

PROCESOS ESTOCÁSTICOS PARA LAS FINANZAS Y EL SEGURO
MASTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS
2ª RELACIÓN. CURSO 2016-2017

1.- Si un conductor ha tenido un siniestro de pequeña cuantía este año, la probabilidad de que vuelva a tener otro el año siguiente es del 20%, mientras que, si no ha tenido ninguno este año, la probabilidad de que tampoco tenga un siniestro el próximo es del 70%. Se pide:

- a) Probabilidad de que tenga un accidente el 7º año, suponiendo que en el año inicial no lo tuvo.
- b) Probabilidad de que no tenga ningún accidente el año n -ésimo, suponiendo que en el año inicial no lo tuvo.
- c) Si este año no ha tenido ningún accidente, ¿cuál es la probabilidad de que, al cabo de 5 años, no tenga ningún accidente durante tres años consecutivos?
- d) Analice la probabilidad de que sufra o no accidentes a largo plazo, en relación con las posibles situaciones iniciales.

2.- En relación con los asegurados de una modalidad multirriesgo para el hogar, en una determinada zona, supongamos que a ($0 < a < 1$) es la probabilidad de que no se tramite ningún parte de aviso durante este año si tampoco lo hizo durante el anterior, mientras que b ($0 < b < 1$) será tal probabilidad entre los que durante el año pasado sí hubieron cursado algún parte. Admitiendo que esta situación se mantendrá estable en el tiempo, describa razonadamente un proceso estocástico para el supuesto y, a partir de él, obtenga:

- a) Probabilidad de que un asegurado presente partes de aviso durante los 3 años siguientes, según que este año lo haya hecho o no.
- b) Si, durante este año, el 30% de los asegurados cursó algún aviso, evalúe qué porcentaje de asegurados debemos esperar que lo haga, una vez transcurridos, en general, t años.

3.- Una empresa dispone de dos máquinas iguales, y sabe que, a lo largo de una jornada de trabajo, cada máquina tiene una probabilidad de un 25% de averiarse. Las máquinas averiadas durante el día se envían a reparar y son devueltas al funcionamiento al cabo de 24 horas. Suponiendo que el primer día considerado ambas máquinas se encuentren en funcionamiento, se pide:

- a) Probabilidad de que dentro de dos días sólo se empiece la jornada con una máquina disponible.
- b) Distribución del número de máquinas que la Empresa tiene disponibles al comienzo de la jornada n -ésima.
- c) Proporción límite de días que la Empresa se encontrará sin maquinaria.
- d) Número medio de máquinas disponibles al cabo de n jornadas. ¿En torno a qué valor tenderá a estabilizarse a largo plazo?

4.- Una Compañía de Seguros está estudiando una posible clasificación de sus clientes, en relación con la siniestralidad que presentan en un determinado ramo. Así, al final de cada año, asignará un perfil de *alto riesgo* (A) a aquellos que presenten 3 partes o más, durante ese año; el perfil será *arriesgado* (B) si se presentan dos partes y, en el resto de los casos, asignará un perfil *normal* (C), así como a los nuevos clientes. Según sus registros, la distribución del número de partes presentados anualmente por sus clientes, es la siguiente:

Nº de partes	0	1	2	3	Más de 3
Probabilidad	0,6	0,25	0,1	0,04	0,01

Por otra parte, si un cliente tiene asignado el perfil A, sólo puede rebajar su calificación a B si no presentó ningún parte durante el año. Además, si el cliente presenta un perfil B, elevará su situación hasta A, si presenta más de un parte en el año. Sin embargo, ya no se rebajarán estas calificaciones a

C, en ningún caso. En estas condiciones, formule un proceso que describa correctamente la situación y, de acuerdo con él, dé respuesta a las siguientes cuestiones:

- a) Si, en la actualidad, la cartera de asegurados sólo presenta un 5% de perfil A y un 10% con perfil B, ¿qué composición cabe esperar al cabo de 2 años? ¿qué restricciones son necesarias para aceptar esta predicción?
- b) Analice la situación en que se clasificará un cliente, a largo plazo, y calcule el tiempo medio que transcurre hasta que cambia de perfil, evaluando el resultado en términos de riesgo.
- c) Calcule la probabilidad de que un cliente nuevo esté clasificado en el perfil C al cabo de dos años y que, tras el siguiente bienio, se encuentre en el perfil A.

5.- Una Compañía se está planteando ofrecer a sus empleados un programa de formación continua en la empresa, para lo cual les va a ofrecer dos módulos semestrales, uno de formación en Gestión y otro de formación Financiera. El plan de formación de la empresa funcionará de la siguiente forma: Un empleado que no esté recibiendo formación, pasará el semestre siguiente al módulo de Gestión con una probabilidad de 0,3, y al módulo Financiero con una probabilidad de 0,2. En caso de no pasar a ninguno de estos módulos, seguirá sin formar parte del programa de formación continua. Como parte de la especialización de cada empleado, de los que reciben durante un semestre la formación en Gestión, el 70% vuelven a realizar el mismo módulo el semestre siguiente, y de los que reciben durante un semestre la formación Financiera, el 80% repite el semestre siguiente. El resto de los que han tenido algún tipo de formación, se cambian al otro módulo, pero siguen formando parte, ya para siempre, del programa de formación continua. En el primer semestre del año 2003, no hay ningún empleado recibiendo formación continua.

- a) Formalice, mediante un modelo adecuado, el programa de formación continua que la empresa está ofreciendo a sus empleados.
- b) Analice cuál será la proporción de empleados que participarán en cada uno de los módulos de formación continua que ofrece la empresa durante el primer semestre del año 2004, y durante el primer semestre del año 2005.
- c) Analice cuál sería a largo plazo la proporción de trabajadores que realizarían cada módulo de formación, e indique cuál es el tiempo medio que tarda en estar en el programa de formación continua un empleado que inicialmente no tuviera ningún tipo de formación.

6.- Una Sociedad de Valores Bursátiles sigue el siguiente procedimiento en la contratación de sus empleados: Cuando entra una persona a trabajar se le realiza un *Contrato Temporal Prorrogable*. Si la cartera que maneja presenta una rentabilidad superior al 50% (lo cual ocurre con una probabilidad de 0,1), se le asciende a la categoría de *Gestor de Carteras* y se le hace un contrato indefinido. Si su cartera presenta pérdidas (esto ocurre con una probabilidad de 0,2), no se le vuelve a contratar. Si su cartera tiene una rentabilidad de entre 15 y 50% (lo cual ocurre con probabilidad 0,3), esta persona pasa a formar parte del Equipo de Analistas de esta Sociedad, firmando un contrato indefinido, y va pasando de año en año, consecutivamente, por las siguientes categorías de análisis: *Renta Variable Española*, *Renta Variable Internacional* y *Fondos de Inversión*. El año siguiente a estar trabajando como analista de Fondos de Inversión, se le vuelve a considerar analista de Renta Variable Española. En cualquier otro caso, se le prorroga el contrato temporal durante el año siguiente. Se considera que este procedimiento de contratación se mantiene constante a lo largo del tiempo.

- a) Formalice el proceso “Situación de Contratación en la Sociedad en el año t ”.
- b) Decida cuál será el vector estacionario.
- c) ¿Cuántos años trabajará una persona con Contrato Temporal hasta ser nombrada Gestor de Carteras, y con qué probabilidad ocurrirá? ¿Con qué probabilidad será despedida, y cuántos años se espera que esté trabajando antes de que esto ocurra?

7.- El Club Deportivo GYM está analizando a sus asociados. Hay dos modalidades de pertenencia a GYM: la primera es la de SOCIO BASE, en la que se ofrece el acceso a las instalaciones del Club, así como su uso, por una cuota de 70 euros mensuales; la segunda es la de SOCIO VIP, en la que se ofrece además el aparcamiento y el servicio de toallas y lavandería, por una cuota de 100 euros mensuales. Por la trayectoria seguida por el

Club, se conoce que de los socios BASE, el 10% se dan de baja cada mes, mientras que el 10% amplían su categoría a la de socio VIP. De los socios VIP, sólo un 10% se dan de baja cada mes, y un 20% piden una reducción de su cuota al mes siguiente, pasando a la categoría BASE. Una vez que un socio se da de baja no vuelve a ser admitido en el Club, mientras que si decide no cambiar su tipo de socio, se le mantiene por defecto en el mismo. Se supone que este sistema se mantiene estable en el tiempo.

- Formalice adecuadamente un proceso estocástico que permita conocer la situación de los asociados del Club GYM cada mes. Si inicialmente una persona se inscribe en el Club como socio VIP, ¿cuántos meses se estima que permanecerá en el club, antes de darse de baja?
- Si en un mes concreto, la compañía X inscribe a sus empleados (200 en total) en el club (como socios BASE), y se considera que van a seguir el mismo comportamiento que los demás socios del club, en cuanto a su situación dentro del mismo, ¿cuántos de esos 200 empleados se espera que se hayan dado de baja dentro de dos meses? ¿Y dentro de cuatro? En cada uno de estos momentos, clasifique a los clientes que quedan según su categoría. ¿Qué cantidad total se espera que recaude el club por las cuotas que pagan los empleados de la compañía X en cada uno de esos dos instantes temporales?

8.- Una Compañía de Seguros se dispone a ofrecer un nuevo sistema de asignación de tipo bonificado en el ramo de Automóviles, que se compone de una póliza básica y dos bonificadas (I y II), cuyas primas son del 80% y el 50% de la básica, respectivamente. Inicialmente, siempre se asigna una póliza básica, y el paso a las bonificadas depende del nivel de siniestralidad del asegurado, de manera que tal asignación se realiza anualmente. En este período, si el asegurado de tipo básico no tiene accidentes, pasa al tipo bonificado I, manteniéndose en el mismo tipo en caso contrario. Si el asegurado disfruta de una póliza bonificada I, mejorará al tipo bonificado II si no tiene ningún accidente, pasando al tipo básico en caso contrario. Finalmente, los asegurados del tipo bonificado II mantendrán este tipo de póliza si no tienen ningún accidente, pasando al tipo bonificado I si tienen un único accidente, y al básico si tienen más de uno.

La estructura de riesgo se evalúa a partir de la variable aleatoria definida por el número de accidentes registrados en un año (X), cuya función de cuantía estimada es:

x_i	0	1	2 o más
p_i	0,6	0,3	0,1

Suponiendo que se mantiene estable el sistema de asignación de la Compañía, y la estructura de riesgo anterior, se pide:

- Formalice razonadamente mediante un modelo adecuado el sistema descrito, y clasifique el proceso estocástico resultante.
- Si el sistema comienza a funcionar en este momento, analice la composición porcentual de la cartera de clientes según el tipo de póliza a un año, a dos años y a largo plazo.
- Desde el punto de vista del cliente, calcule la prima media que desembolsará al cabo de un año, de dos años y a largo plazo, en función de la prima básica.