Tema 2. Modelo Básico de Mortalidad

Matemática Actuarial de las Operaciones de Seguro de Vida

Tema 2. Modelo Básico de Mortalidad

- 2.1. La vida futura como variable aleatoria.
- 2.2. Tanto instantáneo de mortalidad.
- 2.3. Notación actuarial.
- 2.4. Tablas de Mortalidad.
- 2.5. Hipótesis para fracciones de año.
- 2.6. Leyes de mortalidad.
- 2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Para poder asegurar una operación de vida, nosotros necesitamos un modelo de la mortalidad humana que nos permita calcular la probabilidad de fallecimiento para una determinada edad y, en función de esta, poder establecer las condiciones de la póliza.

- A continuación, vamos a ir estableciendo los elementos básicos de este modelo y su notación.

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Sea (x) un individuo de edad x, siendo $x \geq 0$.

- El fallecimiento de (x) puede ocurrir a cualquier edad mayor que x. Nosotros modelaremos la vida futura de (x) como una variable aleatoria que llamaremos T_x. Por ello, $x + T_x$ representa la variable aleatoria de la edad de fallecimiento de (x)

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Sea F_x la función de distribución de T_x:

$$F_x(t) = \Pr[T_x \leq t]$$

- $F_x(t)$ representa la probabilidad de que (x) no sobreviva a la edad $x + t$.

- Nosotros llamaremos a F_x *distribución de la vida* de un individuo desde la edad x.

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Para afrontar mucha problemática aseguradora, a nosotros nos interesará la probabilidad de supervivencia que definimos como S_x:

$$S_x = 1 - F_x(t) = \Pr[T_x > t]$$

- $S_x(t)$ representa la probabilidad de que (x) sobreviva transcurridos t años.

- Nosotros llamaremos a S_x *función de supervivencia*.

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Desde este punto de vista, podemos considerar un conjunto de variables aleatorias $\{T_x\}_{x\geq 0}$ del tiempo de vida futura de los individuos, debiendo encontrar una relación entre dos de ellas.
- Consideraremos T_0 y T_x. T_0 representa el tiempo futuro de vida de un recién nacido.
- Nosotros podemos decir que:

$$\Pr[T_x \leq t] = \Pr[T_0 \leq x + t \mid T_0 > x]$$

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Recordemos que:

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

- Podemos reescribir esta expresión como:

$$\Pr[T_x \leq t] = \frac{\Pr[x < T_0 \leq x + t]}{\Pr[T_0 > x]}$$

- Esto es:

$$F_x(t) = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{S_0(x)}$$

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- O en términos de la función de supervivencia:

$$S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}$$

- Por lo que podemos escribir:

$$S_0(x+t) = S_0(x) \cdot S_x(t)$$

- Este es un resultado muy importante, ya que nos permite interpretar la probabilidad de supervivencia de un individuo de edad x a una edad x +t como el producto de:

  - La probabilidad de supervivencia a la edad x desde el nacimiento y

  - La probabilidad, habiendo sobrevivido a la edad x, de sobrevivir a la edad x +t

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Observemos que $S_x(t)$ puede verse como la probabilidad de que un recién nacido sobreviva después de la edad $x+t$ después de que sobreviva a la edad x, lo que se deriva de la expresión:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]$$

- Donde:
  - $A = [T_0 > x + t]$
  - $B = [T_0 > x]$

- Ya que:

$$\Pr[A|B] = \Pr[T_0 > x + t | T_0 > x]$$

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- De la misma forma, la probabilidad de supervivencia de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + t$ y, una vez alcanzada, sobreviva otros u años, será:

$$S_x(t+u) = \frac{S_0(x+t+u)}{S_0(x)} \Rightarrow S_x(t+u) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} \cdot \frac{S_0(x+t+u)}{S_0(x+t)}$$

$$\Rightarrow S_x(t+u) = S_x(t) \cdot S_{x+t}(u)$$

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Para que tengan validez, cualquier función de supervivencia debe verificar determinadas condiciones:
  - Condición 1: $\mathbf{S_x(0) = 1}$ → la probabilidad de que un individuo x sobreviva 0 años debe ser 1.
  - Condición 2: $\mathbf{\lim_{t\to\infty} S_x(t) = 0}$ → todos los individuos fallecen.
  - Condición 3: la función de supervivencia debe ser una función no creciente de t → en la práctica suele ser decreciente

2.1. La vida futura como variable aleatoria

- Además, nosotros vamos a hacer tres asunciones adicionales que deben cumplir:
  - Asunción 1: $S_x(t)$ debe ser deribable para todo $t > 0$ → de acuerdo con la condición 3:

$$\frac{d}{dt} S_x(t) \leq 0, \forall t > 0$$

  - Asunción 2: $\lim_{t \to \infty} t S_x(t) = 0$
  - Asunción 3: $\lim_{t \to \infty} t^2 S_x(t) = 0$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- El tanto instantáneo de mortalidad o fuerza de la mortalidad es un concepto fundamental para la modelización de la supervivencia.

- Nosotros denotaremos como μ_x al tanto instanáneo de mortalidad de un individuo de edad x, y se define:

$$\mu_x = \lim_{dx \to 0^+} \frac{1}{dx} \Pr\left[T_0 \le x + dx \middle| T_0 > x\right] = \lim_{dx \to 0^+} \frac{1}{dx} \Pr\left[T_x \le dx\right]$$

- O en términos de la función de supervivencia:

$$\mu_x = \lim_{dx \to 0^+} \frac{1}{dx} \left(1 - S_x(dx)\right)$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- Una forma sencilla de entender el concepto de fuerza de mortalidad es usar la siguiente aproximación:

$$\mu_x dx \approx \Pr\left[T_0 \leq x + dx \middle| T_0 > x\right]$$

- Como dx es muy pequeño, se puede interpretar $\mu_x dx$ como la probabilidad de, habiendo sobrevivido a la edad x, fallecer antes de la edad $x + dx$.

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- Podemos relacionar el tanto instantáneo de mortalidad con la función de supervivencia desde el nacimiento, S_0. Como:

$$S_x(dx) = \frac{S_0(x+dx)}{S_0(x)}$$

- Entonces:

$$\mu_x = \frac{1}{S_0(x)} \lim_{dx \to 0^+} \left(\frac{S_0(x) - S_0(x+dx)}{dx} \right) = \frac{1}{S_0(x)} \left(-\frac{d}{dx} S_0(x) \right)$$

- O lo que es lo mismo:

$$\mu_x = \frac{-1}{S_0(x)} \frac{d}{dx} S_0(x)$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- Desde el punto de vista de la Teoría de la Probabilidad, sabemos que la función de densidad de una variable T_x, que llamaremos f_x, es:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = -\frac{d}{dt} S_x(t)$$

- Por lo que:

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{S_0(x)}$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- De manera similar, podemos obtener el tanto instantáneo de mortalidad para una edad $x + t$, siendo $t > 0$, de la variable T_x. Suponemos que x es constante y t es variable. Además, si $d(x+t) = dt$ y:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{S_0(x+t)}\frac{d}{d(x+t)}S_0(x+t) = -\frac{1}{S_0(x+t)}\frac{d}{dt}S_0(x+t) =$$

$$= -\frac{1}{S_0(x+t)}\frac{d}{dt}\left(S_0(x)S_x(t)\right) = -\frac{S_0(x)}{S_0(x+t)}\frac{d}{dt}S_x(t) =$$

$$= -\frac{1}{S_0(t)}\frac{d}{dt}S_x(t)$$

- Entonces:

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- La expresión anterior nos mostraba un camino para obtener μ_{x+t} dado $S_x(t)$. Nosotros vamos a desarrollar ahora una formula que nos permita obtener $S_x(t)$ a partir de la expresión de la fuerza de la mortalidad, para lo que partiremos de la expresión:

$$\mu_x = \frac{-1}{S_0(x)} \frac{d}{dx} S_0(x)$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- Recordemos que para una función h derivable:

$$\frac{d}{dx}\log h(x)=\frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}h(x)$$

- Aplicándolo sobre nuestra expresión:

$$\mu_x=\frac{-1}{S_0(x)}\frac{d}{dx}S_0(x)=-\frac{d}{dx}\log S_0(x)$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- Si integramos desde 0 hasta y la anterior expresión tenemos:

$$\int_0^y \mu_x dx = -\left(\log S_0(y) - \log S_0(0)\right)$$

- Como sabemos:

$$\log S_0(0) = \log \Pr[T_0 > 0] = \log 1 = 0$$

- Por tanto:

$$S_0(y) = e^{-\int_0^y \mu_x dx}$$

2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

- Si seguimos esta vía, tenemos:

$$S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_r dr} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

- De esta manera, si nosotros conocemos μ_x para todo $x \geq 0$, podemos calcular todas las probabilidades de supervivencia $S_x(t)$, dadas x y t. Es decir, el tanto instantáneo de mortalidad describe la distribución de supervivencia de la misma manera que lo hace la función S_0. De hecho, en la práctica es más conveniente describir la distribución de supervivencia usando la fuerza de mortalidad que la función de supervivencia.

2.3. Notación actuarial

- La notación que hemos usado hasta ahora se corresponde con la usada habitualmente en estadística.
- Sin embargo, la Ciencia Actuarial utiliza una notación particular denominada Notación Actuarial Internacional, que tiene las siguientes correspondencias:

$$ {}_t p_x = \Pr[T_x > t] = S_x(t) $$

$$ {}_t q_x = \Pr[T_x \le t] = 1 - S_x(t) = F_x(t) $$

$$ {}_{u|t} q_x = \Pr[u < T_x \le u+t] = S_x(u) - S_x(u+t) $$

2.3. Notación actuarial

- Donde:
  - $_tp_x$ → es la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + t$.
  - $_tq_x$ →es la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca antes de cumplir la edad $x + t$.
  - $_{u|t}q_x$ → es la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + u$, pero fallezca antes de cumplir la edad $x + u + t$. Esta probabilidad es conocida como probabilidad de fallecimiento diferida.
- El tanto instantáneo de mortalidad conserva la misma nomenclatura, μ_x.

2.3. Notación actuarial

- Es bastante habitual encontrarnos con las expresiones anteriores siendo $t = 1$. La interpretación es la misma, pero su notación se suele abreviar de la siguiente forma:
  - $_1p_x = p_x \rightarrow$ es la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva un año.
  - $_1q_x = q_x \rightarrow$es la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca antes de un año. Se le suele denominar tasa de mortalidad.
  - $_{u|1}q_x = {}_{u|}q_x \rightarrow$ es la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + u$, pero fallezca antes un año.

2.3. Notación actuarial

- Existen algunas relaciones inmediatas entre estas expresiones en función de lo visto anteriormente:

$$ {}_t p_x + {}_t q_x = 1 $$

$$ {}_{u|t} q_x = {}_u p_x - {}_{u+t} p_x $$

$$ {}_{t+u} p_x = {}_t p_x \cdot {}_u p_{x+t} $$

$$ \mu_x = -\frac{1}{{}_x p_0} \frac{d}{dx} {}_x p_0 $$

2.3. Notación actuarial

- De manera similar:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{{}_t p_x} \frac{d}{dx} {}_t p_x \Rightarrow \frac{d}{dx} {}_t p_x = -{}_t p_x \mu_{x+t}$$

- Como:

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)} \Rightarrow f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

- Entonces:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

2.3. Notación actuarial

- Además, sabemos que:

$$F_x(t) = \int_0^t f_x(s)ds$$

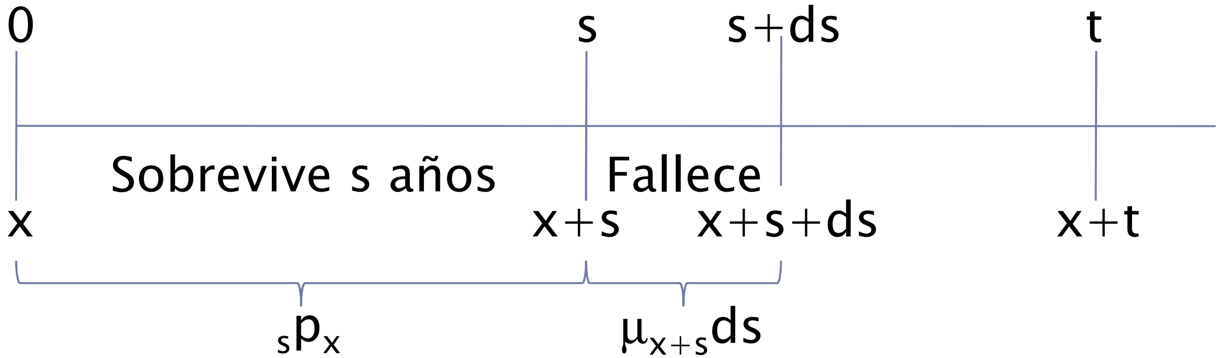
- Esta expresión la podemos reescribir como:

$$_t q_x = \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} ds$$

- Interpretación: Consideremos un instante s, donde $0 \leq s < t$. La probabilidad de que el individuo de edad x sobreviva hasta s es $_sp_x$, y la probabilidad de que el individuo de edad x fallezca entre $x + s$ y $x + s + ds$, habiendo sobrevivido hasta $x + s$, es $\mu_{x+s}ds$, siempre que ds sea muy pequeño. Así, $_sp_x\mu_{x+s}ds$ puede interpretarse como la probabilidad de que el individuo fallezca entre la edad $x + s$ y $x + s + ds$. Ahora, nosotros podemos sumar las posibles muertes en intervalos de s a $s + ds$ (utilizando cálculo integral) para obtener la probabilidad de fallecimiento antes de alcanzar la edad $x + t$.

2.3. Notación actuarial

- Gráficamente:



- Para el caso particular de t=1:

$$q_x = \int_0^1 {}_s p_x \mu_{x+s} ds$$

- Cuando qx es muy pequeño, podemos sustituir px por 1, por lo que se suele utilizar la siguiente aproximación:

$$q_x \approx \int_0^1 \mu_{x+s} ds \approx \mu_{x+1/2}$$

2.4. Tablas de Mortalidad

- Una tabla de mortalidad es una forma de reflejar la distribución completa de la mortalidad o la supervivencia de una población, es decir, desde la edad x_0 hasta ω.

- Sea l_{x_0} un numero positivo, fijado arbitrariamente y llamado raíz de la tabla, y para $0 \leq t \leq \omega + x_0$, podemos definir:

$$l_{x_0+t} = l_{x_0}\, {}_t p_{x_0}$$

- l_{x_0} se interpreta como el número de supervivientes a la edad x_0.

- A partir de esta definición, podemos generalizar para $x_0 \leq x \leq x + t \leq \omega$

$$l_{x+t} = l_{x_0} \cdot {}_{x+t-x_0} p_{x_0} = l_{x_0} \cdot {}_{x-x_0} p_{x_0} \cdot {}_t p_x = l_x \cdot {}_t p_x$$

2.4. Tablas de Mortalidad

- Un ejemplo de estas tablas sería el siguiente, que se corresponde con un fragmento de las tablas INE95 para varones:

x	l_x	d_x
0	100.000,00	78,40
1	99.921,60	14,89
2	99.906,71	22,28
3	99.884,43	14,28
4	99.870,15	9,39
5	99.860,76	8,69
6	99.852,07	8,79
7	99.843,29	7,49
8	99.835,80	5,99
9	99.829,81	8,69
10	99.821,12	11,38

2.4. Tablas de Mortalidad

- A continuación, vamos a ir calculando las diferentes magnitudes a partir de los datos de la tabla.

- En primer lugar, calcularemos la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad $x + t$:

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

- Para que tenga sentido esta expresión, debe tenerse en cuenta que la supervivencia de cada individuo es independiente. Bajo este hipótesis, podemos considerar que el número de personas vivas a la edad $x + t$ es una variable aleatoria binomial con parámetro l_x y ${}_t p_x$, y cuya media es:

$$ E[\xi_1] = l_x \cdot {}_t p_x = l_{x+t} $$

2.4. Tablas de Mortalidad

- De manera similar, podemos definir la probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de alcanzar la edad $x + t$. Sabiendo que:

$$ {}_t p_x + {}_t q_x = 1 $$

- Entonces:

$$ {}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{lx} = \frac{l_x - l_{x+t}}{lx} $$

2.4. Tablas de Mortalidad

- Podemos definir el número de fallecidos en un año, habiendo alcanzado la edad x:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

- Operando:

$$d_x = l_x \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \right) = l_x (1 - p_x) = l_x q_x$$

2.4. Tablas de Mortalidad

- Las tablas de mortalidad o supervivencia más utilizadas en España son:
  - PERMF 2000
  - PASEM
  - GRMF 95
  - GKMF 95

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- La utilización de tablas de mortalidad para el cálculo actuarial supone una gran ventaja en cuanto a la simplificación de la distribución de probabilidades.

- No obstante, las tablas de mortalidad sólo nos muestran los valores para edades enteras, cuando sabemos que la función de supervivencia se caracteriza por ser continua.

- De esta forma, debemos tomar diferentes hipótesis que nos permitan establecer lo que ocurre con la distribución de la supervivencia para edades intermedias.

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- A continuación vamos a estudiar tres asunciones usadas habitualmente. Partiendo de la consideración de que debemos interpolar el valor para una edad $x + t$, siendo $0 \leq t \leq 1$, tendríamos:

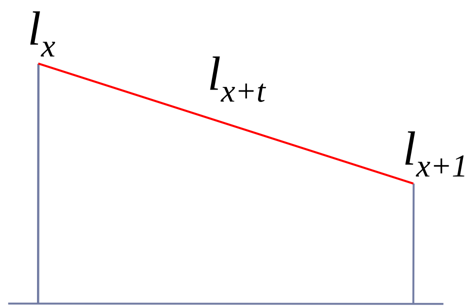
  - Interpolación lineal o hipótesis de uniformidad.

  - Interpolación exponencial o hipótesis de tanto instantáneo de mortalidad constante.

  - Interpolación armónica o hipótesis de Balducci.

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- Interpolación lineal o hipótesis de uniformidad.
  - Supone que la función de supervivencia se distribuye según una distribución uniforme (*U(0,1)*), esto es:



$$l_{x+t} = (1-t)\cdot l_x + t\cdot l_{x+1}$$

  - Como se observa, se trata de la media aritmética.

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- Interpolación lineal o hipótesis de uniformidad.
  - De forma análoga, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$ {}_t q_x = t \cdot q_x $$

$$ {}_t p_x = 1 - t \cdot q_x $$

  - Como se puede demostrar de la siguiente forma:

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{(1-t) \cdot l_x - t \cdot l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - t \cdot l_x - t \cdot l_{x+1}}{l_x} = $$

$$ = \frac{l_x - t(l_x - l_{x+1})}{l_x} = 1 - t \cdot q_x $$

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- Interpolación exponencial o hipótesis de tanto instantáneo de mortalidad constante.
  - Supone que el tanto instantáneo de mortalidad es constante ($\mu_x = \mu$), por lo que:

$$ {}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu dt} = e^{-\mu t} = \left(e^{-\mu}\right)^t = \left(p_x\right)^t $$

  - En términos de l_x:

$$ \frac{l_{x+t}}{l_x} = \left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)^t \Rightarrow l_{x+t} = l_x^{(1-t)} \cdot l_{x+1}^{\;t} $$

  - Como se observa, se trata de una media geométrica.

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- Interpolación armónica o hipótesis de Balducci.
  - Esta hipótesis se basa en asumir que la probabilidad de fallecimiento es proporcional al tiempo que falta hasta el final del periodo, esto es:

$$ {}_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x $$

  - En términos de l_x:

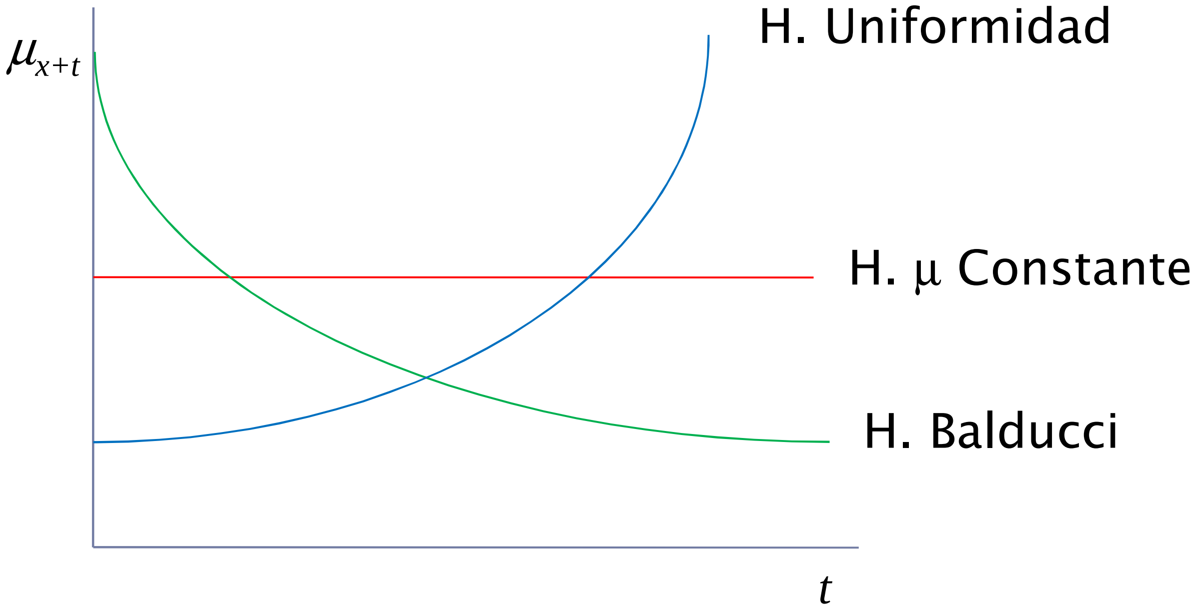
$$ \frac{l_{x+t} - l_{x+1}}{l_{x+t}} = (1-t)\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \Rightarrow 1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x+t}} = \frac{(1-t)(l_x - l_{x+1})}{l_x} \Rightarrow \frac{l_{x+1}}{l_{x+t}} = 1 - \frac{(1-t)\cdot l_x - (1-t)\cdot l_{x+1}}{l_x} $$

$$ \Rightarrow \frac{1}{l_{x+t}} = \frac{(1-t)}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}} \Rightarrow l_{x+t} = \frac{1}{\frac{(1-t)}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}}} $$

  - Como se observa, se trata de una media armónica.

2.5. Hipótesis para fracciones de año

- Gráficamente, la evolución del tanto instantáneo de mortalidad en cada hipótesis es la siguiente:



2.5. Hipótesis para fracciones de año

- En resumen:

Hipótesis \ Parámetro	${}_tp_x$	${}_tq_x$	l_x
Uniforme	$1-t\cdot q_x$	$t\cdot q_x$	$l_{x+t}=(1-t)\cdot l_x+t\cdot l_{x+1}$
μ Constante	$(p_x)^t$	$1-(p_x)^t$	$l_{x+t}=l_x^{(1-t)}+l_{x+1}^{\ t}$
Balducci	$\dfrac{p_x}{1-(1-t)\cdot q_x}$	$\dfrac{t\cdot q_x}{1-(1-t)\cdot q_x}$	$\dfrac{1}{l_{x+t}}=\dfrac{1-t}{l_x}+\dfrac{t}{l_{x+1}}$

2.6. Leyes de mortalidad

- Una alternativa a las tablas de mortalidad es la utilización de las denominadas leyes de mortalidad o de supervivencia.
- Estas leyes tratan de representar la mortalidad de una manera simplificada a través de una expresión en función de la edad.
- A continuación vamos a ver algunas de las más representativas.

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Moivre (1729)
  - Supone que el tanto instantáneo de mortalidad es proporcional al tiempo que falta hasta el final de la vida de los individuos:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} \Rightarrow \mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}$$

  - Para calcular la probabilidad de supervivencia:

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_s ds} = e^{-\int_x^{x+n} \frac{1}{\omega - s} ds} = e^{\ln(\omega - s)]_x^{x+n}} =$$

$$= e^{\ln(\omega - x - n)} - e^{\ln(\omega - x)} = e^{\ln\left(\frac{\omega - x - n}{\omega - x}\right)} = \frac{\omega - x - n}{\omega - x} = 1 - n\frac{1}{\omega - x}$$

  - Sólo tendremos que estimar el parámetro ω.

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Gompertz (1825)
  - Podemos definirla como:

$$\mu_x = B \cdot c^x$$

  - A priori, no sabemos la interpretación de los parámetros B y c. Para comprenderlo vamos a partir de la hipótesis de que no sabemos qué función sigue el tanto instantáneo de mortalidad, pero sí sabemos que éste es creciente de forma lineal a un tanto fijo, esto es:

$$\frac{\mu'_x}{\mu_x} = \gamma$$

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Gompertz (1825)
  - Si integramos, tenemos:

$$\int \frac{\mu'_x}{\mu_x} = \int \gamma \Rightarrow \ln \mu_x = \gamma \cdot x + h$$

$$\mu_x = e^{\gamma \cdot x + h} = \underbrace{e^h}_{B} \cdot \underbrace{e^{\gamma \cdot x}}_{c} = B \cdot c^x$$

  - Donde:
    - c → es el crecimiento de la mortalidad en función de la edad.
    - B → es la mortalidad mínima en función de cada edad.

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Gompertz (1825)
  - Una forma alternativa de expresar el tanto instantáneo de mortalidad sería:

$$\mu_x = \frac{-d\ln l_x}{dx} = \frac{-l'(x)}{l(x)} = B \cdot c^x$$

  - Vamos a intentar obtener una expresión de la Ley de Gompertz en función de l_x:

$$\int \frac{-l'(x)}{l(x)} = \int B \cdot c^x$$

$$-\ln l(x) = \frac{B \cdot c^x}{\ln c} + D \Rightarrow l(x) = e^{-\left(\frac{B \cdot c^x}{\ln c} + D\right)}$$

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Gompertz (1825)
  - Procedemos a hacer el siguiente cambio de variable:

$$m = \frac{B}{\ln c}$$

$$k = e^{-D}$$

  - Así, tendremos:

$$l(x) = k \cdot e^{-mc^x} = l_0 \cdot e^m \cdot e^{-mc^x} = l_0 \cdot e^{-m\left(c^x - 1\right)}$$

  - Donde:

$$l_0 = k \cdot e^{-mc^0} = k \cdot e^{-m} \Rightarrow k = l_0 \cdot e^m$$

  - Por lo que tenemos la Ley en función de parámetros conocidos

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Makehan (1860)

    - Se trata de una evolución de la de Gompertz que intenta captar más información para estimar el tanto instantáneo de mortalidad, ya que introduce una variable adicional (A) que representa las muertes accidentales:

$$\mu_x = A + B \cdot c^x$$

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Makehan (1860)
  - Si procedemos de manera similar a como lo hicimos en la Ley de Gompertz, podemos obtener la expresión de $l(x)$:

$$\int \frac{-l'(x)}{l(x)} = \int A + B \cdot c^x$$

$$-\ln l(x) = Ax + \frac{B \cdot c^x}{\ln c} + D \Rightarrow l(x) = e^{-\left(Ax + \frac{B \cdot c^x}{\ln c} + D\right)}$$

  - Si hacemos el siguiente cambio de variable:

$$m = \frac{B}{\ln c}$$

$$k = e^{-D}$$

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Makehan (1860)
  - Procedemos a hacer el siguiente cambio de variable:

$$m = \frac{B}{\ln c}$$

$$k = e^{-D}$$

  - Así, tendremos:

$$l(x) = k \cdot e^{-\left(Ax + mc^{x}\right)} = l_0 \cdot e^{m} \cdot e^{-\left(Ax + mc^{x}\right)} = l_0 \cdot e^{-\left(Ax + m\left(c^{x} - 1\right)\right)}$$

  - Donde:

$$l_0 = k \cdot e^{-\left(A0 + mc^{0}\right)} = k \cdot e^{-m} \Rightarrow k = l_0 \cdot e^{m}$$

  - Por lo que tenemos la Ley en función de parámetros conocidos

2.6. Leyes de mortalidad

- Ley de Weibull (1939)
  - Se define como:

$$\mu_x = k \cdot x^n$$

  - Siendo k y n dos constantes.
  - Procediendo de la misma forma que en las dos leyes anteriores, obtenemos:

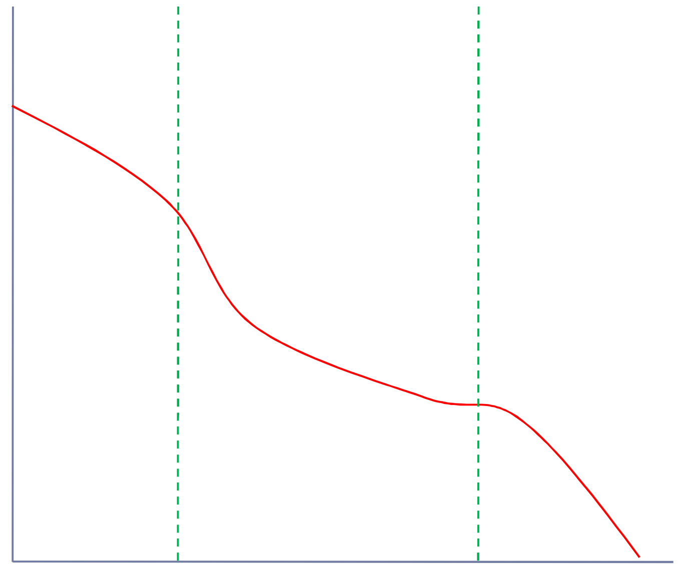
$$\int \frac{-l'(x)}{l(x)} = \int k \cdot x^n$$

$$-\ln l(x) = \frac{k}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow l(x) = e^{-\frac{k}{n+1} x^{n+1}}$$

2.6. Leyes de mortalidad

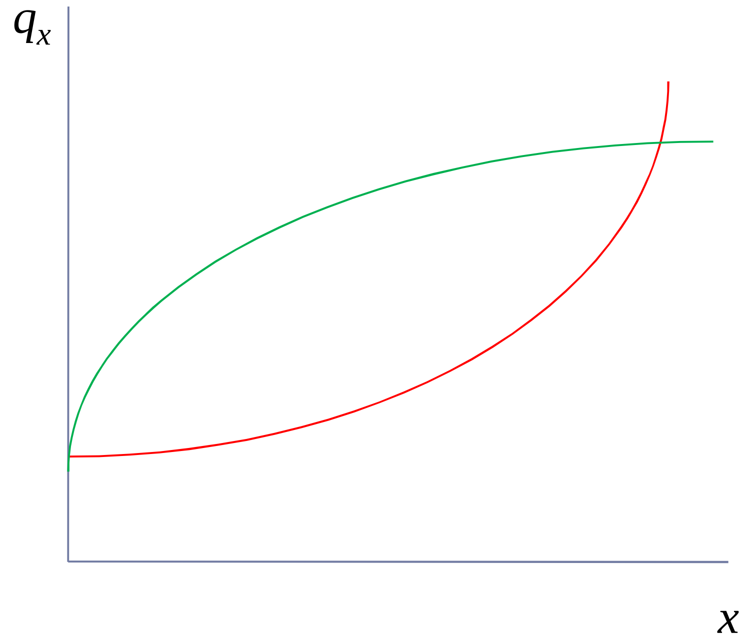
- Las leyes de mortalidad que acabamos de ver no se deben aplicar para explicar toda la distribución, ya que no explican la evolución real de la mortalidad en su conjunto.

- Tendremos que dividir la curva de supervivencia en varios segmentos, a los que aplicaremos una ley diferente.



2.6. Leyes de mortalidad

- Las funciones de Gompertz y Makehan se suelen emplear para modelizar edades altas, donde la probabilidad de fallecimiento es creciente (línea roja).
- La ley de Moivre, se suele emplear para modelizar la cola de la distribución, ya que no existen demasiados datos para edades muy elevadas.
- La ley de Weibull suele emplearse en edades tempranas, ya que aunque la probabilidad de supervivencia es creciente, tiende a estabilizarse.



2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

- A lo largo del tema hemos venido desarrollando diferentes técnicas que se emplean en el ámbito actuarial para modelizar el comportamiento de la mortalidad.
- En los próximos temas profundizaremos en técnicas que, a partir de dichos modelos, nos permitan estimar las primas necesarias para garantizar la solvencia y la rentabilidad de la que hablábamos en la introducción de la asignatura.

2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

- Pero, ¿qué ocurre si como consecuencia de una desviación en la estimación del modelo de supervivencia las primas no son suficientes para garantizar la solvencia de la compañía?
- En este caso estamos ante lo que conocemos como riesgo de longevidad, que podemos definir como el riesgo que el asegurador no sea capaz de asumir sus compromisos debido a una desviación en la mortalidad del asegurado.

2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

- Por ejemplo, supongamos un seguro de vida (riesgo) en el que nosotros estamos estimando que la probabilidad de fallecimiento (q_x) es de 0,1%. Analicemos que ocurre:
  - Si la probabilidad real de fallecimiento es de 0,05%: en este caso la probabilidad real es menor que la que habíamos estimado, por lo que será menos probable que tengamos que asumir el pago de la prestación. Esta situación beneficia a la compañía aseguradora.
  - Si la probabilidad real de fallecimiento es de 0,15%: en este caso la probabilidad real es mayor que la que habíamos estimado, por lo que será más probable que tengamos que asumir el pago de la prestación. Esta situación perjudica a la compañía aseguradora.

2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

- Como se puede apreciar, si nos encontramos ante una desviación perjudicial para la compañía aseguradora esto conllevará a que la prima cobrada al tomador sea insuficiente para garantizar el pago de los compromisos adquiridos y, por tanto, generará a medio o largo plazo la quiebra de la compañía.

2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

- Los avances en los hábitos de las personas, la higiene, la sanidad, la genética, la tecnología, etc., genera graves problemas desde un punto de vista técnico actuarial, ya que suponen variaciones en el modelo biométrico no contempladas previamente.
- Por ejemplo, si en el corto plazo un avance genético permitiese regenerar artificialmente órganos vitales podría producirse una prolongación muy drástica en la esperanza de vida de las personas.

2.7. El riesgo de longevidad desde la óptica actuarial.

- Como veremos más adelante, tradicionalmente una de las medidas que pretendían combatir este riesgo (así como el riesgo financiero, etc.) ha sido la introducción de recargos de seguridad en las tablas de mortalidad.
- Actualmente, se están planteando otras soluciones que pretenden ceder el riesgo de longevidad a un tercero, tales como los bonos o las cédulas de longevidad.