Tema 3. Operaciones de Seguros de Vida

Matemática Actuarial de las Operaciones de Seguro de Vida

Tema 3. Operaciones de Seguros de Vida

- 3.1. Introducción
- 3.2. Hipótesis actuariales, base técnica
- 3.3. Conceptos básicos previos
- 3.4. Análisis del momento de pago de las prestaciones
- 3.5. Cobertura de prestaciones variables

3.1. Introducción

- En el tema anterior vimos los diferentes formas que ternemos para modelizar la mortalidad futura de los individuos.

- Esos modelos nos servirán para valorar los pagos relacionados con el fallecimiento o la supervivencia del asegurado o el partícipe de un plan de pensiones.

3.1. Introducción

- Esto es así porque dependiendo de si fallece o sobrevive, del momento en el que ocurre, que es incierto, el valor actual puede modelizarse como una variable aleatoria (Z_t).

- Dicha variable aleatoria dependerá de dos factores:
  - El modelo de supervivencia.
  - El modelo financiero, esto es, del tipo de interés.

3.2. Hipótesis actuariales, base técnica

- Antes de adentrarnos en el estudio de las diferentes magnitudes actuariales, debemos fijar algunas hipótesis que utilizaremos.
- Al conjunto de hipótesis utilizadas se le denomina *base técnica*, que comprende las hipótesis de mortalidad o supervivencia, de tipo de interés, gastos, etc.
- En cuanto al modelo de supervivencia, ya profundizamos en el tema 2, por lo que utilizaremos las tablas de mortalidad o las leyes de supervivencia.

3.2. Hipótesis actuariales, base técnica

- Con respecto al tipo de interés, señalar que, de momento, supondremos que el tipo de interés que utilizaremos es constante.
- A este tipo de interés se le denomina tipo de interés técnico.
- Conviene recordar algunas relaciones básicas de la capitalización compuesta. El factor de descuento financiero (v) se definía, en el tiempo discreto, como:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

3.2. Hipótesis actuariales, base técnica

- Por su parte, el tipo de interés instantáneo lo podemos definir:

$$\delta = \ln(1+i)$$

- Así, se puede concluir que:

$$1+i = e^{\delta}$$

- Por lo que el factor de descuento financiero en tiempo continuo será:

$$v = e^{-\delta}$$

3.3. Conceptos básicos previos

- Uno de los elementos fundamentales de la matemática actuarial es el concepto de actualización financiero-actuarial.

- Supongamos un contrato de seguro en el que se garantiza que se pagará al asegurado un capital C si éste sobrevive al momento n, no pangando nada si fallece antes de ese momento. Gráficamente tendremos:

3.3. Conceptos básicos previos

- Si calculamos el equilibrio de esta operación tendremos:

$$Eq = E[C] \cdot (1+i)^{-n} = [C \cdot P(Vivo) + 0 \cdot P(Muerto)] \cdot (1+i)^{-n} =$$

$$= [C \cdot {}_n p_x + 0 \cdot {}_n q_x] \cdot (1+i)^{-n} = C \cdot {}_n p_x \cdot (1+i)^{-n} = C \cdot {}_n E_x$$

- Así, el factor de descuento o actualización financiero-actuarial será:

$${}_n E_x = {}_n p_x \cdot (1+i)^{-n}$$

3.3. Conceptos básicos previos

- Por su parte, el factor de capitalización financiero-actuarial se define como la inversa del factor de actualización:

$$\frac{1}{{}_{n}E_{x}}$$

3.4. Análisis del momento de pago de las prestaciones

- Una vez estudiados los conceptos básicos que nos permitirán realizar una valoración correcta, a continuación desarrollaremos el valor de las prestaciones según la contingencia cubierta por la póliza.
- Como sabemos, podemos encontrarnos tres tipos de contingencias básicas:
  - Seguros ligados al fallecimiento del asegurado → Seguros de Vida
  - Seguros ligados a la supervivencia del asegurado → Seguros de Supervivencia
  - Seguros ligados a ambas contingencias → Seguros Mixtos

3.4.1. Seguros de Vida

- Los seguros de vida se caracterizan por pagar una indemnización o prestación en caso de fallecimiento del asegurado.

- Si queremos valorar dicha prestación en el momento actual debemos calcular el valor actual de los pagos que haga la póliza, que estarán en función del momento de fallecimiento, por lo que podemos modelizar dicho valor actual como una variable aleatoria.

- Por lo tanto, dado un modelo de supervivencia y un tipo de interés podemos obtener la distribución del valor actual de nuestro seguro de vida (Z) y, por lo tanto, podemos calcular magnitudes tales como la media y la varianza de los valores actuales.

3.4.1. Seguros de Vida

- Dicho de otro modo, supongamos que tenemos un seguro que nos paga 1€ en el momento en el que fallezcamos. La variable aleatoria "valor actual" (Z) podrá tomar los siguientes valores:

$$Z = \begin{cases} v^{T_x}, \text{si fallece} \\ 0, \text{si sobrevive} \end{cases}$$

- A continuación veremos diferentes modalidades de seguros de vida.

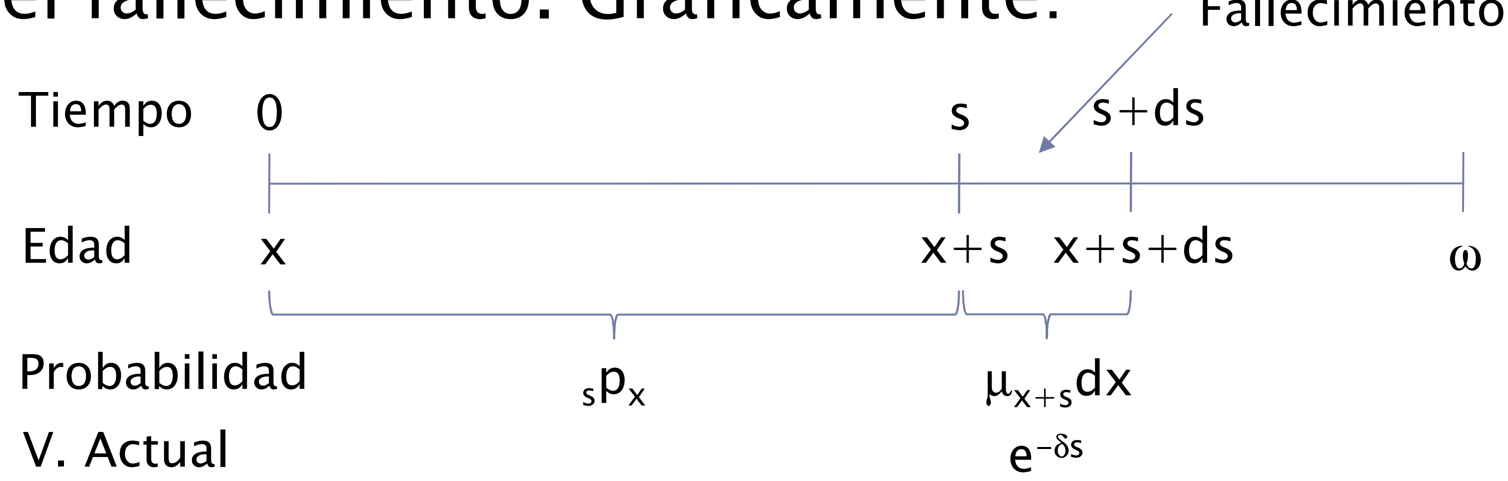
3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

- Los seguros de vida entera se caracterizan por pagar una indemnización o prestación en caso de fallecimiento del asegurado, sin límite temporal.
- Podemos encontrar dos casos en función del momento en el que se produce el pago de la prestación:
  a) Seguro de Vida Entera Continuo.
  b) Seguro de Vida Entera Discreto.

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

a) Seguro de Vida Entera Continuo

- Se caracterizan por pagar la indemnización o prestación en el instante en el que se produce el fallecimiento. Gráficamente:



3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

a) Seguro de Vida Entera Continuo

- Como vimos anteriormente, la mejor forma de reflejar una variable es a través de su esperanza matemática. Por lo tanto, podemos calcular la esperanza matemática de nuestra variable aleatoria "valor actual" Z:

$$E(Z) = E\left(e^{-\delta T_x}\right) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

a) Seguro de Vida Entera Continuo

- Además de la esperanza matemática, nos interesará conocer cuál es su dispersión para analizar si podemos sufrir grandes desviaciones. Para ello, podemos calcular el momento de segundo orden como:

$$E\left[Z^2\right] = E\left[\left(e^{-\delta T_x}\right)^2\right] = E\left[e^{-2\delta T_x}\right] = \int_0^\infty e^{-2\delta t} \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} dt = {}^2\overline{A}_x$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

a) Seguro de Vida Entera Continuo

- Por lo tanto, la varianza será:

$$V[Z]=V\left[e^{-\delta T_x}\right]=E\left[Z^2\right]-E[Z]^2={}^2\bar{A}_x-\left(\bar{A}_x\right)^2$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

a) Seguro de Vida Entera Continuo

- Habitualmente las prestaciones garantizadas son superiores a 1 euro. Si consideramos que S es el capital asegurado o suma asegurada, podemos expresar su esperanza y varianza de la siguiente forma:

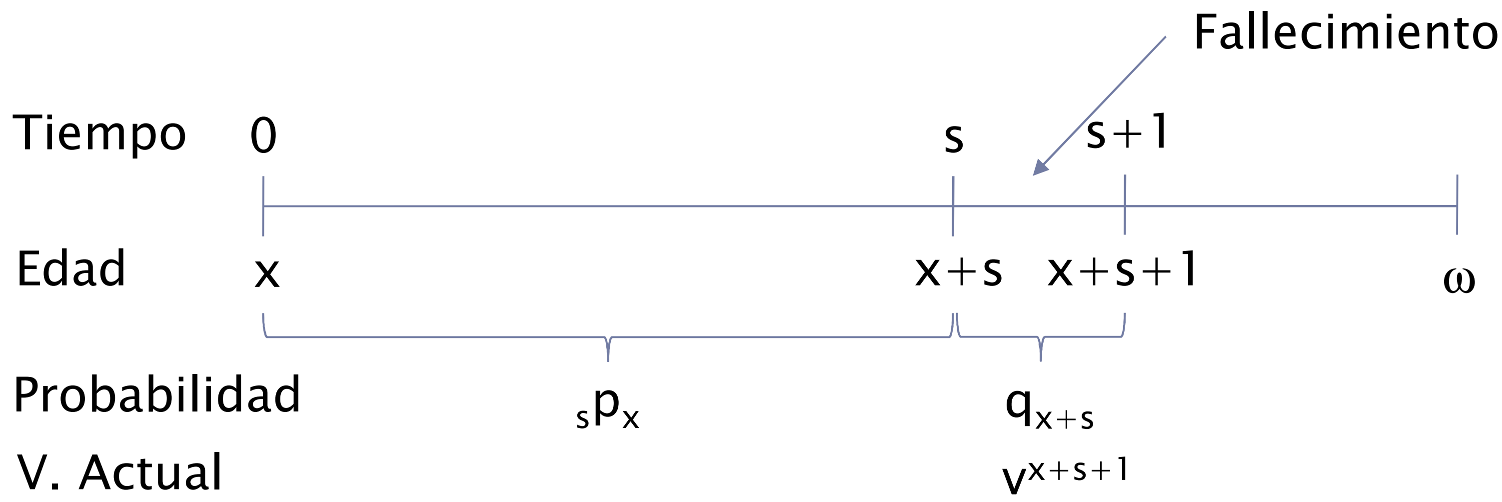
$$E[SZ] = E\left[Se^{-\delta T_x}\right] = S\overline{A}_x$$

$$V[SZ] = V\left[Se^{-\delta T_x}\right] = S^2\left({}^2\overline{A}_x - \overline{A}_x^{\,2}\right)$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Se caracterizan por pagar la indemnización o prestación al finalizar el periodo en el que se produce el fallecimiento. Gráficamente:



3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Al igual que en el caso continuo, vamos a calcular la esperanza matemática de nuestra variable aleatoria "valor actual" Z:

$$E(Z)=E\left(v^{K_x+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_k p_x\ q_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_{k|}q_x=vq_x+v^2{}_{1|}q_x+v^3{}_{2|}q_x+\ldots=A_x$$

- Siendo K_x la variable aleatoria que representa la vida futura del asegurado en tiempo discreto.

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Por su parte, el momento de orden 2 sería:

$$E\left(Z^2\right)=E\left[\left(v^{K_x+1}\right)^2\right]=\sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)}\, {}_k p_x \; q_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)}\, {}_{k|}q_x = v^2 q_x + v^{2\cdot 2}\, {}_{1|}q_x + v^{2\cdot 3}\, {}_{2|}q_x + \ldots = {}^2A_x$$

- Y la varianza:

$$V[Z]=V\left[v^{K_x+1}\right]=E\left[Z^2\right]-E[Z]^2={}^2A_x-\left(A_x\right)^2$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Si el capital o suma asegurados fuesen S, en lugar de 1 euro, tendríamos:

$$E[SZ] = E\left[Sv^{K_x+1}\right] = SA_x$$

$$V[SZ] = V\left[Sv^{K_x+1}\right] = S^2\left({}^2A_x - A_x^{\ 2}\right)$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Un caso particular, que se suele utilizar con frecuencia dentro del modelo discreto, es aquel en el que la variable K_x se divide en m fracciones de año, de tal manera que:

$$K_x^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor mT_x \rfloor$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Si calculamos su esperanza matemática tendremos:

$$E(Z)=E\left(v^{K_x^{(m)}+1/m}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k+1}{m}} \, {}_{\frac{k}{m}|\frac{1}{m}}q_x=\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k+1}{m}} \, {}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}=$$

$$=v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_x+v^{2/m} \, {}_{\frac{1}{m}|\frac{1}{m}}q_x+v^{3/m} \, {}_{\frac{2}{m}|\frac{1}{m}}q_x+v^{4/m} \, {}_{\frac{3}{m}|\frac{1}{m}}q_x+\ldots=A_x^{(m)}$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Podemos calcular el momento de orden 2:

$$E\left(Z^2\right) = E\left(v^{2\left(K_x^{(m)}+1/m\right)}\right) = E\left(\left(v^2\right)^{K_x^{(m)}+1/m}\right) = {}^2A_x^{(m)}$$

- Y la varianza:

$$V\left(Z^2\right) = {}^2A_x^{(m)} - \left(A_x^{(m)}\right)^2$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Otra cuestión utilizada con frecuencia en el cálculo de seguros discretos son las fórmulas recursivas.
- Supongamos que nos encontramos en la edad $\omega - 1$, esto es, un año antes del final de la vida. En este momento, sabemos que la probabilidad de fallecimiento es 1 ($q_{\omega-1}=1$).

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- En estas circunstancias, el valor actual de una indemnización para una persona de edad $\omega - 1$, será:

$$A_{\omega-1} = E\left[v^{K_{\omega-1}+1}\right] = v$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Si trabajamos un poco en la fórmula que vimos para A_x, podemos decir que:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x+1} v^{k+1}{}_k p_x \cdot q_{x+k} = v \cdot q_x + v^2{}_1 p_x \cdot q_{x+1} + v^3{}_2 p_x \cdot q_{x+2} + \ldots =$$

$$= v \cdot q_x + v_1 p_x \underbrace{\left(v \cdot q_{x+1} + v^2{}_1 p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v^3{}_2 p_{x+1} \cdot q_{x+3} + \ldots\right)}_{A_{x+1}}$$

- Por tanto:

$$A_x = v \cdot q_x + v \cdot {}_1 p_x \cdot A_{x+1}$$

3.4.1.1. Seguros de Vida Entera

b) Seguro de Vida Entera Discreto

- Podemos llegar a una situación similar en el caso de fraccionar el año en m periodos:

$$A_x^{(m)} = v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_x + v^{2/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{1}{m}} + v^{3/m} \cdot {}_{\frac{2}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{2}{m}} + \ldots =$$

$$= v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_x + v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}p_x \underbrace{\left(v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{1}{m}} + v^{2/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}p_{x+\frac{1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{2}{m}} + \ldots \right)}_{A^{(m)}_{x+\frac{1}{m}}}$$

- Por tanto:

$$A_x^{(m)} = v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_x + v^{1/m} \cdot {}_{\frac{1}{m}}p_x \cdot A^{(m)}_{x+\frac{1}{m}}$$

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

- Los seguros de vida temporales se caracterizan por pagar una indemnización o prestación en caso de fallecimiento del asegurado durante el periodo de vigencia de la póliza.
- Al igual que en los seguros de vida entera, podemos encontrar dos casos en función del momento en el que se produce el pago de la prestación:
  a) Seguro de Vida Temporal Continuo.
  b) Seguro de Vida Temporal Discreto.

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

a) Seguro de Vida Temporal Continuo

- Como vimos para el caso de los vida entera, se caracterizan por pagar la indemnización o prestación en el instante en el que se produce el fallecimiento.
- En este caso, nuestra variable aleatoria "valor actual" tomará la siguiente forma:

$$z = \begin{cases} v^{T_x} = e^{-\delta T_x} & , \text{si } T_x \leq n \\ 0 & , \text{si } T_x > n \end{cases}$$

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

a) Seguro de Vida Temporal Continuo

- Si calculamos la esperanza matemática de nuestra variable aleatoria "valor actual" Z, tenemos:

$$E(Z) = E\left(e^{-\delta T_x}\right) = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t} dt = \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$$

- Siendo n el periodo de vigencia de la póliza.

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

b) Seguro de Vida Temporal Discreto

- Se caracterizan por pagar la indemnización o prestación al finalizar el periodo en el que se produce el fallecimiento.

- En este caso, nuestra variable aleatoria "valor actual" tomará la siguiente forma:

$$z = \begin{cases} v^{K_x+1}, \text{si } K_x \leq n \\ 0 \quad , \text{si } K_x > n \end{cases}$$

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

b) Seguro de Vida Temporal Discreto

- Si calculamos la esperanza matemática de nuestra variable aleatoria "valor actual" Z, tenemos:

$$E(Z) = E\left(v^{K_x+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = A^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

b) Seguro de Vida Temporal Discreto

- Al igual que vimos para el caso de los seguros vida entera, podemos analizar lo que ocurre al dividir la variable de la vida futura en periodos menores al año.

- En este caso, nuestra variable aleatoria "valor actual" tomará la siguiente forma:

$$z = \begin{cases} v^{K_x^{(m)}+\frac{1}{m}}, \text{si } K_x^{(m)} \leq n - \dfrac{1}{m} \\ 0 \qquad , \text{si } K_x^{(m)} \geq n \end{cases}$$

3.4.1.2. Seguros de Vida Temporales

b) Seguro de Vida Temporal Discreto

- Si calculamos la esperanza matemática de nuestra variable aleatoria "valor actual" Z, tenemos:

$$E(Z) = E\left(v^{K_x^{(m)}+1}\right) = \sum_{k=0}^{mn-1} v^{(k+1)/m} \cdot {}_{\frac{k}{m}\big|\frac{1}{m}} q_x = A^{(m)\,1}_{x:\overline{n}|}$$

3.4.2. Seguros de Supervivencia

- Los seguros de supervivencia se caracterizan por pagar una indemnización o prestación en caso de que el asegurado se mantenga vivo durante toda la vigencia de la póliza.

- De la misma forma que vimos para los seguros de vida, si queremos valorar dicha prestación en el momento actual debemos calcular el valor actual de los pagos que haga la póliza. La diferencia radica en que los pagos ahora estarán en lugar de la supervivencia y no del fallecimiento, debiendo modelizar dicho valor actual como una variable aleatoria.

- Por lo tanto, dado un modelo de supervivencia y un tipo de interés podemos obtener la distribución del valor actual de nuestro seguro de vida (Z) y, por lo tanto, podemos calcular magnitudes tales como la media y la varianza de los valores actuales.

3.4.2. Seguros de Supervivencia

- Dicho de otro modo, supongamos que tenemos un seguro que nos paga 1€ si transcurridos los n años de vigencia de la póliza continuamos vivos. La variable aleatoria "valor actual" (Z) podrá tomar los siguientes valores:

$$Z = \begin{cases} 0, \text{si } T_x < \text{n} \\ v^n, \text{si } T_x \geq \text{n} \end{cases}$$

- En este caso, la esperanza matemática sería:

$$A_{x:\overset{\;1}{\lceil n}} = v^n \cdot {}_n p_x = {}_n E_x$$

3.4.2. Seguros de Supervivencia

- Otra forma de ver la estructura de la variable aleatoria es asimilarla a una distribución binomial:

$$Z = \begin{cases} 0, \text{ con probabilidad } 1\text{-}{}_{n}p_{x} \\ v^{n}, \text{ con probabilidad } {}_{n}p_{x} \end{cases}$$

- Si recordamos, la esperanza matemática de una distribución binomial era $n{\cdot}p$, por lo que es consistente con la expresión:

$$A_{\substack{\ \ 1\\x:\overline{n|}}} = v^{n} \cdot {}_{n}p_{x} = {}_{n}E_{x}$$

3.4.2. Seguros de Supervivencia

- Para calcular el momento de orden 2 tendremos:

$$ {}^{2}A_{\substack{\ \ 1\\ x:\overline{n|}}} = \left(v^{n}\right)^{2} \cdot {}_{n}p_{x} $$

- Por lo que la varianza será:

$$ Var(Z) = {}^{2}A_{\substack{\ \ 1\\ x:\overline{n|}}} - \left(A_{\substack{\ \ 1\\ x:\overline{n|}}} \right)^{2} = \left(v^{n}\right)^{2} \cdot {}_{n}p_{x} - \left(v^{n} \cdot {}_{n}p_{x}\right)^{2} $$

- Desde el punto de vista de una distribución binomial llegamos a una expresión más intuitiva:

$$ Var(Z) = \left(v^{n}\right)^{2} \cdot {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}q_{x} $$

3.4.3. Seguros Mixtos

- Los seguros mixtos son una combinación de los seguros de vida y los seguros de supervivencia, esto es garantizan una suma asegurada en caso de fallecimiento durante un periodo determinado y, también, si el asegurado sobrevive al finalizar la vigencia de la póliza.
- Este tipo de seguros surgió por razones comerciales:
  - Asegurado: no le gusta pagar un seguro de vida y, si sobrevive, no cobrar nada.
  - Asegurador: reduce el riesgo de desviaciones.

3.4.3. Seguros Mixtos

- Vamos a considerar un seguro mixto que garantiza 1 euro, pagadero inmediatamente después del fallecimiento del asegurado (tiempo continuo). En este caso, la variable aleatoria Z será:

$$Z = \begin{cases} v^{T_x} = e^{-\delta T_x}, \text{si } T_x < \text{n} \\ v^n, \text{si } T_x \geq \text{n} \end{cases}$$

$$= v^{\min(T_x, n)} = e^{-\delta \min(T_x, n)}$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- La esperanza del valor actual, en este caso, será:

$$E(Z) = \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_t p_x \;\mu_{x+t} dt + \int_n^\infty e^{-\delta n}\, {}_t p_x \;\mu_{x+t} dt =$$

$$= \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_t p_x \;\mu_{x+t} dt + e^{-\delta n}\, {}_n p_x =$$

$$= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

- Por tanto:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- De manera similar podemos calcular el momento de orden 2 para obtener la varianza:

$$ {}^{2}\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \int_{0}^{n} e^{-2\delta t}\, {}_{t}p_{x}\, \mu_{x+t}\, dt + e^{-2\delta n}\, {}_{n}p_{x} $$

3.4.3. Seguros Mixtos

- Ahora, vamos a ver qué ocurre en el caso discreto. Para ello, vamos a considerar un seguro mixto que garantiza 1 euro, pagadero al finalizar el periodo en el que se produce el fallecimiento del asegurado. En este caso, la variable aleatoria Z será:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, \text{si } K_x \leq \text{n -1} \\ v^n, \text{si } K_x \geq \text{n} \end{cases}$$

$$= v^{\min(K_x, n)}$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- La esperanza del valor actual, en este caso, será:

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x + v^n P[K_x \geq n] = A^{1}_{x:\overline{n|}} + v^n \cdot {}_k p_x$$

- Por tanto:

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

- El momento de orden 2 será:

$${}^2A_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot {}_{k|}q_x + v^{2n} \cdot {}_k p_x$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- En el caso particular de tener el año dividido en m periodos, la distribución de la variable Z será:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x^{(m)}+\frac{1}{m}}, \text{si } K_x^{(m)} \leq n\text{-}\dfrac{1}{m} \\ v^n, \text{si } K_x^{(m)} \geq n \end{cases}$$

$$= v^{\min(K_x^{(m)}+\frac{1}{m},n)}$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- La esperanza del valor actual, en este caso, será:

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{mn-1} v^{(k+1)/m} \cdot {}_{\frac{k}{m}\big|\frac{1}{m}} q_x + v^n P\left[K_x^{(m)} \geq n\right] = A^{(m)}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + v^n \cdot {}_k p_x$$

- Por tanto:

$$A^{(m)}{}_{x:\overline{n|}} = A^{(m)}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^{\,1}}$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- Desde un punto de vista genérico, podríamos decir que un seguro mixto es la suma de dos variables aleatorias:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, \text{si } K_x \leq \text{n-1} \\ v^n, \text{si } K_x \geq \text{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Z_1 = \begin{cases} v^{K_x+1}, \text{si } K_x \leq \text{n-1} \\ 0, \text{si } K_x \geq \text{n} \end{cases} \\ Z_2 = \begin{cases} 0, \text{si } K_x \leq \text{n-1} \\ v^n, \text{si } K_x \geq \text{n} \end{cases} \end{array}$$

- Donde Z_1 se corresponde con un seguro de vida y Z_2 con un seguro de supervivencia.

3.4.3. Seguros Mixtos

- En este caso, la esperanza matemática será:

$$A_{x:\overline{n}|} = E(Z) = E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2) = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

- El momento de orden 2 será:

$$^2A_{x:\overline{n}|} = E(Z^2) = E\left[(Z_1 + Z_2)^2\right] = E\left[Z_1^2 + Z_2^2 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_2\right] =$$

$$= E\left[Z_1^2\right] + E\left[Z_2^2\right] + 2\underbrace{E\left[Z_1 \cdot Z_2\right]}_{=0} = {}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

3.4.3. Seguros Mixtos

- Y la varianza, por tanto:

$$Var(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2 = \left({}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right) - \left(A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right)^2 =$$

$$= \left({}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right) - {A^{1}_{x:\overline{n}|}}^2 - {A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}^2 - 2 \cdot A^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

3.4.4. Seguros Diferidos

- Los seguros diferidos son una modalidad particular de los seguros de vida. Se caracterizan porque el periodo de exposición al riesgo está diferido durante un plazo u.
- Tienen la siguiente estructura de la variable aleatoria Z:

$$Z = \begin{cases} 0, \text{si } T_x < u \text{ o } T_x \geq u+n \\ e^{-\delta T_x}, \text{si } u \leq T_x < u+n \end{cases}$$

3.4.4. Seguros Diferidos

- La esperanza matemática del valor actual, en este caso será:

$$ {}_{u|}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \int_{u}^{u+n} e^{-\delta t}\, {}_{t}p_{x}\ \mu_{x+t}\, dt $$

- Para integrar, procederemos a hacer el siguiente cambio de variable:

$$ s = t - u $$

3.4.4. Seguros Diferidos

- Operando:

$$
{}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta(s+u)}\,{}_{s+u}p_x\;\mu_{x+s+u}\,ds =
$$

$$
= e^{-\delta u}\,{}_{u}p_x \int_0^n e^{-\delta s}\,{}_{s}p_{x+u}\;\mu_{x+s+u}\,ds =
$$

$$
= e^{-\delta u}\cdot{}_{u}p_x \cdot \bar{A}^{1}_{x+u:\overline{n|}} = v^{u}\cdot{}_{u}p_x \cdot \bar{A}^{1}_{x+u:\overline{n|}} = {}_{u}E_x \cdot \bar{A}^{1}_{x+u:\overline{n|}}
$$

3.4.4. Seguros Diferidos

- Podemos expresarlo también como:

$$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{u+n|}} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{u|}} $$

- Ya que:

$$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_{u}^{u+n} e^{-\delta t}\,{}_{t}p_{x}\;\mu_{x+t}\,dt = \int_{0}^{u+n} e^{-\delta t}\,{}_{t}p_{x}\;\mu_{x+t}\,dt - \int_{0}^{u} e^{-\delta t}\,{}_{t}p_{x}\;\mu_{x+t}\,dt $$

3.4.4. Seguros Diferidos

- Si analizamos un seguro de vida, podemos llegar a alguna conclusión interesante relacionada con los seguros diferidos. En concreto:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\,{}_t p_x \;\mu_{x+t}\,dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \int_r^{r+1} e^{-\delta t}\,{}_t p_x \;\mu_{x+t}\,dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} {}_{r|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}$$

3.4.4. Seguros Diferidos

- Los seguros diferidos también pueden darse para los casos de seguros vida entera, donde se podría demostrar de manera similar que:

$$\bar{A}_x = \sum_{r=0}^{\infty} {}_{r|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{1|}}$$

- Para el caso de seguros discretos, podemos encontrar expresiones similares.

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

- En muchas ocasiones nos interesará calcular seguros en tiempo continuo o discreto partiendo de un resultado previo obtenido en el tiempo contrario.
- Para ello, utilizaremos algún tipo de herramienta que nos permita calcular una aproximación buena de la variable que queremos calcular. En concreto vamos a ver dos formas:
  a) Hipótesis de uniformidad.
  b) Hipótesis de linealidad.

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

a) Hipótesis de uniformidad.

- La diferencia entre $\overline{A_x}$ y A_x depende de la distribución de supervivencia entre cada edad.
- Si no tenemos información de cómo se desarrolla esta distribución debemos asumir alguna hipótesis sobre cómo lo hace.
- Una de las alternativas, como hemos dicho, es asumir una distribución uniforme.

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

a) Hipótesis de uniformidad.

- Así, para el caso de un seguro vida entera tenemos:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_t p_x \ \mu_{x+t} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-\delta t} \, {}_t p_x \ \mu_{x+t} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^{k+1} \int_0^1 e^{(1-s)\delta} \, {}_s p_{x+k} \ \mu_{x+k+s} ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} \int_0^1 e^{(1-s)\delta} ds =$$

$$= A_x \frac{e^{\delta} - 1}{\delta}$$

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

a) Hipótesis de uniformidad.

- Como $e^{\delta}=1+i$, bajo esta hipótesis tenemos:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

- Por lo que podemos decir que bajo la hipótesis de uniformidad, podemos aproximar:

$$\bar{A}_x \approx \frac{i}{\delta} A_x$$

- Bajo esta misma hipótesis podemos aproximar también:

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

a) Hipótesis de uniformidad.

- Bajo esta misma hipótesis podemos aproximar también:

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

b) Hipótesis de linealidad.

- La alternativa a la hipótesis de linealidad es la que denominamos hipótesis de linealidad, que quizá sea más intuitiva.

- Así, la diferencia entre una prestación en tiempo continuo o en un momento fraccionado del año y una en tiempo discreto es exclusivamente la que se da por el momento del pago del siniestro.

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

b) Hipótesis de linealidad.

- Supongamos que tenemos A_x y $A_x^{(4)}$:
  - En el primer caso, para un asegurado de edad x, si el fallecimiento se produce entre $x+K_x$ y $x+K_x+1$, el pago de la prestación se realizará en K_x+1.
  - En el segundo caso, para el mismo asegurado, el pago de la prestación puede darse en $K_x+1/4$, $K_x+2/4$, $K_x+3/4$ o K_x+1, dependiendo del trimestre en el que se produzca el fallecimiento.
- Si los fallecimientos se producen de manera equitativa a lo largo del año, las prestaciones son pagadas en $K_x+5/8$, que es 3/8 partes de año antes que en el otro caso.

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

b) Hipótesis de linealidad.

- En general, para indemnizaciones donde el año se fracciona en m periodos y asumiendo la hipótesis de linealidad, el tiempo de pago medio de la indemnización es $(m+1)/2m$, pudiendo encontrar la siguiente aproximación:

$$A_x^{(m)} \approx q_x \cdot v^{\frac{m+1}{2m}} + {}_{1|}q_x \cdot v^{1+\frac{m+1}{2m}} + {}_{2|}q_x \cdot v^{2+\frac{m+1}{2m}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+\frac{m+1}{2m}} =$$

$$= (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1}$$

3.4.5. Relación entre seguros en tiempo continuo y discreto.

b) Hipótesis de linealidad.

- Por lo tanto:

$$A_x^{(m)} \approx (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} A_x$$

- Para el caso continuo, si calculamos el límite cuando $m \rightarrow \infty$, tenemos:

$$\bar{A}_x \approx (1+i)^{1/2} A_x$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

- Hasta ahora hemos visto diferentes alternativas para el cálculo de la esperanza del valor actual de las diferentes indemnizaciones aseguradas, suponiendo en todos los casos que la cuantía era constante.

- En esta sección vamos a profundizar en el cálculo de indemnizaciones que varían:
  a) En progresión geométrica.
  b) En progresión aritmética.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Podemos decir que una prestación variable en progresión geométrica es aquella que paga una cuantía creciente o variable en función del momento en el que se produzca el fallecimiento y cuya variación responde a una progresión acumulativa y exponencial.
- En función del momento de pago de la indemnización, podemos distinguir:
  - Prestaciones pagaderas en tiempo continuo: en estas, el crecimiento de la prestación puede ser continuo o discreto.
  - Prestaciones pagaderas en tiempo discreto: el crecimiento de la prestación también es discreto.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Antes de pasar a analizar cada una de las alternativas expuestas, llamaremos:
  - α: tasa de crecimiento.
  - $\beta = \ln(1+\alpha)$: tasa de crecimiento instantanea.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- En primer lugar, vamos a analizar una prestación variable en progresión geométrica con pago continuo y crecimiento continuo.

- Este caso no es muy habitual en la práctica, ya que supone que la suma asegurada varía constantemente.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- La variable aleatoria Z tendrá la siguiente estructura:

$$Z = \begin{cases} e^{-(\delta-\beta)T_x} = (1+\alpha)^{T_x} v^{T_x}, \text{si } T_x \leq n \\ 0, \text{si } T_x \leq n \end{cases}$$

- Así, la esperanza matemática será:

$$\left(\overline{VA}\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)^{1}_{x:\overline{n|}} = \left(\overline{VA}\right)^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-(\delta-\beta)t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^n (1+\alpha)^t \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Una forma alternativa de calcular la esperanza, será sustituir el tipo de interés y el crecimiento por un único elemento que recoja toda la información:

$$(1+\alpha)^t \cdot v^t = v'^t$$

$$(1+\alpha)^t \cdot (1+i)^t = (1+i')^t$$

$$i' = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}$$

- De esta manera, la esperanza matemática será:

$$\left(\overline{VA}\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)^{1}_{x:\overline{n|}} = \left(\overline{VA}\right)^{1}_{x:\overline{n|}} = \overline{A}'^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- En segundo lugar, vamos a analizar una prestación variable en progresión geométrica con pago continuo y crecimiento discreto.
- Este caso es el menos habitual en la práctica.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- La variable aleatoria Z mantiene la estructura vista anteriormente, esto es:

$$Z = \begin{cases} e^{-(\delta-\beta)T_x} = (1+\alpha)^{T_x} v^{T_x}, \text{si } T_x \leq n \\ 0, \text{si } T_x \leq n \end{cases}$$

- Pero los crecimientos serán discretos:

$$\left(\overline{VA}\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{-}}\right)_{x:\overline{n}|}^{1} = \left(\overline{VA}\right)_{x:\overline{n}|}^{1} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+\alpha)^t \cdot \int_0^1 v^s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds = \sum_{t=0}^{n-1} (1+\alpha)^t \cdot \overline{A}_{x+s:\overline{1}|}^{1}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- En tercer lugar, vamos a analizar una prestación variable en progresión geométrica con pago discreto y crecimiento discreto.

- En la práctica suele ser el caso que más se emplea.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- La variable aleatoria Z tendrá la siguiente estructura:

$$Z = \begin{cases} (1+\alpha)^{K_x} v^{K_x}, \text{si } K_x \le n \\ 0, \text{si } K_x > n \end{cases}$$

- Así, la esperanza matemática será:

$$\left(VA \frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \right)^{1}_{x:\overline{n|}} = (VA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^{k} \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k|}p_x$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Si operamos en la anterior expresión:

$$\left(VA\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)^{1}_{x:\overline{n}|}=\left(VA\right)^{1}_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\alpha\right)^{k}\cdot v^{k+1}\cdot{}_{k|}p_{x}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(1+\alpha\right)}{\left(1+\alpha\right)}\left(1+\alpha\right)^{k}\cdot v^{k+1}\cdot{}_{k|}p_{x}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\alpha\right)}\underbrace{\left(1+\alpha\right)^{k+1}\cdot v^{k+1}}_{v'^{k+1}}\cdot{}_{k|}p_{x}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\alpha\right)}\cdot v'^{k+1}\cdot{}_{k|}p_{x}=\frac{1}{\left(1+\alpha\right)}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}v'^{k+1}\cdot{}_{k|}p_{x}=\frac{1}{\left(1+\alpha\right)}\cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

- Es decir:

$$\left(VA\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)^{1}_{x:\overline{n}|}=\left(VA\right)^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{\left(1+\alpha\right)}\cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Al igual que vimos para las prestaciones constantes, existen aproximaciones que nos permitirán calcular los valores de indemnizaciones de pago continuo con crecimiento continuo a partir de indemnizaciones con pago discreto y crecimiento discreto.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Así, vamos a empezar operando a partir de la expresión de la esperanza matemática:

$$\left(\overline{VA}\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(\overline{VA}\right)^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-(\delta-\beta)t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^n (1+\alpha)^t \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 (1+\alpha)^t \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1+\alpha)^{k+s} \cdot v^{k+s} \cdot {}_{k+s} p_x \cdot \mu_{x+k+s} ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^k \cdot v^k \cdot {}_k p_x \int_0^1 (1+\alpha)^s \cdot v^s \cdot {}_s p_{x+k} \cdot \mu_{x+k+s} ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^k \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \int_0^1 (1+\alpha)^s \cdot v^{s-1} \cdot {}_s p_{x+k} \cdot \mu_{x+k+s} ds$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Una vez alcanzada la anterior expresión, debemos utilizar alguna hipótesis para determinar la mortalidad interanual.

- Al igual que hicimos en el caso constante, y siguiendo los mismos razonamientos, utilizaremos:
  - Hipótesis de uniformidad.
  - Hipótesis de linealidad.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Bajo la hipótesis de uniformidad tendríamos:

$$\left(\overline{VA}\frac{\ddot{}}{\ddot{}}\right)_{\substack{1\\x:\overline{n|}}} = \left(\overline{VA}\right)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \int_0^1 (1+\alpha)^s \cdot v^{s-1} \cdot {}_s p_{x+k} \cdot \mu_{x+k+s} ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \int_0^1 (1+\alpha)^s \cdot v^{s-1} \cdot s \cdot ds =$$

$$= (VA)^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{-\left[(1+\alpha)^s - (1+i)^{1-s}\right]_0^1}{\ln(1+i) - \ln(1+\alpha)} =$$

$$= (VA)^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{-\left[((1+\alpha)-1) - (1-(1+i))\right]}{\ln(1+i) - \ln(1+\alpha)} = (VA)^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{i-\alpha}{\delta-\beta}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Por su parte, bajo la hipótesis de linealidad tendríamos:

$$\left(\overline{VA}\frac{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}\right)_{x:\overline{n|}}^{1} = \left(\overline{VA}\right)_{x:\overline{n|}}^{1} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \int_0^1 (1+\alpha)^s \cdot v^{s-1} \cdot {}_s p_{x+k} \cdot \mu_{x+k+s} ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1/2} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1-1/2} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} =$$

$$= (1+i)^{1/2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = (1+i)^{1/2} \cdot (VA)_{x:\overline{n|}}^{1}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

a) En progresión geométrica.

- Para los seguros de supervivencia, las expresiones resultantes serían:
  - Seguro de supervivencia continuo con crecimiento continuo:

$$\left(\overline{VA}\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \left(\overline{VA}\right)_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = e^{-\delta n}.e^{-\beta n}\cdot {}_n p_x$$

  - Seguro de supervivencia continuo con crecimiento continuo:

$$\left(\overline{VA}\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \left(\overline{VA}\right)_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n\cdot\left(1+\alpha\right)^n\cdot {}_n p_x$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- Podemos decir que una prestación variable en progresión aritmética es aquella que paga una cuantía creciente o variable en función del momento en el que se produzca el fallecimiento y cuya variación responde a una progresión acumulativa y sumativa.
- Vamos a centrarnos en el estudio de dos casos particulares:
  - Indemnizaciones Increasing.
  - Indemnizaciones Decreasing.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

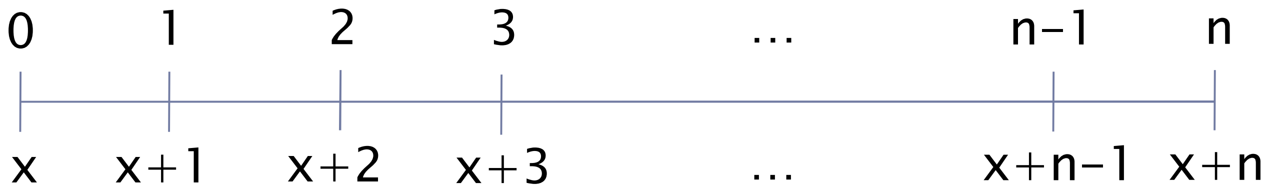
b) En progresión aritmética.

- Las indemnizaciones increasing son aquellas que pagan una unidad adicional por cada periodo transcurrido.
- No se suelen usar en la práctica habitual, salvo en los planes de pensiones.
- Habitualmente, sólo se dan en forma discreta.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- Gráficamente:



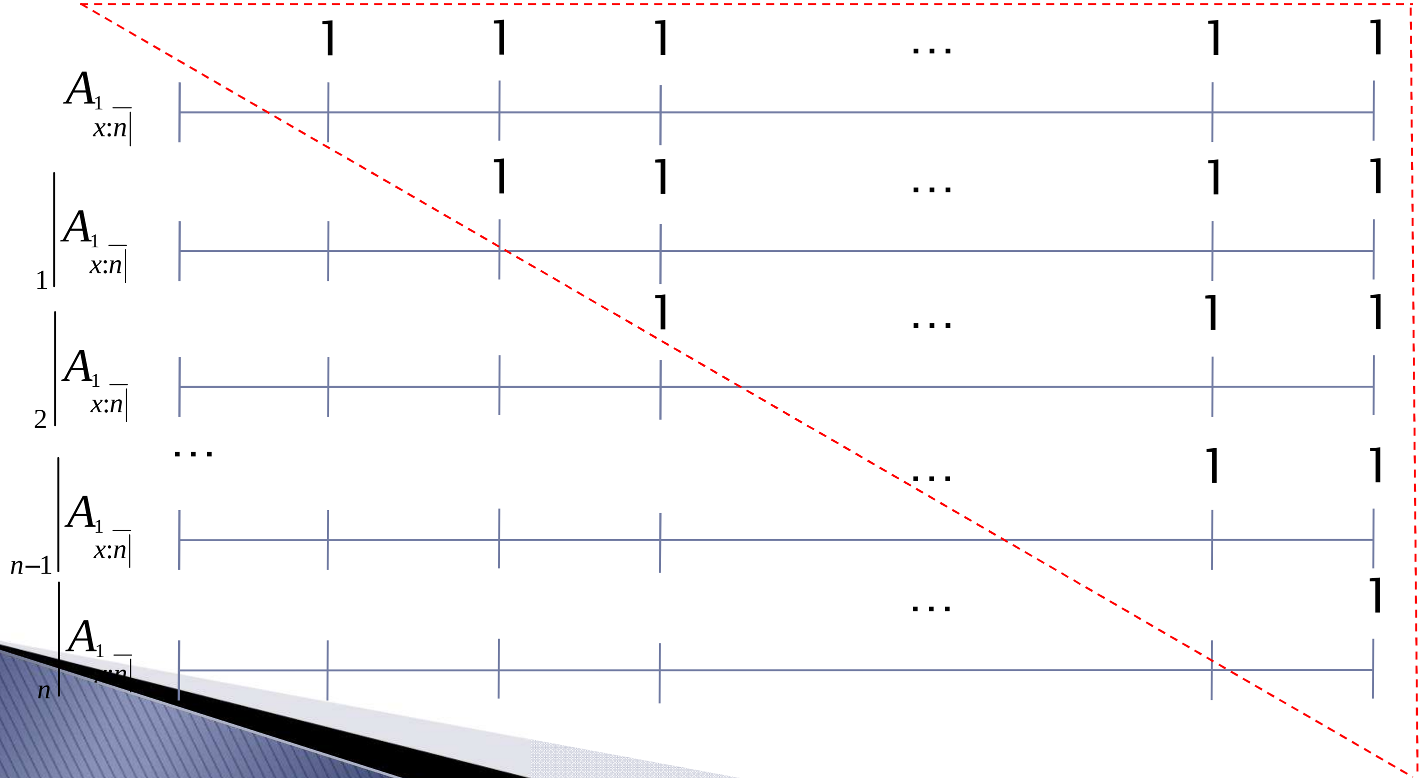
- Formalmente:

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k}p_{x}\cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_{x}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- De manera alternativa, podríamos interpretar una indemnización increasing como la suma de diversas indemnizaciones constantes:



3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- Por lo tanto:

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}\left| A^{1}_{x:\overline{n-t}|} \right.$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

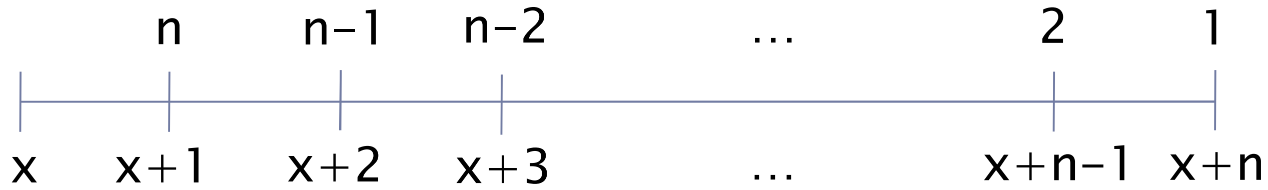
b) En progresión aritmética.

- Las indemnizaciones decreasing son aquellas que pagan una unidad menos por cada periodo transcurrido.
- No se suelen usar en la práctica habitual, en prácticamente ningún caso.
- Habitualmente, sólo se dan en forma discreta.

3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- Gráficamente:



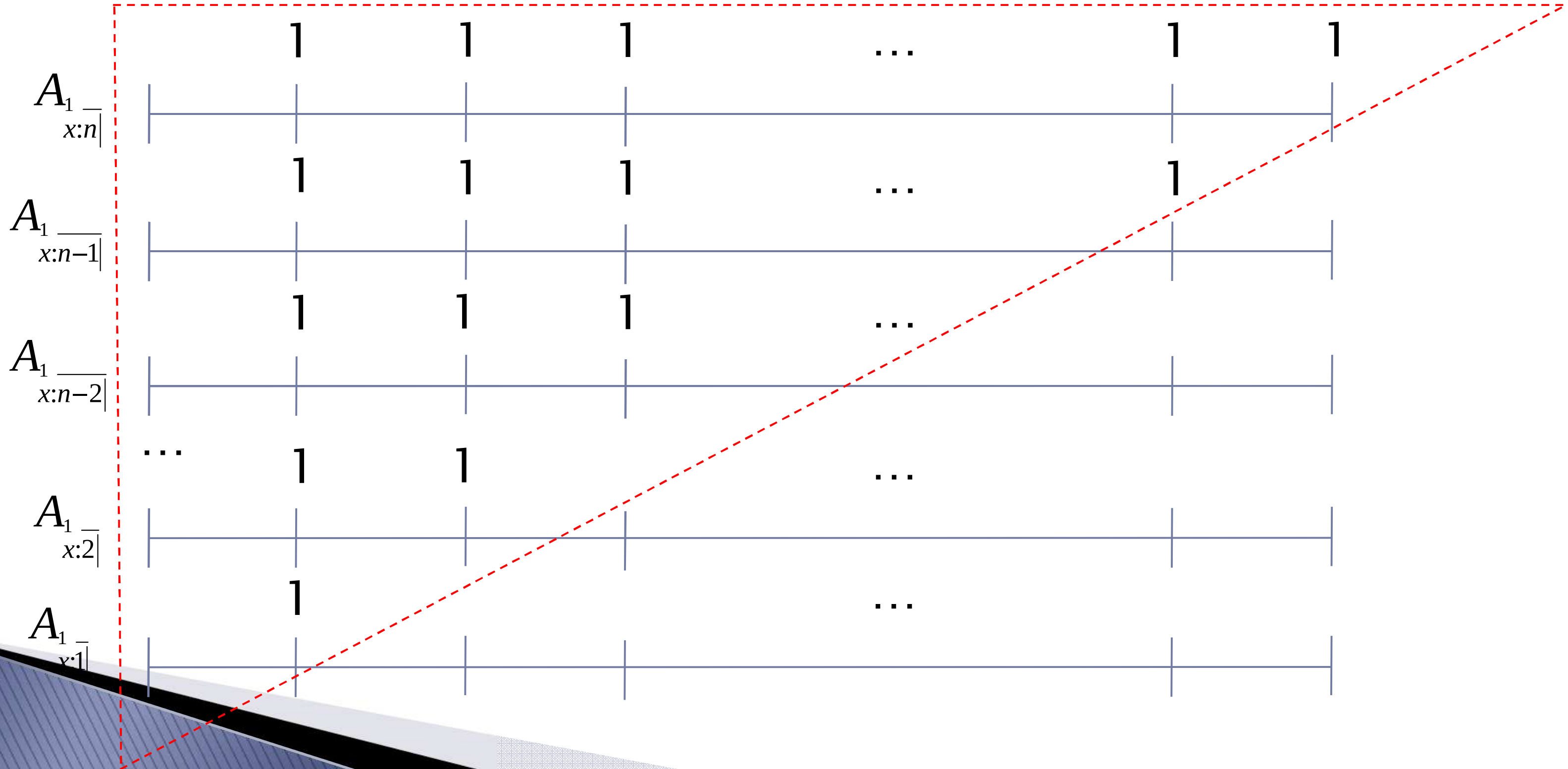
- Formalmente:

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k}p_{x}\cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_{x}$$

3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- De manera alternativa, podríamos interpretar una indemnización decreasing como la suma de diversas indemnizaciones constantes:



3.5. Cobertura de prestaciones variables

b) En progresión aritmética.

- Por lo tanto:

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} A^{1}_{x:\overline{n-t}|}$$