Álgebra Lineal II y Cuadrática

Con ejemplos e ilustraciones

Segunda Edición

Diego Huaraca
Jaime Toaquiza
EPN, Ecuador.

Un aporte a la sociedad.

Índice general

1

Espacio vectorial cociente

En este capítulo vamos a estudiar conjuntos sobre los cuales vamos a definir ciertas relaciones de equivalencia, los mismos que a su vez, van a adquirir la estructura de espacio vectorial mediante las operaciones de suma y producto por escalar definidas especialmente para dichos conjuntos.

1.1. Relaciones binarias

En el lenguaje ordinario tratar de ver si dos objetos guardan cierta relación entre sí, o por el contrario si no tienen nada en común, nos lleva a pensar que se debe satisfacer alguna proposición o dejar de satisfacerse, para dichos objetos.

Definición 1: Relación Binaria

Sea E un espacio vectorial, por una relación $\mathcal{R}$ en E entendemos el subconjunto de $E \times E$, tal que satisface las siguientes propiedades:

Sea $\mathcal{R}$ una relación en E; entonces

1. *$\mathcal{R}$ se dice reflexiva si*
$$\forall x \in E, \quad (x, x) \in \mathcal{R}$$
2. *$\mathcal{R}$ se dice simétrica si*
$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in \mathcal{R}$$
3. *$\mathcal{R}$ se dice anti-simétrica si*
$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad (y, x) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad x = y$$
4. *$\mathcal{R}$ se dice transitiva si*
$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad (y, z) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in \mathcal{R}$$

Ejemplo:

1. *Como ejemplo de relación entre elementos de un mismo conjunto puede considerarse lo siguiente:*

   Para el conjunto
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
   se dice que a está relacionado con b si y sólo si

$$a \text{ es primo y además } a \text{ y } b \text{ no son primos entre sí}$$

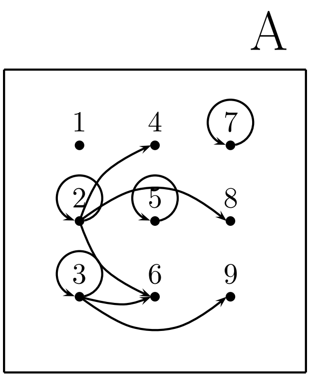
esta relación tiene el siguiente grafo*:*

$$\mathcal{R} = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(3,9),(5,5),(7,7)\}$$

Para representar esta relación se puede unir mediante líneas los elementos relacionados entre sí, pero ahora se hace necesario, al considerar un solo conjunto, indicar con una flecha cuál es el primer y cuál el segundo de los elementos que están relacionados, ya que por ejemplo

$$(2,4) \in \mathcal{R}, \quad \textit{pero, sin embargo} \quad (4,2) \notin \mathcal{R}$$

procediendo de este modo se puede obtener el esquema, llamado sagital, siguiente:



1.2. Relación de equivalencia

La idea de **relación de equivalencia** *es una importante extensión y generalización de la tradicional idea de* **igualdad** *que se utiliza en la matemática.*

DEFINICIÓN 2: RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Una relación, se dice de **equivalencia** *si ésta es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Observación 1.1. Dado una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en E, algunas veces se escribe $x \sim y$ en reemplazo de $(x,y) \in \mathcal{R}$, y decimos que x es equivalente a y, dada la relación $\mathcal{R}$.

Note que si $\mathcal{R}$, es una relación de equivalencia en E, se tiene:

1. $x \sim x, \ \forall x \in E$.
2. $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x$.
3. $x \sim y \quad \wedge \quad y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z$

Ejemplo:

1. Para el conjunto $\mathbb{N}^2$ de los pares de números naturales, la relación

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad \text{si y sólo si } x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

es una relación de equivalencia.

2. Sea el conjunto

$$\mathbb{Q}_3[x] = \{ \text{ polinomios de grado igual a 3 } \} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ / \ a_3 \neq 0\}$$

entonces $\mathbb{Q}_3[x]$ no es subespacio vectorial, pues

$$a_3x^3 \in \mathbb{Q}_3; \quad -a_3x^3 \in \mathbb{Q}_3 \quad \Rightarrow \quad 0 \notin \mathbb{Q}_3$$

Si para todo $p, q \in \mathbb{Q}_3[x]$ se define la relación:

$$p \sim q \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx}$$

Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ahora, para mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia debemos probar que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto:

- **P.D.** $\sim$ *es reflexiva*

$$p \sim p, \qquad pues \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

  La identidad se tiene de forma directa.

- **P.D.** $\sim$ *es simétrica*

$$p \sim q, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

  La igualdad es obvia.

- **P.D.** $\sim$ *es transitiva*

$$\left.\begin{array}{ll} p \sim q, & \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} \\ q \sim r, & \Leftrightarrow \quad \frac{dq}{dx} = \frac{dr}{dx} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{dr}{dx} \qquad es\ decir \quad p \sim r$$

  Igualamos los polinomios y obtenemos la igualdad requerida.

por tanto $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Q}_3[x]$.

▲

1.2.1. Clases de equivalencia

Definición 3: Clases de Equivalencia

Sea E un espacio vectorial y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en E. Si $x \in E$, entonces la clase de equivalencia de x dado $\mathcal{R}$, es el conjunto $\mathcal{R}_x$ definido como:

$$\mathcal{R}_x = \{y \in E \ / \ (y, x) \in \mathcal{R}\} = \{y \in E \ / \ y \sim x\}$$

dicho de otro modo, $\mathcal{R}_x$ es el conjunto de todos los elementos de E que son equivalentes a x. Las clases de equivalencia se las nota de la forma $x/\mathcal{R}$.

Definición 4: Conjunto Cociente

Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en un espacio vectorial E, entonces el conjunto de las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$, se denomina **conjunto cociente** de E por $\mathcal{R}$ y se nota como $E/\mathcal{R}$.

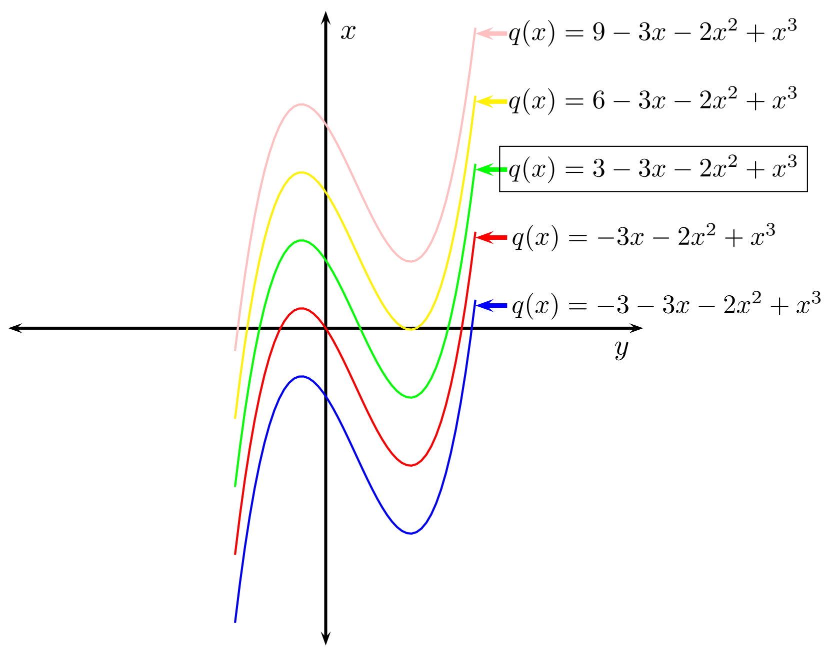
Ejemplo:

1. En el ejemplo anterior vimos que $\sim$ es una relación de equivalencia, ahora encontremos la clase de equivalencia.

Sea $p \in \mathbb{Q}_3[x]$, entonces
$$\dot{p} = \{q \in \mathbb{Q}_3[x] \ / \ p \sim q\}$$
por lo tanto si
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$
y
$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dx} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2$$
ahora se tiene que
$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2$$
es decir
$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$
por tanto
$$\dot{p} = \{q \in \mathbb{Q}_3 \ / \ a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3\}$$

▲

Gráficamente para el ejercicio anterior, dado
$$p(x) = 3 - 3x - 2x^2 + x^3$$
las clases de equivalencia de p, lo conforman todos los polinomios de tercer grado que tienen la misma pendiente que p, para todo $x \in \mathbb{R}$.



es decir, las clases de equivalencia de p, lo forman todos los polinomios de la forma

$$q(x) = \alpha - 3x - 2x^2 + x^3, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.2.2. Partición y equivalencia

Si $\sim$ es una equivalencia para un conjunto E, resulta, de cuanto se acaba de exponer, que el conjunto de las clases de equivalencia es una partición de E, ya que las clases son conjuntos disjuntos de E y todo elemento de E pertenece a una clase *(aquella que le tiene por representante)*.

Por tanto, a partir de una equivalencia en un conjunto, se ha llegado a una partición del mismo: la constituida por las clases de equivalencia.

Recíprocamente, dada una partición

$$\{E_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

de un cierto conjunto E, la relación $\sim$ definida en E mediante $a \sim b$ si y sólo si a y b pertenecen a un mismo subconjunto de los que constituyen la partición, evidentemente una equivalencia para E; las clases de equivalencia de $\sim$ son entonces los conjuntos E_i que constituyen la partición.

Puede en consecuencia afirmarse que a toda equivalencia en un conjunto le corresponde una partición del mismo, la formada por la clases de equivalencia; y, recíprocamente, a toda partición de un conjunto le corresponde una equivalencia en el mismo.

1.3. Conjunto cociente

Definición 5

Dado un conjunto E y una relación de equivalencia $\sim$ en él, se llama conjunto cociente de E por $\sim$, y se le representa por $E/\sim$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia definidas en E por $\sim$; es decir, el conjunto cociente es la partición de E subordinada por la equivalencia $\sim$.

Ejemplo:

1. Para la relación de equivalencia definida en $\mathbb{N}^2$ mediante

   $$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \qquad \text{si y sólo si} \qquad x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

   a la clase de representantes

   $$(x_1, x_2)$$

   es decir, a

   $$\mathcal{R}_{(x_1,x_2)} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2 \mid (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)\}$$

   también pertenecen los pares

   $$(x_1 + h, x_2 + h)$$

   para todo número natural h, así como los pares

   $$(x_1 - h, x_2 - h)$$

   para todo natural

   $$h \leq x_1 \quad \text{y} \quad h \leq x_2$$

para elegir un representante sencillo de la clase $\mathcal{R}_{(x_1,x_2)}$ se puede proceder del siguiente modo: primero, si $x_1 > x_2$ entonces se adopta como representante a $(x_1 - x_2, 0)$; segundo, si $x_1 < x_2$, entonces se toma como representante al par $(0, x_1 - x_2)$; y tercero, si $x_1 = x_2$, entonces se adoptará como representante de la clase $(0, 0)$.

El conjunto cociente de $\mathbb{N}^2/\sim$ será, en consecuencia

$$\{\mathcal{R}_{(r,0)}, \mathcal{R}_{(0,s)}, \mathcal{R}_{(0,0)} \mid r, s \in \mathbb{N}\}$$

este conjunto se representa por $\mathbb{Z}$, y su elementos, una vez definidas las adecuadas operaciones algebraicas, reciben el nombre de números enteros, de manera que el entero $\mathcal{R}_{(r,0)}$ es posible identificarlo con el natural r, al entero $\mathcal{R}_{(0,s)}$ se le designa por $-s$, y entonces

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n, \dots\}$$

1.4. Relación de equivalencia en un espacio vectorial

Definición 1.1. Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E, la relación de equivalencia de $x \in E$ se define como:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in F$$

Observación 1.2. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración:

i) **P.D.** $\sim$ *es reflexiva.*

Sea $x \in E$, $x - x = 0 \in F$, pues F es subespacio vectorial

$$\Rightarrow x \sim x$$

ii) **P.D.** $\sim$ *es simétrica.*

Sean $x, y \in E$ tal que $x \sim y \quad \Rightarrow \quad x - y \in F$

$$\Rightarrow \quad -(x-y) \in F, \text{ pues } F \text{ es subespacio vectorial}$$

$$\Rightarrow \quad y - x \in F$$

$$\Rightarrow \quad y \sim x$$

iii) **P.D.** $\sim$ *es transitiva.*

Si $x, y, z \in E$, $x \sim y$, $y \sim z$, $\Rightarrow x - y \in F, \quad y - z \in F$

$$\Rightarrow [(x-y) + (y-z)] \in F, \text{ pues } F \text{ es subespacio vectorial}$$

$$\Rightarrow \quad x - z \in F$$

$$\Rightarrow \quad x \sim z$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

▲

Ejemplo:

1. Sea E un espacio vectorial, y $F = \{0\}$ subespacio vectorial.

   Sean $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x - y \in F \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

   Por tanto

$$\dot{x} = \{y \in E \ / \ x \sim y\}$$

$$\dot{x} = \{x\}$$

   Las clases de equivalencia forman una partición de E, es fácil verificar que

$$\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E$$

   donde

$$\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset \qquad \text{si} \qquad x \neq y$$

   Por tanto el **conjunto cociente** es:

$$E/F = \{\dot{x},\ x \in E\} = \{\{x\},\ x \in E\}$$

   Ahora si

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in E - F$$

$$\dot{x} = \{y \ / \ y \in E\} = E$$

$$E/F = \{E\}$$

2. Sea $E = \mathbb{R}^2$ y $F = \{(u_1, u_2) \in E \ / \ 2u_1 - u_2 = 0\}$

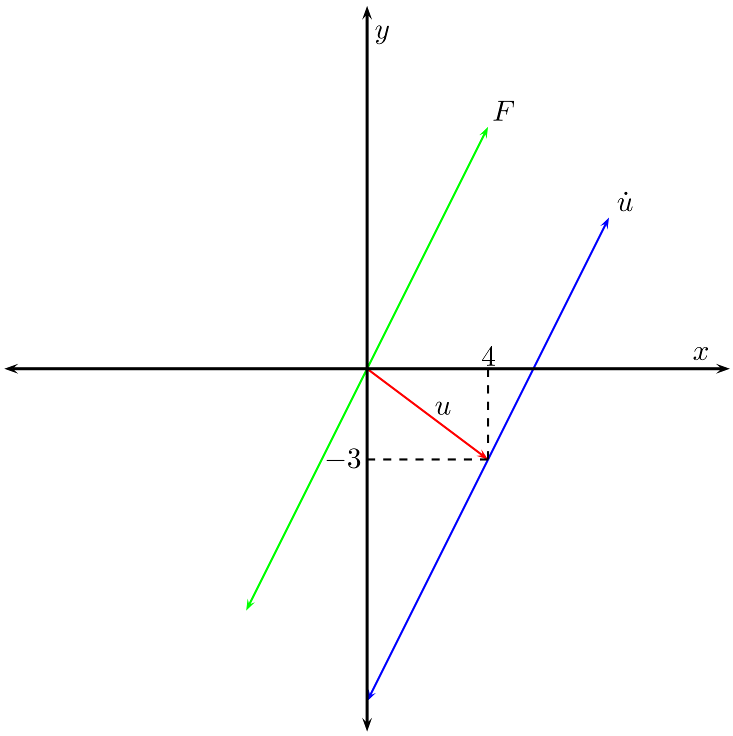
   Si $u = (u_1, u_2) \in E$ y $v = (v_1, v_2) \in E$, se tiene que:

$$\begin{aligned} u \sim v &\Leftrightarrow u - v \in F \\ &\Leftrightarrow 2(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 - u_2 = 2v_1 - v_2 \end{aligned}$$

$$\dot{u} = \{(v_1, v_2) \in E \ / \ 2v_1 - v_2 = 2u_1 - u_2\}$$

   Veamos ahora un ejemplo gráfico:

   Supongamos que $u = (4, -3)$, por tanto



$$\dot{u} = \{v = (v_1, v_2) \in E \ / \ 2v_1 - v_2 = 11\}$$

el mismo que no es subespacio vectorial porque no tiene el 0.

En el gráfico observamos que las clases de equivalencia de un vector u, no es más que las rectas paralelas a F, y que contienen el extremo del vector $u \in \mathbb{R}^2$.
Además

$$\dot{0} = \{v = (v_1, v_2) \in E \ / \ 2v_1 - v_2 = 0\} = F$$

▲

1.5. Co - conjunto *(coset)*

Definición 1.2. Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E, además si $x \in E$, se define el **co - conjunto** como:

$$x + F = \{z \in E \ / \ z = x + f, \ f \in F\}$$

- **Observaciones**

De la definición anterior tenemos que:

$$z \in x + F \quad \Leftrightarrow \quad (x - z) \in F \quad \Leftrightarrow \quad x \in z + F$$

es decir

$$\begin{aligned} x \sim z \quad &\Leftrightarrow \quad x - z \in F \\ &\Leftrightarrow \quad z \in x + F \\ &\Leftrightarrow \quad x \in z + F \end{aligned}$$

La relación

$$x \sim z \quad \Leftrightarrow \quad z \in x + F$$

es de equivalencia.

i) $x \sim x$ pero $x \in x + F$ ya que $x = x + 0$

ii) $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \in x + F \quad \Leftrightarrow \quad x \in y + F \quad \Leftrightarrow \quad y \sim x$

iii) $\left.\begin{matrix} x \sim y \\ y \sim z \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y \in x + F \\ z \in y + F \end{cases}$

Ahora sí, $z \in y + F$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y = x + f_1, \; f_1 \in F \\ z = y + f_2, \; f_2 \in F \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad z = x + \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\in F} \qquad \Rightarrow \qquad z \in x + F$$

- **Observaciones:**

$$\{x + F\}_{x \in E} \quad \text{forman una partición de } E.$$

i) $(x + F) \cap (y + F) = \begin{cases} x + F \\ \emptyset \end{cases}$

ii) $\forall x \in E$ pertenece a algún $y + F$.

En $E/F \qquad (x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in x + F)$

Se definen

$$\dot{x} \oplus \dot{y} = (x + F) \oplus (y + F) = (x + y) + F$$

$$\lambda \odot \dot{x} = \lambda \odot (x + F) = \lambda x + F$$

■

Teorema 1.1. Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E.
Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ base de F y $\{\dot{u_1}, \dot{u_2}, \ldots, \dot{u_r}\}$ base de E/F, donde $\dot{u_j} = u_j + F$.

Entonces $\{w_1, w_2, \ldots, w_s, u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ es base de E.

Además

$$\dim E = \dim F + \dim(E/F)$$

es decir

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F$$

Demostración:

i) Sea $x \in E$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + F = \alpha_1 \dot{u_1} + \alpha_2 \dot{u_2} + \ldots + \alpha_r \dot{u_r} \\ &= \dot{\overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r}} \\ x &\in \dot{\overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r}} \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_s w_s \end{aligned}$$

ii) B es libre.

$$\begin{array}{rcll}
\alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_s w_s & = & 0 & (E) \qquad (1) \\
\dot{\overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_s w_s}} & = & \dot{0} & (E/F) \\
\alpha_1 \dot{u_1} + \alpha_1 \dot{u_2} + \ldots + \alpha_r \dot{u_r} + \dot{\overline{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_s w_s}} & = & \dot{0} & (E/F) \\
\alpha_1 \dot{u_1} + \alpha_1 \dot{u_2} + \ldots + \alpha_r \dot{u_r} + \dot{0} & = & \dot{0} & (E/F)
\end{array}$$

pues $\{\dot{u_1}, \dot{u_2}, \ldots, \dot{u_r}\}$ es base de E/F

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_r = 0$$

En (1) se tiene que

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots\ldots + \beta_s w_s = 0$$

por tanto

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_s = 0$$

pues $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ es base de F.

Por lo tanto se sigue que B es libre.

■

1.6. Espacio vectorial cociente

Proposición 1.1. El conjunto E/F queda dotado de la estructura de espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ que E mediante las operaciones:

$$(x + F) + (y + F) = (x + y) + F$$

$$\alpha(x + F) = (\alpha x) + F$$

Demostración:

1. En primer lugar hay que probar que estas operaciones son válidas en el sentido de tener resultado único, independiente de los representantes de cada clase. En efecto, si en la clase

   $$x + F$$

   cambiamos su representante x por x', como ambos deben ser congruentes, se cumplirá que

   $$x' - x \in F$$

   en cuyo caso

   $$(x' - y) - (x - y) = x' - x \in F \quad \Rightarrow \quad (x' + y) + F = (x + y) + F$$

   $$(\alpha x') - (\alpha x) = \alpha(x' - x) \in F \quad \Rightarrow \quad (\alpha x') + F = (\alpha x) + F$$

   si en la suma cambiamos el representante del segundo dato, el razonamiento es similar.

2. Puesto que las operaciones con clases se efectúan a partir de las correspondientes con sus representantes, se heredan sin más las propiedades asociativa y conmutativa de la adición, así como las cuatro propiedades de la multiplicación por un escalar.

3. La clase
$$0 + F = F$$
sirve de neutro para la adición de clases.

4. Para cada x, las clases
$$x + F, \qquad \text{y} \qquad (-x) + F$$
son opuestas entre sí.

Como veremos a continuación este nuevo espacio vectorial, recibe el nombre de **espacio vectorial cociente** del espacio E mediante el subespacio F.

Definición 1.3. Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E, entonces llamaremos **espacio vectorial cociente** al espacio E/F definido como:
$$E/F = \{\{\dot{x}\}, \quad x \in E\}$$
donde:
$$\{\dot{x}\} = \{y \in E \ / \ x \sim y\} = \{y \in E \ / \ x - y \in F\}$$
Por tanto E/F es un espacio vectorial, para esto definimos las siguientes operaciones:

Se define para $\dot{x} \in E/F$, $\dot{y} \in E/F$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
$$\dot{x} \oplus \dot{y} = \dot{\overline{x + y}} \qquad ; \qquad \dot{\lambda} \odot \dot{x} = \dot{\overline{\lambda.x}}$$
Entonces
$$(E, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$$
es un espacio vectorial.

Probemos que estas operaciones están bien definidas, es decir no dependen del representante.

Sean $\dot{x}, \dot{y} \in E/F$, y sean $x, x_0 \in \dot{x}, \quad y, y_0 \in \dot{y}$.

- **P.D.** $\dot{x} \oplus \dot{y} = \dot{x_0} + \dot{y_0}$

Por hipótesis
$$x \sim x_0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 \in F$$
$$y \sim y_0 \quad \Rightarrow \quad y - y_0 \in F$$
es decir
$$(x + y - x_0 - y_0) \in F$$
$$(x + y) - (x_0 + y_0) \in F$$
$$(x + y) \sim (x_0 + y_0)$$
por tanto
$$\dot{\overline{x + y}} = \dot{\overline{x_0 + y_0}}$$

■

Sea $\dot{x} \in E/F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean $x_0 \in \dot{x}$

- **P.D.** $\lambda \odot \dot{x} = \lambda \odot \dot{x_0}$

como

$$\begin{aligned} x \sim x_0 &\Rightarrow x - x_0 \in F \\ &\Rightarrow \lambda(x - x_0) \in F \quad \text{pues } F \text{ es s.e.v} \\ &\Rightarrow \lambda x - \lambda x_0 \in F \\ &\Rightarrow \lambda x \sim \lambda x_0 \\ &\Rightarrow \overset{\cdot}{\overline{\lambda\, x}} = \overset{\cdot}{\overline{\lambda\, x_0}} \\ &\Rightarrow \lambda \odot \dot{x} = \lambda \odot \dot{x_0} \end{aligned}$$

■

- **P.D.** $\dot{x} \oplus \dot{0} = \dot{x}$

pues

$$\dot{x} \oplus \dot{0} = \overset{\cdot}{\overline{x + 0}} = \dot{x}$$

■

1.7. Ejercicios resueltos:

Sea F un subespacio vectorial de E. Demostrar que:

1. Si $\{u_1 + F, u_2 + F, \ldots, u_r + F\}$ es libre en E/F, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ es libre en E.

   Suponemos que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = 0_E$ **P.D.** $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$.

   por tanto
   $$\dot{\overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p}} = \dot{0}_{E/F}$$
   de donde, se tiene
   $$\alpha_1 \dot{u_1} + \alpha_2 \dot{u_2} + \ldots + \alpha_p \dot{u_p} = \dot{0}_{E/F}{}^{1}$$
   por operaciones en (E/F), entonces
   $$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$$
   pues
   $$\{\dot{u_1}, \dot{u_2}, \ldots, \dot{u_p}\} \qquad \text{es libre.}$$
   en conclusión
   $$\{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \qquad \text{es libre.}$$

   ▲

2. Sea $f : E \to F$, una aplicación lineal, además sea $G = \mathcal{N}(f)$.

   Halle el espacio vectorial E/G.

   Por definición se tiene
   $$E/G = \{x \in E \ / \ x + \mathcal{N}(f)\} = \{\dot{x} \ / \ x \in E\}$$
   además
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= \{y \in E \ / \ (x - y) \in \mathcal{N}(f)\} \\ &= \{y \in E \ / \ f(x - y) = 0\} \\ &= \{y \in E \ / \ f(x) - f(y) = 0\} \\ &= \{y \in E \ / \ f(x) = f(y)\} \end{aligned}$$

   ▲

3. Sea $E = \mathbb{R}^3$ espacio vectorial y f una aplicación lineal definida por
   $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{array}$$
   y sea $G = \mathcal{N}(f)$. Encuentre E/G.

   Primero hallemos una base de G.
   $$\begin{aligned} \mathcal{N}(f) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\} \\ &= \{(2x_2 - 3x_3, x_2, x_3) \ / \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2 \underbrace{(2, 1, 0)}_{v_1} + x_3 \underbrace{(-3, 0, 1)}_{v_2}\} \\ &= gen\{v_1, v_2\} \end{aligned}$$

[1] Recuerde que $\dot{u} = u + F$.

Además

$$\dim G = \dim \mathcal{N}(f) = 2$$

Ahora sea $x = (3, -2, 1)$ por tanto

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \{y \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x - y) \in \mathcal{N}(f)\} \\
&= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) = 0\} \\
&= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(3 - y_1, -2 - y_2, 1 - y_3) = 0\} \\
&= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3 - y_1 - 2(-2 - y_2) + 3(1 - y_3) = 0\}
\end{aligned}$$

es decir

$$\dot{x} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 10\}$$

Por tanto

$$E/G = \{\dot{x} \ / \ x \in E\}$$

y aplicando el teorema de la dimensión se tiene

$$\begin{aligned}
\dim(E/G) &= \dim E - \dim G \\
&= 3 - 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Entonces ahora hallemos una base de E/G.

Para esto se tiene

$$E = [\mathcal{N}(f)]^{\perp} \oplus [\mathcal{N}(f)] \quad ^2$$

de donde

$$[\mathcal{N}(f)]^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in \mathcal{N}(f)\}$$

es decir

$$x \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow \{\langle (x_1, x_2, x_3), (2, 1, 0) \rangle = 0, \quad \text{y} \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (-3, 0, 1) \rangle = 0\}$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \end{array} \right.$$

por tanto

$$x = \{x_1 \underbrace{(1, -2, 3)}_{v}, \quad x_1 \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\{\dot{v}\} \text{ es base de } E/G.$$

▲

4. Sea $E = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Se considera

$$F = \{A = (a_{ij}) \in E \mid \sum_{j=1}^{2} a_{ij} = 0, \quad i = 1, 2 \ ; \qquad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2\}$$

[2]Todo espacio vectorial E, es igual a la suma directa de cualquier subespacio S de E y su complemento $S^{\perp}$. Es decir

$$E = S \oplus S^{\perp}.$$

a) Mostrar que F es un subespacio vectorial de E. Hallar una base y dar la dimensión.

Primero expresando los elementos de F en forma matricial se tiene

$$F = \{A = (a_{ij}) \in E \mid A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\}$$

por tanto

$$F = gen\underbrace{\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{v_1}$$

es decir v_1 es base de F y además

$$\dim F = 1$$

- **P.D.** $0^* \in F$.

  Bastaría tomar $a = 0$, con lo cual

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$$

- **P.D.** $\forall A, B \in F$, se tiene que $A + B \in F$.

  Sea

  $$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} ; \qquad B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}$$

  entonces

  $$A * B = \begin{pmatrix} (a+b) & -(a+b) \\ -(a+b) & (a+b) \end{pmatrix} \in F$$

- **P.D.** $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in F$, se tiene que $\lambda A \in F$.

  Sea

  $$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$$

  entonces

  $$\lambda \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda a \\ -\lambda a & \lambda a \end{pmatrix} \in F, \qquad \lambda a \in \mathbb{R}$$

  Por tanto F es subespacio vectorial de E.

b) Caracterizar los elementos de E/F y dar la dimensión de este espacio cociente.

El conjunto

$$E/F = \{\dot{A} \mid A \in E\}$$

en donde

$$\dot{A} = \{B \in E \mid A \sim B\} = \{B \in E \mid A - B \in F\}$$

es decir

$$\dot{A} = \left\{B \in E \mid B = A + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\dim E/F = \dim E - \dim F = 4 - 1$$

de donde tenemos que

$$\dim E/F = 3$$

▲

5. Sea $E = \mathbb{R}^3$, y el conjunto

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_2 = -3x_1 + 2x_3\}$$

a) Hallar una base y dar la dimensión del subespacio vectorial F.

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in F$, por tanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

de donde, además v_1, v_2 son linealmente independiente.
Por tanto

$$F = gen\{(1, -3, 0), (0, 2, 1)\}$$

y además

$$\dim F = 2.$$

b) Caracterizar los elementos del espacio cociente E/F.

Como

$$E/F = \{\dot{x}, x \in E\}$$

de donde

$$\dot{x} = \{y \in E \mid x \sim y\} = \{y \in E \mid (x - y) \in F\}$$

y además

$$\begin{aligned} (x - y) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) \in F \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \in F \end{aligned}$$

por tanto

$$\dot{x} = \{(y_1, y_2, y_3) \in E \mid x_2 - y_2 = -3(x_1 - y_1) + 2(x_3 - y_3)\}$$

$$\begin{aligned} \dim(E/F) &= \dim E - \dim F \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

▲

1.8. Ejercicios propuestos

1. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y el conjunto

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 - x_2 = 0\}$$

   a) Pruebe que F es un subespacio vectorial de E.
   b) Encuentre las clases de equivalencia de E/F.
   c) Halle una base y la dimensión de E/F.

2. Sea $E = \mathbb{R}^4$ y el conjunto

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid 2x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + 3x_3 - x_4 = 0\}$$

   a) Demostrar que F es un subespacio vectorial de E.
   b) Caracterizar las clases de equivalencia de E/F.
   c) Encontrar la dimensión y una base de E/F.
   d) Encuentre $F^{\perp}$.

3. Sea $E = \wp[t] = \{$ polinomios de variable t $\}$ y sea el subespacio vectorial

$$F = \{ \text{ polinomios divisibles por } t^4 \ \}$$

   a) Encuentre E/F y dar su dimensión.

4. Sea $E = \wp[t] = \{$ polinomios de variable t $\}$ y sea el subespacio vectorial

$$F = \{ \text{ polinomios divisibles por } (t - \tfrac{1}{2})^2\}$$

   a) Caracterizar las clases de equivalencia de E/F.
   b) Encuentre una base de E/F.

5. Sea el espacio vectorial $E = \wp_5[t] = \{$ polinomios de grado ≤ 5 $\}$ y el conjunto

$$F = \{p \in E \mid \int_0^2 = p(t)dt = 0\}$$

   a) Pruebe que F es un subespacio vectorial de E.
   b) Encuentre una base y la dimensión de F.
   c) Caracterizar las clases de equivalencia E/F.
   d) Encuentre una base y la dimensión de E/F.

6. Dada la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = (x - y, y - z) \end{array}$$

a) Encuentre $\mathcal{N}(f)$.

b) Encuentre el espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^3/\mathcal{N}(f)$.

7. Sea E un espacio vectorial y F un subespacio vectorial de E. Se define la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \psi: & E & \rightarrow & E/F \\ & x & \mapsto & \psi(x) = \dot{x} \end{array}$$

a) Pruebe que la aplicación f es lineal.

b) Encuentre el núcleo de ψ.

c) Probar que ψ es sobreyectiva.

d) Si E es de dimensión finita utilizar el **Teorema de la dimensión** para hallar la dimensión de E/F.

8. Determinar una base del subespacio vectorial de $E = \mathbb{R}^4$ dado por

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 = x_2 - 3x_3, \quad x_3 = x_4\}$$

y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^4$.

Calcular también un subespacio suplementario de F y una base del espacio cociente $\mathbb{R}^4/F$.