

ÁLGEBRA LINEAL II Y CUADRÁTICA

Con ejemplos e ilustraciones

Segunda Edición

Diego Huaraca
Jaime Toaquiza
EPN, ECUADOR.

Un aporte a la sociedad.

Índice general

1. Espacio vectorial complejo	5
1.1. Matrices con elementos complejos	5
1.2. Tipos importantes de matrices	6
1.3. Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes complejos	9
1.4. Espacio vectorial euclídeo	10
1.4.1. Producto escalar euclídeo	10
1.4.2. Norma asociada a un producto escalar	12
1.4.3. Ortogonalidad	13
1.4.4. Proceso de Gram-Schmidt	14
1.4.5. Subespacio ortogonal	16
1.4.6. Proyección ortogonal	17
1.4.7. Ángulo entre vectores	20
1.5. Espacio vectorial complejo	21
1.6. Subespacio vectorial complejo	22
1.7. Espacio vectorial hermítico	23
1.7.1. Producto escalar hermítico	23
1.7.2. Desigualdad de Cauchy-Schwartz	25
1.7.3. Otras propiedades del producto hermitico	26
1.8. Valores y Vectores Propios	26
1.9. Espacio Vectorial Producto	27
1.10. Ejercicios Resueltos:	29
1.11. Ejercicios Propuestos	36
2. Espacio vectorial cociente	41
2.1. Relaciones binarias	41
2.2. Relación de equivalencia	42
2.2.1. Clases de equivalencia	43
2.2.2. Partición y equivalencia	45
2.3. Conjunto cociente	45
2.4. Relación de equivalencia en un espacio vectorial	46
2.5. Co - conjunto (<i>coset</i>)	48
2.6. Espacio vectorial cociente	50
2.7. Ejercicios resueltos:	53
2.8. Ejercicios propuestos	57

1

Espacio vectorial complejo

La mayor parte de los temas tratados en este capítulo ya han sido tratados en el curso de Álgebra Lineal I visto como espacios vectoriales reales, en este capítulo haremos una extensión de dichos temas a los espacios vectoriales complejos, comenzaremos haciendo una breve revisión de los tipos de matrices complejas así como la resolución de sistemas lineales complejos para luego adentrarnos en el estudio de los espacios vectoriales complejos.

1.1. Matrices con elementos complejos

DEFINICIÓN 1: MATRIZ COMPLEJA

Se dice que una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

es compleja si sus entradas a_{ij} son números complejos, de modo que podemos realizar operaciones de adición y sustracción entre matrices, así como las operaciones de multiplicación y división por un escalar $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, de manera similar al caso de las matrices reales.

Observación 1.1. Al conjunto de las matrices complejas se las denota como:

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \{A = (a_{jk})_{n \times m} / a_{jk} \in \mathbb{C}\}$$

Ejemplos:

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & -1+2i \\ 3+2i & -2i \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2-i & 3-4i \\ 1-2i & -2+3i \end{bmatrix}$$

$$a) \quad A + B = \begin{bmatrix} (2+i) + (2-i) & (-1+2i) + (3-4i) \\ (3+2i) + (1-2i) & (-2i) + (-2+3i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2-2i \\ 4 & -2+i \end{bmatrix}$$

$$b) A - B = \begin{bmatrix} (2+i) - (2-i) & (-1+2i) - (3-4i) \\ (3+2i) - (1-2i) & (-2i) - (-2+3i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & -4+6i \\ 2+4i & 2-5i \end{bmatrix}$$

$$c) AB = \begin{bmatrix} 2+i & -1+2i \\ 3+2i & -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-i & 3-4i \\ 1-2i & -2+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+4i & 6-12i \\ 4-i & 23-2i \end{bmatrix}$$

$$d) (2+3i)A = \begin{bmatrix} (2+3i).(2+i) & (2+3i).(-1+2i) \\ (2+3i).(3+2i) & (2+3i).(-2i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8i & -8+i \\ 13i & 6-4i \end{bmatrix}$$

▲

1.2. Tipos importantes de matrices

DEFINICIÓN 2: MATRIZ CONJUGADA

Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n \times m}$. Decimos que su *conjugada* es la matriz $\bar{A} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n \times m}$, tal que

$$\bar{A} = (\overline{a_{jk}})_{n \times m}$$

es decir, asignamos a \bar{A} el conjugado de cada elemento de la matriz original A .

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & -1+3i \\ 3+2i & -2i \end{bmatrix}$$

por tanto, su matriz hermitiana es:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2+i & -1-3i \\ 3-2i & 2i \end{bmatrix}$$

▲

■ Propiedades:

Sean $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{m \times n}$, y $C \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n \times k}$, entonces:

- $\overline{\bar{A}} = A$.
- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$.
- $\overline{AC} = \bar{A} \bar{C}$.
- Para cualquier número real k , $\overline{kA} = k \bar{A}$.
- Para cualquier número complejo c , $\overline{cA} = \bar{c} \bar{A}$.
- $(\bar{A})^T = \overline{A^T}$.
- Si A es no singular, entonces $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

Demostración:

Probemos la segunda propiedad:

Consideremos la suma

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

a su vez el conjugado de esta suma será

$$\overline{A + B} = (\overline{a_{ij} + b_{ij}})$$

sabemos de las propiedades de \mathbb{C} que

$$\overline{a_{ij} + b_{ij}} = \overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}$$

Así que

$$\overline{A + B} = (\overline{a_{ij} + b_{ij}}) = (\overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}})$$

Pero esto último es lo mismo que $\overline{A} + \overline{B}$, de modo que

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

■

La sexta propiedad se demuestra similarmente; consideremos cualquier matriz $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n \times m}$, su matriz conjugada será

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{n \times m} = (\overline{a_{ij}})_{n \times m}$$

y su matriz conjugada transpuesta será:

$$\overline{A}^T = (\overline{a_{ji}})_{m \times n}$$

Por otra parte, la transpuesta de A será

$$A^T = (a_{ji})_{m \times n}$$

y su transpuesta conjugada es :

$$\overline{A^T} = (\overline{a_{ji}})_{m \times n}$$

como vemos $\overline{A}^T = \overline{A^T}$.

■

DEFINICIÓN 3: MATRIZ HERMITIANA

Una matriz compleja A de $n \times n$ se dice *hermitiana* si:

$$\overline{A^T} = A, \quad \text{es decir} \quad \overline{a_{jk}} = a_{kj} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Observación 1.2. Toda matriz simétrica real es hermitiana, por tanto podemos considerar a las matrices hermitianas como análogas de las matrices simétricas reales.

Ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix}$$

es hermitiana, pues

$$\overline{A^T} = \overline{\begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix} = A$$

▲

■ **Propiedades:**

- Los términos de la diagonal de una matriz hermitiana son reales
- Toda matriz hermitiana A puede escribirse en la forma $A = B + iC$, donde B es una matriz simétrica ($B = B^T$) y C es una matriz antisimétrica ($C = -C^T$)

Notación:

$$A^* = \overline{A^T} \quad ; \quad A \text{ es hermitiana si } A^* = A$$

DEFINICIÓN 4: MATRIZ UNITARIA

Una matriz compleja A de $n \times n$ se dice *unitaria* si:

$$(\overline{A^T})A = A(\overline{A^T}) = I_n.$$

es decir A es unitaria cuando $\overline{A^T} = A^{-1}$.

Observación 1.3. Toda matriz ortogonal real es unitaria, por tanto podemos considerar las matrices unitarias como análogas de las matrices ortogonales reales.

Ejemplo:

La matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

es unitaria, pues

$$(\overline{A^T})A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = I_2$$

▲

DEFINICIÓN 5: MATRIZ NORMAL

Una matriz compleja A de $n \times n$ se dice *normal* si:

$$(\overline{A^T})A = A(\overline{A^T})$$

Ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}$$

es normal, pues

$$(\overline{A^T})A = A(\overline{A^T}) = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix}$$

▲

Observaciones:

- Si A es unitaria, entonces A es normal.
- Si A es hermitiana, entonces A es normal.

1.3. Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes complejos

Resolución de sistemas lineales

Consideremos el sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

con $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ y $b \in \mathbb{C}^n$.

Las técnicas de resolución de sistemas lineales de ecuaciones con coeficientes reales se transfieren de manera directa a los sistemas lineales de ecuaciones con coeficientes complejos, para esto, basta hacer uso de aritmética compleja.

Las alternativas de resolución de sistemas complejos al igual que los sistemas reales son: Operaciones por filas y las formas escalonadas para tales sistemas por medio de la reducción de Gauss-Jordan.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema lineal mediante una reducción de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} (1+i)x_1 + (2+i)x_2 = 5 \\ (2-2i)x_1 + ix_2 = 1+2i \end{cases}$$

Primero formemos la matriz *aumentada*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & 2+i & 5 \\ 2-2i & i & 1+2i \end{array} \right]$$

multiplicamos la primera fila por $\frac{1}{1+i}$, para obtener

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \\ 2-2i & i & 1+2i \end{array} \right]$$

ahora sumamos $-(2-2i)$ veces la primera fila a la segunda, para obtener

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \\ 0 & -2+5i & 1+12i \end{array} \right]$$

multiplicamos la segunda fila por $\frac{1}{-2+5i}$, para obtener

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \\ 0 & 1 & 2-i \end{array} \right]$$

finalmente sumamos $-(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i)$ veces la segunda fila a la primera, para obtener

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-i \end{array} \right]$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2 - i$.

▲

1.4. Espacio vectorial euclídeo

1.4.1. Producto escalar euclídeo

DEFINICIÓN 6: PRODUCTO ESCALAR EUCLÍDEO

Un producto escalar en un espacio vectorial E sobre \mathbb{R} , es una forma bilineal simétrica y definida positiva.^a

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle,^b \quad \forall x, y \in E$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** Para cualesquiera $x, y, z \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ha de cumplirse

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$x \langle \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$$

2. **Simetría:** Para cualesquiera $x, y \in E$, se tendrá

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

3. **Definida positiva:** Para cualquier $x \in E$ no nulo

$$\langle x, x \rangle > 0$$

^aVer Capítulo de formas bilineales y formas cuadráticas.

^bLa expresión $\langle x, y \rangle$ se denomina producto escalar de x y y .

DEFINICIÓN 7: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Al par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, formado por un espacio vectorial junto con un producto escalar se le denomina **espacio vectorial euclídeo**.

Proposición 1.1. En un espacio vectorial euclídeo $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $\langle x, 0 \rangle = 0$, para cualquier vector $x \in E$.
2. $\langle x, x \rangle = 0$, si y sólo si $x = 0$. De hecho si $x \neq 0$, entonces $\langle x, x \rangle > 0$.

Ejemplos:

1. El producto escalar usual (*canónico o euclídeo*) en \mathbb{R}^n .

Dados $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define el siguiente producto escalar en \mathbb{R}^n :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. He aquí un ejemplo de un producto escalar (*distinto del euclídeo*) definido en \mathbb{R}^3 .

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 5x_2 y_2 + 2x_3 y_3$$

3. En \mathbb{R}^3 con el producto escalar euclídeo obtenemos

$$\langle (2, 1, -3), (5, 2, 4) \rangle = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 10 + 2 - 12 = 0$$

y con el producto del literal 2. obtenemos

$$\langle (2, 1, -3), (5, 2, 4) \rangle = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \cdot 4 = 10 + 10 - 24 = -4$$

▲

Una forma de caracterizar a un producto escalar es la siguiente

Proposición 1.2. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, con E un espacio vectorial real, y sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E . Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar si y sólo si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva (*esto último significa que los menores principales de la matriz sean todos positivos*).

Ejemplos:

Determinar si las siguientes aplicaciones bilineales son o no productos escalares.

1. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_2$ en \mathbb{R}^2 .

Como la matriz que se obtiene tomando la base canónica de \mathbb{R}^2 es

$$A = \begin{pmatrix} \langle (1, 0), (1, 0) \rangle & \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \\ \langle (0, 1), (1, 0) \rangle & \langle (0, 1), (0, 1) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y ésta matriz no es simétrica, se tiene que no es un producto escalar.

2. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$ en \mathbb{R}^2 .

La matriz que se obtiene tomando la base canónica de \mathbb{R}^2 es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que ésta es simétrica. Los determinantes principales valen $\det A_1 = 1$ y $\det A = 0$, luego no es definida positiva. Así no es un producto escalar.

3. $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + 5x_2y_2$ en \mathbb{R}^3 .

Tomando la base canónica de \mathbb{R}^3 , obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y ésta es simétrica.

Los menores principales son:

$$A_1 = 1 > 0$$

$$A_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$A_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

luego no es definida positiva. Así no es un producto escalar.

4. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$ en \mathbb{R}^2 .

A partir de la base canónica de \mathbb{R}^2 se obtiene la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

que es simétrica.

Los menores principales son

$$A_1 = 4 > 0$$

$$A_2 = \det \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

luego es definida positiva.

Así la aplicación bilineal es un producto escalar.

▲

1.4.2. Norma asociada a un producto escalar

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se denomina **norma** asociada al producto escalar anterior a la aplicación

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

definida por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

que cumple:

1. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*desigualdad triangular*).

A este valor lo llamaremos **norma** (*módulo o longitud*) del vector x .

Se llama espacio vectorial **normado** a un espacio vectorial dotado de una norma.

Observación 1.4. La norma asociada al producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^n está dada para un vector

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

por

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

la llamaremos **norma euclídea**.

Se dice que un vector es **unitario** cuando tiene norma 1. A partir de cualquier vector no nulo siempre puede construirse un vector unitario dividiendo el vector para su norma.

Ejemplos:

1. Con el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 , la norma del vector $x = (2, -3, 0)$ es igual a:

$$\|x\| = \|(2, -3, 0)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}.$$

Entonces el vector

$$\frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right)$$

es unitario, pues

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13} + 0} = \sqrt{\frac{13}{13}} = \sqrt{1} = 1.$$

2. Utilizando la norma asociada al producto escalar en \mathbb{R}^2 dado mediante la expresión

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

la norma del vector $x = (2, 1)$ es

$$\|x\| = \|(2, 1)\| = \sqrt{\langle (2, 1), (2, 1) \rangle} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt{10}$$

mientras que la norma euclídea del mismo vector es

$$\|(2, 1)\| = \sqrt{\langle (2, 1), (2, 1) \rangle} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

▲

1.4.3. Ortogonalidad

Se dice que dos vectores x y y de un espacio vectorial euclídeo E son **ortogonales** (o *perpendiculares*) cuando

$$\langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x, y \in E.$$

Un sistema de vectores se dice que es un sistema **ortogonal** de vectores cuando los vectores son ortogonales dos a dos. Si además todos los vectores son unitarios entonces se dirá que el sistema es **ortonormal**.

Una base de un espacio vectorial euclídeo E que además es un sistema ortogonal (*respectivamente ortonormal*) de vectores se llamará **base ortogonal** de E (*respectivamente base ortonormal*).

La **base canónica** de \mathbb{R}^n es siempre una base **ortonormal** de este espacio vectorial, si estamos considerando el producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^n .

Proposición 1.3. En un espacio vectorial euclídeo se verifican las siguientes propiedades:

1. El vector 0 es ortogonal a todos los vectores.
2. Un sistema ortogonal de vectores no nulos es un sistema linealmente independientes de vectores. En consecuencia un sistema ortonormal de vectores es un sistema linealmente independientes de vectores.
3. Si tenemos una base ortonormal podemos multiplicar cada vector por un escalar no nulo que el resultado sigue siendo una base ortonormal.
4. Si en una base ortogonal de un espacio vectorial euclídeo de E dividimos cada vector por su norma, entonces el sistema resultante de vectores es una base ortonormal de E .

1.4.4. Proceso de Gram-Schmidt

El proceso de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal $T = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ para un subespacio no nulo W de \mathbb{R}^n , dada una base $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ para W , es como sigue.

- **Paso 1.** Haga $v_1 = u_1$.
- **Paso 2.** Calcule los vectores v_2, v_3, \dots, v_m de manera sucesiva, uno a la vez, por medio de la fórmula

$$v_i = u_i - \left(\frac{u_i \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \right) v_1 - \left(\frac{u_i \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \right) v_2 - \dots - \left(\frac{u_i \cdot v_{i-1}}{v_{i-1} \cdot v_{i-1}} \right) v_{i-1}$$

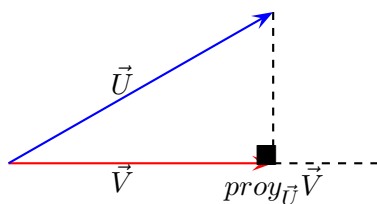
El conjunto de vectores $T^* = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un conjunto ortogonal.

- **Paso 3.** Haga

$$w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i \quad (1 \leq i \leq m).$$

Entonces $T = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es una base ortonormal para W .

Proyección de un vector sobre la recta generada por otro vector



$$\boxed{\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \vec{v}}$$

Ejemplos:

1. Con el producto escalar usual hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 a partir de la base

$$\underbrace{(1, 1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(2, 1, 0)}_{v_2}, \underbrace{(1, 0, 0)}_{v_3}$$

En primer lugar pongamos

$$w_1 = v_1 = (1, 1, 1)$$

Ahora ponemos

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

De modo que obtenemos que

$$w_2 = (2, 1, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$$

Finalmente necesitamos hallar un vector

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

Entonces

$$w_3 = (1, 0, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \frac{1}{6}(1, -2, 1)$$

Así hemos obtenido una base ortogonal¹ de \mathbb{R}^3 :

$$\{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})\}$$

Como lo que se pedía era una base ortonormal es suficiente con dividir cada uno de estos vectores por su norma, y obtenemos la base

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

2. Utilizando el producto escalar en \mathbb{R}^2 dado mediante la expresión

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

hallemos una base ortonormal a partir de la base

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

Tomamos

$$w_1 = (1, 0)$$

Ahora consideramos

$$w_2 = (0, 1) - \frac{\langle (0, 1), (1, 0) \rangle}{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} (1, 0)$$

De este modo obtenemos que

$$w_2 = (0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Así hemos obtenido una base ortogonal de \mathbb{R}^2 :

$$\{(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 1 \right)\}$$

Como lo que se pedía era una base ortonormal es suficiente con dividir cada uno de estos vectores por su norma y se tiene que

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1} = 2$$

y además

$$\left\| \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right\| = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Finalmente obtenemos la base ortonormal de \mathbb{R}^2 (con el producto escalar establecido inicialmente):

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

▲

¹Utilizamos el proceso de Gram-Schmidt, para obtener una base ortogonal.

1.4.5. Subespacio ortogonal

Proposición 1.4. Sea E un espacio vectorial euclídeo y S un subespacio de E .

Entonces el conjunto de los vectores de E que son ortogonales a todos los vectores de S es un espacio vectorial E , llamado el **subespacio ortogonal** de E , y será denotado por S^\perp . Es decir, tenemos que

$$S^\perp = \{x \in E / \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in S\}.$$

Observación 1.5. Además se tiene que

$$E = S \oplus S^\perp$$

es suma directa. Por tanto

$$\dim S + \dim S^\perp = \dim(S + S^\perp).$$

En las condiciones anteriores, conocida una base de S , se cumple que un vector $x \in E$ es ortogonal a todos los vectores de S si y sólo si es ortogonal a todos los vectores de dicha base.

A partir de ahí puede obtenerse más o menos sencillamente S^\perp .

Veámoslo en el caso más sencillo en que $E = \mathbb{R}^n$.

Un vector $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pertenece a S^\perp si y sólo si es ortogonal a todos los vectores de la base

$$B = \{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})\}$$

de S , es decir, si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones (*que serán las ecuaciones implícitas de S^\perp*).

$$\begin{aligned} \langle (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle &= 0 \\ \langle (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle &= 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \langle (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

que dependerán del producto escalar con el que estemos. En el caso del producto escalar euclídeo las ecuaciones de S^\perp quedarán así:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

En el caso del producto escalar euclídeo, de modo simétrico puede obtenerse que si el subespacio inicial está dado por ecuaciones implícitas entonces el subespacio ortogonal tiene como sistema generador las filas de la matriz de coeficientes del sistema anterior.

Ejemplos:

1. Supongamos que tenemos el subespacio de \mathbb{R}^4 siguiente:

$$S = \langle (1, -2, 0, 3), (-3, 0, 2, 0) \rangle$$

Entonces, respecto al producto escalar euclídeo tenemos que S^\perp tiene por ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 2z = 0 \end{cases}$$

2. Supongamos que tenemos el subespacio de \mathbb{R}^3 siguiente

$$S = \{(x, y, z) / -x + 2y - z = 0\}$$

Entonces, respecto al producto escalar euclídeo tenemos que

$$S^\perp = \langle (-1, 2, -2) \rangle$$

3. Supongamos que tenemos el subespacio de \mathbb{R}^3 siguiente

$$S = \langle (1, 3, -2), (-1, 0, 3) \rangle$$

Entonces, respecto al producto escalar siguiente

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3$$

tenemos que S^\perp tiene por ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 3, -2) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3), (-1, 0, 3) \rangle = 0 \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 0 \\ -x + 12z = 0 \end{cases}$$

▲

1.4.6. Proyección ortogonal

Sea S un subespacio de un espacio vectorial euclídeo E . Debido a que E se descompone como suma directa de S y su ortogonal S^\perp , todo vector del espacio puede ponerse de modo único como suma de un vector de S y otro de S^\perp .

Sea $x \in E$ y supongamos que tenemos

$$x = x_1 + x_2$$

con $x_1 \in S$ y $x_2 \in S^\perp$.

Entonces a x_1 lo llamaremos **proyección ortogonal** de x sobre S . Además, este vector cumple que

$$x - x_1 \in S^\perp$$

y es el único de todos los vectores de S que cumple esta propiedad, es decir, si $y \in S$ cumple que

$$x - y \in S^\perp$$

entonces $y = x_1$ (la proyección ortogonal de x sobre S).

Veamos a continuación un método para hallar la **proyección ortogonal** de un vector sobre un subespacio.

Sea $x \in E$ y además

$$\dim S \leq \dim E$$

Supongamos que tenemos una base ortogonal

$$B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

de S . (siempre es posible hallar a partir de una base cualquiera mediante el método de Gram - Schmidt). Entonces

$$x = x_1 + x_2$$

donde x_1 es la proyección ortogonal de x sobre S y $x_2 \in S^\perp$.

Entonces si x_1 se escribe como combinación lineal de vectores linealmente independientes

$$x_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$$

Si multiplicamos escalarmente x por w_i , a partir de la igualdad

$$x = x_1 + x_2$$

obtenemos que

$$x.w_i = x_1.w_i + x_2.w_i = \alpha_1 w_1.w_i + \alpha_2 w_2.w_i + \dots + \alpha_n w_n.w_i = \alpha_i w_i.w_i$$

ahora observemos que $\langle x_2, w_i \rangle = 0$, ya que $x_2 \in S^\perp$ y $w_i \in S$; igualmente $\langle w_j, w_i \rangle = 0$ si $i \neq j$, ya que son vectores de una base ortogonal.

De aquí despejamos el valor del escalar

$$\alpha_i = \frac{\langle x, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces tenemos determinado x_1 , la proyección ortogonal de x sobre S , sustituyendo el valor de cada α_i , es decir

$$x_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = \frac{\langle x, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle x, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 + \dots + \frac{\langle x, w_n \rangle}{\langle w_n, w_n \rangle} w_n.$$

Si la base B es además ortonormal entonces para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\langle w_i, w_i \rangle = \|w_i\|^2 = 1$$

con lo que la fórmula de los escalares queda más sencillamente así:

$$\alpha_i = \langle x, w_i \rangle$$

y por tanto

$$x_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = \langle x, w_1 \rangle w_1 + \langle x, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle x, w_n \rangle w_n.$$

Proposición 1.5. Hemos elegido una base ortogonal u ortonormal para que el cálculo necesario para hallar los escalares α_i sea lo más sencillo posible. Pero previo a esto probablemente sea necesario hallar esta base ortogonal u ortonormal, lo cual requiere también operaciones.

Es posible inicialmente coger una base cualquiera de S (*no necesariamente ortogonal ni ortonormal*) y realizar, como hemos hecho anteriormente, los productos escalares de un modo similar al anterior. La diferencia está en que ahora no podemos despejar directamente los valores de α_i que ahora resultarían, pues su valor se hallará resolviendo el sistema de ecuaciones que aparece; ya que éstos serán las incógnitas de este sistema.

También es cierto que de esta manera nos ahorramos aplicar el método de Gram - Schmidt a la hora de hallar la base ortogonal. Así que puede elegirse la base de la forma que cada cual considere oportuna.

Ejemplo:

1. Consideremos el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, y el subespacio vectorial

$$S = \text{gen}\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 2, 1)\}$$

y el vector

$$x = (0, 1, 3, 0)$$

Hallar la proyección ortogonal de x sobre S .

Sabemos que

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{donde } x_1 \in S, \quad x_2 \in S^\perp$$

En este caso x_1 es la proyección ortogonal de x sobre S .

Tenemos que hallar una base de S . Pero en este caso es inmediato que los vectores

$$y_1 = (1, 0, 0, 1) \quad \text{y} \quad y_2 = (1, -1, 2, 1)$$

nos sirven como base de S .

Entonces sabemos que

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Pues bien si multiplicamos escalarmente x con cada uno de estos vectores obtenemos por un lado que

$$\langle x, y_1 \rangle = (x_1 + x_2) \cdot y_1 = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \cdot y_1 + 0 = \alpha_1 \langle y_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle y_2, y_1 \rangle$$

de donde, calculando los productos escalares

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle (0, 1, 3, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle = 0$$

$$\langle y_1, y_1 \rangle = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle = 2$$

y además

$$\langle y_2, y_1 \rangle = \langle (1, -1, 2, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle = 2$$

de donde deducimos que

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

y por otra parte

$$\langle x, y_2 \rangle = (x_1 + x_2) \cdot y_2 = \langle x_1, y_2 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \cdot y_2 + 0 = \alpha_1 \langle y_1, y_2 \rangle + \alpha_2 \langle y_2, y_2 \rangle$$

de donde hallando ahora los productos

$$\langle x, y_2 \rangle = \langle (0, 1, 3, 0), (1, -1, 2, 1) \rangle = 5$$

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle (1, 0, 0, 1), (1, -1, 2, 1) \rangle = 2$$

y también

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \langle (1, -1, 2, 1), (1, -1, 2, 1) \rangle = 7$$

y deducimos que

$$2\alpha_1 + 7\alpha_2 = 5$$

Entonces resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Así, la proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio S es

$$x_1 = -1 \cdot (1, 0, 0, 1) + 1 \cdot (1, -1, 2, 1) = (0, -1, 2, 0)$$

Otra forma de hacerlo sería a partir de una base ortogonal de S . Utilizando el método de Gram - Schmidt.

▲

1.4.7. Ángulo entre vectores

DEFINICIÓN 8: ÁNGULO ENTRE VECTORES

Sea E un espacio euclídeo. Dados dos vectores no nulos $x, y \in E$, definimos el **ángulo** que forman como el valor $\alpha \in [0, \pi]$ verificando:

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Por la desigualdad de Schwartz

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Por tanto en el intervalo $[0, \pi]$ sólo existe un ángulo cuyo coseno sea el anterior.

Con esta definición de ángulo se verifica:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos \alpha$$

Ejemplo:

1. Si $u = (2, 4)$ y $v = (-1, 2)$ entonces

$$\langle u, v \rangle = (2)(-1) + (4)(2) = 6$$

Además

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

y

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

De aquí que

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{20} \sqrt{5}} = 0,6$$

Podemos obtener una aproximación al ángulo por medio de una calculadora o con la ayuda de una tabla de cosenos; en cualquier caso, encontraremos que α es aproximadamente 0,93 radianes.

1.5. Espacio vectorial complejo

DEFINICIÓN 9: ESPACIO VECTORIAL COMPLEJO

Un espacio vectorial complejo se define exactamente como un espacio vectorial real, es decir, es una terna formada por un conjunto E y dos operaciones \oplus y \odot que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si u y v son elementos de E , entonces $u + v$ está en E . *(cerrado bajo la suma.)*
2. $u \oplus v = v \oplus u$, para todo $u, v \in E$.
3. $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ para todo $u, v, w \in E$.
4. Existe un elemento 0^* en E , tal que $u \oplus 0^* = 0^* \oplus u = u$, para todo $u \in E$.
5. Para todo $u \in E$, existe un elemento $-u \in E$ tal que $u \oplus -u = 0$.
6. Si u es elemento de E y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha \odot u$ está en E . *(cerrado bajo el producto.)*
7. $\alpha \odot (u + v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$, para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$, para todo $u \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha\beta) \odot u$, para todo $u \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
10. Existe un elemento $1^* \in E$, tal que $1^* \odot u = u$, para todo $u \in E$.

Observación 1.6. Casi todos los espacios vectoriales reales, tienen sus equivalentes espacios vectoriales complejos.

Notación:

$$(E, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$$

representa el conjunto de vectores de E , en el espacio vectorial complejo.

Ejemplo:

1. Consideremos \mathbb{C}^n el conjunto de todas las matrices $n \times 1$.

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} / z_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

con entradas complejas.

Sean \oplus la suma matricial, y la operación \odot la multiplicación de una matriz por un número complejo.

Podemos verificar que si

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{bmatrix}$$

y además

$$\alpha \odot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{bmatrix}$$

tenemos que \mathbb{C}^n es un espacio vectorial complejo mediante las operaciones de matrices antes estudiadas y las propiedades de la aritmética compleja, además \mathbb{C}^n tiene dimensión n .

2. Sea $C[a, b]$, el conjunto de funciones con valores complejos, continuas en el intervalo $[a, b]$, es decir todas las funciones de la forma

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones con valores reales, continuas en $[a, b]$, con la operación \oplus definida como

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$$

y la operación \odot definida como

$$(\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t)$$

para cualquier número complejo α .

Forma un espacio vectorial complejo.

3. El espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos.

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}}[t] = \mathbb{C}[t] = \{p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_k t^k \mid a_k \in \mathbb{C}\}$$

con la suma de polinomios como \oplus y la multiplicación de un polinomio por un número complejo como \odot , forma un espacio vectorial complejo.

▲

Observación:

$$(\mathbb{C}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$$

es un espacio vectorial real de dimensión 2 y su base es:

$$B = \{1, i\}$$

1.6. Subespacio vectorial complejo

DEFINICIÓN 10: SUBESPACIO VECTORIAL COMPLEJO

Sea E un espacio vectorial complejo y S un subconjunto no vacío de E . Si S es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de E , entonces S es un subespacio vectorial complejo de E .

Teorema 1.1. Sea E un espacio vectorial complejo con las operaciones \oplus y \odot , sea S un subconjunto no vacío de E . Entonces S es un subespacio vectorial complejo de E si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

- a) Si $u, v \in S$, entonces $u \oplus v \in S$.
- b) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $u \in S$, entonces $\alpha \odot u \in S$.

Ejemplo:

1. Sea S el conjunto de vectores en \mathbb{C}^3 de la forma $(a, 0, b)$, donde a y b son números complejos.

Por tanto

$$(a, 0, b) \oplus (c, 0, d) = (a + c, 0, b + d)$$

pertenece a S , y para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda \odot (a, 0, b) = (\lambda a, 0, \lambda b)$$

pertenece a S .

Por tanto, S es un subespacio vectorial complejo de \mathbb{C}^3 .

2. Sea S el conjunto de todos los vectores en $\mathcal{M}_{n \times n}$ con entradas exclusivamente.

Si

$$A = (a_{ij}) \quad \text{y} \quad B = (b_{ij})$$

pertenecen a S , entonces también

$$A \oplus B = (a_{ij} + b_{ij})$$

pues a_{kj} y b_{kj} son reales, su suma también es real.

Sin embargo si $\lambda \in \mathbb{C}$ y A pertenece a S , entonces

$$\lambda \odot A = \lambda A$$

puede tener entradas λa_{kj} que no necesariamente son números reales.

A partir de esto podemos concluir que λA no pertenece necesariamente a S , de modo que S no es un subespacio vectorial complejo.

▲

1.7. Espacio vectorial hermítico

1.7.1. Producto escalar hermítico

DEFINICIÓN 11: PRODUCTO ESCALAR HERMÍTICO

Un producto escalar hermítico en un espacio vectorial complejo E , es una forma sesquilineal hermítica

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$$

que cumple:

$$\forall x, y, z \in E, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$\text{i) } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\text{ii) } \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\text{iii) } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{iv) } \langle x, x \rangle \geq 0$$

Observaciones:

- (i) y (ii) definen la linealidad a la izquierda.
- (iii) simetría hermitica.

Si se tiene simetría hermitica

$$\overline{\langle x, x \rangle} = \langle x, x \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x, x \rangle \text{ es real}$$

DEFINICIÓN 12

Sea E un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar hermitico^a, entonces se dice que E es un espacio vectorial hermitico.

^aEn algunos textos de Álgebra Lineal al espacio vectorial hermitico también se lo llama espacio vectorial hermitiano.

Ejemplos:

1. En \mathbb{C}^n , el producto hermitiano se define como:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}, \quad \text{donde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

2. Para el conjunto de las funciones continuas:

$$\mathcal{F}([a, b], \mathbb{C}) = \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \text{ es continua.}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)} dt.$$

3. En $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(\underbrace{B^*}_{n \times m} \cdot \underbrace{A}_{m \times n}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$$

4. En \mathbb{C}^n , si A es una matriz hermitiana ($A = \overline{A^T}$), tal que $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.

Entonces

$$\langle x, y \rangle = x^T A \overline{y}$$

es el producto escalar complejo de \mathbb{C}^n

Los ejemplos anteriores son productos escalares hermiticos, los mismos que va a ser tratados en este capítulo, ahora veamos ejemplos numéricos de dichos productos.

Ejemplo:

1. Sea $[a, b] = [0, 1]$, $f(t) = t^2 + ie^t$ y $g(t) = t + 2i$, calcule $\langle f, g \rangle$

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^1 (t^2 + ie^t)(\overline{t + 2i}) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + ie^t)(t - 2i) dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2e^t) dt + i \int_0^1 (te^t - 2t^2) dt \\ &= \frac{1}{4} + 2e - \frac{2}{3}i\end{aligned}$$

2. Sea

$$u = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 3+i \end{bmatrix} \quad ; \quad v = \begin{bmatrix} 6-2i \\ 2i \\ -1+i \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= u^T \bar{v} \\ &= (1+i)\overline{(6-2i)} + (2-i)\overline{(2i)} + (3+i)\overline{(-1+i)} \\ &= (1+i)(6+2i) + (2-i)(-2i) + (3+i)(-1-i) \\ &= 0\end{aligned}$$

de modo que u y v son ortogonales.

Además,

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} \\ &= \sqrt{u^T \bar{u}} \\ &= \sqrt{(1+i)(1-i) + (2-i)(2+i) + (3+i)(3-i)} \\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

▲

1.7.2. Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Una de las desigualdades más utilizadas e importantes en Álgebra Lineal y Análisis Matemático, sin duda es **Cauchy - Schwartz**, la misma que establece que

$\forall x, y \in E$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

Demostración:

Sea $y \neq 0$ y consideremos

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x - \langle x, y \rangle ty\| = \langle x - \langle x, y \rangle ty, x - \langle x, y \rangle ty \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, \langle x, y \rangle ty \rangle - \langle \langle x, y \rangle ty, x \rangle + \langle \langle x, y \rangle ty, \langle x, y \rangle ty \rangle \\ 0 &\leq \|x\|^2 - \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle t - \langle x, y \rangle \overline{\langle y, x \rangle} t + \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \langle y, y \rangle t^2 \\ 0 &\leq \|x\|^2 - 2|\langle x, y \rangle|^2 t + |\langle x, y \rangle|^2 \|y\|^2 t^2\end{aligned}$$

si

$$4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2 |\langle x, y \rangle|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

se sigue que

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

■

1.7.3. Otras propiedades del producto hermitico

■ **Teorema de Pitágoras**

Sean $x, y \in E$ tal que

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

RECÍPROCO

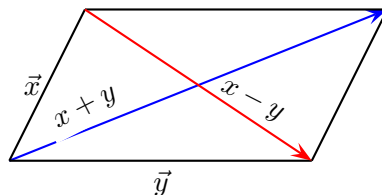
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = 0$$

$$\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = 0 \quad \nRightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0$$

El recíproco no siempre se cumple.

■ **Identidad del paralelogramo**



$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

■ **Identidad de polarización**

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{1}{4}i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

1.8. Valores y Vectores Propios

Sea una matriz compleja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A y \vec{v} es el vector asociado a A si:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = 0, \quad \text{con } \vec{v} \neq 0$$

por tanto

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Si λ es el valor propio de A con \vec{v} como vector propio asociado, entonces $\bar{\lambda}$ es el valor propio de \bar{A} con $\bar{\vec{v}}$ como vector asociado.

Los valores propios de \bar{A}^T son los valores propios de \bar{A} .

■ **Propiedades:**

- Si A es una matriz hermitiana, todos sus valores propios de A son reales. Además, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.
- Si A es una matriz hermitiana, existe una matriz U tal que $U^{-1}AU = D$, es una matriz diagonal. Los valores propios de A están sobre la diagonal principal de D .

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Si A es una matriz normal, existe una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU = D$, es una matriz diagonal. Recíprocamente, si A es una matriz para la cual existe una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU = D$, es una matriz diagonal, A es una matriz normal.

■ **Ejemplo:**

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

determine una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, es una matriz diagonal.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 1 + i^2 = 0$$

$$\overline{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A \text{ es hermitiana}$$

ahora calculemos los valores propios de A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & i \\ -i & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + i^2$$

$$(1 - \lambda)^2 + i^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Primero calculemos el vector propio \vec{v}_1 , asociado al valor propio $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & : & 0 \\ -i & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

ahora el vector propio \vec{v}_2 , asociado al valor propio $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & i & : & 0 \\ -i & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

▲

1.9. Espacio Vectorial Producto

Sean E y F dos espacios vectoriales definidos para el mismo campo escalar \mathbb{K} .

Formemos el producto cartesiano de ambos espacios vectoriales. Si definimos en dicho conjunto las operaciones por componentes, obtenemos un nuevo espacio vectorial.

$$E \times F = \{(e, f) / e \in E, f \in F\}$$

dotado de las operaciones para $(e_1, f_1), (e_2, f_2) \in E \times F, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\oplus : (e_1, f_1) \oplus (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$$

$$\odot : \lambda \odot (e_1, f_1) = (\lambda.e_1, \lambda.f_1)$$

■ **Propiedades:**

Si E y F son de dimensión finita, entonces $E \times F$ es de dimensión finita.

Además si

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad \text{base de } E$$

$$\{f_1, f_2, \dots, f_m\} \quad \text{base de } F$$

Sea $(x, y) \in E \times F$, entonces

$$x \in E, \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$y \in F, \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{j=1}^m y_j f_j$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^m y_j f_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^m y_j f_j \right)$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^m y_j (0_E, f_j)$$

donde

$$B = \left\{ (e_i, 0_F), (0_E, f_j) \mid \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \right\} \quad \text{genera } E \times F$$

ahora, probemos que B es linealmente independiente.

Sea

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^m \beta_j (0_E, f_j) = (0_E, 0_F)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^m \beta_j f_j \right) = (0_E, 0_F)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E \quad , \quad \sum_{j=1}^m \beta_j f_j = 0_F$$

Como $\{e_i\}$ es base de E , entonces $\alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ y además $\{f_j\}$ es base de F , entonces $\beta_j = 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$, entonces B es linealmente independiente *i.e la base es libre*.

Por tanto,

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

$E \times \{0\}$ y $\{0\} \times F$ son subespacios vectoriales suplementarios del producto que podemos identificar con E y F respectivamente.

■ **Observaciones:**

Sean

$$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$$

espacios vectoriales euclidianos o hermitianos.

Si para $E \times F$ se define $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{E \times F}$.

$$\langle \langle (e_1, f_1), (e_2, f_2) \rangle \rangle_{E \times F} = \langle e_1, e_2 \rangle_E + \langle f_1, f_2 \rangle_F$$

entonces $(E \times F, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{E \times F})$ es un espacio vectorial euclideo o hermítico respectivamente.

1.10. Ejercicios Resueltos:

1. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Hallar el determinante de A .

$$\det A = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i \cdot (-i^3) = i^4 = 1$$

b) Calcular A^2 .

$$A.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

c) Si A es inversible hallar A^{-1}

Dado que $A.A = I_4$, se tiene que $A = I_4 A^{-1}$, es decir $A = A^{-1}$, por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) La matriz A es \mathcal{L} hermitiana? \mathcal{L} normal? \mathcal{L} unitaria?.

Mostremos que A es hermitiana

$$\overline{A^T} = \overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Ahora como A es hermitiana, tenemos que A es normal.

Y además $A.A = I$ por c) y $A = \overline{A^T}$, tenemos que $A.\overline{A^T} = A.A^* = I = A^*.A$, entonces A es unitaria.

e) Calcular sus valores y vectores propios

$$p(\lambda) = (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & i \\ 0 & -\lambda & -i & 0 \\ 0 & i & -\lambda & 0 \\ -i & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1, \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 1 \end{bmatrix}$$

calculemos ahora los vectores propios asociados a los valores propios encontrados.

Reemplazamos el valor $\lambda_{1,2} = -1$, en la matriz, y tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i & : & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & : & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & : & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

sumamos i veces la primera a la cuarta fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

sumamos $-i$ veces la segunda a la tercera fila.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

por lo tanto

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix_4 \\ ix_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazamos el valor $\lambda_{3,4} = 1$, en la matriz, y tenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

multiplicamos por -1 , la matriz y obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

sumamos $-i$ veces la primera a la cuarta fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

sumamos i veces la segunda a la tercera fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

por lo tanto

$$u = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iy_4 \\ -iy_3 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = y_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_4 \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▲

2. Sean $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ dos espacios hermitianos. Se define la aplicación $b : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$b(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) = \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2$$

- Si $H_1 = \mathbb{C}^2$ y $H_2 = \wp_2(\mathbb{C})$ con los productos escalares usuales $\langle a, b \rangle_1 = a^T \bar{b}$ y $\langle p, q \rangle_2 = \int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt$ calcular $b(u, v)$ si:

$$u = ((1 - 2i, 3i), (3 - i) - 5t^2) \quad y \quad v = ((-i, 1 + i), 2 - it).$$

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(((1 - 2i, 3i), (3 - i) - 5t^2), ((-i, 1 + i), 2 - it)) \\ &= \langle (1 - 2i, 3i), (-i, 1 + i) \rangle_1 + \langle (3 - i) - 5t^2, 2 - it \rangle_2 \\ &= (1 - 2i, 3i) \begin{pmatrix} i \\ 1 - i \end{pmatrix} + \int_0^1 [(3 - i) - 5t^2] \overline{(2 - it)} dt \\ &= i + 2 + 3i + 3 + \int_0^1 [2(3 - i) - 10t^2 + it(3 - i) - 5it^3] dt \\ &= 5 + 4i + \left(2(3 - i)t - \frac{10}{3}t^3 + \frac{i}{2}(3 - i)t^2 - \frac{5}{4}it^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= 5 + 4i + 6 - 2i - \frac{10}{3} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{5}{4}i \\ &= \frac{43}{6} + \frac{9}{4}i \end{aligned}$$

▲

3. Sea $H = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix}, u, v \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Los elementos de H se dicen cuaterniones.

a) Demostrar que H es un subespacio vectorial real de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dar una base y su dimensión.

- **P.D.** H no es vacío.

Para mostrar que H no es vacío, basta tomar $u = v = 0$, con lo cual la matriz nula pertenece a H .

- **P.D.** $\forall u, v, w, z \in \mathbb{C}, \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & z \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \in H$.

$$\begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & z \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + w & v + z \\ \bar{u} + \bar{w} & \bar{v} + \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + w & v + z \\ \overline{u + w} & \overline{v + z} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} u + w & v + z \\ \overline{u + w} & \overline{v + z} \end{bmatrix} \in H$$

- **P.D.** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{C} \quad \lambda \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} \in H.$

$$\lambda \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u & \lambda v \\ \lambda \bar{u} & \lambda \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u & \lambda v \\ \overline{\lambda u} & \overline{\lambda v} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \lambda u & \lambda v \\ \overline{\lambda u} & \overline{\lambda v} \end{bmatrix} \in H$$

Ahora hallemos una base para H , tomemos $\begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} \in H$, por tanto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ a-ib & c-id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ a & c \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b & d \\ -b & -d \end{bmatrix} \\ &= a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{m_1} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{m_2} + b \underbrace{\begin{bmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix}}_{m_3} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & -i \end{bmatrix}}_{m_4} \end{aligned}$$

Por tanto

$$B = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$$

es una base de H , y su dimensión es

$$\dim B = 4$$

b) \mathcal{L} Es H un subespacio vectorial complejo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Probemos que H no es un subespacio vectorial complejo, para ello tomemos $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo tanto sabemos que $\bar{\lambda} \neq \lambda$ y mostremos que

$$\lambda \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} \notin H$$

es decir el subespacio vectorial complejo no es cerrado bajo el producto.

$$\lambda \begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u & \lambda v \\ \lambda \bar{u} & \lambda \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u & \lambda v \\ \overline{\lambda u} & \overline{\lambda v} \end{bmatrix}$$

de donde, observamos que $\bar{\lambda}u \neq \lambda u$, por lo tanto H no es un subespacio vectorial complejo.

c) \mathcal{L} El producto de cuaterniones es un cuaternión ?

Suponemos que $\begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} w & z \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$ son dos cuaterniones donde $u, v, w, z \in \mathbb{C}$.

Por tanto

$$\begin{bmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & z \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uw + v\bar{w} & uz + v\bar{z} \\ \bar{u}w + \bar{v}\bar{w} & \bar{u}z + \bar{v}\bar{z} \end{bmatrix}$$

de donde claramente se observa que

$$\overline{uw + v\bar{w}} = \bar{u}\bar{w} + \bar{v}w \neq \bar{u}w + \bar{v}\bar{w}$$

por lo tanto concluimos que el producto de cuaterniones no es un cuaternión en general.

▲

4. Verificar si la aplicación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z = a + ib) = a - ib$ es una aplicación lineal si a) \mathbb{C} es un espacio vectorial real.

- **P.D.** $T(z + w) = T(z) + T(w)$ donde $z = a + ib$, $w = c + id$.

$$\begin{aligned} T(z + w) &= T(a + ib + c + id) \\ &= T((a + c) + i(b + d)) \\ &= (a + c) - i(b + d) \\ &= (a - ib) + (c - id) \\ &= T(a + ib) + T(c + id) \end{aligned}$$

$$T(z + w) = T(z) + T(w)$$

- **P.D.** $T(\alpha z) = \alpha T(z)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} T(\alpha z) &= T(\alpha(a + ib)) \\ &= T(\alpha a + \alpha ib) \\ &= \alpha a - \alpha ib \\ &= \alpha(a - ib) \\ &= \alpha T(a + ib) \end{aligned}$$

$$T(\alpha z) = \alpha T(z)$$

Si es aplicación en un espacio vectorial real.

▲

- b) \mathbb{C} es un espacio vectorial complejo.

- **P.D.** $T(x + y) = T(x) + T(y)$ donde $x = a + ib$, $y = c + id$.

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(a + ib + c + id) \\ &= T((a + c) + i(b + d)) \\ &= (a + c) - i(b + d) \\ &= (a - ib) + (c - id) \\ &= T(a + ib) + T(c + id) \end{aligned}$$

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

- **P.D.** $T(\beta z) = \beta T(z)$ donde $\beta = (e + if) \in \mathbb{C}$ y $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} T(\beta z) &= T((e + if)(a + ib)) \\ &= T((ea - fb) + i(af + be)) \\ &= (ea - fb) - i(af + be) \\ &= (e - if) + (a - ib) \\ &= T(e + if) + T(a + ib) \\ &= T(\beta) + T(z) \end{aligned}$$

$$T(\beta z) \neq \beta T(z)$$

No es aplicación en un espacio vectorial complejo.



5. Sea $u = (1, i, 1 + i) \in \mathbb{C}^3$, hallar una base ortogonal de $U^\perp = \{v \in \mathbb{C}^3 / \langle u, v \rangle = 0\}$

$$u = (1, i, 1 + i) \quad ; \quad v = (a + ib, c + id, e + if)$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (1, i, 1 + i), (a + ib, c + id, e + if) \rangle \\ &= (a + ib) + i(c + id) + (1 + i)(e + if) \\ &= (a - d + e - f) + i(b + c + e + f) = 0 \end{aligned}$$

por tanto $(a - d + e - f) = 0$, y $(b + c + e + f) = 0$, ahora demos valores para: a, b, c, d , que satisfagan las 2 ecuaciones.

Sea

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -2, \quad d = 4$$

entonces

$$e = \frac{d - a - b - c}{2} = 1, \quad f = \frac{a - b - c - d}{2} = -2$$

es decir

$$v = (1 + 3i, -2 + 4i, 1 - 2i)$$

por tanto

$$U^\perp = \text{gen}\{(1 + 3i, -2 + 4i, 1 - 2i)\}$$

6. Ortogonalizar $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1 + i, 1, 1)$ y $u_3 = (1 - i, 1, 1)$

$$v_1 = u_1 = (0, 1, -1)$$

$$v_2 = u_2 - \text{proy}_{v_1} u_2 = (1 + i, 1, 1) - 0 = (1 + i, 1, 1)$$

$$v_3 = u_3 - \text{proy}_{v_1} u_3 - \text{proy}_{v_2} u_3 = (1 - i, 1, 1) - 0 - (2, 1 - i, 1 - i) = (-1 - i, i, i)$$

por tanto

$$B = \{(0, 1, -1), (1 + i, 1, 1), (-1 - i, i, i)\}$$

es una base ortogonal.

7. Representar $u = (3 - i, 0, 1 - i)$ en la base ortogonal hallada.

Ahora debemos hallar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tal que

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

Formando la matriz aumentada tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1+i & -1-i & \vdots & 3-i \\ 1 & 1 & i & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & i & \vdots & 1-i \end{array} \right]$$

sumamos -1 veces la tercera fila a la primera

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & i & -1-2i & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & i & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & i & \vdots & 1-i \end{array} \right]$$

sumando 1 veces la tercera a la segunda fila y sumando 1 veces la primera a la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -1-2i & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 2i & \vdots & 1-i \\ 0 & 1+i & -1-i & \vdots & 3-i \end{bmatrix}$$

multiplicamos por $\frac{1}{1+i}$ la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -1-2i & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & i & \vdots & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1-2i \end{bmatrix}$$

sumando -1 veces la segunda a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1-i & \vdots & -i \\ 0 & 1 & i & \vdots & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & -1-i & \vdots & \frac{1-3i}{2} \end{bmatrix}$$

finalmente multiplicando por $\frac{1}{-1-i}$ la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1-3i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{3+2i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1+2i}{2} \end{bmatrix}$$

por tanto las soluciones son:

$$\alpha = \frac{1-3i}{2}; \quad \beta = \frac{3+2i}{2}; \quad \gamma = \frac{1+2i}{2}$$

es decir

$$u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-3i \\ 3+2i \\ 1+2i \end{bmatrix}_B$$

1.11. Ejercicios Propuestos

1. ¿Cuáles de las siguientes matrices son hermitianas, cuáles son unitarias y cuáles normales?

$$a) \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 3+i & -2 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 3-i & 4-i \\ 3+i & -2 & 2+i \\ 4+i & 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 4+7i & -2-i \\ 1-2i & 3+4i \end{pmatrix}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales complejos, mediante reducción de Gauss - Jordan.

$$a) \begin{cases} (1+2i)x_1 + (-2+i)x_2 = 1-3i \\ (2+i)x_1 + (-1+2i)x_2 = -1-i \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (1+i)x_1 - x_2 = -2+i \\ 2ix_1 + (1-i)x_2 = i \end{cases}$$

3. Determine si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (justifique).

$$a) (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, +, \cdot)$$

$$b) \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(0), f(1) = a\}. \text{ Para que valores de } a?$$

$$c) \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_0 = a_1 = \dots = a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i\}$$

4. Estudiar si los conjuntos siguientes de números reales y las operaciones que se indican forman o no, un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales:

$$a) A = \{x + y\sqrt{5} : x, y \in \mathbb{Z}\} \text{ y las operaciones}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\sqrt{5}) + (x_2 + y_2\sqrt{5}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5} \\ \lambda(x + y\sqrt{5}) &= (\lambda x) + (\lambda y)\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$b) B = \{x + y\sqrt{5} : x, y \in \mathbb{Q}\} \text{ y las mismas operaciones anteriores.}$$

5. Sea E el conjunto de las sucesiones infinitas de números reales; en E se consideran las operaciones

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n), \quad \forall (x_n), (y_n) \in E \\ \alpha(x_n) &= (\alpha x_n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x_n) \in E \end{aligned}$$

$$a) \text{ Demuestre que } E \text{ con dichas operaciones, es espacio vectorial.}$$

$$b) \text{ Demuestre que los siguientes subconjuntos son subespacios de } E:$$

- Las sucesiones acotadas.
- Las sucesiones constantes.
- Las sucesiones con límite.

c) Analice si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de E :

- La sucesiones con límite igual a 1.
- Las sucesiones con términos positivos.
- Las sucesiones sin límite.

6. Sea E el conjunto de las funciones reales de una variable real y considérese las siguientes operaciones de suma y producto por un escalar:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall f \in E, \quad \forall \alpha, x \in \mathbb{R}$$

a) Demuestre que E con dichas operaciones es un espacio vectorial.

b) Demuestre que los siguientes subconjuntos son subespacios de E :

- Las funciones pares.
- Las funciones impares.
- Las funciones acotadas.
- Las funciones polinómicas.
- Las funciones continuas.
- Las funciones derivables.
- Las funciones que se anulan en el punto $x = 1$.

c) Analice si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de E :

- Las funciones que no se anulan en ningún punto.
- Las funciones con algún punto de discontinuidad.
- Las funciones negativas.
- Las funciones acotadas superiormente por la unidad.

7. Sea

$$E = \wp_4[t] = \{ \text{polinomios de grado } \leq 4 \}$$

Pruebe que

$$F = \{ p \in E \mid \int_0^1 p(t) dt = 0 \}$$

es un subespacio vectorial de E y encuentre una base para F .

8. Sea el espacio vectorial real

$$E = \wp[x, y] = \{ \text{polinomios de dos variables reales} \}$$

Se considera el conjunto

$$F = \wp_1[x, y] = \{ p(x, y) = ax + bx + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

Mostrar que F es un subespacio vectorial de E , hallar una base y dar su dimensión.

9. Sea $E = \mathbb{R}^3$, además

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$$

$$T = \{(y_1, y_2, y_3) \in E \mid y_1 = \alpha + \beta, y_2 = \beta + \gamma, y_3 = \alpha + 2\beta + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Hallar una base y dar su dimensión de los subespacios vectoriales S y T .

10. Se considera el espacio vectorial complejo de las matrices 2×2 con términos complejos.

a) Dar una base y la dimensión de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Se consideran las tres matrices complejas dadas por Pauli² para estudiar los espines de los electrones.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mostrar que la matriz identidad con estas tres matrices forman una base ortonormal de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ para el producto escalar definido por

$$\langle A|B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(\overline{A^T} B)$$

c) Deducir la fórmula de σ_i^n , para $i = 1, 2, 3$ y además $n \in \mathbb{N}$.

11. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcular el determinante

b) ¿Es A una matriz hermitiana?

c) Hallar A^{-1} .

c) Hallar los valores y vectores propios asociados a la matriz.

d) ¿Se puede escribir la matriz de la forma $A = B + iC$, donde B es real simétrica ($B = B^T$) y C es real antisimétrica ($C = -C^T$)?

12. Muestre que si A es unitaria, P no singular y $B = AP$ entonces PB^{-1} es unitaria.

13. Calcular los valores y vectores propios asociados a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 0 \\ -4i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

²Wolfgang Ernst Pauli. Premio Nobel de Física 1945 por el descubrimiento del Principio de exclusión

14. Hallar un conjunto de vectores ortonormal a partir de

$$u_1 = [1 + i, i, 1], \quad u_2 = [2, 1 - 2i, 2 + i], \quad u_3 = [1 - i, 0, -i]$$

15. Construya una base ortonormal para $P_3[0, 2]$.

16. Determine el coseno del ángulo que forma cada par de vectores

a) $u = (1, 2), v = (2, -3)$.

b) $u = (1, 2, 3), v = (-2, 0, 1)$.

c) $u = (-1, 0, 3, 4), v = (1, -1, 4, 2)$.

17. ¿La siguiente proposición es verdadera o falsa para un espacio vectorial real o complejo?

$$\|x\| = \|y\| \quad \text{si y sólo si} \quad \langle x + y, x - y \rangle = 0$$

Demostrar o dar un contraejemplo.

2

Espacio vectorial cociente

En este capítulo vamos a estudiar conjuntos sobre los cuales vamos a definir ciertas relaciones de equivalencia, los mismos que a su vez, van a adquirir la estructura de espacio vectorial mediante las operaciones de suma y producto por escalar definidas especialmente para dichos conjuntos.

2.1. Relaciones binarias

En el lenguaje ordinario tratar de ver si dos objetos guardan cierta relación entre sí, o por el contrario si no tienen nada en común, nos lleva a pensar que se debe satisfacer alguna proposición o dejar de satisfacerse, para dichos objetos.

DEFINICIÓN 13: RELACIÓN BINARIA

Sea E un espacio vectorial, por una relación \mathcal{R} en E entendemos el subconjunto de $E \times E$, tal que satisface las siguientes propiedades:

Sea \mathcal{R} una relación en E ; entonces

1. \mathcal{R} se dice reflexiva si

$$\forall x \in E, \quad (x, x) \in \mathcal{R}$$

2. \mathcal{R} se dice simétrica si

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in \mathcal{R}$$

3. \mathcal{R} se dice anti-simétrica si

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad (y, x) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

4. \mathcal{R} se dice transitiva si

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad (y, z) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in \mathcal{R}$$

Ejemplo:

1. Como ejemplo de relación entre elementos de un mismo conjunto puede considerarse lo siguiente:

Para el conjunto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

se dice que a está relacionado con b si y sólo si

a es primo y además a y b no son primos entre sí

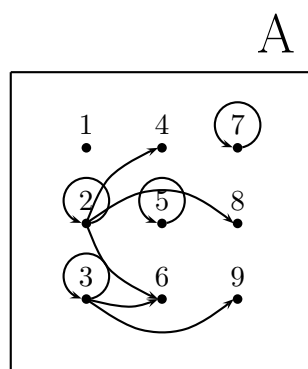
esta relación tiene el siguiente grafo:

$$\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (5, 5), (7, 7)\}$$

Para representar esta relación se puede unir mediante líneas los elementos relacionados entre sí, pero ahora se hace necesario, al considerar un solo conjunto, indicar con una flecha cuál es el primer y cuál el segundo de los elementos que están relacionados, ya que por ejemplo

$$(2, 4) \in \mathcal{R}, \quad \text{pero, sin embargo} \quad (4, 2) \notin \mathcal{R}$$

procediendo de este modo se puede obtener el esquema, llamado sagital, siguiente:



2.2. Relación de equivalencia

La idea de **relación de equivalencia** es una importante extensión y generalización de la tradicional idea de **igualdad** que se utiliza en la matemática.

DEFINICIÓN 14: RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Una relación, se dice de **equivalencia** si ésta es reflexiva, simétrica y transitiva.

Observación 2.1. Dado una relación de equivalencia \mathcal{R} en E , algunas veces se escribe $x \sim y$ en reemplazo de $(x, y) \in \mathcal{R}$, y decimos que x es equivalente a y , dada la relación \mathcal{R} .

Note que si \mathcal{R} , es una relación de equivalencia en E , se tiene:

1. $x \sim x, \forall x \in E$.
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
3. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Ejemplo:

1. Para el conjunto \mathbb{N}^2 de los pares de números naturales, la relación

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

es una relación de equivalencia.

2. Sea el conjunto

$$\mathbb{Q}_3[x] = \{ \text{polinomios de grado igual a 3} \} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_3 \neq 0\}$$

entonces $\mathbb{Q}_3[x]$ no es subespacio vectorial, pues

$$a_3x^3 \in \mathbb{Q}_3; \quad -a_3x^3 \in \mathbb{Q}_3 \quad \Rightarrow \quad 0 \notin \mathbb{Q}_3$$

Si para todo $p, q \in \mathbb{Q}_3[x]$ se define la relación:

$$p \sim q \iff \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx}$$

Pruebe que \sim es una relación de equivalencia.

Ahora, para mostrar que \sim es una relación de equivalencia debemos probar que \sim es reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto:

■ **P.D.** \sim es reflexiva

$$p \sim p, \quad \text{pues} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

La identidad se tiene de forma directa.

■ **P.D.** \sim es simétrica

$$p \sim q, \iff \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} \iff \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

La igualdad es obvia.

■ **P.D.** \sim es transitiva

$$\left[\begin{array}{l} p \sim q, \iff \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} \\ q \sim r, \iff \frac{dq}{dx} = \frac{dr}{dx} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{dr}{dx} \quad \text{es decir} \quad p \sim r$$

Igualemos los polinomios y obtenemos la igualdad requerida.

por tanto \sim es una relación de equivalencia en $\mathbb{Q}_3[x]$.

▲

2.2.1. Clases de equivalencia

DEFINICIÓN 15: CLASES DE EQUIVALENCIA

Sea E un espacio vectorial y sea \mathcal{R} una relación de equivalencia en E . Si $x \in E$, entonces la clase de equivalencia de x dado \mathcal{R} , es el conjunto \mathcal{R}_x definido como:

$$\mathcal{R}_x = \{y \in E \mid (y, x) \in \mathcal{R}\} = \{y \in E \mid y \sim x\}$$

dicho de otro modo, \mathcal{R}_x es el conjunto de todos los elementos de E que son equivalentes a x . Las clases de equivalencia se las nota de la forma x/\mathcal{R} .

DEFINICIÓN 16: CONJUNTO COCIENTE

Si \mathcal{R} es una relación de equivalencia en un espacio vectorial E , entonces el conjunto de las clases de equivalencia de \mathcal{R} , se denomina **conjunto cociente** de E por \mathcal{R} y se nota como E/\mathcal{R} .

Ejemplo:

1. En el ejemplo anterior vimos que \sim es una relación de equivalencia, ahora encontremos la clase de equivalencia.

Sea $p \in \mathbb{Q}_3[x]$, entonces

$$\dot{p} = \{q \in \mathbb{Q}_3[x] / p \sim q\}$$

por lo tanto si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

y

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \Rightarrow \frac{dq}{dx} = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2$$

ahora se tiene que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} \Leftrightarrow a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2$$

es decir

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

por tanto

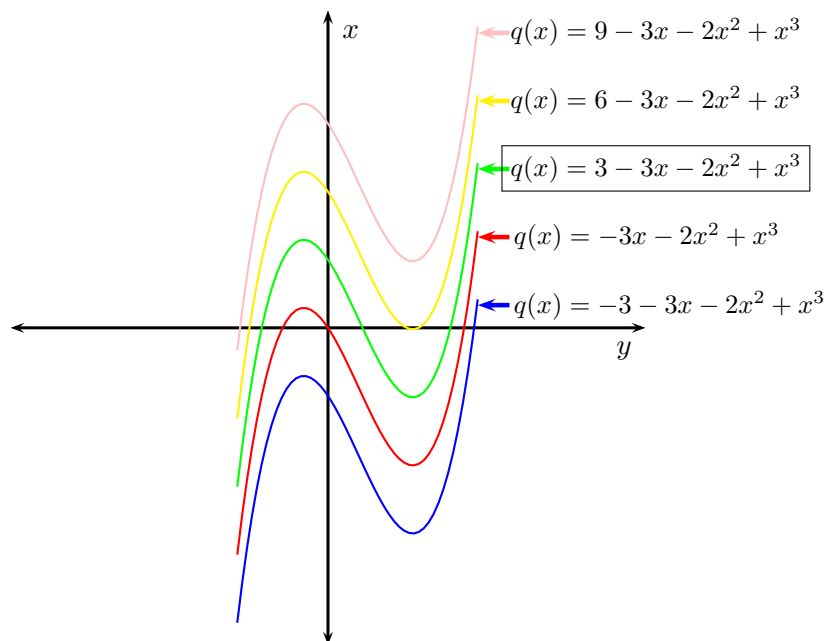
$$\dot{p} = \{q \in \mathbb{Q}_3 / a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3\}$$

▲

Gráficamente para el ejercicio anterior, dado

$$p(x) = 3 - 3x - 2x^2 + x^3$$

las clases de equivalencia de p , lo conforman todos los polinomios de tercer grado que tienen la misma pendiente que p , para todo $x \in \mathbb{R}$.



es decir, las clases de equivalencia de p , lo forman todos los polinomios de la forma

$$q(x) = \alpha - 3x - 2x^2 + x^3, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.2.2. Partición y equivalencia

Si \sim es una equivalencia para un conjunto E , resulta, de cuanto se acaba de exponer, que el conjunto de las clases de equivalencia es una partición de E , ya que las clases son conjuntos disjuntos de E y todo elemento de E pertenece a una clase (*aquella que le tiene por representante*).

Por tanto, a partir de una equivalencia en un conjunto, se ha llegado a una partición del mismo: la constituida por las clases de equivalencia.

Recíprocamente, dada una partición

$$\{E_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

de un cierto conjunto E , la relación \sim definida en E mediante $a \sim b$ si y sólo si a y b pertenecen a un mismo subconjunto de los que constituyen la partición, evidentemente una equivalencia para E ; las clases de equivalencia de \sim son entonces los conjuntos E_i que constituyen la partición.

Puede en consecuencia afirmarse que a toda equivalencia en un conjunto le corresponde una partición del mismo, la formada por la clases de equivalencia; y, recíprocamente, a toda partición de un conjunto le corresponde una equivalencia en el mismo.

2.3. Conjunto cociente

DEFINICIÓN 17

Dado un conjunto E y una relación de equivalencia \sim en él, se llama conjunto cociente de E por \sim , y se le representa por E/\sim , al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia definidas en E por \sim ; es decir, el conjunto cociente es la partición de E subordinada por la equivalencia \sim .

Ejemplo:

1. Para la relación de equivalencia definida en \mathbb{N}^2 mediante

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

a la clase de representantes

$$(x_1, x_2)$$

es decir, a

$$\mathcal{R}_{(x_1, x_2)} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2 \mid (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)\}$$

también pertenecen los pares

$$(x_1 + h, x_2 + h)$$

para todo número natural h , así como los pares

$$(x_1 - h, x_2 - h)$$

para todo natural

$$h \leq x_1 \quad \text{y} \quad h \leq x_2$$

para elegir un representante sencillo de la clase $\mathcal{R}_{(x_1, x_2)}$ se puede proceder del siguiente modo: primero, si $x_1 > x_2$ entonces se adopta como representante a $(x_1 - x_2, 0)$; segundo, si $x_1 < x_2$, entonces se toma como representante al par $(0, x_1 - x_2)$; y tercero, si $x_1 = x_2$, entonces se adoptará como representante de la clase $(0, 0)$.

El conjunto cociente de \mathbb{N}^2 / \sim será, en consecuencia

$$\{\mathcal{R}_{(r,0)}, \mathcal{R}_{(0,s)}, \mathcal{R}_{(0,0)} \mid r, s \in \mathbb{N}\}$$

este conjunto se representa por \mathbb{Z} , y sus elementos, una vez definidas las adecuadas operaciones algebraicas, reciben el nombre de números enteros, de manera que el entero $\mathcal{R}_{(r,0)}$ es posible identificarlo con el natural r , al entero $\mathcal{R}_{(0,s)}$ se le designa por $-s$, y entonces

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n, \dots\}$$

2.4. Relación de equivalencia en un espacio vectorial

DEFINICIÓN 18

Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E , la relación de equivalencia de $x \in E$ se define como:

$$x \sim y \iff x - y \in F$$

Observación 2.2. La relación \sim es una relación de equivalencia.

Demostración:

i) **P.D.** \sim es reflexiva.

Sea $x \in E$, $x - x = 0 \in F$, pues F es subespacio vectorial

$$\Rightarrow x \sim x$$

ii) **P.D.** \sim es simétrica.

Sean $x, y \in E$ tal que $x \sim y \Rightarrow x - y \in F$

$$\Rightarrow -(x - y) \in F, \text{ pues } F \text{ es subespacio vectorial}$$

$$\Rightarrow y - x \in F$$

$$\Rightarrow y \sim x$$

iii) **P.D.** \sim es transitiva.

Si $x, y, z \in E$, $x \sim y$, $y \sim z$, $\Rightarrow x - y \in F$, $y - z \in F$

$$\Rightarrow [(x - y) + (y - z)] \in F, \text{ pues } F \text{ es subespacio vectorial}$$

$$\Rightarrow x - z \in F$$

$$\Rightarrow x \sim z$$

Entonces \sim es una relación de equivalencia.

**Ejemplo:**

1. Sea E un espacio vectorial, y $F = \{0\}$ subespacio vectorial.

Sean $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x - y \in F \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{y \in E / x \sim y\} \\ \dot{x} &= \{x\} \end{aligned}$$

Las clases de equivalencia forman una partición de E , es fácil verificar que

$$\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E$$

donde

$$\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset \quad \text{si} \quad x \neq y$$

Por tanto el **conjunto cociente** es:

$$E/F = \{\dot{x}, x \in E\} = \{\{x\}, x \in E\}$$

Ahora si

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x - y \in E - F \\ \dot{x} &= \{y / y \in E\} = E \\ E/F &= \{E\} \end{aligned}$$

2. Sea $E = \mathbb{R}^2$ y $F = \{(u_1, u_2) \in E / 2u_1 - u_2 = 0\}$

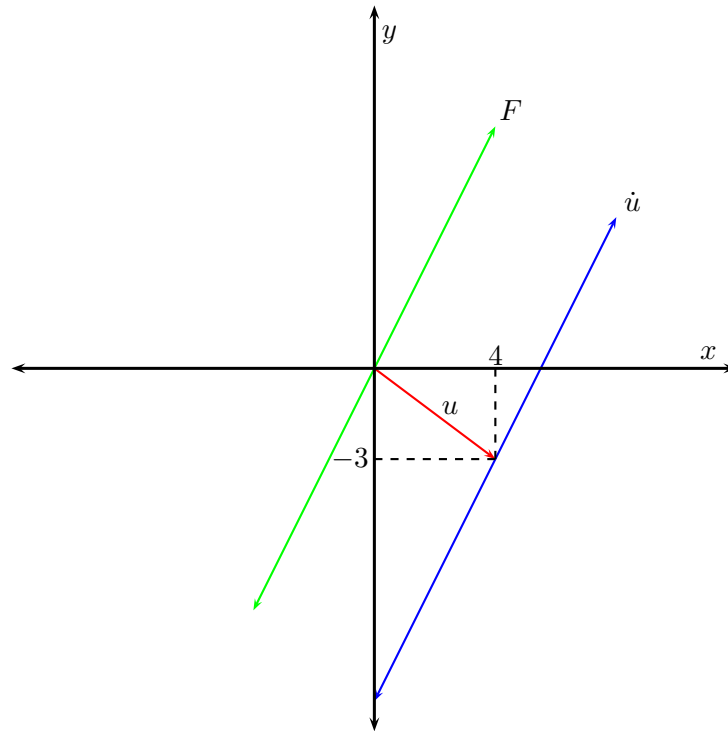
Si $u = (u_1, u_2) \in E$ y $v = (v_1, v_2) \in E$, se tiene que:

$$\begin{aligned} u \sim v &\Leftrightarrow u - v \in F \\ &\Leftrightarrow 2(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 - u_2 = 2v_1 - v_2 \end{aligned}$$

$$\dot{u} = \{(v_1, v_2) \in E / 2v_1 - v_2 = 2u_1 - u_2\}$$

Veamos ahora un ejemplo gráfico:

Supongamos que $u = (4, -3)$, por tanto



$$\dot{u} = \{v = (v_1, v_2) \in E / 2v_1 - v_2 = 11\}$$

el mismo que no es subespacio vectorial porque no tiene el 0.

En el gráfico observamos que las clases de equivalencia de un vector u , no es más que las rectas paralelas a F , y que contienen el extremo del vector $u \in \mathbb{R}^2$.

Además

$$\dot{0} = \{v = (v_1, v_2) \in E / 2v_1 - v_2 = 0\} = F$$

▲

2.5. Co - conjunto (coset)

DEFINICIÓN 19

Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E , además si $x \in E$, se define el **co - conjunto** como:

$$x + F = \{z \in E / z = x + f, f \in F\}$$

■ Observaciones

De la definición anterior tenemos que:

$$z \in x + F \Leftrightarrow (x - z) \in F \Leftrightarrow x \in z + F$$

es decir

$$\begin{aligned} x \sim z &\Leftrightarrow x - z \in F \\ &\Leftrightarrow z \in x + F \\ &\Leftrightarrow x \in z + F \end{aligned}$$

La relación

$$x \sim z \Leftrightarrow z \in x + F$$

es de equivalencia.

i) $x \sim x$ pero $x \in x + F$ ya que $x = x + 0$

ii) $x \sim y \Rightarrow y \in x + F \Leftrightarrow x \in y + F \Leftrightarrow y \sim x$

iii) $\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in x + F \\ z \in y + F \end{cases}$

Ahora sí, $z \in y + F$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} y = x + f_1, & f_1 \in F \\ z = y + f_2, & f_2 \in F \end{cases} \\ &\Rightarrow z = x + \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\in F} \Rightarrow z \in x + F \end{aligned}$$

■ **Observaciones:**

$\{x + F\}_{x \in E}$ forman una partición de E .

i) $(x + F) \cap (y + F) = \begin{cases} x + F \\ \emptyset \end{cases}$

ii) $\forall x \in E$ pertenece a algún $y + F$.

En E/F $(x \sim y \Leftrightarrow z \in x + F)$

Se definen

$$\begin{aligned} \dot{x} \oplus \dot{y} &= (x + F) \oplus (y + F) = (x + y) + F \\ \lambda \odot \dot{x} &= \lambda \odot (x + F) = \lambda x + F \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1. Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E .

Sea $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ base de F y $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ base de E/F , donde $u_j = u_j + F$.

Entonces $\{w_1, w_2, \dots, w_s, u_1, u_2, \dots, u_r\}$ es base de E .

Además

$$\dim E = \dim F + \dim(E/F)$$

es decir

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F$$

Demostración:

i) Sea $x \in E$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + F = \alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_2 \dot{u}_2 + \dots + \alpha_r \dot{u}_r \\ &= \overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r} \\ x &\in \overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r} \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_s w_s \end{aligned}$$

ii) B es libre.

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_s w_s &= 0 & (E) & (1) \\ \alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_s w_s &= \dot{0} & (E/F) \\ \alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_1 \dot{u}_2 + \dots + \alpha_r \dot{u}_r + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_s w_s &= \dot{0} & (E/F) \\ \alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_1 \dot{u}_2 + \dots + \alpha_r \dot{u}_r + \dot{0} &= \dot{0} & (E/F) \end{aligned}$$

pues $\{\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_r\}$ es base de E/F

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

En (1) se tiene que

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_s w_s = 0$$

por tanto

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 0$$

pues $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ es base de F .

Por lo tanto se sigue que B es libre. ■

2.6. Espacio vectorial cociente

Proposición 2.1. El conjunto E/F queda dotado de la estructura de espacio vectorial sobre el mismo cuerpo \mathbb{K} que E mediante las operaciones:

$$(x + F) + (y + F) = (x + y) + F$$

$$\alpha(x + F) = (\alpha x) + F$$

Demostración:

1. En primer lugar hay que probar que estas operaciones son válidas en el sentido de tener resultado único, independiente de los representantes de cada clase. En efecto, si en la clase

$$x + F$$

cambiamos su representante x por x' , como ambos deben ser congruentes, se cumplirá que

$$x' - x \in F$$

en cuyo caso

$$(x' - y) - (x - y) = x' - x \in F \quad \Rightarrow \quad (x' + y) + F = (x + y) + F$$

$$(\alpha x') - (\alpha x) = \alpha(x' - x) \in F \quad \Rightarrow \quad (\alpha x') + F = (\alpha x) + F$$

si en la suma cambiamos el representante del segundo dato, el razonamiento es similar.

2. Puesto que las operaciones con clases se efectúan a partir de las correspondientes con sus representantes, se heredan sin más las propiedades asociativa y conmutativa de la adición, así como las cuatro propiedades de la multiplicación por un escalar.

3. La clase

$$0 + F = F$$

sirve de neutro para la adición de clases.

4. Para cada x , las clases

$$x + F, \quad \text{y} \quad (-x) + F$$

son opuestas entre sí.

Como veremos a continuación este nuevo espacio vectorial, recibe el nombre de **espacio vectorial cociente** del espacio E mediante el subespacio F .

DEFINICIÓN 20

Sea E un espacio vectorial, y F un subespacio vectorial de E , entonces llamaremos **espacio vectorial cociente** al espacio E/F definido como:

$$E/F = \{\{\dot{x}\}, \quad x \in E\}$$

donde:

$$\{\dot{x}\} = \{y \in E / x \sim y\} = \{y \in E / x - y \in F\}$$

Por tanto E/F es un espacio vectorial, para esto definimos las siguientes operaciones:

Se define para $\dot{x} \in E/F$, $\dot{y} \in E/F$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} \oplus \dot{y} = \overline{\dot{x} + \dot{y}} \quad ; \quad \dot{\lambda} \odot \dot{x} = \overline{\dot{\lambda} \cdot x}$$

Entonces

$$(E/F, \oplus, \odot)$$

es un espacio vectorial.

Probemos que estas operaciones están bien definidas, es decir no dependen del representante.

Sean $\dot{x}, \dot{y} \in E/F$, y sean $x, x_0 \in \dot{x}$, $y, y_0 \in \dot{y}$.

■ **P.D.** $\dot{x} \oplus \dot{y} = \dot{x}_0 + \dot{y}_0$

Por hipótesis

$$x \sim x_0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 \in F$$

$$y \sim y_0 \quad \Rightarrow \quad y - y_0 \in F$$

es decir

$$(x + y - x_0 - y_0) \in F$$

$$(x + y) - (x_0 + y_0) \in F$$

$$(x + y) \sim (x_0 + y_0)$$

por tanto

$$\overline{\dot{x} + \dot{y}} = \overline{\dot{x}_0 + \dot{y}_0}$$

■

Sea $\dot{x} \in E/F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean $x_0 \in \dot{x}$

■ **P.D.** $\lambda \odot \dot{x} = \lambda \odot \dot{x}_0$

como

$$\begin{aligned}
 x \sim x_0 &\Rightarrow x - x_0 \in F \\
 &\Rightarrow \lambda(x - x_0) \in F \quad \text{pues } F \text{ es s.e.v} \\
 &\Rightarrow \lambda x - \lambda x_0 \in F \\
 &\Rightarrow \lambda x \sim \lambda x_0 \\
 &\Rightarrow \overline{\lambda x} = \overline{\lambda x_0} \\
 &\Rightarrow \lambda \odot \dot{x} = \lambda \odot \dot{x}_0
 \end{aligned}$$

■

■ **P.D.** $\dot{x} \oplus \dot{0} = \dot{x}$

pues

$$\dot{x} \oplus \dot{0} = \overline{x + \dot{0}} = \dot{x}$$

■

2.7. Ejercicios resueltos:

Sea F un subespacio vectorial de E . Demostrar que:

1. Si $\{u_1 + F, u_2 + F, \dots, u_r + F\}$ es libre en E/F , entonces $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ es libre en E .

Suponemos que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E$ **P.D.** $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

por tanto

$$\overline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p} = \dot{0}_{E/F}$$

de donde, se tiene

$$\alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_2 \dot{u}_2 + \dots + \alpha_p \dot{u}_p = \dot{0}_{E/F}^1$$

por operaciones en (E/F) , entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

pues

$$\{\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_p\} \quad \text{es libre.}$$

en conclusión

$$\{u_1, u_2, \dots, u_p\} \quad \text{es libre.}$$

▲

2. Sea $f : E \rightarrow F$, una aplicación lineal, además sea $G = \mathcal{N}(f)$.

Halle el espacio vectorial E/G .

Por definición se tiene

$$E/G = \{x \in E / x + \mathcal{N}(f)\} = \{\dot{x} / x \in E\}$$

además

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{y \in E / (x - y) \in \mathcal{N}(f)\} \\ &= \{y \in E / f(x - y) = 0\} \\ &= \{y \in E / f(x) - f(y) = 0\} \\ &= \{y \in E / f(x) = f(y)\} \end{aligned}$$

▲

3. Sea $E = \mathbb{R}^3$ espacio vectorial y f una aplicación lineal definida por

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

y sea $G = \mathcal{N}(f)$. Encuentre E/G .

Primero hallemos una base de G .

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(f) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\} \\ &= \{(2x_2 - 3x_3, x_2, x_3) / x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2 \underbrace{(2, 1, 0)}_{v_1} + x_3 \underbrace{(-3, 0, 1)}_{v_2}\} \\ &= \text{gen}\{v_1, v_2\} \end{aligned}$$

¹Recuerde que $\dot{u} = u + F$.

Además

$$\dim G = \dim \mathcal{N}(f) = 2$$

Ahora sea $x = (3, -2, 1)$ por tanto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{y \in \mathbb{R}^3 / (x - y) \in \mathcal{N}(f)\} \\ &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / f(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) = 0\} \\ &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / f(3 - y_1, -2 - y_2, 1 - y_3) = 0\} \\ &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / 3 - y_1 - 2(-2 - y_2) + 3(1 - y_3) = 0\} \end{aligned}$$

es decir

$$\dot{x} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 10\}$$

Por tanto

$$E/G = \{\dot{x} / x \in E\}$$

y aplicando el teorema de la dimensión se tiene

$$\begin{aligned} \dim(E/G) &= \dim E - \dim G \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces ahora hallemos una base de E/G .

Para esto se tiene

$$E = [\mathcal{N}(f)]^\perp \oplus [\mathcal{N}(f)] \quad ^2$$

de donde

$$[\mathcal{N}(f)]^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in \mathcal{N}(f)\}$$

es decir

$$x \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow \{\langle (x_1, x_2, x_3), (2, 1, 0) \rangle = 0, \quad \text{y} \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (-3, 0, 1) \rangle = 0\}$$

de donde

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \end{cases}$$

por tanto

$$x = \{x_1 \underbrace{(1, -2, 3)}_v, \quad x_1 \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\{\dot{v}\} \text{ es base de } E/G.$$

▲

4. Sea $E = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2 \times 2}$. Se considera

$$F = \{A = (a_{ij}) \in E \mid \sum_{j=1}^2 a_{ij} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \sum_{i=1}^2 a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2\}$$

²Todo espacio vectorial E , es igual a la suma directa de cualquier subespacio S de E y su complemento S^\perp . Es decir

$$E = S \oplus S^\perp.$$

a) Mostrar que F es un subespacio vectorial de E . Hallar una base y dar la dimensión.

Primero expresando los elementos de F en forma matricial se tiene

$$F = \{A = (a_{ij}) \in E \mid A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\}$$

por tanto

$$F = \underbrace{\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}_{v_1}$$

es decir v_1 es base de F y además

$$\dim F = 1$$

■ **P.D.** $0^* \in F$.

Bastaría tomar $a = 0$, con lo cual

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$$

■ **P.D.** $\forall A, B \in F$, se tiene que $A + B \in F$.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} (a+b) & -(a+b) \\ -(a+b) & (a+b) \end{pmatrix} \in F$$

■ **P.D.** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in F$, se tiene que $\lambda A \in F$.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$$

entonces

$$\lambda \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda a \\ -\lambda a & \lambda a \end{pmatrix} \in F, \quad \lambda a \in \mathbb{R}$$

Por tanto F es subespacio vectorial de E .

b) Caracterizar los elementos de E/F y dar la dimensión de este espacio cociente.

El conjunto

$$E/F = \{\dot{A} \mid A \in E\}$$

en donde

$$\dot{A} = \{B \in E \mid A \sim B\} = \{B \in E \mid A - B \in F\}$$

es decir

$$\dot{A} = \left\{ B \in E \mid B = A + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim E/F = \dim E - \dim F = 4 - 1$$

de donde tenemos que

$$\dim E/F = 3$$



5. Sea $E = \mathbb{R}^3$, y el conjunto

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_2 = -3x_1 + 2x_3\}$$

a) Hallar una base y dar la dimensión del subespacio vectorial F .

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in F$, por tanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

de donde, además v_1, v_2 son linealmente independiente.

Por tanto

$$F = \text{gen}\{(1, -3, 0), (0, 2, 1)\}$$

y además

$$\dim F = 2.$$

b) Caracterizar los elementos del espacio cociente E/F .

Como

$$E/F = \{\dot{x}, x \in E\}$$

de donde

$$\dot{x} = \{y \in E \mid x \sim y\} = \{y \in E \mid (x - y) \in F\}$$

y además

$$\begin{aligned} (x - y) \in F &\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) \in F \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \in F \end{aligned}$$

por tanto

$$\dot{x} = \{(y_1, y_2, y_3) \in E \mid x_2 - y_2 = -3(x_1 - y_1) + 2(x_3 - y_3)\}$$

$$\begin{aligned} \dim(E/F) &= \dim E - \dim F \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$



2.8. Ejercicios propuestos

1. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y el conjunto

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 - x_2 = 0\}$$

- a) Pruebe que F es un subespacio vectorial de E .
- b) Encuentre las clases de equivalencia de E/F .
- c) Halle una base y la dimensión de E/F .

2. Sea $E = \mathbb{R}^4$ y el conjunto

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid 2x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + 3x_3 - x_4 = 0\}$$

- a) Demostrar que F es un subespacio vectorial de E .
- b) Caracterizar las clases de equivalencia de E/F .
- c) Encontrar la dimensión y una base de E/F .
- d) Encuentre F^\perp .

3. Sea $E = \wp[t] = \{ \text{polinomios de variable } t \}$ y sea el subespacio vectorial

$$F = \{ \text{polinomios divisibles por } t^4 \}$$

- a) Encuentre E/F y dar su dimensión.

4. Sea $E = \wp[t] = \{ \text{polinomios de variable } t \}$ y sea el subespacio vectorial

$$F = \{ \text{polinomios divisibles por } (t - \frac{1}{2})^2 \}$$

- a) Caracterizar las clases de equivalencia de E/F .
- b) Encuentre una base de E/F .

5. Sea el espacio vectorial $E = \wp_5[t] = \{ \text{polinomios de grado } \leq 5 \}$ y el conjunto

$$F = \{p \in E \mid \int_0^2 p(t)dt = 0\}$$

- a) Pruebe que F es un subespacio vectorial de E .
- b) Encuentre una base y la dimensión de F .
- c) Caracterizar las clases de equivalencia E/F .
- d) Encuentre una base y la dimensión de E/F .

6. Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (x - y, y - z) \end{aligned}$$

- a) Encuentre $\mathcal{N}(f)$.
- b) Encuentre el espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^3/\mathcal{N}(f)$.

7. Sea E un espacio vectorial y F un subespacio vectorial de E . Se define la aplicación

$$\begin{aligned}\psi: E &\rightarrow E/F \\ x &\mapsto \psi(x) = \dot{x}\end{aligned}$$

- a) Pruebe que la aplicación f es lineal.
- b) Encuentre el núcleo de ψ .
- c) Probar que ψ es sobreyectiva.
- d) Si E es de dimensión finita utilizar el **Teorema de la dimensión** para hallar la dimensión de E/F .

8. Determinar una base del subespacio vectorial de $E = \mathbb{R}^4$ dado por

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 = x_2 - 3x_3, \quad x_3 = x_4\}$$

y completarla hasta una base de \mathbb{R}^4 .

Calcular también un subespacio suplementario de F y una base del espacio cociente \mathbb{R}^4/F .