gedeeld door aantal spam messages
- $P(\text{woord}|\neg\text{spam})$

Meer info: zie labo-oefening week3B

8 Logging

8.1 Inleiding

8.1.1 Waarom?

- Diagnose van een specifiek probleem
- Normale flow van een applicatie controleren
- Gebeurtenissen registreren
- Werken met verschillende niveau's: niet elk logbericht is even belangrijk
- Flexibere manier nodig dan enkel maar print-statements

8.1.2 Opzet

- Je wenst zelf niveau van loggen bepalen
- Formaat van logbericht vooraf definiëren
- Locatie (scherm/bestand/...) vooraf vastleggen

8.1.3 Logging levels

Level	Wanneer te gebruiken?
DEBUG	Gedetailleerde info, typisch bestemd voor de diagnose van een probleem
INFO	Bevestiging van zaken die verondersteld werden te lukken
WARNING	Indicatie dat er iets onverwacht gebeurd is, of iets dat in de nabije toekomst zal plaatsvinden (bv: 'disk space low')
ERROR	Door een ernstig probleem was de software niet in staat om een bepaalde functie uit te voeren
CRITICAL	Zeer ernstig probleem dat het programma verhindert om verder te zetten

8.2 Basis logging

```
1 # stap 1: niveau instellen (DEBUG, INFO, WARNING, ERROR, CRITICAL)
2 logging.basicConfig(level=logging.CRITICAL)
3
4 # stap 2: voorzie code van log-methodes op gewenste plaatsen
5 logging.debug("dit is een debug log")
6 logging.info("dit is een inf log")
7 ...
8 logging.critical("dit is een critical log")
```

8.2.1 Spelregels

- Er wordt pas gelogd als het niveau van de logmethode gelijk of groter is dan het ingesteld logniveau

```
1 logging.basicConfig(level=logging.ERROR) # stel loggingniveau in
2 logging.debug("...")      # Niet gelogd
3 logging.info("...")       # Niet gelogd
4 logging.warning("...")    # Niet gelogd
5 logging.error("...")      # Wel gelogd
6 logging.critical("...")   # Wel gelogd
```

8.2.2 Format logbericht

```
1 # Voorbeeld 1
2 logging.basicConfig(level=logging.ERROR, format="*** %(message)s ***")
3 # Voorbeeld 2
4 logging.basicConfig(level=logging.DEBUG,
5                     format="%(asctime)s\t%(levelname)s -- \
6                         %(processName)s%(filename)s:(lineno)s -- %(message)s")
```

8.2.3 Naar een file loggen

```
1 logging.basicConfig(
2     filename='logging.txt',
3     level=logging.DEBUG,
4     format"%(asctime)s - %(message)s"
5 )
```

8.2.4 Toegepast

(zie ook demo's)

```
1 @studentennummer.setter
2 def studentennummer(self, value):
3     if isinstance(value, int):
4         self.__studentennummer = value
5     else:
6         logging.error("Geen geldig studentennummer: %s" % value)
7         raise ValueError("Geen geldig studentennummer!")
```

```
1 @staticmethod
2 def inlezen_studenten(bestandsnaam):
3     studenten = []
4     try:
5         logging.info("Bestand %s inlezen" % bestandsnaam)
6         fo = open(bestandsnaam)
7         line = fo.readline() # eerste line = niets mee doen
8         line = fo.readline()
9         while (line != ""):
10            line = line.rstrip('\n')
11            parts = line.split(';')
12            try:
13                student = Student(parts[0], parts[1],
14                                    parts[2], parts[3], int(parts[4]))
15                studenten.append(student)
16            except:
17                logging.debug("Ongeldig lijn bij inlezen file: %s" % line)
18                line = fo.readline() # lees volgende lijn in
19                logging.info("Bestand volledig ingelezen")
20                fo.close()
21            except FileNotFoundError as ex:
22                logging.error("Bestand niet gevonden")
23                raise ex
24        return studenten
```

```
1 @staticmethod
2 def opslaan_studenten(bestandsnaam, studenten):
3     try:
4         logging.info("Start opslaan studenten naar bestand: %s" % bestandsnaam)
5         fo = open(bestandsnaam, "w")
6         fo.write("Naam;Voornaam;StudentenNummer;Opleiding;Geboortejaar\n")
```

```

7   for student in studenten:
8       fo.write(student.naam + ";" + student.voornaam + ";"
9             + str(student.studentnummer) + ";" + student.opleiding
10            + ";" + str(student.geboortejaar) + "\n")
11   fo.close()
12   logging.info("Opslaan studenten voltooid")
13 except FileNotFoundError as ex:
14     logging.error("Bestand niet gevonden")
15     raise ex
16 except Exception as ex:
17     logging.error("Onverwachte fout: %s" % ex)

```

Meer info: <https://docs.python.org/3.9/howto/logging.html#logging-basic-tutorial>

9 Threading

9.1 Doelstelling

- In python een thread-klasse kunnen programmeren
- Threads op elkaar kunnen afstemmen

9.2 Wat zijn threads?

Thread: 'flow of control through a program'

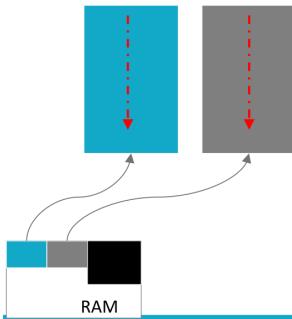
- Heeft geen gescheiden geheugengebruik
- Deelt deze met andere threads gecreëerd door hetzelfde programma
- Kan wel nog lokale variabelen hebben: elke thread heeft zijn eigen stack met lokale variabelen

9.3 Process vs Thread

PROCESSES	THREADS
Processes don't share memory	Threads share memory
Spawning/switching processes is expensive	Spawning/switching threads is less expensive
Processes require more resources	Threads require fewer resources (are sometimes called lightweight processes)
No memory synchronisation needed	You need to use synchronisation mechanisms to be sure you're correctly handling the data

Figuur 78: Overzicht

9.3.1 Process

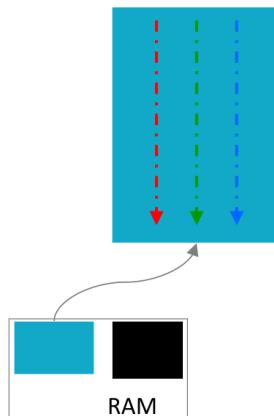


Figuur 79: Twee processen

Twee processen:

- Elk eigen geheugenruimte (virtual address space)
- Gescheiden code
- Data gescheiden
- CPU beslist welk proces uitgevoerd wordt

9.3.2 Thread



Figuur 80: 3 threads in 1 proces

- Zelfde geheugenruimte (virtual address space)
- Zelfde code wordt gedeeld
- Data kan gedeeld worden
- Voor elke thread: soort virtual CPU

2 types threads in python:

- User-level threads: eigen ontwikkelde threads

- Kernel-level threads: low-level threads veroorzaakt door operating system

9.4 De threading library

```

import threading
import time
from threading import Thread

def sleepMe(i):
    print(f"++Thread {i} started: {threading.current_thread()}")
    time.sleep(10)
    print(f"++Thread {i} is finished")

# main-thread afprinten
print(threading.main_thread())

for i in range(1,10):
    th = Thread(target=sleepMe, args=(i, ))
    th.start()
    print(f"\nCurrent Thread count: {threading.active_count()}.")

```

Figuur 81: De threading library

9.4.1 Thread aanmaken

```

1 # Via de constructor van de thread klasse
2 th = Thread(target=sleepMe, args=(i, ))

```

Mogelijke parameters:

- group: a special parameter which is reserved for future extension
- target: the callable object to be invoked by the run method(), if None: nothing will be started
- name: our threads name
- args: arguments tuple for target invocation, defaults to ()
- kwargs: dictionary keyword argument to invoke the base class constructor

9.4.2 Andere methods

```

1 # huidige thread wordt in slaaptoestand gebracht (voor x seconden)
2 time.sleep(x)
3 # geeft het aantal active threads weer
4 # Vergeet ook de main-thread niet mee te tellen
5 threading.active_count()
6 # Main-thread opvragen:
7 threading.main_thread()
8 # Overlopen van huidige threads:
9 print("Active threads:")
10 for thread in threading.enumerate():
11     print(f">Thread name is {thread.getName()}")

```

9.4.3 Timer

Uitvoeren van een thread na een specifieke tijd laten opstarten

```

1 import threading
2
3 def delayed():
4     print("I am printed after 5 seconds")
5
6 print("Demo timer")
7 thread = threading.Timer(5, delayed)
8 thread.start()
9 print("thread is opgestart")
10
11 # output:
12 > "Demo timer"
13 > "thread is opgestart"
14 > "I am printed after 5 seconds!"

```

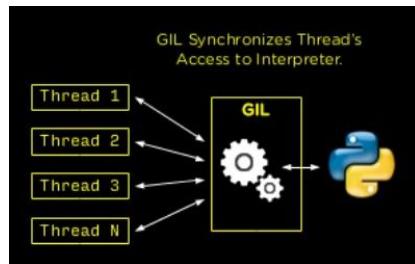
9.5 Multithreading

Veronderstelling dat meerdere threads 'gelijktijdig' uitgevoerd worden:

- Processing core switcht heel snel tussen de verschillende threads en geeft zo de impressie dat ze dat ze gelijktijdig plaatsvinden
- De keuze tussen de threads wordt bepaald door de context

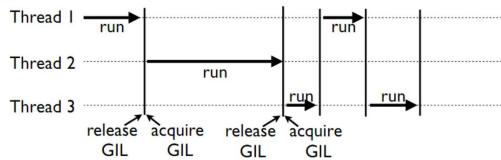
9.5.1 Python Thread Management

- Memory management is not thread-safe!
- Global Interpreter Lock (GIL):
 - Slechts 1 thread kan van de python interpreter gebruikmaken
 - Hierdoor kunnen python threads niet helemaal gelijktijdig uitgevoerd worden
 - GIL gaat dus de verschillende threads serialiseren naar de interpreter



Figuur 82: GIL

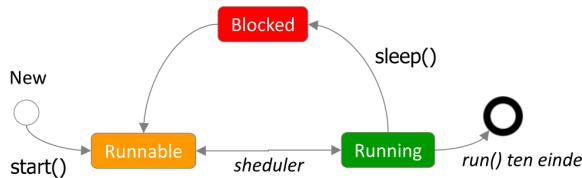
Elke thread dient een GIL-lock te verkrijgen:



9.6 Thread toestanden

Een thread kan in verschillende toestanden bevinden:

- Runnable state: thread is aangemaakt
- Running state: thread is gestart
- Blocked: sleeping, wachten tot een andere thread klaar is, wachten op data, ...



Figuur 83: Schema thread toestanden

9.7 Opgelet met threads!

- Een thread dat ten einde is, kan niet nogmaals uitgevoerd worden
- Python VM heeft geen thread management: het is niet mogelijk aan threads prioriteiten te hangen

9.8 Wanneer threads gebruiken?

- Bij I/O bound processing
- Beperkte CPU-intensieve operaties

9.9 Thread-class

9.9.1 Maken van een nieuwe thread-klasse

Werkwijze:

1. maak een klasse die erft van de `Thread` class
2. overschrijf de `__init__` methode: geef eventueel parameters langs deze weg door
3. overschrijf de `__run__` methode

```

1 class MyThread(threading.Thread):
2
3     def __init__(self, threadID, name, counter, delay):
4         threading.Thread.__init__(self)
5         self.threadID = threadID
6         self.name = name
7         self.counter = counter
8         self.delay = delay
9
10    def run(self):
11        print(f"Starting {self.name}")
12        while self.counter >= 0:
13            time.sleep(self.delay)
14            print(f"{self.name}: {time.ctime(time.time())} -> counter: {self.counter}")
15            self.counter -= 1
16        print(f"Exiting {self.name}")

```

Figuur 84: Voorbeeld MyThread-kLASSE

9.9.2 Opstarten van een thread

1. Maak een object van de thread-kLASSE
2. Voer de methode `start()` uit

```

1 # create threads
2 thread1 = MyThread(1, "Thread-1", 10, 1)
3 thread2 = MyThread(1, "Thread-1", 20, 2)
4
5 # start new threads
6 thread1.start()
7 thread2.start()

```

9.10 Threading-synchronisation

9.10.1 Join-methode

Laat toe op een bepaalde thread te wachten

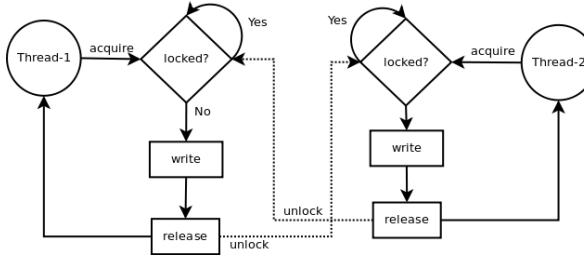
```

1 # create threads
2 thread1 = MyThread(1, "Thread-1", 10, 1)
3 thread2 = MyThread(1, "Thread-2", 20, 2)
4
5 # start new threads
6 thread1.start()
7 thread2.start()
8
9 thread1.join()
10 thread2.join()
11 print("Exiting Main thread")

```

9.10.2 Thread locking

Locking mechanisme: lock-objecten controleren de toegang tot een gemeenschappelijk data-object



Figuur 85: Schema 2 threads met locking

```

1 # Vooraf: thread-lock-object aanmaken
2 myThreadLock = threading.Lock()
3
4 # in de run-methode:
5 # - lock aanvragen
6 # - lock vrijgeven
7
8 def run(self):
9     print(f"Starting {self.name}")
10    while MyThread.global_counter >= 0:
11        myThreadLock.acquire()
12        print(f"{self.name}: {time.ctime(time.time())} -> counter: {MyThread.global_counter}")
13        MyThread.global_counter -= 1
14        myThreadLock.release()
15        time.sleep(self.delay)
16    print(f"Exiting {self.name}")

```

9.10.3 Condition

Condition mechanisme:

- Analoog als lock, maar nu verwittigen we ook andere threads
- Gebruikt in pattern: Producer/Consumer pattern

```

1 # condition object
2 condition = threading.Condition()
3
4 # gebruik op de juiste plaats:
5 def consumer(cond):
6     """ Wait for the condition and use the resource """
7     logging.debug("Starting consumer thread")
8     with cond:
9         cond.wait()
10        logging.debug("Resource is available to consumer")
11
12 def producer(cond):
13     """ Set up the resource to be used by the consumer """
14     logging.debug("Starting producer thread")
15     with cond:
16         logging.debug("Making resources available")

```

```
17     cond.notifyAll()
```

Uitvoering:

```
1 condition = threading.Condition()  
2  
3 c1 = threading.Thread(name='c1', target=consumer, args=(condition, ))  
4 c2 = threading.Thread(name='c2', target=consumer, args=(condition, ))  
5 p = threading.Thread(name='p', target=producer, args=(condition, ))  
6  
7 c1.start()  
8 time.sleep(0.2)  
9 c2.start()  
10 time.sleep(0.2)  
11 p.start()
```

Output:

```
1 2018-03-13 09:32:16,235 (c1) Starting consumer thread  
2 2018-03-13 09:32:16,435 (c2) Starting consumer thread  
3 2018-03-13 09:32:16,635 (p ) Starting producer thread  
4 2018-03-13 09:32:16,643 (p ) Making resources available  
5 2018-03-13 09:32:16,644 (c1) Resource is available to consumer  
6 2018-03-13 09:32:16,644 (c2) Resource is available to consumer
```

9.11 Daemon vs not-daemon threads

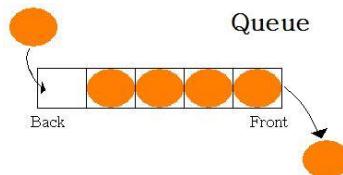
Tot nu toe: elke thread heeft dezelfde prioriteit

- Dit is niet steeds nodig: sommige threads mogen/kunnen onderbroken worden (zonder gevaar op verlies van data)
- Werkwijze: via methode set_daemon() op true plaatsen

9.12 Multithreaded queue

Een queue en threads kunnen heel nauw samenwerken met elkaar

9.12.1 Queue



Figuur 86: Queue

Method	Description
get()	It will give an item from the queue
put()	It adds an item to the queue.
qsize()	This method will return a total number of elements in the queue.
Empty()	If the queue is empty it will return true else false.
Full()	If the queue is full the method will return true else false.

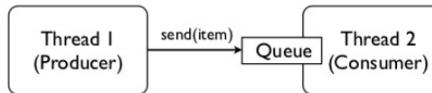
```

1  from Queue import Queue
2
3  q = Queue([maxsize])           # create a queue
4  q.put(item)                  # put an item on the queue
5  q.get()                      # get an item from the queue
6  q.empty()                    # check if empty
7  q.full()                     # check if full

```

9.12.2 Threading + queue

Threading is soms eenvoudiger indien ze in een producer/consumer model geplaatst worden. Ze geven data via een queue door aan elkaar.



- Voordeel: een queue heeft geen locks nodig.
- Heeft bovendien zijn eigen signaalmechanisme:

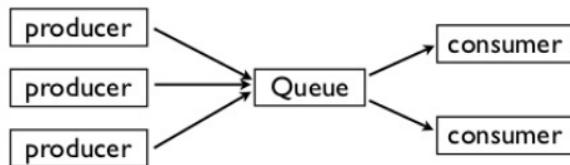
```

1  q.task_done()                 # signal that work is done
2  q.join()                      # wait for all work to be done
3
4  # in producer thread:
5  for item in produce_items():
6      q.put(item)
7  q.join()                      # wait for consumer
8
9
10 # in consumer thread:
11 while True:
12     item = q.get()
13     consume_item(item)
14     q.task_done()

```

9.12.3 Queue programming

Er zijn heel veel verschillende werkwijzen om een queue te integreren. Geen beperking in het aantal producers/consumers:



Figuur 87: Meerdere producers/consumers met een queue

10 Network Programming

10.1 Doelstelling

- Basisbegrippen in network programming kunnen definiëren
- Gebruik van sockets
- Networking - Socket Programming kunnen situeren & programmeren in Python

10.2 Basisbegrippen

10.2.1 Client-server programming

- Client-server is het omgekeerde van peer-to-peer
- Host machine = machine waarop de server draait
- Client connecteert naar server's host machine
- Server levert bepaalde services
- Client & server kunnen ook op 1 machine draaien

10.2.2 Poorten (ports)

- Eerder abstract concept: geen hardware
- Poort = een logische connectie naar een computer
- Identificeert zich met een nummer tussen 1 en 65535
- Netwerkprogrammeur zal explicet een poort van een machine refereren als er een server programma op draait
- Poortnummers tussen 1 en 1023: standard services
- Achter elke gebruikte poort schuilt dus een server programma, wachtend voor een request (aanvraag) als client connectie wil maken dan heeft het het overeenkomstig poortnummer van de service nodig

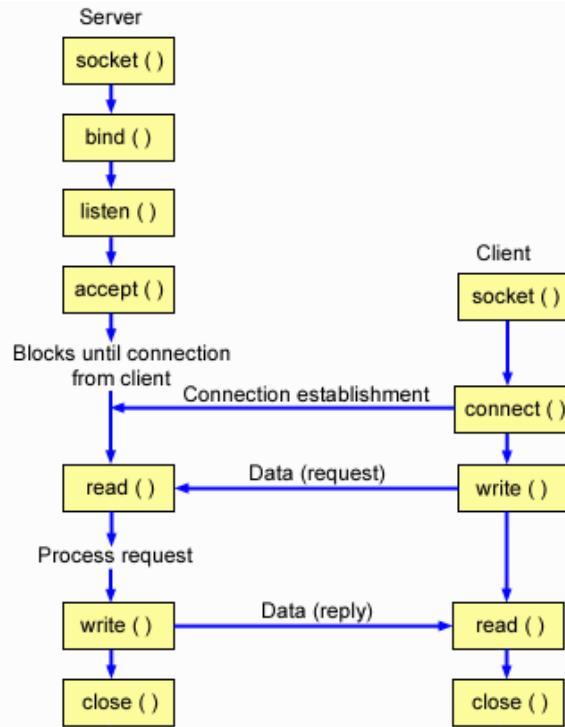
10.2.3 Sockets

= representeert een connectie tussen 2 applicaties

- Ook hier logisch abstract concept: geen hardware
- Wijst op één van de twee eindpunten van een communicatielink tussen twee processen

- client wil connectie \Rightarrow creeert hiervoor socket
- idem langs serverzijde: socket verzorgt communicatie met de client
- zo kan 1 poort geassocieerd worden met vele sockets

10.2.4 Client-server communicatie



Figuur 88: Stappenplan client-server communicatie

Een communicatielink gecreëerd via TCP-sockets is een connectie-georiënteerde link: de connectie tussen client & server blijft open gedurende de dialoog

Twee types processen:

- Server
- Client

Stappen:

1. aanmaken van een server socket: socket() + bind()
2. de serversocket doen luisteren naar connections: listen() + accept()
3. aanmaken van een socket door de client: socket()
4. verbinden met een server: connect()
5. data versturen en ontvangen: write() en read()
6. sockets sluiten: close()

10.3 Network programming in Python

10.3.1 Socket Module

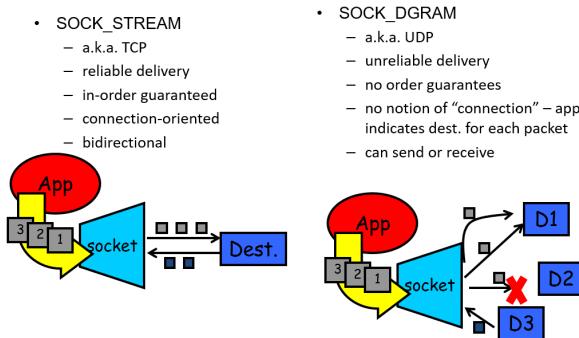
Creatie van een socket:

```
1 s = socket.socket (socket_family , socket_type , protocol = 0)
```

- socket_family = representeert the transport mechanism.
 - Vb: AF_INET: AF_INET gebruikt (host, port) waarbij host een string of IP-adres is, en port een integer is
- socket_type = dit is SOCK_STREAM (connection-oriented protocols) or SOCK_DGRAM (connectionless protocols)

TCP socket (SOCK_STREAM)	UDP socket (SOCK_DGRAM)
<ul style="list-style-type: none">• Connection oriented TCP• Reliable delivery• In-order guaranteed• Three way handshake	<ul style="list-style-type: none">• Connectionless UDP• Unreliable delivery• No-order guarantees• No notion of "connection"

- protocol = meestal niet gespecificeerd, standaard = 0



Figuur 89: Socket types

10.3.2 Serversocket opzetten

```
1 # create a socket object
2 serversocket = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_STREAM)
3
4 # get local machine name
5 host = socket.gethostname()
6 port = 9999
7
8 # bind to the port
9 serversocket.bind((host, port))
10
11 # queue up to 5 requests
12 serversocket.listen(5)
```

10.3.3 Serversocket laten wachten op connecties

We wachten tot we verbinding hebben met de client:

```
1 while True:  
2     logging.info("Waiting for a client")  
3  
4     # establish a connection  
5     socket_to_client, addr = serversocket.accept()  
6     logging.info("Got a connection from %s" % str(addr))
```

10.3.4 Clientsocket opzetten

```
1 logging.info("Making connection to server")  
2  
3     # create a socket object  
4     socket_to_server = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_STREAM)  
5  
6     # get local machine name  
7     host = socket.gethostname()  
8     port = 9999  
9  
10    # connection to hostname on the port  
11    socket_to_server.connect((host, port))
```

10.3.5 Communicatie tussen server & client

Bv: server communiceert 1 bericht terug naar de client

Server

```
1 while True:  
2     logging.info("Waiting for a client")  
3  
4     # establish a connection  
5     socket_to_client, addr = serversocket.accept()  
6     logging.info("Got a connection from %s" % str(addr))  
7  
8     # send a message to the client  
9     msg = 'Thank you for connecting' + "\r\n"  
10    socket_to_client.send(msg.encode('ascii'))  
11  
12    logging.info("Connection closed with client")  
13    socket_to_client.close()
```

Client

```
1 # receive no more than 1024 bytes:  
2 msg = socket_to_server.recv(1024)  
3 print(msg.decode('ascii'))
```



Figuur 90: Resultaat

10.3.6 Communicatie tussen server en client: lezen en schrijven naar een bestand

Server

```

1 while True:
2     logging.info("Waiting for a client")
3     # establish a connection
4     socket_to_client, addr = serversocket.accept()
5     logging.info("Got a connection from %s" % str(addr))
6
7     # opzetten van input en outputstreams
8     io_stream_client = socket_to_client.makefile(mode='rw')
9     io_stream_client.write("Thank you for connecting!\n")
10    io_stream_client.flush()
11
12    # connectie sluiten
13    logging.info("Connection closed with client")
14    socket_to_client.close()

```

Client

```

1 # connection to hostname on the port
2 socket_to_server.connect((host, port))
3
4 # opzetten van input en outputStreams
5 io_stream_server = socket_to_server.makefile(mode='rw')
6
7 # receive message from server
8 msg = io_stream_server.readline()
9 print(msg)
10
11 logging.info("Close connection with server")
12 socket_to_server.close()

```

11 Tkinter

11.1 Doelstelling

- Eenvoudige GUI opbouwen via de Tkinter library

11.2 Manieren om een GUI in Python te bouwen

- PyQt5
- Tkinter: provides a powerful object-oriented interface to the Tk GUI toolkit
- wxPython: an open source Python interface for wxWindows <http://wxpython.org/>

11.2.1 Tkinter: een goede start

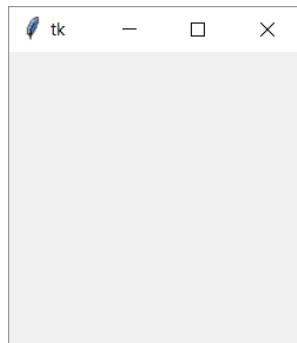
- <https://realpython.com/python-gui-tkinter/>
- https://www.python-course.eu/python_tkinter.php
- <https://pythonprogramming.net/python-3-tkinter-basics-tutorial/>

11.3 Tkinter: basisbegrippen

11.3.1 Start

- Importeer de Tkinter module
- Maak een GUI application main window
- Voeg 1 van de geschikte widgets toe aan de GUI applicatie
- Gebruik de main-event loop om weer te geven

```
1 import tkinter  
2  
3 top = tkinter.Tk()  
4 # << code to add widgets will go here ... >>  
5 top.mainloop()
```



Figuur 91: Basisvenster

11.3.2 Frame

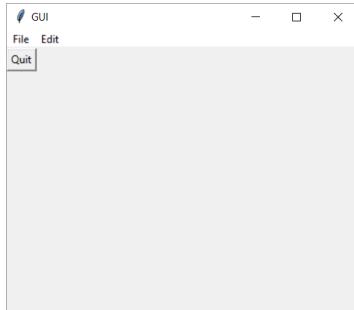
The frame widget is used as a container widget to organize other widgets

```
1 class Window(Frame):  
2     def __init__(self, master=None):  
3         pass # code here
```

```

5      # creation of init window
6      def init_window(self):
7          pass # code here
8
9      def client_exit(self):
10         pass # code here
11
12     def showImg(self):
13         pass # code here
14
15     def showText(self):
16         pass # code here
17
18 root = Tk()
19 root.geometry("400x300")
20 app = Window(root)
21 root.mainloop()

```



Figuur 92: Resultaat

11.3.3 Geometry management

- place = positions widgets at absolute locations
- grid = arranges widgets in a grid
- pack = pack widgets into a cavity

11.3.4 Beschikbare widgets

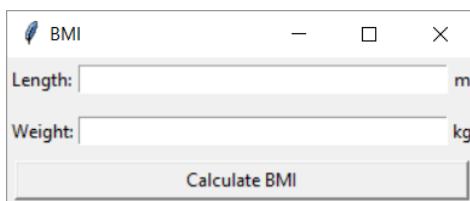
Button	Notebook
canvas	tk_optionMenu
checkbutton	panedwindow
combobox	progressbar
entry	radiobutton
frame	scale
label	scrollbar
labelframe	separator
listbox	sizegrip
menu	spinbox
menubutton	tekst
message	treeview

Figuur 93: Widgets

11.3.5 Top level windows

- tk_chooseColor - pops up a dialog box for the user to select a color.
- tk_chooseDirectory - pops up a dialog box for the user to select a directory.
- tk_dialog - creates a modal dialog and waits for a response.
- tk_getOpenFile - pops up a dialog box for the user to select a file to open.
- tk_getSaveFile - pops up a dialog box for the user to select a file to save.
- tk_messageBox - pops up a message window and waits for a user response.
- tk_popup - posts a popup menu.
- toplevel - creates and manipulates toplevel widgets.

11.4 Demo



Figuur 94: Resultaat van de demo

```
1 class Window(Frame):
2
3     def __init__(self, master=None):
4         Frame.__init__(self, master)
5         self.master = master
6         self.init_window()
7
8     #Creation of init_window
9     def init_window(self):
```

```

10      # changing the title of our master widget
11      self.master.title("BMI")
12      # self.master.geometry("400x300")
13
14      # allowing the widget to take the full space of the root window
15      self.pack(fill=BOTH, expand=1)
16
17      Label(self, text="Length:").grid(row=0)
18      Label(self, text="Weight:", pady=10).grid(row=1)
19
20      self.entry_length = Entry(self, width = 40)
21      self.entry_weight = Entry(self, width = 40)
22      self.entry_length.grid(row=0, column=1, sticky=E+W, pady=(5, 5))
23      self.entry_weight.grid(row=1, column=1, sticky=E+W)
24
25      Label(self, text="m").grid(row=0,column=2)
26      Label(self, text="kg", pady=10).grid(row=1,column=2)
27
28      self.buttonCalculate = Button(self, text="Calculate BMI" ,
29                                     command=self.calculateBmi)
30      self.buttonCalculate.grid(row=2, column=0, columnspan=3,
31                                pady=(0, 5), padx=(5, 5), sticky=N+S+E+W)
32
33      Grid.rowconfigure(self, 2, weight=1)
34      Grid.columnconfigure(self, 1, weight=1)
35
36
37  def calculateBmi(self):
38      try:
39          length = float(self.entry_length.get())
40          weight = float(self.entry_weight.get())
41          bmi = weight / (length * length)
42          messagebox.showinfo("BMI", "Your body mask index is %.2f" % bmi)
43      except:
44          messagebox.showinfo("BMI", "Something has gone wrong...")
45
46
47  root = Tk()
48  # root.geometry("400x300")
49  app = Window(root)
50  root.mainloop()

```

Zie andere demo's op leho.

12 Network & threading

12.1 Doelstelling

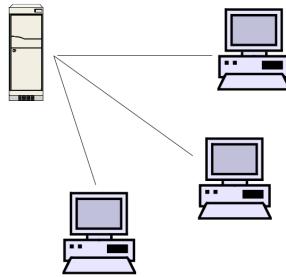
- Basisbegrippen in network programming kunnen definiëren
- Gebruik van sockets

- Networking - Socket Programming kunnen situeren & programmeren in Python

12.2 Multithreaded server

Tot nu toe is er een fundamentele beperking met de server die we geprogrammeerd hebben: er is maar 1 connectie met 1 client. Uiteraard is dit niet van toepassing op real-life voorbeelden uit de praktijk

Oplossing: Multithreaded server



Figuur 95: Multithreaded server

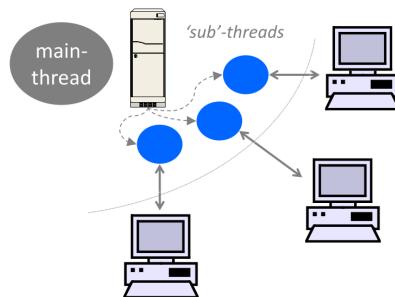
12.2.1 Basistechniek

De basistechniek is gebaseerd op een **twee-stappen proces**:

1. De main-thread alloceert individuele threads voor inkomende messages
2. De thread die instaat voor elke individuele thread, handelt elke interactie tss client en server

Gevolgen

- Main-thread mag ‘vergeten’ dat een client ingelogd is, omdat een andere thread de communicatie verder afhandelt.
- Main-thread mag weer wachten op nieuwe clients
- Indien er een probleem met één client is, heeft dit geen effect op de andere clients of op algemene service!



12.2.2 Werking in Python

Per client word een object van de klasse ClientHandler aangemaakt. Dit is een threadklasse: thread opstarten via start()

```

serversocket = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_STREAM)

# get local machine name
host = socket.gethostname()

port = 9999

# bind to the port
serversocket.bind((host, port))

# queue up to 5 requests
serversocket.listen(5)

while True:
    print("waiting for a client...")

    # establish a connection
    clientsocket, addr = serversocket.accept()
    print("Got a connection from %s" % str(addr))
    clh = ClientHandler(clientsocket)
    clh.start()
    print("Current Thread count: %i." % threading.active_count())

```

Figuur 96: De multithreaded server

```

class ClientHandler(threading.Thread):

    def __init__(self, socketclient):
        threading.Thread.__init__(self)
        self.socket_to_client = socketclient

    def run(self):
        io_stream_client = self.socket_to_client.makefile(mode='rw')
        print("waiting...")
        comando = io_stream_client.readline().rstrip('\n')
        while (comando != "CLOSE"):
            getall1 = io_stream_client.readline().rstrip('\n')
            print("Number 1: %s" % getall1)
            getall2 = io_stream_client.readline().rstrip('\n')
            print("Number 2: %s" % getall2)

            sum = int(getall1) + int(getall2)

            io_stream_client.write("%s\n" % sum)
            io_stream_client.flush()

            comando = io_stream_client.readline().rstrip('\n')

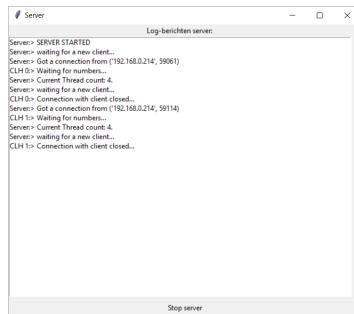
        print("Connection closed...")
        self.socket_to_client.close()

```

Figuur 97: ClientHandler klasse

- In constructor: socket meegeven
- Run-methode verzorgt alle communicatie met de client

12.3 GUI server



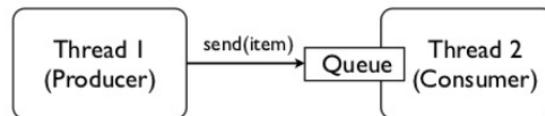
Figuur 98: Demo GUI server

12.3.1 Communicatie vanuit workerthreads naar GUI

- Oproepen van een GUI-functie vanuit worker-threads is **NIET** aanbevolen.
- Een GUI-functie is verantwoordelijkheid van de main-thread
- Oplossing: gebruik van een queue

Gebruik van een queue

- We laten de workerthreads een message-queue opvullen
- Binnen GUI server wordt deze queue geobserveerd, en de geplaatste berichten verwerkt:



- Bijkomend voordeel: geen GUI-methodes in worker threads

12.3.2 Demo netwerken 5

```
class ServerWindow(Frame):
    def __init__(self, master=None):
        Frame.__init__(self, master)
        self.master = master
        self.init_window()
        self.init_messages_queue()
        self.init_server()

    # Creation of init_window
    def init_window(self):...

    def init_server(self):
        # server - init
        self.server = SommenServer(socket.gethostname(), 9999, se

    def afsluiten_server(self):...

    def print_messages_from_queue(self):
        message = self.messages_queue.get()
        while message != "CLOSE_SERVER":
            self.lstnumbers.insert(END, message)
            self.messages_queue.task_done()
            message = self.messages_queue.get()
        print("queue stop")

    def init_messages_queue(self):
        self.messages_queue = Queue()
        t = Thread(target=self.print_messages_from_queue)
        t.start()
```

Figuur 99: De ServerWindow klasse

```
class ClientHandler(threading.Thread):

    numbers_clienthandlers = 0

    def __init__(self, socketclient, messages_queue):
        threading.Thread.__init__(self)
        #connectie with client
        self.socketclient = socketclient
        #message queue -> link to gui server
        self.messages_queue = messages_queue
        #id clienthandler
        self.id = ClientHandler.numbers_clienthandlers
        ClientHandler.numbers_clienthandlers += 1
```

Figuur 100: De ClientHandler klasse

13 Objectserialisation

13.1 Doelstelling

- Bespreken wat serialisatie betekent en context kunnen schetsen

- Gerealiseerde objecten kunnen wegschrijven naar File
- Objecten kunnen inlezen vanuit File
- Hoe vermijden we dat attribuut meegeserializeerd wordt?

13.2 Uitgangssituatie

Tijdens het runnen van een programma:

- Meerdere objecten worden gecreëerd
- Objecten worden verder uitgebred

Het aanmaken van deze objecten vraagt tijd. Vaak is er veel info nodig om de objecten te creëren.
Hoe kunnen we objecten bewaren?

Mogelijke oplossingen zijn:

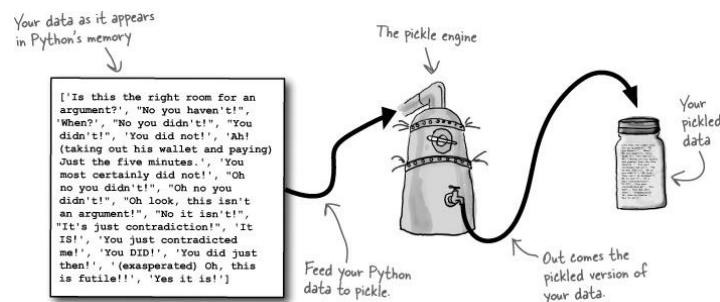
1. Info uit objecten als text in File wegschrijven: zie vroeger (File I/O)!
2. Objecten bewaren in File = serialiseren van objecten.

13.3 Serialiseren in Python: de Pickle library

The pickle module implements binary protocols for serializing and de- serializing a Python object structure. 'Pickling' is the process whereby a Python object hierarchy is converted into a byte stream, and 'unpickling' is the inverse operation, whereby a byte stream (from a binary file or bytes-like object) is converted back into an object hierarchy. Pickling (and unpickling) is alternatively known as 'serialization', 'marshalling', [1] or 'flattening'; however, to avoid confusion, the terms used here are 'pickling' and 'unpickling'.

<https://docs.python.org/3/library/pickle.html>

13.3.1 Pickling



Figuur 101: Pickling

```

1 import pickle
2
3 dict = {1: 'mct', 2: 'ipo', 3: 'devine', 4: 'dae'}
4 print(dict)
5
6 my_writer_obj = open('data.txt', mode='wb')

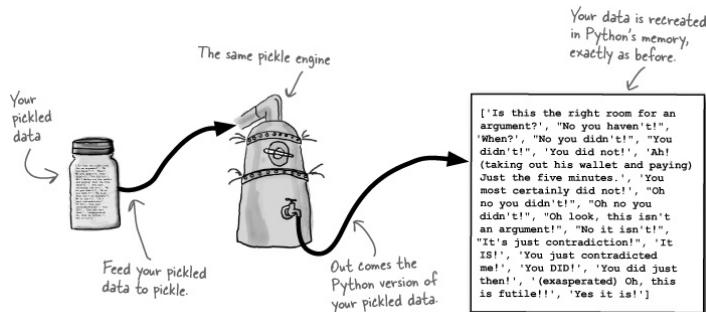
```

```

7 pickle.dump(dict, my_writer_obj)
8 my_writer_obj.close()

```

13.3.2 Unpickling



Figuur 102: Unpickling

```

1 my_writer_obj = open('data.txt', mode='rb')
2 dict_howest = pickle.load(my_writer_obj)
3 print(dict_howest)

```

Met eigen klasse(s) analoog. Klasse student erft van klasse Persoon.



Figuur 103: Pickling & Unpickling

13.3.3 Wat kan pickled en unpickled worden?

De volgende types kunnen worden gepickled:

- None, True en False
- integers, floating point numbers
- strings, bytes, bytearrays
- tuples, lists, sets, dictionaries met pickleable objects
- functies gedefinieerd 'at the top level' van een module (dus geen lambdas)
- ingebouwde functies at top level
- klassen die gedefinieerd zijn at top level

- instanties van zo'n klassen waarvan `__dict__()` of het resultaat van `__getstate__()` pickleable is

13.3.4 Pickle: valkuilen

Wat met klasse-attributen? (zie demo)

"When a class instance is unpickled, its `__init__()` method is usually not invoked. The default behaviour first creates an uninitialized instance and then restores the saved attributes."

```

1 import pickle
2
3 from data.Persoon import Persoon
4
5 my_writer_obj = open("student.txt", mode='rb')
6 s1 = pickle.load(my_writer_obj)
7 my_writer_obj.close()
8
9 # test
10 print(s1)
11 print("Aantal objecten klasse Persoon: %d" % Persoon.geef_aantal_personen())
12
13 # output:
14 >> Student COLPAERT, Barbara (2018)
15 >> Aantal objecten klasse Persoon: 0

```

Oplossing: overschrijf de methode `__getstate__()` of `__setstate__()` in dataklasse:

- `__getstate__()` = classes can further influence how their instances are pickled
- `__setstate__(state)` = upon unpickling, if the class defines `__setstate__()`, it is called with the unpickled state

```

1 def __setstate__(self, state):
2     # restore instance attributes
3     self.__dict__.update(state)
4     Persoon.__aantal_personen += 1

```

13.4 Library jsonpickle

jsonpickle is a Python library for serialization and deserialization of complex Python objects to and from JSON.

<https://jsonpickle.github.io/>

Voordelen:

- Snel
- Human readable
- Geen beveiligingsproblemen
- Kan geparsen worden door alle programmeertalen

Pickle is traag, onveilig, en kan alleen in Python geparsed worden. Het enige voordeel van pickle is dat het arbitraire Python objecten kan serialiseren, terwijl beide JSON en MessagePack limieten hebben op welke data ze kunnen uitschrijven.

```
import jsonpickle
from data.Person import Person
from data.Student import Student

student = Student("Colpaert", "Barbara", 19931252, "IPO", 2018)
print(student)

my_writer_obj = open("student.txt", mode='w')
json_data = jsonpickle.encode(student)
print(json_data)
my_writer_obj.write(json_data)
my_writer_obj.close()

["py/object": "data.Student.Student", "Person_geboortejaar": 2018,
"Person_naam": "Colpaert", "Person_voornaam": "Barbara",
"Student_opleiding": "IPO", "Student_studentnummer": 19931252}
```

Opslaan object

```
import jsonpickle
from data.Person import Person
my_writer_obj = open("student.txt", mode='r')
json_data = my_writer_obj.read()
print(json_data)
print(type(json_data))

#convert json-data --> Person
student = jsonpickle.decode(json_data)
print(student)
print(type(student))

Student COLPAERT, Barbara (2018)
<class 'data.Student.Student'>
```

Ophalen object

Figuur 104: Jsonpickle

Pickle vs jsonpickle: <https://www.benfrederickson.com/dont-pickle-your-data/>

13.5 Serialiseren in Python: toegepast in Networking

13.5.1 Demo

(zie demo_networking.zip)

De demo is herwerkt zodat tussen client en clienthandler(server) objecten van eigen klasse(s) worden heen en weer gestuurd.

1. List met objecten van de klasse Som wordt langs clientside klaargezet
2. Clienthandler ontvangt de list, en berekent 1 voor 1 de sommen
3. Dezelfde list wordt naar de client teruggestuurd

Voor demo's met pickle, zie demo 6 & 7.

Voor demo's met jsonpickle, zie demo 8.

14 Matrices

14.1 Wat is matrix?

- Een tweedimensionale array van getallen
- Bestaat uit rijen en kolommen
- 4 rijen bij 3 kolommen: 4 bij 3 matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Een matrix is een rechthoekig getallenschema, getallen geordend in rijen en kolommen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ met } A \in \mathbb{R}^{2x3} = \text{matrix met 2 rijen, 3 kolommen}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ met } b \in \mathbb{R}^{4 \times 2} = \text{matrix met 4 rijen, 2 kolommen}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ met } C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} = \text{matrix met 2 rijen, 2 kolommen}$$

14.1.1 Voorstellen van een matrix

Door middel van subscriptnotatie: a_{ij} = element op de i^{de} rij, j^{de}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

14.1.2 Soorten matrices

Vierkante matrix: $m = n$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & \sqrt{2} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Rijmatrix: $m = 1$

$$B = [1 \quad -1 \quad -3 \quad 8 \quad -6 \quad 7]$$

Kolommatrix: $n = 1$

$$C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nulmatrix: alle $a_{ij} = 0$

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hoofddiagonaal van een matrix = $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$

Eenheidsmatrix I: vierkante matrix met overal 0, behalve 1 op de hoofddiagonaal:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14.1.3 Gelijke matrices

Twee matrices zijn gelijk als:

- ze dezelfde afmetingen hebben
- de corresponderende elementen gelijk zijn

14.2 Som & verschil

- Als je twee matrices wil optellen/aftrekken, moeten de matrices dezelfde dimensie hebben:
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\begin{aligned}
A \pm B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} & \dots & a_{3n} \pm b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \\
A \pm B &\in \mathbb{R}^{m \times n}
\end{aligned}$$

14.2.1 Voorbeelden

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -5 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & -6 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

14.3 Scalair veelvoud

We vermenigvuldigen elk element in de matrix met een scalair λ

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot A &= \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}, \\
\lambda \cdot A &\in \mathbb{R}^{m \times n}
\end{aligned}$$

14.3.1 Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -3$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 & -3 \\ -3 & -21 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

14.4 Eigenschappen matrix operaties

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{R}$

14.4.1 Commutativiteit

$$A + B = B + A$$

14.4.2 Associativiteit

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

14.4.3 Neutraal element = $O_{m \times n}$

$$A + O_{m \times n} = A = O_{m \times n} + A$$

14.4.4 Eigenschappen met scalaire veelvoud

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$A(\mu B) = \mu(AB)$$

14.5 Getransponeerde matrix

Een getransponeerde matrix A^T is een matrix waarbij we rijen en kolommen matrix verwisselen

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T \in \mathbb{R}^{nxm}$$

14.5.1 Voorbeelden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{pmatrix}$$

14.5.2 Eigenschappen

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

14.6 Vermenigvuldigen van matrices

Gegeven matrix A en matrix B waarbij $A \in \mathbb{R}^{r \cdot c}$ en $B \in \mathbb{R}^{s \cdot d}$

A en B kunnen vermenigvuldigd worden als:

- het aantal kolommen van A moet gelijk zijn aan het aantal rijen van B

De dimensie van de resulterende matrix is:

- (het aantal rijen van A) x (het aantal rijen van B)

14.6.1 Wiskundig

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} [2 \times 2] \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} [2 \times 3]$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix} [2 \times 3]$$

14.6.2 Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} (1 \times 0 + 2 \times 6 + 0 \times -3) & (1 \times -2 + 2 \times 2 + 0 \times -1) & (1 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 7) \\ (-4 \times 0 + 1 \times 6 + 5 \times -3) & (-4 \times -2 + 1 \times 2 + 5 \times -1) & (-4 \times 1 + 1 \times 0 + 5 \times 7) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 \\ -9 & 5 & 31 \end{pmatrix}$$

14.6.3 Eigenschappen

- Geen commutativiteit: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Nuldelers: x heet een nuldeler als $x \neq 0$ en er bestaat y zodat $xy = 0$ of $yx = 0$

Voorbeeld nuldeler:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ is een nuldeler omdat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Macht van een matrix:
 - Voorbeeld: $A^3 = A \cdot A \cdot A$
 - Enkel mogelijk bij vierkante matrices
- Transponeren: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- Eenheidsmatrix I_n is neutraal element: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Extra toelichting: <https://www.youtube.com/watch?v=HmngGKVzdic>

14.7 Determinant van een matrix

= een speciaal getal dat kan worden berekend uit de elementen van een matrix

14.7.1 Notatie

De determinant van een **vierkante matrix** wordt aangeduid met:

$\det(A)$ of $|A|$

14.7.2 Toepassingen:

- Oplossen van lineaire stelsels
- Testen van inverteerbaarheid van een matrix

14.7.3 Berekenen van de determinant

- Bij 1×1 -matrix: het getal in de matrix = de determinant
- Bij 2×2 -matrix:

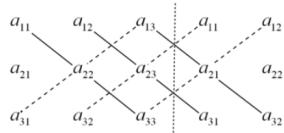
$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

- Bij een 3×3 -matrix:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

14.7.4 Berekenen van de determinant: 2de methode (makkelijker)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



14.8 Inverse matrix

14.8.1 Notatie

- Voor een getal: $\ln \mathbb{R} : ab = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a} = a^{-1}$
- Voor een matrix: $\ln \mathbb{R}^{n \times n} : AB = I_n \Leftrightarrow B = A^{-1}$

Als er zo'n inverse bestaat zodat $AB = I_n = BA$ dan noemen we B de inverse matrix van A

14.8.2 Voorwaarden voor het bestaan van een inverse matrix

- Matrix is vierkant
- De determinant is verschillend van 0
 - $\det(A) \neq 0$ dan is A **regulier** en A^{-1} bestaat
 - $\det(A) = 0$ dan is A **singulier** en A^{-1} bestaat niet

14.8.3 Berekenen van inverse matrix

Door middel van **rij-operaties**:

1. We voegen de matrix A samen met de eenheidsmatrix I_n . Dan bekomen we: $(A|I_n)$
2. Via rij-operaties op de samengevoegde matrix reduceren we de matrix tot we aan de linkerkant de eenheidsmatrix bekomen
3. Aan de rechterkant bekomen we de inverse matrix A^{-1}

$(A|I_n) \xrightarrow{\text{rij-operaties}} (I_n|A^{-1})$

Toegelaten rij-operaties:

- Rijen wisselen
- Rij vermenigvuldigen met een getal
- Rijen optellen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Figuur 105: Rij-operaties

14.8.4 Snelle methode voor inverse matrix van 2x2 matrix

Algemene formule 2x2 matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

14.8.5 Eigenschappen inverse matrix

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

14.9 Toepassingen

14.9.1 Oplossen van stelsels

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{matrix-notatie}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot T$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot T$$

$$X = A^{-1} \cdot T$$

15 Eigenwaarden en eigenvectoren

15.1 Toepassing bij machine learning?

PCA (Principal Component Analysis):

- gegeven: grote dataset van meetgegevens van talrijke parameters
- probleem: heel moeilijk/lastig om verbanden te zien
- daarom: dataset gaan reduceren tot de meest essentiële parameters.
- gevolg: het is een manier voor datareductie met beperkt verlies aan informatie.

15.2 Eigenwaarden en eigenvectoren

v is een eigenvector van de matrix A :

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \quad (45)$$

Met λ een constante = de **eigenwaarde** van de matrix A

Kortom:

- het resultaat van $A \cdot v$ is een veelvoud van de vector v die je gebruikt hebt.
- v wordt door A op een veelvoud van zichzelf ('een veelvoud van zijn eigen') afgebeeld
- Je reduceert de matrix
- We gaan op zoek naar v en λ
- Nulvector wordt steeds op zichzelf afgebeeld, en wordt daarom niet als eigenvector aanvaard
- De eigenwaarde kan wel 0 zijn

15.2.1 Voorbeelden

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ eigenvector } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ eigenwaarde } \lambda = 2 \text{ want}$$

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figuur 106: Voorbeeld 1. $\lambda = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ eigenvector } v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ eigenwaarde } \lambda = 0 \text{ want}$$

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Figuur 107: Voorbeeld 2: A heeft nog een eigenvector. $\lambda = 0$

15.2.2 Rekenregel

Als v_1 en v_2 beiden eigenvectoren van A zijn met dezelfde eigenwaarde λ , dan is elke lineaire combinatie $a \cdot v_1 + b \cdot v_2$.

λ bepaalt dus een deelruimte ('eigenruimte') die bestaat uit eigenvectoren en de nulvector.

15.2.3 Terugvinden van eigenwaarden en eigenvectoren

Voorwaarde:

Als $|A - \lambda I| = 0$, dan is er een eigenvector $v (\neq 0)$ zodat $(A - \lambda I) \cdot v = 0$. I = eenheidsmatrix.

- $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow$ karakteristieke vergelijking
- Extra toelichting: <https://www.youtube.com/watch?v=NetdsJohezI>

15.2.4 Voorbeeld berekening eigenvector

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan is } A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)2 - (1-\lambda)2 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

De eigenwaarden zijn resp. 1, 3 en -1

Figuur 108: Berekenen van de eigenwaarden

Voor eigenvector bij $\lambda = 1$ krijg je door op te lossen: $(A - \lambda I)v = 0$

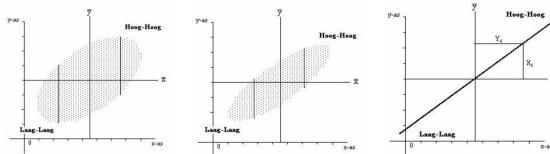
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ waardoor } v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Figuur 109: Berekening van elk van de eigenvectoren. Analoog voor $\lambda = -1$ en $\lambda = 3$

15.3 Covariantie

- **Standaardafwijking:** maat voor de spreiding van 1 variabele
- **Covariantie:** maat voor de spreiding van 2 variabelen
- **Correlatie:** idem, maar is een gestandardiseerde maat: het resultaat ligt tussen -1 en 1. Dit laat vergelijking meer toe
- <https://www.youtube.com/watch?v=FPEXZ991MuE>

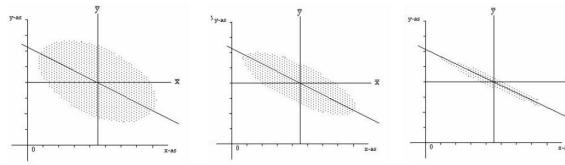
15.3.1 Covariantie: positieve samenhang



Figuur 110: Matig positieve covariantie: punten vooral in hoog-hoog/laag-laag kwadranten

- Hoe meer punten in het ‘hoog-hoog’ en ‘laag-laag’ kwadrant, hoe groter de positieve samenhang.
- Als alle punten $(x_i; y_i)$ op één lijn liggen, is de correlatie tussen x en y perfect.

15.3.2 Covariantie: negatieve samenhang



Figuur 111: Matig negatieve covariantie: punten vooral in hoog-laag/laag-hoog kwadranten

- Hoe meer punten in het ‘hoog-laag’ en ‘laag-hoog’ kwadrant, hoe groter de negatieve samenhang.

15.3.3 Wiskundig

De covariantie zegt iets over de richting van het lineair verband en wordt als volgt berekend:

$$S_{xy} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \quad (46)$$

met:

- \bar{x} en \bar{y} = de gemiddelden
- N of $N - 1$: populatie of steekproef
- **Opgelot:** covariantie gaat op zoek naar een **lineair** verband!

15.3.4 Covariantie tussen meer dan 2 variabelen

Wordt gegeven in een covariantiematrix:

$$\begin{bmatrix} V_a & C_{a,b} & C_{a,c} & C_{a,d} & C_{a,e} \\ C_{a,b} & V_b & C_{b,c} & C_{b,d} & C_{b,e} \\ C_{a,c} & C_{b,c} & V_c & C_{c,d} & C_{c,e} \\ C_{a,d} & C_{b,d} & C_{c,d} & V_d & C_{d,e} \\ C_{a,e} & C_{b,e} & C_{c,e} & C_{d,e} & V_e \end{bmatrix}$$

- Op hoofddiagonaal: de varianties
- Op andere posities: de covarianties
- <https://www.youtube.com/watch?v=9H-dcZ01Y5I>

15.3.5 Correlatiecoëfficiënt

Wens je de sterkte te achterhalen, dan dien je ook de correlatiecoëfficiënt te bepalen:

$$R(x, y) = \frac{cov(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (47)$$

- Bij $R = -1$: perfect negatief lineair verband

- Bij $R = 1$: perfect positief lineair verband
- Bij $R = 0$: geen correlatie

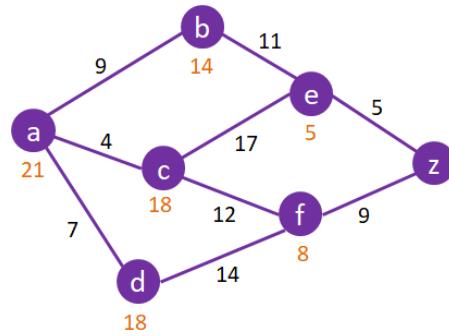
16 Zoekalgoritmen in grafen

16.1 Doelstelling

- Begrippen definiëren in grafentheorie
- Kortste-pad algoritme van Dijkstra
- Kortste-pad algoritme A*
- Toepassing van A* algoritme

16.2 Wat is een zoekalgoritme

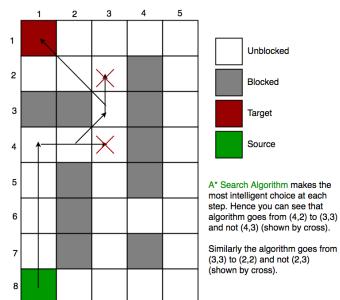
Doele: zoektocht naar eindbestemming via het kortste pad van a naar z



Figuur 112: Elke verbinding heeft een bepaald ‘gewicht’, bv: de tijd om de verbinding te doorlopen

16.2.1 A* (A-star)

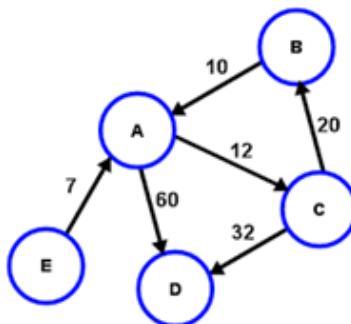
Het A* zoekalgoritme is een van de meest populaire zoekalgoritmes voor het vinden van het kortste pad tussen nodes



16.3 Grafen terminologie

16.3.1 Basisterminologie

- Een graaf G bestaat uit een verzameling knopen (nodes) V en een verzameling bogen (transitions, edges) E
- $G = (V, E)$
- **Orde** van een graaf = aantal knopen in een graaf: $|V|$
- **Grootte** van een graaf = aantal bogen $|E|$
- Een boog is een paar (v, w) waarbij v en w nodes uit V zijn
- Een boog kan een **kost** hebben.
 - Als de bogen een kost hebben: **gewogen graaf**.
 - Indien geen kost: **ongewogen graaf**.
- Een boog kan een richting hebben (pijlpunt)
 - Als ze gericht zijn: **gerichte graaf**
 - Indien niet: **Ongerichte graaf**

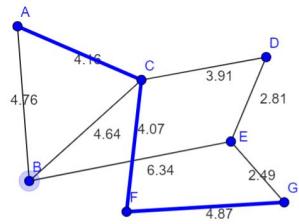


Figuur 113: Gewogen, gerichte graaf

16.3.2 Pad

Definitie 16.1 *Een pad is een reeks van knopen die verbonden zijn*

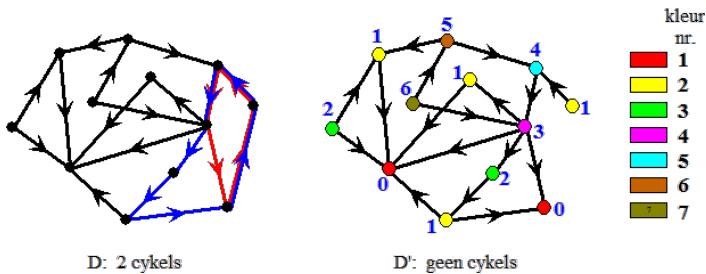
- *De ongewogen lengte van het pad = aantal bogen op het pad*
- *De gewogen lengte van het pad = som van de kosten van de bogen*
- *'Enkelvoudig' pad = pad waarbij alle knopen verschillend zijn (met eventueel uitzondering van eerste en laatste)*



Figuur 114: Pad

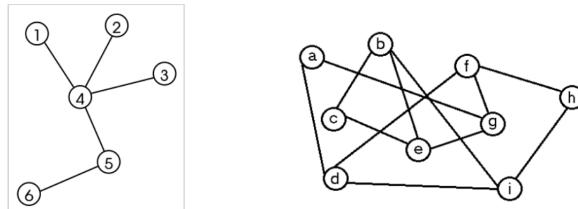
16.3.3 Cykel

Definitie 16.2 Een cykel is een pad met lengte groter dan 0 waarbij begin- en eindknoop hetzelfde zijn



16.3.4 Enkelvoudige graaf

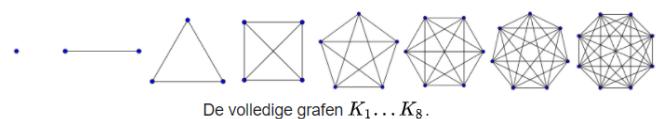
Definitie 16.3 Een graaf wordt enkelvoudig genoemd als de graaf niet meer dan 1 boog tussen 2 knopen en geen lussen heeft



Figuur 115: Enkelvoudige grafen

16.3.5 Volledige graaf

Definitie 16.4 Een graaf met n knopen noemen we een volledige graaf K_n als alle knopen onderling verbonden zijn



16.4 Visualisatie: datastructuren voor grafen

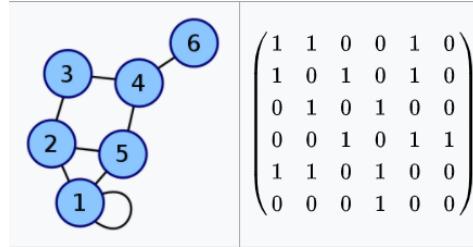
Voorstellen van een graaf kan een enorme impact hebben op de performantie van een algoritme.
Twee basiskeuzes:

- Matrix (adjacentiematrix): tweedimensionale array
- List (adjacentielijst)

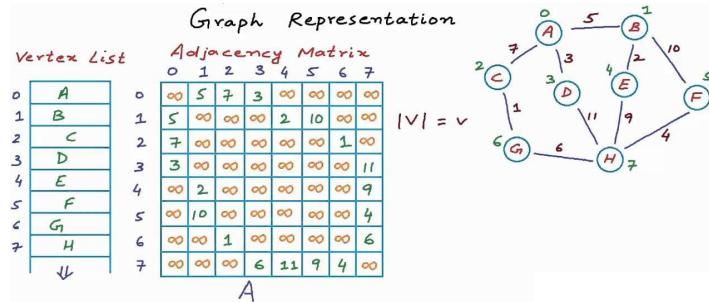
16.4.1 Adjacentiematrix

= tweedimensionale array

- Elke boog $(v, w) \rightarrow a[v][w] = \text{kost van boog}$
 - Ongewogen graaf: $a[v][w] = 1$
- Indien geen boog: $a[v][w] = \text{inf}$
- Ongewogen graaf: $a[v][w] = 0$



Figuur 116: Voorbeeld



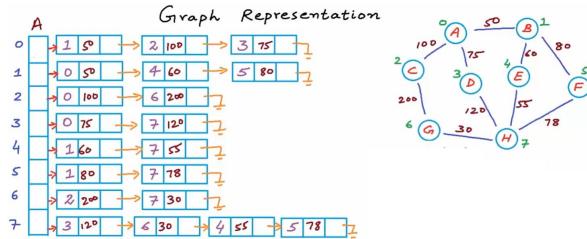
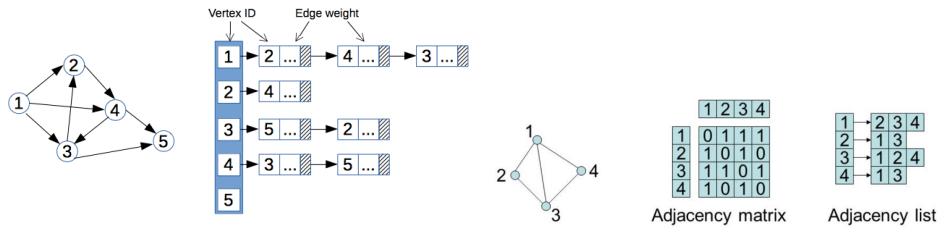
Figuur 117: Voorbeeld

Initialiseren:

Eerst alle elementen op inf of 0, daarna alle bogen inlezen en overeenkomstige elementen aanpassen

16.4.2 Adjacentielijst

- De knopen worden bijgehouden in een array
- Voor elke knoop houden we een afzonderlijk (geschakelde) list bij waarmee deze verbonden is.



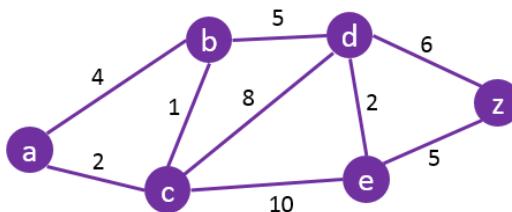
Figuur 118: Voorbeeld

16.5 Kortste-pad probleem

Onderscheid tussen:

- Ongewogen kortste pad: pad tussen twee knopen met minimum aantal bogen
- Gewogen kortste pad: pad tussen twee knopen met minimum som van kosten van de bogen
 - Algoritme van Dijkstra
 - A* algoritme

16.5.1 Dijkstra



Figuur 119: Voorbeeld: gezocht kortste afstand van A tot Z. Tussen 2 knopen = afstand van de weg

Werking:

- zie les
- <https://www.101computing.net/dijkstras-shortest-path-algorithm/>

Afstand g: korste afstand tot aan startknoop

A: Startknoop

Maak een lege lijst 'verwerkte_knopen' aan

Maak een lijst 'te_onderzoeken_knopen' aan, en plaats A daarin.

Zolang de lijst 'te_onderzoeken_knopen' niet leeg is:

Stap 1: Haal de (kleinste) knoop X uit lijst 'te_onderzoeken' (kleinste waarde g)
Controleer of deze niet de eindknoop is

Indien eindknoop: algoritme is ten einde

Stap 2: bepaal de buren van X

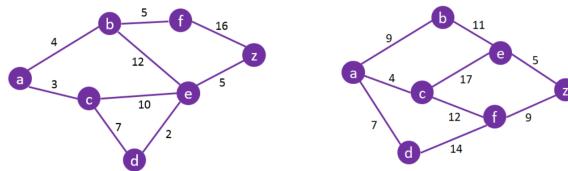
Stap 3: overloop elke buur van X:

- bereken g-afstand = g-waarde van X + padlengte X naar buur
- controleer of buur in de lijst 'te_onderzoeken_knopen' al aanwezig is
 - o Ja, maar met een kleinere g: stop, ga naar volgende buur
 - o Ja, maar met een grotere g:
 - pas g en parent aan,
 - o Nee, voeg toe aan de lijst 'te_onderzoeken_knopen'
 - Stel g en parent in

Stap 4: plaats X in de lijst 'verwerkte_knopen'

Reconstrueer het pad vertrekende van de eindnode tot A (gebruik de parent-eigenschap)

Figuur 120: Werking van het algoritme

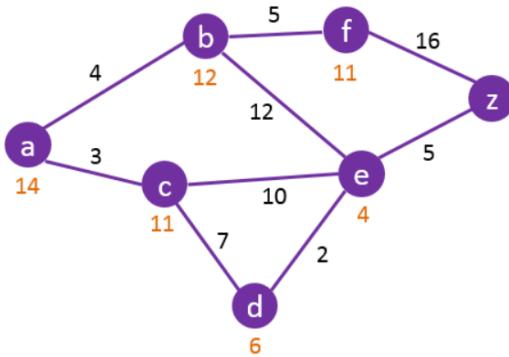


Figuur 121: 2 oefeningen

16.5.2 A-star algoritme

- Meest succesvolle algoritme om een kortste pad terug te vinden.
- Er wordt constant gebruik gemaakt van:
 - Kortste pad tot de onderzochte knoop → $g(n)$
 - Schatting tot de eindknoop: → $h(n)$

In knoop n geldt dat: $f(n) = g(n) + h(n)$



Figuur 122: Bij elke knoop staat ook de afstand in vogelvlucht tot Z

- De afstand in vogelvlucht noemen we ook de heuristic

<https://www.101computing.net/a-star-search-algorithm/>

A: Startknoop

Maak een lege lijst 'verwerkte_knopen' aan

Maak een lijst 'te_onderzoeken_knopen' aan, en plaats A daarin.

Zolang de lijst 'te_onderzoeken_knopen' niet leeg is:

Stap 1: Haal de (kleinste) knoop X uit lijst 'te_onderzoeken' (kleinste waarde f)
Controleer of deze niet de eindknoop is

Indien eindknoop: overloop de lijst met te_onderzoeken_knopen

Is er een knoop met afstand f kleiner dan deze van eindknoop?

Ja: Ga verder naar stap 2 met deze knoop

Nee: algoritme is ten einde

Stap 2: bepaal de buren van X

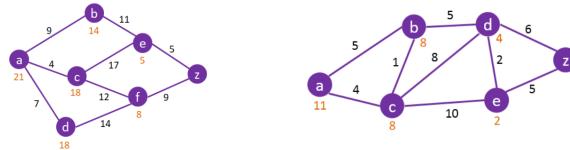
Stap 3: overloop elke buur van X:

- bereken g-afstand = g-waarde van X + padlengte X naar buur
- controleer of buur in de lijst 'te_onderzoeken_knopen' al aanwezig is
 - o Ja, maar met een kleinere g: stop, ga naar volgende buur
 - o Ja, maar met een grotere g:
 - pas g en parent aan,
 - pas ook de f-afstand aan = g + heuristiek
 - o Nee, voeg toe aan de lijst 'te_onderzoeken_knopen'
 - Stel g en parent in
 - bereken de f-afstand = g + heuristiek

Stap 4: plaats X in de lijst 'verwerkte_knopen'

Reconstrueer het pad vertrekende van de eindnode tot A (gebruik de parent-eigenschap)
Lengte pad = f-afstand van de eindknoop

Figuur 123: Werking van het algoritme

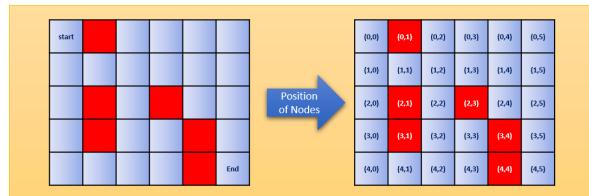


Figuur 124: 2 oefeningen

16.5.3 Programmeren van het A* algoritme

Wat hebben we nodig?

- klasse Node
 - Properties voor de getalwaarden g , h , en f
 - Property dat de dichtste parent bijhoudt
- Lijst met gesloten nodes die reeds bezocht zijn
- Gesorteerde lijst met nodes die moeten onderzocht worden (sorteren op totale afstand f)



Figuur 125: A* is heel handig om de kortste weg rond obstakels te vinden

17 Geavanceerde Pandas functionaliteit

17.1 Doelstelling

- Gebruik van Lambda-expressions
- Gebruik van iterators

17.2 Lambda expressions in Python

17.2.1 Lambda functions

Functies kunnen verkort genoteerd worden via het keyword 'lambda':

```
1 raise_to_power = lambda x, y: x ** y
2 raise_to_power(2,3)
```

17.2.2 Anonymous functions

Python ondersteunt concept van anonieme functies (functies zonder naam) at runtime, via label 'lambda'.

Lambda functies zijn vooral handig in combinatie met andere functies zoals filter(), map() and reduce(). Zoek zelf eens op wat deze functies doen.

Voorbeeld: Map

De functie map heeft 2 parameters:

- Function
- Sequentie van waarden

Map voert de functie over alle elementen van de sequentie uit

```
1 nums = [48, 6, 9, 21, 1]
2
3 square_all = map(lambda num: num ** 2, nums)
```

Opmerking: Map geeft een map-object terug

17.2.3 Voorbeelden lambda-functions

```
1 som = lambda x, y : x + y
2 print(som(2,3))
3 > 5
4
5 alist = [0, 1, 2, 3, 4]
6 result = map(lambda num: num * 6, alist)
7 print(list(result))
8 > [0, 6, 12, 18, 24]
9
10 koord = " het was een zeer lange dag op kantoor"
11 result = map(lambda x: len(x), koord.split())
12 print(list(result))
13 > [3, 3, 3, 4, 5, 3, 2, 7]
14
15 echo_word = (lambda word, echo: word * echo)
16 # call echo_word: result
17 result = echo_word('hey', 5)
18 print(result)
19 > heyheyheyheyhey
20
21 koord = " het was een zeer lange dag op kantoor"
22 result = filter(lambda x: len(x) > 3, koord.split())
23 print(list(result))
24 > ['zeer', 'lange', 'kantoor']
```

17.3 Iterable, Enumerate

17.3.1 Enkele handige methodes

- iter()
- enumerate()
- zip()

- ...

17.3.2 Iterable

'An iterable is an object that has an `__iter__` method which returns an iterator'

Voorbeelden: list, string, dictionary

- Deze objecten kunnen m.b.v. een for-lus overlopen worden

Werkwijze:

- Via de achterliggende methode `iter()` wordt een iterator aangemaakt
- Via `next()` springen we telkens naar het volgende element in de verzameling

```
In [1]: word = 'Data'           In [1]: word = 'Data'           In [1]: file = open('file.txt')
In [2]: it = iter(word)        In [2]: it = iter(word)        In [2]: it = iter(file)
In [3]: next(it)              In [3]: print(*it)            In [3]: print(next(it))
Out[3]: 'D'                   D a t a             This is the first line.
                                         In [4]: print(next(it))
                                         Out[4]: 'a'               In [4]: print(next(it))
                                         In [5]: next(it)          This is the second line.

In [1]: pythonistas = {'hugo': 'bowne-anderson', 'francis':
'castro'}
In [2]: for key, value in pythonistas.items():
...:     print(key, value)
```

Figuur 126: Voorbeelden

17.3.3 Functie enumerate()

Return-waarde = 'enumerate-object' dat een iterable-object is: overloopt een verzameling van tuples waarbij elke tuple een index-value paar is

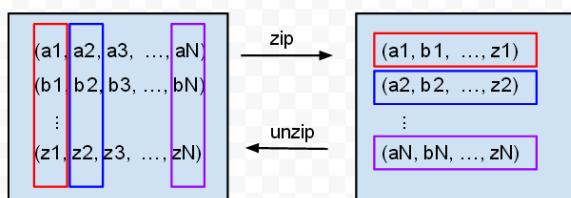
```
1 mutants = ['charles xavier',
2   'bobby drake',
3   'kurt wagner',
4   'max eisenhardt',
5   'kitty pride']
6
7 # create a list of tuples: mutant_list:
8 mutant_list = list(enumerate(mutants))
9
10 # print the list of tuples
11 print(mutant_list)
12 > [(0, 'charles xavier'), (1, 'bobby drake'), (2, 'kurt wagner'),
13   (3, 'max eisenhardt'), (4, 'kitty pride')]
14
15 # unpack and print the tuple pairs:
16 for index1, value1 in mutant_list:
17     print(index1, value1)
18
19 > 0 charles xavier
20 > 1 bobby drake
21 > 2 kurt wagner
```

```
22 > 3 max eisenhardt  
23 > 4 kitty pride
```

17.3.4 zip()

Parameter: verschillende iterables

Return-waarde: 'zip'-object dat een iterator object is; overloopt een verzameling van tuples waarbij elke tuple de elementen uit de verschillende iterables bevat



```
1 # create a zip object using the three lists: mutant_zip  
2 mutant_zip = zip(mutants, aliases, powers)  
3 print(mutant_zip)  
4 for value1, value2, value3 in mutant_zip:  
5     print(value1, value2, value3)
```

17.3.5 unzip()

= Omgekeerde bewerking van zip()

```
1 z1 = zip(mutants, powers)  
2 # unzip the tuples in z1 by unpacking with * and zip(): result1, result2  
3 result1, result2 = zip(*z1)
```

17.3.6 Toepassing: Big data

Probleem: een bestand is te groot om in 1 keer in het geheugen te laden

Oplossing: in stapjes inladen via de methode 'read_csv()' en de optionele parameter 'chunksize'

Gebruik een for-lus op elke dataframe te overlopen

```
1 import pandas as pd  
2  
3 result = []  
4  
5 for chunk in pd.read_csv('data.csv', chunksize=1000):  
6     result.append(sum(chunk['x']))  
7  
8 total = sum(result)  
9 print(total)
```

17.4 List comprehensions

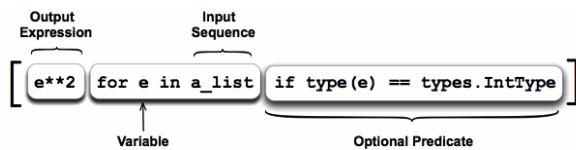
17.4.1 De klassieke manier: for-lus

Gebruik van een for-lus is eerder inefficiënt, vrij dure operatie, ...

```
1  nums = [12, 8, 21, 3, 16]
2  new_nums = []
3  for num in nums:
4      new_nums.append(num+1)
5
6  print(new_nums)
```

17.4.2 Listcomprehension

Zetten een for-lus om in 1 lijn code



Figuur 127: Syntax

```
1  nums = [12, 8, 21, 3, 16]
2  new_nums = [num+1 for num in nums]
```

Niet enkel beperkt tot lists, maar voor elke iterable:

```
1  result = [num for num in range(11)]
2  print(result)
3  > [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Ook voor nested for-lussen:

```
1  # met for-lus
2  pairs_1 = []
3
4  for num1 in range(0, 2):
5      for num2 in range(6, 8):
6          pairs_1.append(num1, num2)
7  print(pairs_1)
8
9  # met list comprehension
10 pairs_2 = [(num1, num2) for num1 in range(0, 2) for num2 in range(6, 8)]
11 print(pairs_2)
12
13 > [(0,6), (0,7), (1,6), (1,7)]
```

Aanmaken van een matrix

```
1  matrix = [[col for col in range(0,5)] for row in range(0,5)]
2  # print the matrix
```

```
3 for row in matrix:  
4     print(row)  
5  
6 > [[0, 1, 2, 3, 4],  
7     [0, 1, 2, 3, 4],  
8     [0, 1, 2, 3, 4],  
9     [0, 1, 2, 3, 4],  
10    [0, 1, 2, 3, 4]]
```

17.4.3 Condities in listcomprehensions

In een listcomprehension kan ook een conditie worden opgenomen:

```
1 [num ** 2 for num in range(10) if num % 2 == 0]  
2 > [0, 4, 16, 36, 64]  
3  
4 [num ** 2 if num % 2 == 0 else 0 for num in range(10)]  
5 > [0, 0, 4, 0, 16, 0, 36, 0, 64]
```

17.4.4 Condities in dictionaries

Via listcomprehensions kan men ook een dictionary op snelle manier aanmaken

```
1 pos_neg = {num: -num for num in range(4)}  
2 print(pos_neg)  
3 > {0: 0, 1: -1, 2: -2, 3: -3}
```

17.5 Generator & Generator functions

17.5.1 Generator

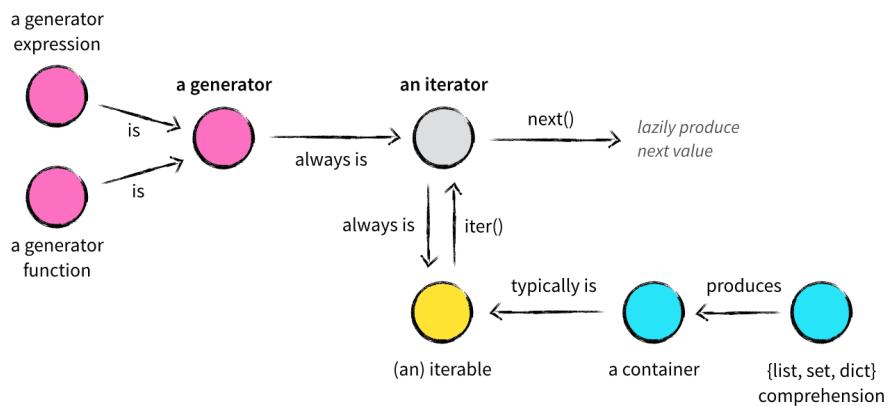
Gelijkwaardig aan list comprehensions, syntax is iets verschillend:

Gebruik () ipv []

```
1 (2 * num for num in range(10))  
2 > <generator object <genexpr> at 0x1046bf888
```

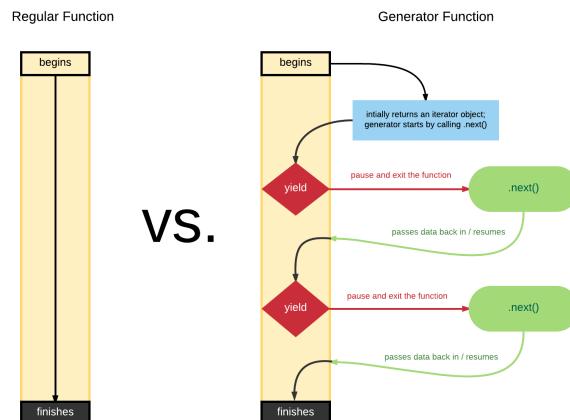
Verschil met een listcomprehension:

- Een listcomprehension geeft een volledige list terug
- Een generator geeft een generator-object terug dat de list **niet** in het geheugen bijhoudt
- Over beide kan met itereren (for-lus/next method)
- Generator is een voorbeeld van **lazy evaluation**: waarde wordt pas afgeleverd wanneer deze echt nodig
- Generator-objecten zijn nuttig bij heel grote lijsten waarbij men deze niet in memory kan bijhouden
- Ook hier kunnen extra condities meegegeven worden



Figuur 128: Overzicht generators

17.5.2 Generator function



- Uses a generator-object
- In plaats van return keyword is dit vervangen door **yield** keyword
- Hierdoor worden tijdens de functie waarden teruggegeven

```

1 def num_sequence(n):
2     """ Generate values from 0 to n. """
3     i = 0
4     while i < n:
5         yield i
6         i += 1
7
8 result = num_sequence(5)
9 print(type(result))
> <class 'generator'>

```

18 Decorators

18.1 Doelstelling

- Gebruik van functies als objecten
- Gebruik van decorators binnen python
- Tips & trics

18.2 Vooraf: functies zijn ook objecten

Functies zijn ook objecten. Hierdoor kunnen ze dus ook in een datastructuur (bv. list) bewaard worden. Dus kunnen functies als parameter doorgegeven worden!

Ze kunnen dus ook aangemaakt worden door andere functies en zelfs teruggegeven worden.

18.3 Wat?

Een **decorator** is een:

- functie dat een andere functie X aanvaardt
- het breidt de functionaliteit van deze functie X uit
- zonder expliciet deze functie X te wijzigen

18.4 Uitbreiden van een functie

Doel: breid bestaande functie(s) met extra functionaliteit uit

18.4.1 Via de oude manier

```
1 def startstop(func):
2     def wrapper(list):
3         print("starting...")
4         func(list)
5         print("finished!")
6     return wrapper
7
8 def mijn_methode1(list):
9     print(f"Som berekenen van de list {list}")
10    print(f"De som is: {sum(list)}")
```

Werkwijze: geef de functie als parameter door. Verwerk deze in een nieuwe methode, en geef die laatste terug.

```
1 mijn_methode_uitgebreid = startstop(mijn_methode1)
2 mijn_methode_uitgebreid([11, 22, 33, 44])
```

18.4.2 Via decorators

Via decorators kan de bovenstaande code korter en efficiënter geschreven worden:

```

1 def startstop(func):
2     def wrapper(list):
3         print("starting...")
4         func(list)
5         print("finished!")
6     return wrapper
7
8 @startstop
9 def mijn_methode1(list):
10    print(f"Som berekenen van de list {list}")
11    print(f"De som is: {sum(list)}")
12
13
14 mijn_methode1([11, 22, 33, 44])

```

18.5 Toepassingen

18.5.1 Uitvoeringstijd

- Via een decorator meet men efficiënt de uitvoeringstijd van methode(s)

```

1 def measure_time(func):
2     def wrapper():
3         starttime = time.perf_counter()
4         func()
5         endtime = time.perf_counter()
6         print(f"Time needed: {endtime-starttime} seconds")
7     return wrapper
8
9 @measure_time
10 def calculate_sum():
11     result = sum([i ** 2 for i in range(1000000)])
12     print(f"Sum: {result}")
13
14 calculate_sum()

```

18.5.2 Sleep

Decorators kunnen ook gecombineerd worden

```

1 def sleep(func):
2     def wrapper():
3         time.sleep(5)
4         return func()
5     return wrapper
6
7 @measure_time
8 @sleep
9 def calculate_sum():
10    result = sum([i ** 2 for i in range(1000000)])

```

```
11     print(f"Sum: {result}")
12
13 calculate_sum()
```

19 Level up your python code

19.1 Enumerate

Gebruik enumerate in plaats van range(len()) als je naast het item uit een lijst ook de positie wenst te gebruiken

```
1 names = ['Nik', 'Jane', 'Katie', 'Jim', 'Luke']
2
3 # using range(len()):
4 for i in range(len(names)):
5     print(i, names[i])
6
7 # using enumerate:
8 for index, name in enumerate(names):
9     print(index, name)
```

19.2 Dictionary: gebruik get()

- Met mijn_dictionary['key'] kan je een waarde uit een dictionary halen
- Maar als de key niet bestaat gooit Python een error
- Met mijn_dictionary.get('key') geeft Python None weer als de key niet bestaat

```
1 nik = {
2     'age': 32,
3     'gender': 'male',
4     'employed': True
5 }
6
7 # throws an error
8 print(nik['location'])
9
10 # returns None
11 print(nik.get('location'))
```

19.3 Zip om meerdere lists gelijktijdig te overlopen

- zip() laat toe om meerdere collecties samen te overlopen
- De zip-methode geeft een zip-object terug dat je in een list/tuple/dict kan omzetten

```
1 names = ['Nik', 'Jane', 'Katie', 'Jim', 'Luke']
2 ages = [32, 28, 37, 52]
3 gender = ['male', 'female', 'female', 'male']
4
```

```

5   for_loop = []
6   for i in range(len(names)):
7       for_looped.append((names[i], ages[i], gender[i]))
8   print(for_looped)
9
10  # zipping through lists with zip()
11  zipped = zip(names, ages, gender)
12  zipped_list = list(zipped)
13  print(zipped_list)

```

19.4 Alternatieven voor dict/list/set/tuple

- <https://docs.python.org/3/library/collections.html#module-collections>
- <https://coderzcolumn.com/tutorials/python/collections-in-python>

<code>namedtuple()</code>	factory function for creating tuple subclasses with named fields
<code>deque</code>	list-like container with fast appends and pops on either end
<code>ChainMap</code>	dict-like class for creating a single view of multiple mappings
<code>Counter</code>	dict subclass for counting hashable objects
<code>OrderedDict</code>	dict subclass that remembers the order entries were added
<code>defaultdict</code>	dict subclass that calls a factory function to supply missing values
<code>UserDict</code>	wrapper around dictionary objects for easier dict subclassing
<code>UserList</code>	wrapper around list objects for easier list subclassing
<code>UserString</code>	wrapper around string objects for easier string subclassing

20 Convoluties

20.1 Doelstelling

- Begrip convolutie kunnen toelichten
- Convolutiedomeinen kennen
- Toepassen op beeldverwerking

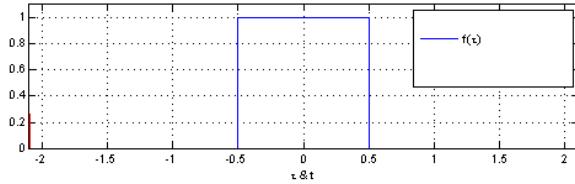
20.2 Convolutie

Definitie 20.1 *Convolutie is een maat voor de grootte van de overlap van twee functies: in hoeverre hebben ze een gemeenschappelijk deel?*

Een convolutie is een wiskundige bewerking (aangeduid als $*$ of \otimes) op twee functies met als resultaat een nieuwe functie: de convolutie van beide.

20.2.1 Voorbeeld 1

- f en g zijn beide functies met waarde 1 in het interval $[-0.5, 0.5]$ en 0 elders
- f en g zijn dus beide blokvormige functies
- Symmetrie rond nul-punt: $f(x) = -f(-x)$ en $g(x) = -g(-x)$



Figuur 129: $f(x)$

We laten nu g verschuiven met een factor t van $-\infty$ tot $+\infty$, en registreren de overlap tussen beide functies in een nieuwe functie $f \otimes g$:

De convolutie is de oppervlakte van de gele figuur:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Convolution_of_box_signal_with_itself2.gif

- Voor 1: geen overlap
- Op 0: de hoogste overlap
- Na 1: geen overlap meer

⇒ Convolutie van 2 blokvormige signalen: het resultaat is een driehoekig signaal

20.2.2 Voorbeeld 2

Convolutie van:

- een blokformig signaal
- een impulsformig signaal

Resultaat:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/Convolution_of_spiky_function_with_box2.gif

Bron: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Convolutie>

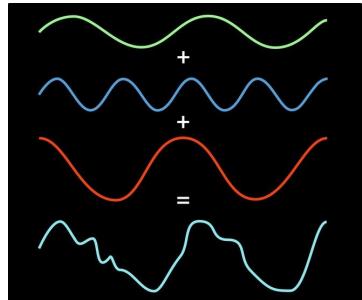
20.3 Wiskundig

Convolutie gebruikt integralen:

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{48}$$

20.4 Toepassing: filters

In digitale signaalverwerking spelen filters een fundamentele rol om de ingangssignalen te bewerken

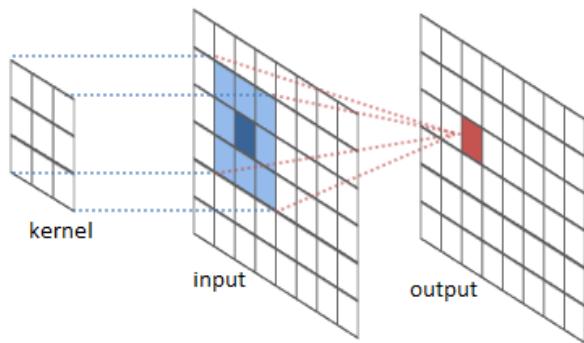


Figuur 130: Signaalverwerking

20.5 Toepassing: Image processing

'Convolution is a well-known mathematical operation largely used in image processing for filtering operations'

Werkwijze: matrix ('kernel' of 'convolution matrix') over een afbeelding laten glijden. Startend links bovenaan, tot helemaal rechts onderaan



Figuur 131: De kernel zal een bewerking maken op de input

Visualisatie: https://coolgpu.github.io/coolgpu_blog/assets/images/Conv2d_0p_1s_1inCh.gif

Resultaat = output image waarbij elke pixel de som van de producten van regio waarover de kernel glijdt.

20.5.1 Gray scaling

Most image processing algorithms assume a two dimensional matrix, not an image with the third dimension of color. To bring the image into two dimensions, we need to summarize the three colors into a single value. This process is more commonly known as grayscaling, where the resulting image only holds different intensities of gray

Formule: $Y' = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B$

```

# Inlezen & weergave van image
#Read an image from a file into an array.
#The returned array has shape (M, N, 3) for RGB images:
# [,:,0] -> Red
# [,:,1] -> Green
# [,:,2] -> Blue
I = matplotlib.pyplot.imread('Tesla.png')
fig = plt.figure(figsize=(16,9))
plt.imshow(I)
plt.show()

def rgb2gray(rgb): # Omzetten naar grijswaarden
    r, g, b = rgb[:, :, 0], rgb[:, :, 1], rgb[:, :, 2]
    gray = 0.2989 * r + 0.5870 * g + 0.1140 * b
    return gray

#grayscale
Ig = rgb2gray(I)
fig = plt.figure(figsize=(16,9))
plt.imshow(Ig, cmap=plt.cm.gray)
plt.show()

```

20.5.2 Edge detection

Randdetectie is één van de belangrijkste processen bij verwerken van afbeeldingen.

- Zeer eenvoudig voor mens
- Zeer lastig voor computers
- Zeer belangrijk voor veel grafische pakketten



Figuur 132: Randdetectie

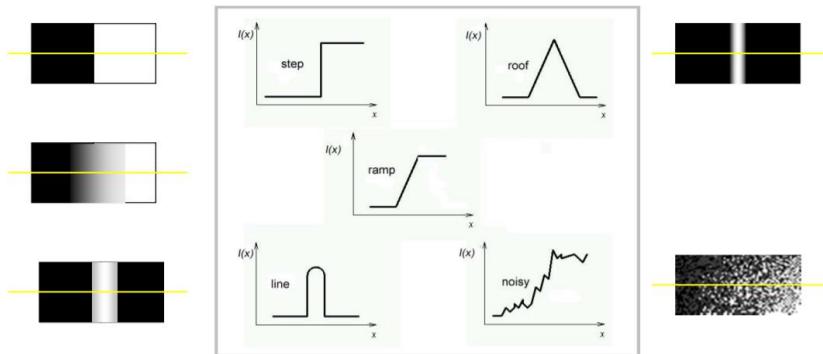
Hoe vertelt een pixel dat hij op de rand zit?

De rand in een afbeelding:

- = lokaal gebied met hoog contrast
- = sterke sprong in intensiteitswaarden tussen opeenvolgende pixels

Mogelijke algoritmes:

- Robert's edge detection
- Prewitt edge detection
- Canny detector
- ...



Figuur 133: Edge detection

1. Goede detectie:

- Minimaliseer kans op vals positieven (onechte randen)
- Minimaliseer kans op vals negatieven (echte randen missen)

2. Goede locatie:

- Gedetecteerde randen moeten zo dicht mogelijk tegen echte randen zitten

3. 'Single response':

- Minimaliseer de kanshebbers rond een echte rand

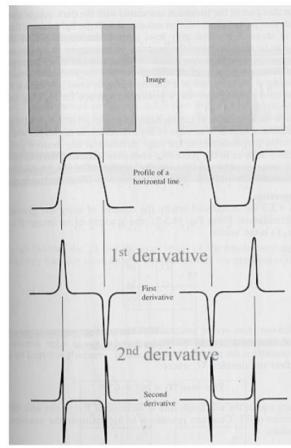
Twee grote groepen:

- 'Gradient-gebaseerde methodes': detecteren randen door te kijken naar het maximum en minimum van de eerste-orde afgeleide van de afbeelding
- 'Laplaciaan-gebaseerde methodes': zoekt nuldoorgangen van de tweede afgeleide om randen te detecteren

20.5.3 Punten in de buurt van een rand detecteren

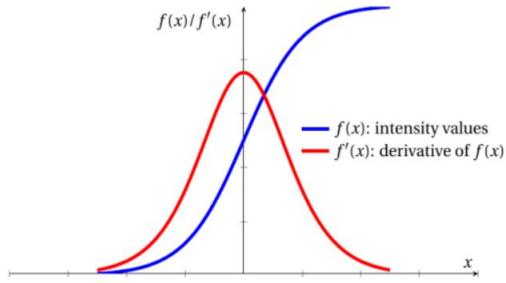
Via:

1. Lokale maxima/minima van de eerste afgeleide
2. Detecteren van de nulovergangen van de tweede afgeleide



Figuur 134: Randal detectie via afgeleiden

De rand kan aanzien worden als een 1-dimensionaal signaal waarvan het verloop van de pixelintensiteiten de vorm van een helling aanneemt: hoe steiler de helling, hoe sterker opeenvolgende intensiteitswaarde van elkaar verschillen en hoe uitgesprokener de rand.



Als we de gradient (afgeleide) nemen, zien we dat het maximum ervan gelegen is, daar waar de pixelintensiteiten het snelst veranderen. Een locatie (pixel) wordt als een rand aanzien wanneer de waarde van de gradient/afgeleide een zekere threshold overschrijdt

20.5.4 Sobel Edge Detection

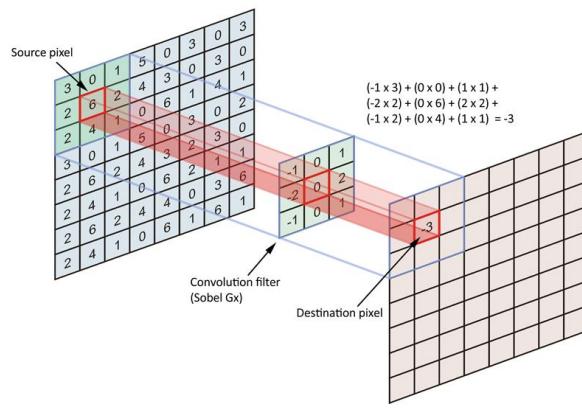
Is één van de belangrijkste rand-detectie mechanismen

Bepaalt de gradient (afgeleide) van een grijswaardenafbeelding. Maakt gebruik van de convolutietechniek: 3x3 matrix over de afbeelding laten glijden om verticale en horizontale lijnen te detecteren.

-1	0	+1	+1	+2	+1
-2	0	+2	0	0	0
-1	0	+1	-1	-2	-1
	x filter		y filter		

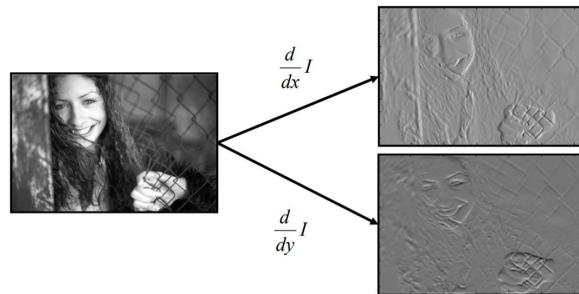
Figuur 135: We gebruiken 2 filters: 1 voor horizontale en 1 voor verticale randdetectie

Wordt gebruikt in beeldverwerking, vooral in randdetectiealgoritmen

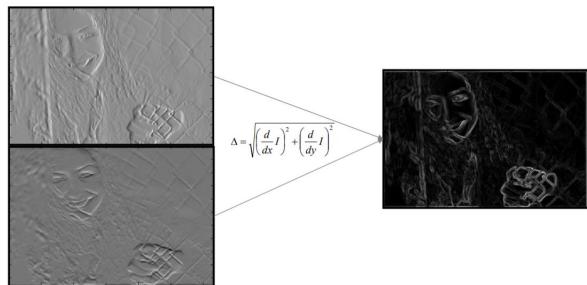


Figuur 136: Uitwerking

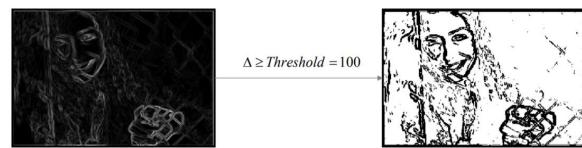
Extra toelichting (uitbereiding): <https://www.youtube.com/watch?v=uihBwtPIBxM>



Figuur 137: We maken de berekening van 2 filters: x en y



Figuur 138: We berekenen een delta uit de twee filters



Figuur 139: Die delta gebruiken we samen met een (subjectief) gekozen threshold om een finale afbeelding te bekomen

20.5.5 Alternatieve Edge Detection methodes

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Figuur 140: Roberts (verouderd)

$$P_V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Figuur 141: Prewitt: gelijkaardig aan Sobel, maar gebruikt een andere kernel

21 Reinforcement learning

21.1 Doelstelling

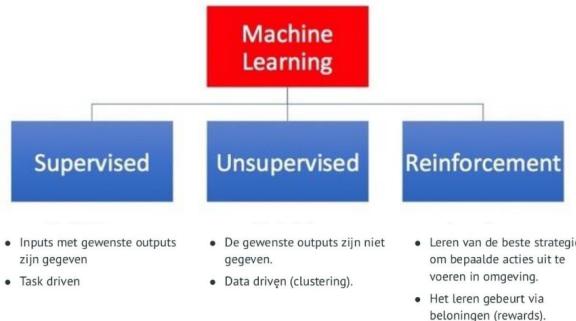
- Begrip reinforcement learning kunnen toelichten
- Voorbeelden hiervan kunnen bespreken
- Markov Decision Process kunnen toelichten
- Q-learning op een voorbeeld kunnen toepassen

21.2 Situering binnen machine learning

Reinforcement learning is een onderdeel van machine learning dat een specifiek leeralgoritme voor ogen heeft:

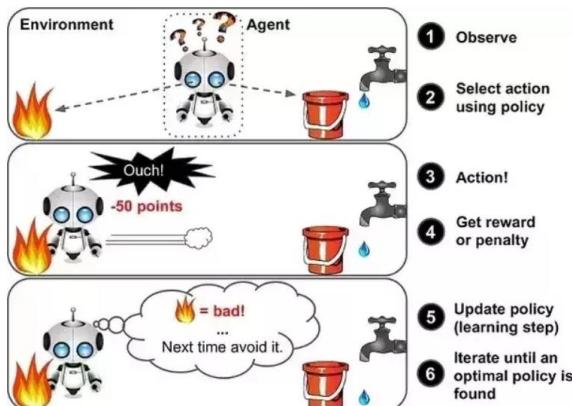
- We vertrekken niet van een gegeven dataset
- we laten een 'agent' een bepaald model verkennen via zelfexploratie waardoor hij meer en meer getraind wordt

Voorbeeld stofzuigrobot dat zelf zijn ruimte gaat verkennen



Figuur 142: Types machine learning

21.3 Wat is reinforcement learning?



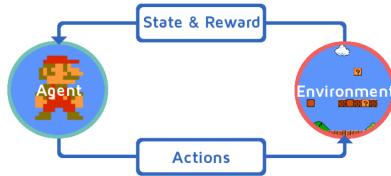
- Foute acties afstraffen
- Juiste acties belonen
- Update het algoritme
- Deze stappen itereren tot een optimaal algoritme gevonden is

21.3.1 De betrokken partijen

- Agent
- Onbekende omgeving voor de Agent

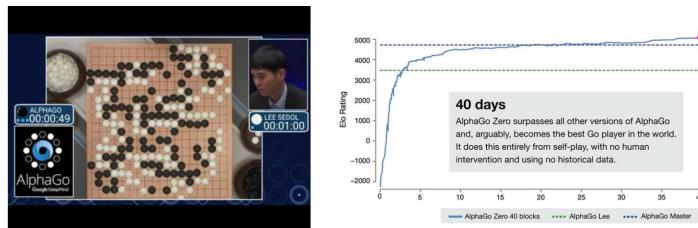
21.3.2 Verloop

- Agent voert een bepaalde actie (**action**) in omgeving uit
- Omgeving geeft feedback: de Agent ontvangt een positieve of negatieve beloning (**reward**)
- Agent komt in een nieuwe toestand ('**state**') terecht



21.4 Voorbeelden

- Atari Breakout: <https://www.youtube.com/watch?v=eG1Ed8PTJ18>
- Pacman: <https://www.youtube.com/watch?v=4M1Zncshy1Q>
- Learn to walk: <https://www.youtube.com/watch?v=gn4nRCC9TwQ>
- Robotics:
 - https://www.youtube.com/watch?v=W_gxLKSsSIE
 - <https://www.youtube.com/watch?v=ZhsEKT07V04>



Figuur 143: AlphaGo

21.5 Markov Decision Process

Definitie 21.1 Het Markov Decision Process (MDP) is een model dat ons moet helpen om beslissingen te maken binnen een stochastische (willekeurige/toevallig samengestelde) omgeving.

*Doel: strategie (**policy**) te vinden die ons voor elke toestand de beste actie oplevert*

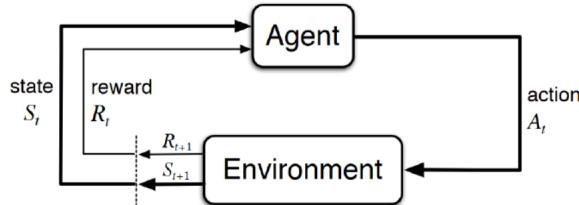
21.5.1 Componenten

De componenten van een MDP zijn:

- **Agent:** voert de actie uit
- **Environment:** omgeving waarin agent beweegt
- **State:** een bepaalde toestand waarin agent zit
- **Action:** actie zelf

- **Reward:** positieve of negatieve beloning

21.5.2 Diagram & notatie



De reward is een functie van de toestand (S) en de actie (A) die je neemt op een tijdstip t :

$$f(S_t, A_t) = R_{t+1} \quad (49)$$

Het afgelegde traject is gegeven door: $S_0; A_0, R_1, S_1; A_1, R_2, S_2; A_2, R_3, \dots$

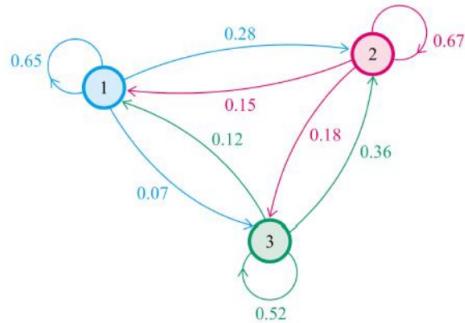
21.6 Transitiekansen

Agent gaat steeds met een bepaalde kans een actie ondernemen.

Bij aanvang zijn alle acties evenwaardig, maar na verloop van tijd wordt de kans voor specifieke actie bijgesteld.

Afhankelijk van de voorafgaande state worden met een zekere kans waarden toegekend aan R_t en kom je in S_t terecht.

$$p(s', r | s, a) = Pr\{S_t = s', R_t = r | S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\} \quad (50)$$



21.7 Doel van de agent

Binnen een MDP wenst de Agent zijn *verwachte beloning (reward)* zo hoog mogelijk.

De Agent kijkt dus niet enkel naar de onmiddellijke reward (na zijn actie), maar ook naar de totale reward:

$$G_t = R_{t+1} + R_{t+2} + R_{t+3} + \dots + R_T \quad (51)$$

met T het laatste tijdstip (=terminal state)

Bij start kent hij die terminal state nog niet, maar door training leert hij deze kennen.

21.7.1 Discount factor

De agent zal bij bepaling van totale reward een afweging maken tussen:

- De onmiddellijke reward
- De toekomstige rewards ('discounted rewards')

Daarom gebruik van **discount factor** γ ($0 \leq \gamma \leq 1$)

$$\begin{aligned} G_t &= R_{t+1} + R_{t+2} + R_{t+3} + \dots \\ &= R_{t+1} + \gamma \cdot R_{t+2} + \gamma^2 \cdot R_{t+3} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \end{aligned} \tag{52}$$

Gevolg:

$$\begin{aligned} G_t &= R_{t+1} + \gamma \cdot R_{t+2} + \gamma^2 \cdot R_{t+3} + \gamma^3 \cdot R_{t+4} + \dots \\ &= R_{t+1} + \gamma \cdot (R_{t+2} + \gamma \cdot R_{t+3} + \gamma^2 \cdot R_{t+4} + \dots) \\ &= R_{t+1} + \gamma \cdot G_{t+1} \end{aligned} \tag{53}$$

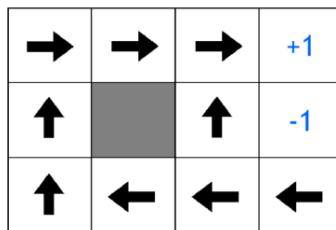
De discountfactor γ drukt het belang van een toekomstige reward uit.

21.8 Strategie (policy) in MDP

Definitie 21.2 De policy π beschrijft welke kans een bepaalde actie in een bepaalde toestand moet genomen worden. Het is de bedoeling dat de agent de policy volgt.

Als de agent een policy volgt op tijdstip t , dan is:

- $\pi(a|s)$ = kans dat agent actie a uitvoert in toestand s



Figuur 144: Stel dat we rechtsonderaan beginnen en rechtsboven moeten eindigen, dan zijn er 2 strategieën

- Als we de korte weg nemen, dan komt het pad dichter bij de -1 en hebben we dus meer kans om te falen
- Als we de lange weg nemen, dan komt het pad nooit naast de $-1 \Rightarrow$ langer maar meer kans op succes

21.8.1 State-value functie

Definitie 21.3 De state-value functie is een functie dat vertelt hoe goed een bepaalde state voor een agent is die een bepaalde policy volgt.

Met andere woorden: hoe groot is de verwachte reward wanneer we vanuit state s of tijdstip t de policy π volgen?

⇒ State-Value functie v_π

$$\begin{aligned} v_\pi(s) &= E_\pi [G_t \mid S_t = s] \\ &= E_\pi \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s \right] \end{aligned}$$

Toekomstige rewards Vanuit bepaalde
state s op tijdstip t

21.8.2 Action-value functie

Definitie 21.4 De action-value functie is een functie dat vertelt hoe goed een bepaalde actie voor een agent is om bij een bepaalde policy π vanuit een bepaalde state s deze te nemen.

Met andere woorden: hoe groot is de verwachte reward wanneer we vanuit een state s een bepaalde actie te nemen om dan policy verder te volgen?

⇒ Action-Value functie q_π

$$\begin{aligned} q_\pi(s, a) &= E_\pi [G_t \mid S_t = s, A_t = a] \\ &= E_\pi \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s, A_t = a \right] \end{aligned}$$

Toekomstige rewards Vanuit bepaalde
state s op tijdstip t ,
met de gekozen actie a

21.8.3 Optimale strategie (policy)

Finale doel van reinforcement learning:

- Zoektocht naar de beste strategie (policy) π die de grootste reward zal opleveren wanneer de agent de policy volgt:
 - Optimal State-Value functie v^* : grootst mogelijke reward in elke state via strategie π :

$$v^*(s) = \max_{\pi} v_{\pi}(s)$$

- Optimal Action-Value functie q^* : grootst mogelijke reward na nemen van actie in bepaalde state volgens strategie π :

$$q_* (s, a) = \max_{\pi} q_{\pi} (s, a)$$

21.8.4 Bellman optimality

Een belangrijke eigenschap is dat de optimale action-value functie q^* moet voldoen aan de Bellman vergelijking:

$$q_*(s, a) = E \left[R_{t+1} + \gamma \cdot \max_{a'} q_*(s', a') \right] \quad (54)$$

21.9 Q-learning

Doele: strategie (policy) dat de agent bij elke state zegt wat hij moet doen om zijn rewards te maximiseren. Hoe vinden we deze strategie \Rightarrow via Q-learning

Definitie 21.5 *Q-learning is de werkwijze waarbij men op iteratieve wijze op zoek gaat naar de action-value functie door state \rightarrow action \rightarrow next state telkens te doorlopen*

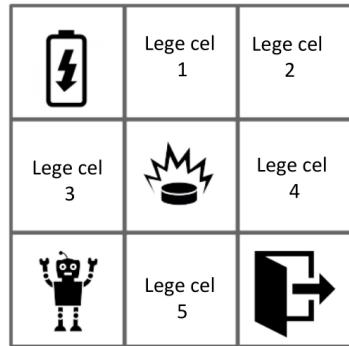
$$Q(s_t, a_t) \leftarrow (1 - \alpha) \underbrace{Q(s_t, a_t)}_{\text{old value}} + \underbrace{\alpha}_{\text{learning rate}} \cdot \left(\underbrace{r_t}_{\text{reward}} + \underbrace{\gamma}_{\text{discount factor}} \cdot \underbrace{\max_a Q(s_{t+1}, a)}_{\substack{\text{learned value} \\ \text{estimate of optimal future value}}} \right)$$

Figuur 145: Formule

- Rood = nieuwe q-waarde bij actie a en toestand s
- We vertrekken van een bepaalde situatie ('old value', blauw)
- α = learning rate = hoeveel hou ik rekening met wat ik leer?
- $(1 - \alpha)$ = hoeveel hou ik rekening met wat ik al ken?
- Het learned value:
 - = nieuwe geleerde waarde bij actie a en toestand s
 - houdt rekening met nieuwe bekende rewards
 - = onmiddellijke reward + discount factor · toekomstige reward

21.9.1 Voorbeeld

Doele: de robot moet de uitgang vinden, maar kent het speelveld niet.



Figuur 146: Het speelveld

- 1 stap = -10 punten
- Opladen = +10 punten
- Uitgang bereiken = +100 punten & einde spel
- Landmijn trappen = -100 punten & einde spel

	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	0	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	0	0	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	0	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 147: Robot kent nog niets: elke actie krijgt evenveel kans (0)
X = onmogelijke verplaatsing

We zullen herhaaldelijk de Q-value updaten met $\alpha = 0.7$ en $\gamma = 0.8$

$$\begin{aligned}
 Q(s_t, a_t) &= (1 - \alpha) \cdot Q(s_t, a_t) + \alpha \cdot (r_t + \gamma \cdot \max_Q(s_{t+1}, a)) \\
 &= (1 - 0.7) \cdot 0 + 0.7 \cdot (-10 + 0.8 \cdot 0) \\
 &= -7
 \end{aligned}$$

Onmiddellijke reward
door verplaatsing

Q-table

	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	0	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	0	0	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	0	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 148: Stel dat de robot omhoog stapt van state ‘Start’ naar state ‘Lege cel 3’

$$\begin{aligned}
 Q(s_t, a_t) &= (1 - \alpha) \cdot Q(s_t, a_t) + \alpha \cdot (r_t + \gamma \cdot \max_Q(s_{t+1}, a)) \\
 &= (1 - 0.7) \cdot 0 + 0.7 \cdot ((-10 - 100) + 0.8 \cdot 0) \\
 &= -77
 \end{aligned}$$

Onmiddellijke reward
door verplaatsing & mijn

Q-table

	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	0	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	0	0	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	-7	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 149: Robot loopt vervolgens naar rechts: van state ‘Lege cel 3’ naar state ‘Landmijn’

Omdat de robot op de landmijn stapt, is het spel ten einde. Er wordt een nieuwe **epoch** gestart.

$$\begin{aligned}
Q(s_t, a_t) &= (1 - \alpha) \cdot Q(s_t, a_t) + \alpha \cdot (r_t + \gamma \cdot \max_Q(s_{t+1}, a)) \\
&= (1 - 0.7) \cdot (-7) + 0.7 \cdot (-10 + 0.8 \cdot \max(-77; 0; 0)) \\
&= 0.3 \cdot (-7) + 0.7 \cdot (-10 + 0.8 \cdot 0) \\
&= -9.1
\end{aligned}$$

	Q-table			
	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	0	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	-77	0	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	-7	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 150: Robot start linksbeneden en stapt omhoog. max heeft nu wel een waarde $\neq 0$

$$\begin{aligned}
Q(s_t, a_t) &= (1 - \alpha) \cdot Q(s_t, a_t) + \alpha \cdot (r_t + \gamma \cdot \max_Q(s_{t+1}, a)) \\
&= (1 - 0.7) \cdot 0 + 0.7 \cdot (-10 + 10 + 0.8 \cdot \max(0; 0)) \\
&= 0.3 \cdot (-7) + 0.7 \cdot (0 + 0.8 \cdot 0) \\
&= -2.1
\end{aligned}$$

	Q-table			
	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	0	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	-77	0	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	-9.1	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 151: De robot stapt opnieuw omhoog van state ‘Lege cel 3’ naar state ‘Opladen’

$$\begin{aligned}
Q(s_t, a_t) &= (1 - \alpha) \cdot Q(s_t, a_t) + \alpha \cdot (r_t + \gamma \cdot \max_Q(s_{t+1}, a)) \\
&= (1 - 0.7) \cdot 0 + 0.7 \cdot (-10 + 0.8 \cdot \max(0; 0; 0)) \\
&= 0 + 0.7 \cdot (-10 + 0.8 \cdot 0) \\
&= -7
\end{aligned}$$

	Q-table			
	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	0	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	-77	-2.1	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	-9.1	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 152: De robot stapt naar rechts van state ‘Opladen’ naar state ‘Lege cel 1’

$$\begin{aligned}
Q(s_t, a_t) &= (1 - \alpha) \cdot Q(s_t, a_t) + \alpha \cdot (r_t + \gamma \cdot \max_Q(s_{t+1}, a)) \\
&= (1 - 0.7) \cdot 0 + 0.7 \cdot (-10 - 100 + 0.8 \cdot 0) \\
&= 0 + 0.7 \cdot (-110) \\
&= -77
\end{aligned}$$

	Q-table			
	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	-7	X	0
Lege cel 1	0	0	X	0
Lege cel 2	0	X	X	0
Lege cel 3	X	-77	-2.1	0
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	0	X	0	0
Start	X	0	-9.1	X
Lege cel 5	0	0	0	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 153: De robot stapt naar beneden van state ‘Lege cel 1’ naar state ‘Landmijn’

Omdat de Robot opnieuw op een landmijn stapt, moet het spel opnieuw beginnen met een nieuwe epoch.

	Links	Rechts	Omhoog	Beneden
Opladen	X	1.4	X	-6.4
Lege cel 1	-0.4	8.0	X	-86.7
Lege cel 2	-4.2	X	X	16.3
Lege cel 3	X	-86.4	7.1	-0.48
Landmijn	X	X	X	X
Lege cel 4	-82.9	X	-8.7	78.4
Start	X	32.4	18.9	X
Lege cel 5	-8.4	89.1	-86.7	X
Uitgang	X	X	X	X

Figuur 154: Veronderstel: na meerdere training epochs

Het algoritme heeft nu het beste pad naar de uitgang gevonden: van start naar ‘lege cel 5’ naar de uitgang.

21.9.2 Exploratie vs exploitatie

Definitie 21.6 (Exploitatie) *Laat de agent willekeurige acties nemen zodat deze de verschillende states kan verkennen.*

Definitie 21.7 (Exploitatie:) *Laat de agent vooral de states bezoeken die de hoogste (toekomstige) reward opleveren.*

Start met een hoge mate van exploratie en ga tijdens de training meer en meer over naar exploitatie.

21.9.3 Toepassing

Cliff walking:

<https://medium.com/init27-labs/understanding-q-learning-the-cliff-walking-problem-80198921abbc>