Cuadernos de Matemática
de la Escuela Politécnica Nacional

G. Rojas - J. C. Trujillo - F. Barba

CÁLCULO EN UNA VARIABLE

Cálculo Diferencial

Cuaderno de Matemática No. 1

CÁLCULO EN UNA VARIABLE: CÁLCULO DIFERENCIAL

GERMÁN ROJAS I. - JUAN CARLOS TRUJILLO - FABIÁN BARBA

Responsable de la Edición: Juan Carlos Trujillo
Revisión técnica: Rolando Sáenz
Portada: Byron Reascos

Registro de derecho autoral No. 34995
ISBN: 978-9978-383-03-2

Publicado por la Unidad de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

© Escuela Politécnica Nacional 2010

Tabla de contenidos

Prefacio **vii**

1 Límites **1**
1.1 Aproximar . . . 1
1.2 La recta tangente a una curva . . . 3
1.2.1 Formulación del problema . . . 4
1.2.2 Aproximación numérica al concepto de límite . . . 6
1.2.3 Ejercicios . . . 7
1.3 La definición de límite . . . 8
1.3.1 Solución del problema . . . 10
1.3.2 La definición de límite . . . 13
1.3.3 Dos observaciones a la definición de límite . . . 23
1.3.4 Ejercicios . . . 30
1.4 Continuidad de una función . . . 31
1.5 Interpretación geométrica de la definición de límite . . . 33
1.5.1 Ejercicios . . . 40
1.6 Energía solar para Intipamba . . . 41
1.6.1 Planteamiento del problema . . . 41
1.6.2 El modelo . . . 42
1.6.3 El problema matemático . . . 44
1.6.4 Solución del problema matemático . . . 44
1.6.5 Solución del problema . . . 46
1.6.6 Epílogo . . . 46
1.6.7 Ejercicios . . . 47
1.7 Propiedades de los límites . . . 47
1.7.1 Ejercicios . . . 53
1.7.2 Generalizaciones . . . 53
1.7.3 Ejercicios . . . 55
1.8 El límite de una composición: cambio de variable . . . 55
1.8.1 Ejercicios . . . 60
1.9 El teorema del "sandwich" . . . 61
1.9.1 Ejercicios . . . 65
1.10 Límites unilaterales . . . 65
1.10.1 Ejercicios . . . 69
1.11 Límites infinitos y al infinito . . . 71
1.11.1 Límites infinitos . . . 71
1.11.2 Propiedades de los límites infinitos . . . 78
1.11.3 Límites al infinito . . . 84
1.11.4 Ejercicios . . . 89

2 La derivada: su motivación 91
2.1 La recta tangente a una curva 91
2.2 £Cómo medir el cambio? 94
2.2.1 £Cuánto cuesta producir autos? 94
2.2.2 Las variables representan magnitudes 95
2.2.3 La función como modelo de la dependencia entre magnitudes 95
2.2.4 La variaciones absoluta y relativa como medidas del cambio 97
2.3 Razón de cambio, elasticidad y magnitudes marginales 99
2.3.1 Magnitudes marginales en Economía 103
2.3.2 Elasticidad 103
2.4 La descripción del movimiento 106
2.4.1 El concepto de velocidad 107
2.4.2 Caso general: movimiento no-uniforme 110
2.5 Conclusión 112
2.6 Ejercicios 112

3 La derivada: definición y propiedades 115
3.1 Definición 115
3.2 Ejercicios 120
3.3 Propiedades de la derivada 121
3.4 Ejercicios 128
3.5 La regla de la cadena o la derivada de la compuesta 128
3.6 Ejercicios 129
3.7 Razones de cambio relacionadas 131
3.8 Ejercicios 132
3.9 Derivación implícita 133
3.10 Ejercicios 135
3.11 Derivada de la función inversa 135
3.12 Ejercicios 138
3.13 Derivadas de orden superior 138
3.14 Ejercicios 140
3.15 Diferenciales 140
3.16 Ejercicios 142
3.17 Cálculo de los ceros de funciones derivables 142
3.18 Ejercicios 144

4 La derivada: aplicaciones 145
4.1 Romeo y Julieta: la modelización matemática 145
4.1.1 Identificación del problema 146
4.1.2 Elaboración del modelo matemático 146
4.2 Extremos globales o absolutos 147
4.3 Extremos locales o relativos 153
4.4 Monotonía 156
4.5 Ejercicios 158
4.6 Teoremas del valor intermedio 159
4.7 Ejercicios 160
4.8 Convexidad 161
4.8.1 Punto intermedio 161
4.8.2 Segmento que une dos puntos 162
4.8.3 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados en $\mathbb{E}^2$ 163
4.8.4 Funciones convexas y cóncavas 163
4.9 Puntos de inflexión 165
4.10 Ejercicios 169

4.11 Graficación de funciones 169
4.12 Ejercicios 174
4.13 Problemas de extremos 174
4.14 Ejercicios 179
4.15 Regla de L'Hôpital 181
4.15.1 Formas indeterminadas 181
4.15.2 Regla de L'Hôpital 182
4.16 Ejercicios 184

Prefacio

En una serie de reuniones de los profesores que impartimos la asignatura "Cálculo en una Variable" en la Escuela Politécnica Nacional, vimos que para poder uniformizar los contenidos y el nivel de la enseñanza aprendizaje en todos los paralelos de las carreras de ingeniería y ciencias de la institución, era necesario contar con bibliografía común y, en lo posible, con un texto politécnico de "Cálculo en una Variable" que sea el referente en todos los paralelos en que se dicte la materia. Ponemos el presente trabajo a consideración de la comunidad politécnica, en especial de los profesores de "Cálculo en una Variable" y de los alumnos que toman esta asignatura, con la esperanza de que sirva como un primer borrador de lo que será en un futuro el texto politécnico que tanta falta nos hace. Creemos necesario aclarar que los ejercicios resueltos y los propuestos han sido tomados o son modificaciones a los que se encuentran en diversas obras similares, como son los textos de Apostol [1], Demidovich [2] y demás textos rusos, Leithold [3], etc. Debemos agradecer a las autoridades de la Escuela Politécnica Nacional y de las unidades académicas a las que estamos adscritos, por el apoyo que nos han brindado para la realización de nuestro trabajo.

Los Autores
Quito, febrero de 2010

Capítulo 1

Límites

1.1 Aproximar

Aproximar es la palabra clave de la ciencia y de la tecnología modernas. En efecto, consciente o no, el trabajo de todo científico ha sido el de elaborar modelos que se *aproximan* a una realidad compleja que el científico quiere comprender y explicar. Los números son, quizás, la primera herramienta que creó el ser humano para la elaboración de dichos modelos.

A pesar de que se han construido conceptos de un alto nivel de abstracción para la noción de número, la práctica cotidiana se remite casi exclusivamente a la utilización de números decimales. Más aún, se utilizan frecuentemente una o dos cifras decimales a lo más. Por ejemplo, en la representación de cantidades de dinero, se utilizan hasta dos cifras decimales que indican los centavos. O, si se requiere dividir un terreno de 15 hectáreas entre siete herederos y en partes iguales, se dividirá el terreno en parcelas de aproximadamente $\frac{15}{7}$ de hectárea y, en la práctica, cada parcela tendrá unas 2.14 hectáreas.

En realidad, todo lo que se hace con cualquier número a la hora de realizar cálculos es *aproximarlo* mediante números decimales. Es así que, cuando en los modelos aparecen números como π, $\sqrt{2}$ o $\frac{4}{3}$, en su lugar se utilizan números decimales.

Veamos esta situación más de cerca. Si convenimos en utilizar números decimales con solo dos cifras después del punto, ¿qué número o números decimales deberíamos elegir para aproximar, por ejemplo, el número $\frac{4}{3}$? Los siguientes son algunos de los números decimales con dos cifras después del punto que pueden ser utilizados para aproximar a $\frac{4}{3}$:

$$1.31;\ 1.32;\ 1.33;\ 1.34;\ 1.35.$$

Dado que ninguno de ellos es exactamente el número $\frac{4}{3}$, el que elijamos como aproximación debería ser el *menos diferente* del número $\frac{4}{3}$. Ahora, la *resta* entre números es el modo como se establece la *diferencia* entre dos números. A esta diferencia le vamos a considerar como el *error* que se comete al aproximar $\frac{4}{3}$ con un número decimal con dos cifras después del punto.

Así, si se utilizara 1.31 como aproximación, el error cometido se calcularía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} - 1.31 &= \frac{4}{3} - \frac{131}{100} \\ &= \frac{400}{300} - \frac{393}{300} = \frac{7}{300}.\end{aligned}$$

Es decir, el error que se comete al aproximar $\frac{4}{3}$ con 1.31 es $\frac{7}{300}$.

En cambio, si se utilizara 1.32 para aproximar $\frac{4}{3}$, el error cometido sería:

$$\frac{4}{3} - 1.32 = \frac{4}{3} - \frac{132}{100}$$

$$= \frac{400}{300} - \frac{396}{300} = \frac{4}{300}.$$

Vemos que 1.32 es una *mejor aproximación* de $\frac{4}{3}$ que 1.31 en el sentido de que el error que se comete al aproximar $\frac{4}{3}$ con 1.32 es de $\frac{4}{300}$, que es menor que $\frac{7}{300}$, el error que se comete al aproximar $\frac{4}{3}$ con 1.31.

Veamos qué sucede si aproximamos $\dfrac{4}{3}$ con 1.33. En este caso, el error cometido sería:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} - 1.33 &= \frac{4}{3} - \frac{133}{100} \\ &= \frac{400}{300} - \frac{399}{300} = \frac{1}{300}. \end{aligned}$$

Ésta tercera aproximación es mejor que las dos anteriores, porque el error cometido cuando se aproxima $\frac{4}{3}$ con 1.33, que es $\frac{1}{300}$, es menor que el error de aproximar $\frac{4}{3}$ con 1.31 o 1.32.

El error cometido al aproximar $\frac{4}{3}$ con 1.34 es:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} - 1.34 &= \frac{4}{3} - \frac{134}{100} \\ &= \frac{400}{300} - \frac{402}{300} = -\frac{2}{300}. \end{aligned}$$

El signo negativo indica que el número utilizado como aproximación es mayor que el número que se quiere aproximar. Sin embargo, si no nos interesa saber si el número que aproxima a $\frac{4}{3}$ es mayor o menor que éste, podemos tomar siempre la *diferencia positiva*, es decir, la diferencia entre el número mayor y menor, la misma que es igual al valor absoluto de la resta de ambos números (sin importar cuál es el mayor). En este caso, la diferencia positiva es:

$$\left|\frac{4}{3} - 1.34\right| = \left|-\frac{2}{300}\right| = \frac{2}{300}.$$

A este número le denominamos *error absoluto* cometido al aproximar $\frac{4}{3}$ con el número 1.34.

Análogamente, calculemos el error absoluto que se comete al aproximar $\frac{4}{3}$ con 1.35:

$$\begin{aligned} \left|\frac{4}{3} - 1.35\right| &= \left|\frac{4}{3} - \frac{135}{100}\right| \\ &= \left|\frac{400}{300} - \frac{405}{300}\right| = \frac{5}{300}. \end{aligned}$$

Finalmente, si se toma un número decimal con dos cifras después del punto, mayor que 1.35 o menor que 1.31 para aproximar $\frac{4}{3}$, podemos ver que el error absoluto cometido en esta aproximación será mayor que cualquiera de las ya obtenidas. Por lo tanto, vemos que 1.33 es, efectivamente, la mejor aproximación de $\frac{4}{3}$ con un número decimal con dos cifras decimales después del punto, porque el error que se comete al hacerlo es menor que el cometido con cualquier otro número con solo dos cifras después del punto.

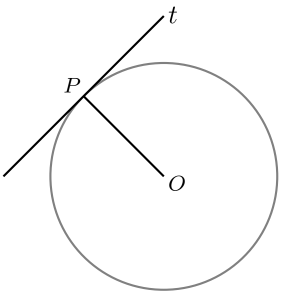
Podemos, entonces, decir que la *proximidad* entre dos números se mide a través del valor absoluto de la diferencia entre ellos. De manera más precisa: si x e y son dos números reales, entonces la cantidad

$$|x - y|$$

mide la proximidad entre x e y; y, mientras más pequeña sea esta cantidad, consideraremos a los números x e y más próximos. Al contrario, si esta diferencia es grande, diremos que los números son menos próximos.

En lo que sigue, usaremos como sinónimo de *aproximar* la palabra *acercar* y de la palabra *próximo*, la palabra *cerca*. Así, significará lo mismo la frase “x está próximo a y” que la frase “x está cerca de y”.

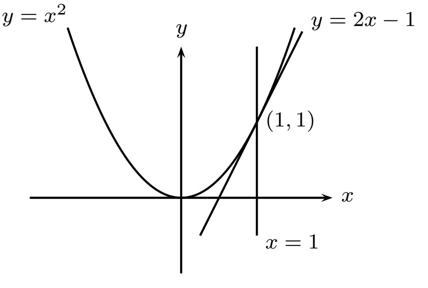
1.2 La recta tangente a una curva



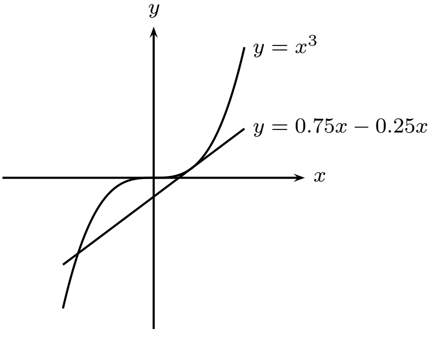
El dibujar primero y luego el encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado de ella no es, en absoluto, un problema trivial.

Euclides (325 a.C.-265 a.C.) definió la tangente a una circunferencia como la recta que tocándola no corta a la circunferencia. Esto significa que la recta tangente tiene con la circunferencia un único punto en común: el punto de tangencia. Con regla y compás, el geómetra griego construyó la línea recta tangente t a una circunferencia en el punto P de la siguiente manera: trazó por el punto P la recta perpendicular al radio de la circunferencia que tiene por uno de sus extremos el punto P. Demostró, además, que ninguna otra recta se interpondrá en el espacio entre la tangente y la circunferencia.

Esta última propiedad se convirtió, más adelante, en la definición de la recta tangente, pues la definición de Euclides no describe el caso general. En efecto, en las siguientes figuras se muestra dos ejemplos de lo afirmado:



(a)



(b)

En el primero, la parábola con ecuación $y = x^2$ y la recta con ecuación $x = 1$ tienen un único punto de contacto: el de coordenadas $(1, 1)$; sin embargo, esta recta no es tangente a la curva en este punto. Es decir, para ser tangente no es suficiente con tener un único punto en común con la curva. Por otro lado, puede apreciarse, en la figura, que la propiedad de Euclides –de que ninguna otra recta se interpondrá en el espacio entre la tangente y la curva– sí es verdadera en este caso.

En el segundo ejemplo, se puede observar que la recta tangente a la curva cuya ecuación es $y = x^3$ en el punto $(0.5, 1.25)$ tiene por ecuación $y = 0.75x - 0.25$ (esto se probará más adelante). Sin embargo, esta recta tiene aún otro punto en común con la curva, sin que por ello deje de ser tangente en el punto $(0.5, 1.25)$. Puede apreciarse que la propiedad de Euclides es verdadera pero solo en una región cercana al punto de tangencia.

En general, la propiedad: "entre la curva y la recta tangente, alrededor del punto de tangencia, no se interpone ninguna recta" pasó a ser la definición de tangente, la misma que ya fue utilizada por los geómetras griegos posteriores a Euclides.

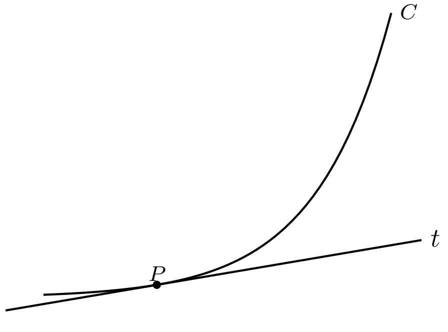
Aunque el problema de formular una definición de tangente adecuada para cualquier caso fue resuelto como se indicó, los matemáticos griegos y los de la edad media no encontraron un método general para obtener esa recta tangente a cualquier curva y en cualquier punto de ella. Este problema fue uno de los temas centrales de la matemática en la modernidad: uno de los primeros intentos por resolverlo fue realizado por el francés Pierre Fermat (1601-1665) en 1636. Poco después, se obtuvo una solución. Pero ésta trajo consigo un nuevo concepto en las matemáticas: el de *derivada*. Entre los protagonistas de estos descubrimientos estuvieron el matemático inglés Isaac Newton (1643-1727) y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Con el concepto de derivada se encontró un método general para obtener la recta tangente a una curva de una clase amplia de curvas.

Ahora bien, el concepto de derivada descansa sobre otro: el de límite. En los tiempos de Newton y Leibiniz, este concepto fue tratado de una manera informal, lo que provocó serias críticas y dudas sobre la validez del método. Tuvieron que transcurrir aproximadamente 150 años para que la comunidad matemática cuente con el fundamento de la derivada: recién en 1823, el matemático francés Augustin Cauchy (1789-1857) propuso una definición rigurosa de límite, y ésa es la que usamos hasta hoy en día. El tema de este capítulo es estudiar, precisamente, esa definición de límite como base para el estudio tanto del concepto de derivada como del concepto de integral, otro de los grandes descubrimientos de la modernidad.

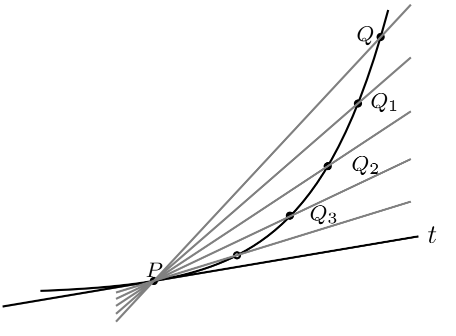
Pero antes de ello, vamos a presentar una solución no rigurosa del problema de encontrar la tangente a una curva cualquiera.

1.2.1 Formulación del problema

Dada una curva general C, como la de la figura (a), y un punto P en ella, se busca la recta t tangente a C en el punto P:



(a)



(b)

Procedamos de la siguiente manera. Imaginemos que un móvil puntual se mueve a lo largo de la curva C hacia el punto P desde un punto Q, distinto de P. Sean Q_1, Q_2 y Q_3 algunos de los puntos de la curva por los que el móvil pasa. Las rectas que unen cada uno de esos puntos y el punto P son rectas secantes, como se puede observar en la figura (b). El dibujo sugiere que, a medida que el móvil *está más próximo* al punto P, la correspondiente recta secante *está más próxima* a la recta tangente t; lo que se espera es que la recta tangente buscada sea la recta a la cual se aproximan las rectas secantes obtenidas cuando el móvil se acerque al punto P. A esa recta la llamaremos "recta límite" de las secantes.

Pero, ¿qué significa ser la "recta límite"? Para tratar de encontrar un significado, supongamos que la curva C está en un plano cartesiano y que su ecuación es

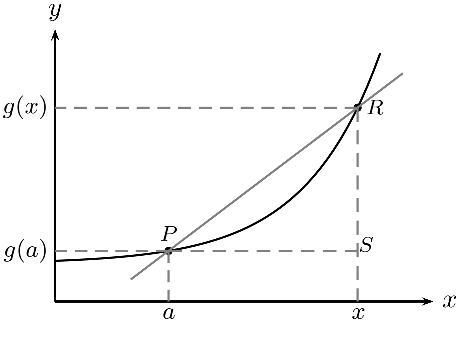
$$y = g(x),$$

donde g es una función real. Supongamos también que las coordenadas del punto P son $(a, g(a))$. Entonces, encontrar la recta tangente a la curva C en el punto P significa conocer la ecuación de dicha recta en el sistema de coordenadas dado.

Ahora, para obtener la ecuación de una recta es suficiente conocer su pendiente (la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal) y un punto por el que la recta pase. Como la tangente t debe pasar por P, ya tenemos el punto. Busquemos, entonces, la pendiente de la recta t. ¿Cómo? Utilizando las pendientes de las rectas secantes que unen los puntos de la curva por los que se desplaza el móvil desde Q hacia al punto P, pues, así como creemos que las rectas secantes alcanzarán la recta t como una posición límite, tal vez, las pendientes de las rectas secantes alcancen un valor límite: la pendiente de la recta tangente. Con esto en mente, calculemos la pendiente de cualquiera de esas rectas secantes.

Sea R cualquier punto de la curva C que indica la posición del móvil en su trayecto desde Q hasta P. Aunque el punto R no se mueve (ni ningún otro punto de la curva), diremos que "el punto R se mueve hacia P" para indicar que es el móvil el que se está moviendo. Esto nos permitirá indicar la posición del móvil a través de las coordenadas de los puntos de la curva. En este sentido R no indica un único punto, sino todos los puntos por dónde está pasando el móvil en su camino hacia al punto P.

Sea x la abscisa de R; entonces, sus coordenadas son $(x, g(x))$:



Sabemos que la pendiente de la recta que pasa por P y R es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal; este ángulo mide lo mismo que el ángulo $\angle SPR$ del triángulo rectángulo $\triangle SPR$. Por lo tanto, la tangente de este ángulo es igual al cociente entre la longitud RS (que, en el caso de la curva de la figura, es igual a la diferencia $g(x) - g(a)$) y la longitud PS (que, en este caso, es igual a la diferencia $x - a \neq 0$, pues el punto R no es igual al punto P); es decir, si representamos con m_x la tangente del ángulo $\angle SPR$, podemos afirmar que:

$$m_x = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{1.1}$$

La pendiente de cualquier secante que une el punto R, cuyas coordenadas son $(x, g(x))$ y que se está moviendo hacia P, y el punto P se calculará mediante la fórmula (1.1)[1].

Ahora, notemos que el móvil ubicado en el punto R se mueve hacia P cuando la abscisa x de R se "acerca" hacia la abscisa a del punto P. Entonces, el problema de obtener la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto P, en el que se concibe a dicha recta tangente como la "recta límite" de las secantes que pasan por P y R, que se aproxima a P, se sustituye por el problema de encontrar un número al que los cocientes

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

se aproximan cuando el número x se aproxima al número a. A ese número le llamaremos, provisionalmente, "límite de los cocientes".

¿Y cómo se puede hallar este "límite"? Como un primer acercamiento a la solución de este nuevo problema, consideremos un ejemplo. Pero, antes, ampliemos un poco más el significado de "aproximar" que se discutió en la primera sección.

[1] La fórmula (1.1) es válida no solamente para curvas crecientes como la de la figura. Su validez será demostrada cuando se presente una definición general para la pendiente de la recta tangente a una curva.

1.2.2 Aproximación numérica al concepto de límite

Supongamos que la curva C es una parábola cuya ecuación es $y = 3x^2$ y el punto P tiene coordenadas $(2, 12)$. Entonces, $g(x) = 3x^2$. Queremos calcular el "límite" de los cocientes

$$m_x = \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

cuando el número x se aproxima al número 2, pero $x \neq 2$. Si encontramos ese número "límite", lo usaremos como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(2, 12)$. Obtendremos luego la ecuación de la recta tangente.

Para empezar, observemos que, como $x \neq 2$, entonces:

$$m_x = \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{x - 2}.$$

Por lo tanto:

$$m_x = 3(x + 2),$$

para $x \neq 2$.

Para ver qué sucede con m_x cuando el número x se aproxima al número 2, construyamos una tabla con los valores que m_x toma para valores de x próximos a 2, unos mayores y otros menores que 2:

x	m_x
3	15
2.5	13.5
2.1	12.3
2.01	12.03
2.001	12.003
2.0001	12.0003
2.00001	12.00003
2	No existe
1.99999	11.99997
1.9999	11.9997
1.999	11.997
1.99	11.97
1.9	11.7
1.5	10.5
1	9

La aproximación de x a 2 por valores mayores que 2 significa que el punto R se aproxima al punto P desde la derecha, mientras que la aproximación de x a 2 por valores menores que 2 significa que el punto R se aproxima al punto P desde la izquierda. En los dos casos, se puede observar que, mientras x está más cerca de 2, m_x está más cerca de 12; es decir, mientras el punto R está más cerca del punto P, la pendiente de la recta secante que pasa por P y por R está más cerca del número 12. Esta primera evidencia nos sugiere y alienta a pensar que la pendiente de la recta tangente es igual a 12. Sin embargo, ¿cómo podemos estar seguros? Lo siguiente nos proporciona una evidencia adicional que nos hace pensar que estamos en lo correcto.

Hemos visto que para todo $x \neq 2$, se verifica que

$$m_x = 3(x + 2).$$

Por otro lado, si evaluamos la expresión de la derecha en $x = 2$, obtenemos que:

$$3(x + 2) = 3(2 + 2) = 12;$$

que es el valor al que parece aproximarse m_x cuando x se aproxima a 2.

Todo parece indicar, entonces, que el número 12 es el "límite" de m_x cuando x se aproxima a 2. Sin embargo, ¿podemos asegurar tal cosa?

Para poder responder esta pregunta, antes que nada necesitamos una definición para el "límite". Ésta llegó en el año 1823 de la mano del matemático francés Augustin Cauchy. En la siguiente sección vamos a estudiarla y, con ella, podremos asegurar que el límite de m_x cuando x se aproxima a 2 es, efectivamente, el número 12.

Aceptando como verdadero este resultado por el momento, obtengamos la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 3x^2$ en el punto $(2, 12)$.

Ya sabemos, entonces, que la pendiente de dicha recta es igual a 12. Recordaremos que la ecuación de una recta de pendiente m que pasa por un punto de coordenadas (a, b) es

$$y - b = m(x - a).$$

En este caso $m = 12$ y $(a, b) = (2, 12)$. Entonces, la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 3x^2$ que pasa por el punto $(2, 12)$ es

$$y - 12 = 12(x - 2),$$

que puede ser escrita de la siguiente manera:

$$y = 12x - 12.$$

En resumen:

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3x^2$ en el punto $(2, 12)$ es igual al límite de

$$m_x = \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = 3(x + 2),$$

cuando x, siendo distinto de 2, se aproxima a 2. Este límite es igual al número 12. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = 12x - 12.$$

Aparte de la definición de límite, persiste aún otro problema: ¿podemos asegurar que la recta encontrada es la recta tangente? Es decir, ¿cómo podemos estar seguros de que en el espacio entre la recta de ecuación $y = 12x - 12$ y la curva $y = 3x^2$ no se interpondrá ninguna otra recta, alrededor del punto $(2, 12)$?

Más adelante, en un capítulo posterior, provistos ya con el concepto de límite dado por Agustin Cauchy, probaremos que el método seguido para la consecución de la recta tangente es correcto y general.

1.2.3 Ejercicios

1. Sean C una curva cuya ecuación es $y = x^3$, s un número real distinto de 1 y m_s la pendiente de la recta secante a C en los puntos de coordenadas $(1, 1)$ y (s, s^3).
   (a) Calcule m_s.
   (b) Elabore una tabla de dos columnas. En la primera, coloque valores de s cercanos a 1; en la segunda, los valores de m_s correspondientes. Con la ayuda de esta tabla, determine un candidato para el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto de coordenadas $(1, 1)$.
   (c) Use el valor de la pendiente hallado en el literal anterior para escribir la ecuación de la recta tangente.
   (d) Dibuje la curva C, las secantes correspondientes para $s \in \{1.1, 1.5, 2\}$ y la recta tangente.
2. Para cada una de las funciones definidas a continuación, elabore una tabla para los valores $f(x_i)$ con $x_i = a \pm 10^{-i}$ con $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$. ¿Tiene $f(x)$ un "límite" cuando x se aproxima a a? En otras palabras, ¿existe un número al que $f(x)$ parece acercarse cuando x toma valores cercanos al número a?
   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x - x^2 & \text{si } x < 1, \\ x^2 - 4x + 7 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad a = 1.$$
   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x < 1, \\ 3 & \text{si } x = 1, \\ x + 3 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad a = 1.$$

(c)

$$f(x) = \frac{3x-15}{\sqrt{x^2-10x+25}}, \quad a = 5.$$

(d)

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{2x}, \quad a = 0.$$

(e)

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \quad a = 2.$$

(f)

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \quad a = 0.$$

¿Guardan alguna relación el hecho de que la función esté o no definida en a y que parezca tener "límite" cuando x se aproxima al número a?

3. El método utilizado en los ejercicios anteriores para encontrar el "límite" de una función puede sugerir la no necesidad de elaborar un concepto adecuado para la definición del límite y el correspondiente desarrollo de técnicas de cálculo. Sin embargo, la función h definida por

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+8}-2}{x^3}$$

nos alerta sobre el método heurístico de la "aproximación numérica". Intente determinar un número al que parece acercarse $h(x)$ cuando x toma valores cercanos al número 0 utilizando el procedimiento propuesto en el ejercicio anterior.

1.3 La definición de límite

Vamos a tratar de precisar lo que queremos decir con "el límite de los cocientes

$$m_x = \frac{3x^2-12}{x-2}$$

es 12 cuando x se aproxima a 2".

Para empezar, este cociente no está definido en $x = 2$, pero para todo $x \neq 2$:

$$m_x = 3(x+2).$$

¿Existirá algún $x \neq 2$ para el cual $m_x = 12$? Si así fuera, entonces

$$3(x+2) = 12.$$

De aquí, obtendríamos que

$$x = 2.$$

Pero esto es absurdo, pues $x \neq 2$. ¿Qué podemos concluir? Que para $x \neq 2$:

$$m_x \neq 12.$$

Sin embargo, vimos en la sección anterior, que para valores de x cercanos a 2, m_x toma valores cercanos a 12, aunque nunca tomará el valor 12. Surge, entonces, la siguiente pregunta: ¿qué tan cerca de 12 puede llegar m_x? En otras palabras, ¿podemos encontrar valores de x, cercanos a 2, para los cuales m_x no difiera de 12 en alguna cantidad dada; por ejemplo, que no difiera en más de 10^{-2} (es decir, en más de 0.01)? Y ¿qué tan cerca debe estar x del número 2 para que ello ocurra? Para responder esta pregunta, formulemos el problema con mayor precisión.

En primer lugar, ¿qué queremos decir con "que m_x no difiera de 12 en más de 10^{-2}"? Que el error de aproximar 12 con m_x, es decir, el valor absoluto de la diferencia entre m_x y 12 sea menor que 10^{-2}. En otras palabras, que se verifique la siguiente desigualdad:

$$|m_x - 12| < 10^{-2}.$$

En segundo lugar, ¿existen valores de x para los que se cumple esta desigualdad? Y si existen, ¿qué tan cerca de 2 deberán estar los x? Más aún, Para responder estas preguntas, primero notemos que podemos medir la cercanía de x a 2 mediante el valor absoluto de la diferencia entre x y 2:

$$|x-2|.$$

En efecto, mientras más pequeño sea este valor absoluto, x estará más cercano a 2; por el contrario, mientras más grande sea, x estará más lejos de 2. Por ello a $|x-2|$ nos referiremos también como "distancia de x a 2".

Notemos también que como x es diferente de 2, entonces se debe cumplir la desigualdad:

$$0<|x-2|.$$

En todo lo que sigue, supondremos que $x \neq 2$.

Ahora bien, la pregunta:

> **¿qué tan cerca debe x estar del número 2 para asegurar que**
>
> $$|\boldsymbol{m_x} - \mathbf{12}| < \mathbf{10^{-2}}?$$

equivale a la siguiente:

> **¿a qué distancia debe estar x de 2 para asegurar que**
>
> $$|\boldsymbol{m_x} - \mathbf{12}| < \mathbf{10^{-2}}?$$

A su vez, esta segunda pregunta equivale a esta otra:

> **¿a qué cantidad debe ser inferior $|x-2|$ para asegurar que**
>
> $$|\boldsymbol{m_x} - \mathbf{12}| < \mathbf{10^{-2}}?$$

Y esta tercera pregunta equivale a la siguiente:

> **¿existe un número $\delta > 0$ tal que**
>
> $$\textbf{si} \;\; \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{2}| < \delta, \quad \textbf{entonces} \;\; |\mathbf{m_x} - \mathbf{12}| < \mathbf{10^{-2}}?$$

Responder esta pregunta equivale a resolver el siguiente problema:

> Si para todo valor de $x \neq 2$ se tiene que
>
> $$m_x = 3(x+2),$$
>
> se busca un número real $\delta > 0$ tal que, si las desigualdades
>
> $$0 < |x-2| < \delta \tag{1.2}$$
>
> fueran verdaderas, la desigualdad
>
> $$|m_x - 12| < 10^{-2} \tag{1.3}$$
>
> también sería verdadera.

1.3.1 Solución del problema

Este es un problema de *búsqueda*: debemos encontrar el número δ. Para ello, el método que vamos a aplicar consiste en suponer temporalmente que δ ya ha sido encontrado; es decir, suponer que si x es un número tal que $x \neq 2$ y que satisface la desigualdad

$$|x-2| < \delta, \tag{1.4}$$

entonces, se debe cumplir la desigualdad

$$|m_x - 12| = |3(x+2) - 12| < 10^{-2}. \tag{1.5}$$

A partir de esta última desigualdad vamos a tratar de encontrar propiedades del número δ, aún desconocido, que nos permitan hallarlo.

¿Qué camino seguir? Para no hacerlo a ciegas, el trabajo que realicemos con la desigualdad (1.5), o con una parte de ella, debe llevarnos de alguna manera a δ; es decir, debe llevarnos a la desigualdad (1.4) o a una similar. Con esto en mente, empecemos el trabajo con el miembro izquierdo de la desigualdad (1.5), en el cual podemos aplicar propiedades conocidas del valor absoluto de un número:

$$\begin{aligned} |3(x+2) - 12| &= |3x + 6 - 12| \\ &= |3x - 6| \\ &= 3|x-2|. \end{aligned}$$

Es decir,

$$|3(x+2) - 12| = 3|x-2|. \tag{1.6}$$

Pero hemos supuesto que

$$|x-2| < \delta.$$

Entonces:

$$3|x-2| < 3\delta.$$

Por lo tanto, por la propiedad transitiva de la relación "menor que", vemos que esta última desigualdad y la igualdad (1.6) implican una nueva desigualdad:

$$|3(x+2) - 12| < 3\delta. \tag{1.7}$$

En resumen:

bajo el supuesto de que existe el número $\delta > 0$, si $x \neq 2$ satisficiera la desigualdad

$$|x-2| < \delta, \tag{1.4}$$

se debería satisfacer la desigualdad

$$|3(x+2) - 12| < 3\delta. \tag{1.7}$$

En otras palabras,

$$\text{si} \quad 0 < |x-2| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |3(x+2) - 12| < 3\delta.$$

Recordemos que queremos que el número δ que encontremos nos garantice el cumplimiento de la desigualdad

$$|3(x+2) - 12| < 10^{-2}. \tag{1.5}$$

Para lograrlo, comparemos entre sí las desigualdades (1.7) y (1.5). ¿Qué podemos observar? Que si el número 3δ fuera menor o igual que 10^{-2}, entonces obtendríamos:

$$|3(x+2)-12| < 3\delta \le 10^{-2};$$

es decir:

$$\text{si } \ 3\delta \le 10^{-2}, \quad \text{entonces } \ |3(x+2)-12| < 10^{-2},$$

donde la desigualdad de la derecha es la que queremos obtener. Por lo tanto, como la desigualdad

$$3\delta \le 10^{-2}$$

es equivalente a la desigualdad

$$\delta \le \frac{10^{-2}}{3},$$

podemos asegurar que:

si se elige el número $\delta > 0$ tal que

$$\delta \le \frac{10^{-2}}{3}$$

y si $x \neq 2$ satisface la desigualdad

$$|x-2| < \delta, \tag{1.4}$$

la desigualdad requerida

$$|3(x+2)-12| < 10^{-2}. \tag{1.5}$$

es satisfecha. Es decir,

$$\text{si } 0 < \delta \le \frac{10^{-2}}{3} \ \text{ y } \ 0 < |x-2| < \delta, \quad \text{entonces } \ |3(x+2)-12| < 10^{-2}.$$

Y esto es precisamente lo que queríamos hacer.

Resumamos el procedimiento seguido para la búsqueda de δ. Observemos que consiste de dos etapas:

1. La *búsqueda* del número δ. En esta etapa se supone encontrado el número δ. Bajo esta suposición, se encuentra uno o más valores candidatos para el número δ.

2. La *constatación* de que el valor o valores encontrados para δ satisfacen, efectivamente, las condiciones del problema.

Para nuestro caso, estas etapas se ejemplifican así:

1. *Búsqueda*: se supone que existe un número $\delta > 0$ tal que para $x \neq 2$:

   $$\text{si } \ |x-2| < \delta, \quad \text{entonces } \ |3(x+2)-12| < 10^{-2}.$$

   Trabajando con la expresión $|3(x+2)-12|$ y bajo las suposiciones de que $|x-2| < \delta$ y $x \neq 2$, se demuestra que

   $$|3(x+2)-12| < 3\delta.$$

   Esta última desigualdad sugiere que el número $\delta > 0$ debe satisfacer la desigualdad:

   $$3\delta \le 10^{-2},$$

   lo que equivale a sugerir que δ debe cumplir esta otra desigualdad:

   $$\delta \le \frac{10^{-2}}{3}. \tag{1.8}$$

2. *Constatación*: con la elección del número δ que satisface la desigualdad (1.8) y bajo los supuestos de que $x \neq 2$ y $|x-2| < \delta$, se verifica el cumplimiento de la desigualdad

$$|3(x+2) - 12| < 10^{-2}.$$

La solución que acabamos de encontrar al problema planteado nos permite responder la pregunta:

> **¿qué tan cerca debe estar $\boldsymbol{x}$ del número 2 para asegurar que $\boldsymbol{m_x}$ difiera de 12 en menos de $\boldsymbol{10^{-2}}$?**

La respuesta es:

> **si $\boldsymbol{x}$ difiere de 2 en menos de $\boldsymbol{\dfrac{10^{-2}}{3}}$, $\boldsymbol{m_x}$ difiere de 12 en menos de $\boldsymbol{10^{-2}}$.**

¿Podremos encontrar valores de x cercanos a 2 que garanticen que m_x difiera de 12 en una cantidad aún más pequeña que 10^{-2}? Por ejemplo, ¿qué difiera en menos de 10^{-6}? La respuesta es afirmativa, pues, si repasamos el modo cómo se resolvió este mismo problema para el caso en que queríamos que m_x difiriera de 12 en menos de 10^{-2}, descubriremos lo siguiente:

> **si $\boldsymbol{x}$ difiere de 2 en menos de $\boldsymbol{\dfrac{10^{-6}}{3}}$, $\boldsymbol{m_x}$ difiere de 12 en menos de $\boldsymbol{10^{-6}}$.**

Si el lector tiene dudas de este resultado, deberá leer una vez más, en las páginas 8-11, el procedimiento para resolver el problema cuando la diferencia entre m_x y 12 difería en menos de 10^{-2}. Cada vez que encuentre un 10^{-2}, deberá sustituirlo por un 10^{-6}. Esto lo convencerá del todo.

Y ahora podemos responder a una pregunta más general:

> **¿qué tan cerca debe estar x del número 2 para asegurar que m_x difiera de 12 en menos de ϵ?**

donde ϵ representa cualquier número positivo. Y la respuesta la encontraremos de manera idéntica a cómo hemos respondido las dos preguntas anteriores; esa respuesta será la siguiente:

> **si $\boldsymbol{x}$ difiere de 2 en menos de $\boldsymbol{\dfrac{\epsilon}{3}}$, $\boldsymbol{m_x}$ difiere de 12 en menos de $\boldsymbol{\epsilon}$.**

Como este número ϵ puede ser cualquier número positivo, puede ser elegido tan pequeño como queramos. Y lo que ya sabemos es que, en esa situación, si x es tal que

$$|x-2| < \frac{\epsilon}{3},$$

garantizamos que

$$|m_x - 12| < \epsilon.$$

Es decir, aseguraremos para tales x que m_x estará tan cerca del número 12 como queramos.

Es más, podremos afirmar que se garantiza que m_x está tan cerca como se desee del número 12, si x está lo suficientemente cerca de 2. En efecto, en este caso, para que la distancia de m_x a 12 sea menor que ϵ, bastará que la distancia de x a 2 sea menor que $\frac{\epsilon}{3}$.

Esto también puede ser expresado de la siguiente manera:

> **12 puede ser aproximado por los cocientes $\boldsymbol{m_x}$ con la precisión que se desee, con la condición de que $\boldsymbol{x}$, siendo distinto de 2, esté suficientemente cerca de 2.**

Y, cuando una situación así ocurre, siguiendo a Cauchy, diremos que

12 es el límite de m_x cuando x se aproxima al número 2 y escribiremos:

$$\mathbf{12 = \lim_{x \to 2} m_x.}$$

Al inicio de la sección, nos habíamos propuesto precisar la frase "el límite de los cocientes m_x es 12 cuando x se aproxima a 2". De lo mostrado anteriormente, vemos que esta frase debe ser cambiada por la siguiente: "12 es aproximado por los cocientes m_x con la precisión que se desee, con tal que x, siendo distinto de 2, esté lo suficientemente cerca de 2". Y ahora esta frase tiene pleno sentido.

El proceso seguido para afirmar que 12 es el límite de m_x puede ser resumido de la siguiente manera:

> dado cualquier número $\epsilon > 0$, encontramos un número $\delta > 0$, que en nuestro caso fue $\frac{\epsilon}{3}$, tal que 12 puede ser aproximado por m_x con un error de aproximación menor que ϵ, siempre que x, siendo distinto de 2, se aproxime a 2 a una distancia menor que δ.

Y este texto puede ser expresado simbólicamente mediante desigualdades de la siguiente manera:

> dado cualquier número $\epsilon > 0$, encontramos un número $\delta > 0$ tal que
>
> $$|m_x - 12| < \epsilon,$$
>
> siempre que
>
> $$0 < |x - 2| < \delta.$$

Y toda esta afirmación se expresa de manera simple por:

$$12 = \lim_{x \to 2} m_x.$$

A partir de este ejemplo vamos a formular una definición general de límite de una función real.

1.3.2 La definición de límite

Sean:

1. a y L dos números reales,
2. I un intervalo abierto que contiene el número a, y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \mathrm{Dm}(f) \cup \{a\}$.

El número a generaliza a 2, L a 12, I a $(-\infty, +\infty)$ y $f(x)$ a m_x.

Lo que vamos a definir es:

L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a.

Igual que en el ejemplo, esta frase se deberá entender como:

L puede ser aproximado por los valores de $f(x)$ con la precisión que se desee, con la condición de que x, siendo distinto de a, sea lo suficientemente cercano a a.

O, de forma equivalente, se entenderá como:

> ***L* es el límite de *f*(*x*) cuando *x* se aproxima a *a*, lo que se representará por:**
>
> $$\boldsymbol{L = \lim_{x \to a} f(x),}$$
>
> **si para cualquier número $\boldsymbol{\epsilon > 0}$, existe un número $\boldsymbol{\delta > 0}$ tal que *L* puede ser aproximado por *f*(*x*) con un error de aproximación menor que $\boldsymbol{\epsilon}$, siempre que *x*, siendo distinto de *a*, se aproxime a *a* a una distancia menor que $\boldsymbol{\delta}$.**

Finalmente, todo lo anterior nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1.1 (Límite de una función)
Sean:

1. a y L dos números reales,
2. I un intervalo abierto que contiene el número a, y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \mathrm{Dm}(f) \cup \{a\}$.

Entonces:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Veamos algunos ejemplos para familiarizarnos con esta definición.

Ejemplo 1.1

> Probemos que
> $$9 = \lim_{x \to -3} x^2.$$
> Es decir, probemos que 9 puede ser aproximado por valores de x^2 siempre y cuando elijamos valores de x lo suficientemente cercanos a -3.

Solución. Para ello, de la definición de límite, sabemos que, dado cualquier $\epsilon > 0$, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 9| < \epsilon \tag{1.9}$$

siempre que $x \neq -3$ y

$$|x + 3| < \delta. \tag{1.10}$$

Búsqueda de δ: Empecemos investigando el miembro izquierdo de la desigualdad (1.9), que mide el error de aproximar 9 con x^2. Podemos expresarlo así:

$$|x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)| = |x-3||x+3|.$$

Entonces, debemos encontrar los $x \neq -3$, pero cercanos a -3, para los que se verifique la desigualdad:

$$|x-3||x+3| < \epsilon, \tag{1.11}$$

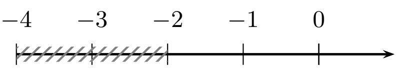
que es equivalente a la desigualdad (1.9). Es decir, debemos encontrar los $x \neq -3$, pero cercanos a -3, que hacen que el producto

$$|x-3||x+3| \tag{1.12}$$

esté tan cerca de 0 como se quiera.

Ahora bien, como x está cerca a -3, el factor $|x+3|$ estará cerca de 0. Por lo tanto, para que el producto (1.12) esté tan cerca de 0 como se quiera, será suficiente con que el otro factor, $|x-3|$, no supere un cierto límite; es decir, esté acotado por arriba. Veamos si ése es el caso. Para ello, investiguemos el factor $|x-3|$.

Como x debe estar cerca a -3, consideremos solamente valores de x que estén en un intervalo que contenga al número -3. Por ejemplo, tomemos valores de x distintos de -3 y tales que estén en el intervalo con centro en -3 y radio 1, como el que se muestra en la siguiente figura:



Esto significa que x debe cumplir las siguientes desigualdades:

$$-4 < x < -2,$$

que son equivalentes a estas otras:

$$-1 < x+3 < 1, \tag{1.13}$$

las que, a su vez, son equivalentes a la siguiente:

$$|x+3| < 1. \tag{1.14}$$

Bajo la suposición del cumplimiento de estas desigualdades, veamos si el factor $|x-3|$ está acotado por arriba. Para ello, construyamos el factor $|x-3|$ a partir de las desigualdades (1.13).

En primer lugar, para obtener la diferencia $x-3$, podemos sumar el número -6 a los miembros de estas desigualdades. Obtendremos lo siguiente:

$$-7 < x-3 < -5. \tag{1.15}$$

Pero esto significa que, para $x \neq -3$ tal que

$$|x+3| < 1, \tag{1.14}$$

la diferencia

$$x-3$$

es negativa, y, por lo tanto:

$$|x-3| = -(x-3);$$

es decir:

$$x-3 = -|x-3|,$$

con lo cual podemos reescribir las desigualdades (1.15) de la siguiente manera:

$$-7 < -|x-3| < -5,$$

que son equivalentes a las siguientes:

$$7 > |x-3| > 5.$$

Hemos probado que, si $x \neq -3$ es tal que $|x+3| < 1$, se verifica que el factor $|x-3|$ está acotado superiormente por el número 7:

$$|x-3| < 7.$$

Con este resultado, volvamos al producto (1.12). Ya podemos afirmar que, si $x \neq -3$ y $|x+3| < 1$, se debe verificar lo siguiente:

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < 7|x + 3|,$$

es decir:

$$\boldsymbol{|x^2 - 9| < 7|x + 3|,} \tag{1.16}$$

siempre que

$$\boldsymbol{x \neq -3 \quad \text{y} \quad |x + 3| < 1}.$$

Ahora, si elegimos los $x \neq -3$ tales que $|x + 3| < 1$ y

$$7|x + 3| < \epsilon, \tag{1.17}$$

por la desigualdad (1.16), obtendríamos la desigualdad (1.9):

$$|x^2 - 9| < \epsilon,$$

es decir, haríamos que el error que se comete al aproximar 9 por x^2 sea menor que ϵ.

Pero elegir x de modo que se cumpla la desigualdad (1.17) equivale a elegir a x de modo que se cumpla la desigualdad:

$$|x + 3| < \frac{\epsilon}{7}. \tag{1.18}$$

Por lo tanto: **la desigualdad**

$$\boldsymbol{|x^2 - 9| < \epsilon} \tag{1.9}$$

será satisfecha si se eligen los $\boldsymbol{x \neq -3}$ tales que se verifiquen, simultáneamente, las desigualdades:

$$\boldsymbol{|x + 3| < 1 \quad \text{y} \quad |x + 3| < \frac{\epsilon}{7}}.$$

Esto quiere decir que para el $\delta > 0$ buscado, la desigualdad $|x + 3| < \delta$ deberá garantizar el cumplimiento de estas dos desigualdades. ¿Cómo elegir δ? Pues, como el más pequeño entre los números 1 y $\frac{\epsilon}{7}$:

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}.$$

Al hacerlo, garantizamos que

$$\delta \leq 1 \quad \text{y} \quad \delta \leq \frac{\epsilon}{7},$$

de donde, si $x \neq -3$ tal que

$$|x + 3| < \delta,$$

entonces

$$|x + 3| < \delta \leq 1 \quad \text{y} \quad |x + 3| < \delta \leq \frac{\epsilon}{7},$$

con lo cual garantizamos que se verifique la desigualadad (1.9):

$$|x^2 - 9| < \epsilon. \tag{1.9}$$

En resumen:

dado $\epsilon > 0$, podemos garantizar que

$$|x^2 - 9| < \epsilon,$$

siempre que elijamos $x \neq -3$ tal que

$$|x + 3| < \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}.$$

En otras palabras, el número 9 puede ser aproximado tanto como se quiera por x^2 siempre que x esté lo suficientemente cerca de -3. Esto demuestra que $9 = \lim\limits_{x \to -3} x^2$.

Antes de estudiar otro ejemplo, tratemos de obtener un procedimiento para demostrar que un número L es el límite $f(x)$ cuando x se aproxima al número a, a partir del que acabamos de utilizar para encontrar el δ dado el ϵ.

Si leemos la demostración realizada una vez más, podemos resumir, en los siguientes pasos, el procedimiento seguido:

1. El valor absoluto de la diferencia entre x^2 y el límite 9 se expresó como el producto de dos factores en valor absoluto:

   $$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|.$$

   Uno de los factores es el valor absoluto de la diferencia entre x y el número -3, que es el número a dónde se aproxima x.

2. Como $|x + 3|$ debe ser menor que el número δ, para que la cantidad

   $$|x^2 - 9|$$

   sea tan pequeña como se desee (es decir, menor que ϵ), se busca una cota superior para el segundo factor $|x - 3|$. En este ejemplo, se encontró que:

   $$|x - 3| < 7,$$

   bajo el supuesto de que $|x + 3| < 1$. Esta última suposición es realizada porque los x deben estar cerca de -3, por lo que se decide trabajar con valores de x que estén en un intervalo con centro en el número 3. En este caso, un intervalo de radio 1.

3. El resultado anterior sirve de prueba de la afirmación:

   $$|x^2 - 9| < 7|x + 3|,$$

   siempre que $0 < |x + 3| < \delta$ y $|x + 3| < 1$.

4. Para obtener $|x^2 - 9| < \epsilon$ siempre que $0 < |x + 3| < \delta$, el resultado precedente nos dice cómo elegir el número δ:

   $$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}.$$

   La elección de este δ muestra que:

   $$\begin{aligned} |x^2 - 9| &= |x - 3||x + 3| \\ &< 7|x + 3|, \quad \text{pues} \quad |x + 3| < \delta \leq 1, \\ &< 7\delta, \quad \text{pues} \quad |x + 3| < \delta, \\ &\leq 7\frac{\epsilon}{7} = \epsilon, \quad \text{pues} \quad \delta \leq \frac{\epsilon}{7}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

   $$|x^2 - 9| < \epsilon,$$

   siempre que

   $$0 < |x + 3| < \delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}.$$

Generalicemos este procedimiento para probar que

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

1. Hay que tratar de expresar el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y el límite L para $x \neq a$ de la siguiente manera:
$$|f(x) - L| = |g(x)||x - a|.$$

2. Se busca una cota superior para el factor $|g(x)|$. Supongamos que esta cota superior sea el número $M > 0$. Entonces, debe cumplirse la siguiente desigualdad:
$$|g(x)| < M.$$
Probablemente, para encontrar este valor M haya que suponer adicionalmente que
$$0 < |x - a| < \delta_1,$$
con cierto $\delta_1 > 0$. Esta suposición puede ser el resultado de trabajar con valores cercanos al número a, para lo cual se decide trabajar con valores de x en un intervalo con centro en el número a.

3. El resultado anterior sirve de prueba de la afirmación:
$$|f(x) - L| < M|x - a| < \epsilon,$$
siempre que $0 < |x - a| < \frac{\epsilon}{M}$ y $|x - a| < \delta_1$.

4. El resultado precedente nos dice cómo elegir el número δ:
$$\delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{\epsilon}{M}\right\}.$$
La elección de este δ muestra que:
$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |g(x)||x - a| \\ &< M|x - a|, \quad \text{pues} \quad |g(x)| < M \text{ debido a que } |x - a| < \delta \leq \delta_1, \\ &< M\delta, \quad \text{pues} \quad |x - a| < \delta, \\ &\leq M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \quad \text{pues} \quad \delta \leq \frac{\epsilon}{M}. \end{aligned}$$
Por lo tanto:
$$|f(x) - L| < \epsilon,$$
siempre que
$$0 < |x - a| < \delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{\epsilon}{M}\right\}.$$

Apliquemos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2

Demostremos que
$$2 = \lim_{x\to 3} \frac{5x - 3}{x + 3}.$$
Es decir, probemos que el número 2 puede ser aproximado por valores de
$$\frac{5x - 3}{x + 3}$$
siempre que $x \neq 3$ esté lo suficientemente cerca de 3.

Solución. Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| < \epsilon \tag{1.19}$$

siempre que $x \neq 3$ y

$$|x-3| < \delta. \tag{1.20}$$

Vamos a aplicar el procedimiento descrito. Lo primero que tenemos que hacer es expresar el valor absoluto de la diferencia entre $\frac{5x-3}{x+3}$ y 2 para $x \neq 2$, de la siguiente manera:

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = |g(x)||x-3|. \tag{1.21}$$

Para ello, trabajemos con el lado izquierdo de la desigualdad (1.19). Éste puede ser simplificado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| &= \left|\frac{5x-3-2(x+3)}{x+3}\right| \\ &= \left|\frac{3x-9}{x+3}\right| = 3\left|\frac{x-3}{x+3}\right| \\ &= 3\frac{|x-3|}{|x+3|}.\end{aligned}$$

Es decir:

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = \frac{3}{|x+3|}|x-3|. \tag{1.22}$$

Entonces, si definimos:

$$g(x) = \frac{3}{x+3},$$

ya tenemos la forma (1.21).

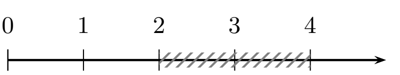
Lo segundo que hay que hacer es encontrar una cota superior para $g(x)$. Es decir, debemos hallar un número positivo M y, posiblemente, un número positivo $\delta_1 > 0$ tales que:

$$\frac{3}{|x+3|} < M, \tag{1.23}$$

siempre que

$$0 < |x-3| < \delta_1.$$

Para ello, como los x deben tomar valores cercanos al número 3, consideremos valores para x que estén en el intervalo con centro en 3 y radio 1:



Esto significa que x debe satisfacer las siguientes igualdades:

$$2 < x < 4, \tag{1.24}$$

que son equivalentes a estas otras:

$$-1 < x - 3 < 1,$$

que, a su vez, son equivalentes a la siguiente desigualdad:

$$|x-3| < 1. \tag{1.25}$$

Lo que vamos a hacer a continuación es encontrar M reconstruyendo $g(x)$ a partir de las desigualdades (1.24). Para ello, sumemos el número 3 a los miembros de estas desigualdades. Obtendremos lo siguiente:

$$5 < x + 3 < 7. \tag{1.26}$$

Esto significa que $x+3>0$. Por lo tanto:

$$x+3=|x+3|,$$

con lo que las desigualdades (1.26) se pueden reescribir así:

$$5<|x+3|<7. \tag{1.27}$$

Además, como $|x+3|>0$, existe el cociente

$$\frac{1}{|x+3|},$$

y las desigualdades (1.27) son equivalentes a las siguientes:

$$\frac{1}{5}>\frac{1}{|x+3|}>\frac{1}{7}.$$

Ahora, si multiplicamos por 3 cada miembro de estas desigualdades, obtenemos que:

$$\frac{3}{5}>\frac{3}{|x+3|}>\frac{3}{7}.$$

Es decir:

$$|g(x)|=\frac{3}{|x+3|}<\frac{3}{5},$$

siempre que

$$|x-3|<1.$$

Acabamos de encontrar el número M, que es igual a $\frac{3}{5}$; y el número δ_1, que es igual a 1.

Con este resultado, volvamos al producto (1.22) en la página anterior. Ya podemos afirmar que, si x es tal que $|x-3|<1$, entonces debe satisfacer lo siguiente:

$$\left|\frac{5x-3}{x+3}-2\right|=\frac{3}{|x+3|}|x-3|<\frac{3}{5}|x-3|,$$

es decir:

$$\boldsymbol{\left|\frac{5x-3}{x+3}-2\right|<\frac{3}{5}|x-3|<\epsilon}, \tag{1.28}$$

siempre que

$$\boldsymbol{|x-3|<1 \quad \text{y} \quad 0<|x-3|<\frac{5}{3}\epsilon}.$$

La desigualdad (1.28) nos dice como elegir el δ buscado:

$$\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{5}{3}\epsilon\right\}.$$

Esta elección de δ nos asegura que el valor absoluto de la diferencia entre

$$\frac{5x-3}{x+3}$$

y el número 2 es menor que ϵ. En efecto:

$$\begin{aligned}\left|\frac{5x-3}{x+3}-2\right|&=\frac{3}{|x+3|}|x-3|\\&<\frac{3}{5}|x-3|, \quad \text{pues, al tener } |x-3|<\delta\leq 1, \text{ se tiene que } \frac{3}{|x+3|}<\frac{3}{5},\\&<\frac{3}{5}\delta, \quad \text{pues } |x-3|<\delta,\\&\leq\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\epsilon=\epsilon, \quad \text{pues } \delta\leq\frac{5}{3}\epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto: **la desigualdad**

$$\left|\boldsymbol{\frac{5x-3}{x+3}-2}\right| < \boldsymbol{\epsilon}$$

se verifica si $\boldsymbol{x}$ satisface las desigualdades

$$\boldsymbol{0 < |x-3| < \delta = \text{mín}\left\{1, \frac{5}{3}\epsilon\right\}}.$$

Hemos demostrado, entonces, que el número 2 es el límite de

$$\frac{5x-3}{x+3}$$

cuando x se aproxima al número 3.

El procedimiento encontrado funcionó. Vamos a seguir aplicándolo en algunos ejemplos adicionales, los mismos que nos servirán más adelante para obtener un método para calcular límites sin la necesidad de recurrir todas las veces a la definición.

Ejemplo 1.3

Sea $a > 0$. Probemos que

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Es decir, demostremos que el número $\sqrt{a}$ puede ser aproximado por valores de $\sqrt{x}$ siempre que x esté lo suficientemente cerca de a.

Solución. Sea $\epsilon > 0$. Buscamos $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon,$$

siempre que $|x-a| < \delta$ y $x > 0$.

Para empezar, encontremos $g(x)$ tal que, para $x \neq a$ y $x > 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |g(x)||x-a|. \tag{1.29}$$

Para obtener el factor $|x-a|$ a partir de la diferencia

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}|,$$

utilicemos el factor conjugado de esta diferencia; es decir, el número:

$$\sqrt{x} + \sqrt{a}.$$

Como éste es estrictamente mayor que 0, podemos proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| &= |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \times \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \\ &= \frac{|(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \\ &= \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}|x-a|. \tag{1.30}$$

Si definimos

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

ya tenemos la igualdad (1.29).

Ahora debemos acotar superiormente $g(x)$. Esto no es muy difícil, ya que, como $\sqrt{a} > 0$ y $\sqrt{x} > 0$, entonces

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a},$$

de donde se obtiene que, para todo $x > 0$, se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Por lo tanto:

$$|g(x)| < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

para todo $x > 0$.

Ya tenemos M:

$$M = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Entonces:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a|,$$

para todo $x > 0$. Por ello, si para un $\delta > 0$, se tuviera que

$$|x - a| < \delta,$$

entonces se cumpliría que:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a| < \frac{\delta}{\sqrt{a}}.$$

De esta desigualdad se ve que podemos elegir δ de la siguiente manera:

$$\frac{\delta}{\sqrt{a}} = \epsilon.$$

Es decir:

$$\delta = \epsilon\sqrt{a}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x} - \sqrt{a}| &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}|x - a| \\
&< \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a| \\
&< \frac{1}{\sqrt{a}}\delta \\
&= \frac{\epsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto: **la desigualdad**

$$\boldsymbol{|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon}$$

se verifica si $\boldsymbol{x}$ satisface las desigualdades

$$0 < \boldsymbol{|x - a| < \delta = \epsilon\sqrt{a}}.$$

Hemos probado, entonces, que el número $\sqrt{a}$ es el límite de $\sqrt{x}$ cuando x se aproxima al número a.

Observemos que, en este ejemplo, no hemos seguido, exactamente, el procedimiento desarrollado en los anteriores. Esto se debe a que, para este caso, se cumple que

$$|f(x) - L| \leq M|x - a| \tag{1.31}$$

para todos los elementos del dominio de la función f (con $M = \frac{1}{\sqrt{a}}$). Eso significa que la función g del método es menor o igual que la constante M en todo el dominio de f. Esto significa, entonces, que no hay necesidad de buscar un δ_1 para acotar g. A su vez, esto permite que el número δ sea definido de la siguiente manera:

$$\delta = \frac{\epsilon}{M}.$$

Como se puede ver, esta versión del método para hallar δ dado el ϵ funcionará siempre que se verifique la desigualdad (1.31).

1.3.3 Dos observaciones a la definición de límite

Primera observación: delta depende de epsilon

Tanto en la definición de límite como en los ejemplos desarrollados anteriormente, se puede observar que el número δ depende del número ϵ. Es decir, si el valor de ϵ cambia, también lo hace δ. Por ejemplo, para probar que

$$9 = \lim_{x\to -3} x^2,$$

encontramos que

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}.$$

Así, si tomamos $\epsilon = 14$, entonces:

$$\delta = \min\left\{1, \frac{14}{7}\right\} = \min\{1, 2\} = 1.$$

En cambio, si $\epsilon = \frac{7}{2}$, entonces:

$$\delta = \min\left\{1, \frac{7}{2\times 7}\right\} = \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

El significado del primer caso es que para que 9 pueda ser aproximado por x^2 de modo que el error de aproximación sea menor que 14, es suficiente con elegir que x esté a una distancia de -3 menor que 1. En el segundo caso, para lograr que 9 sea aproximado por x^2 con un error más pequeño que $\frac{7}{2}$ es suficiente con que x esté a una distancia de -3 menor que $\frac{1}{2}$.

Para recordar esta dependencia del número δ del número ϵ, se suele escribir, en la definición de límite, $\delta(\epsilon)$ en lugar de solo escribir δ. En este libro, en aquellas situaciones en las que tener en cuenta esta dependencia sea crítico, escribiremos delta seguido de epsilon entre paréntesis.

Veamos un ejemplo más donde obtenemos δ dado un ϵ, en el que se aprecia, una vez más, cómo δ depende de ϵ.

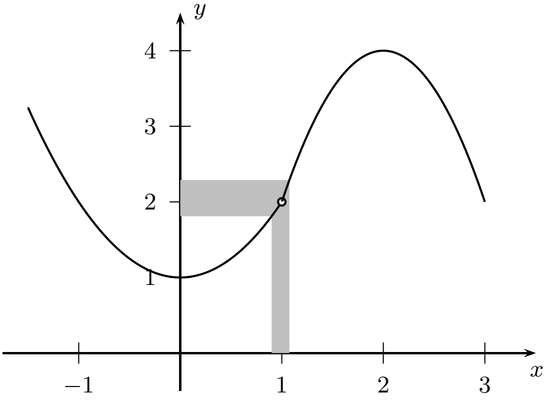
Ejemplo 1.4

Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1, \\ -2x^2 + 8x - 4 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Solución. El siguiente es un dibujo del gráfico de f en el intervalo $[-1.5, 3]$:



Como se puede observar, $f(x)$ está tan cerca del número 2 como se quiera si x está lo suficientemente cerca de 1. A través de la definición de límite, vamos a demostrar que esta conjetura es verdadera.

Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - 2| < \epsilon \tag{1.32}$$

siempre que $x \neq 1$ y $|x - 1| < \delta$.

Utilicemos el método descrito en esta sección para encontrar δ dado ϵ. Lo primero que tenemos que hacer es encontrar una función g para expresar el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y 2, para $x \neq 1$, de la siguiente manera:

$$|f(x) - 2| = |g(x)||x - 1|. \tag{1.33}$$

Para ello, debemos trabajar con el lado izquierdo de la desigualdad (1.32). Pero, como f está definida por dos fórmulas —una para valores menores que 1 y otra para valores mayores que 1—, vamos a dividir el análisis en dos casos: cuando $x < 1$ y cuando $x > 1$.

Antes de estudiar cada caso, como el límite que nos interesa es cuando x tiende a 1, nos interesan únicamente valores cercanos a 1. Por ello, en todo lo que sigue, suponemos que x toma valores en el intervalo de centro 1 y radio 1; es decir, suponemos que x satisface la desigualdad $|x - 1| < 1$, que es equivalente a $0 < x < 2$.

Por lo tanto, los dos casos a analizar son: $0 < x < 1$ y $1 < x < 2$.

Caso 1: $0 < x < 1$. Analicemos el lado izquierdo de la desigualdad (1.32). Recordemos que para $x < 1$ se tiene que $f(x) = x^2 + 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= |(x^2 + 1) - 2| = |(x^2 + 1) - 2| \\ &= |x^2 - 1| = |x + 1||x - 1|. \end{aligned}$$

Como $x > 0$, entonces $x + 1 > 0$, de donde

$$|f(x) - 2| = (x + 1)|x - 1|.$$

Entonces, si definimos $g(x) = x + 1$, ya tenemos la forma (1.33).

Lo que ahora debemos hacer es encontrar una cota superior para $g(x)$. En este caso, esto es sencillo, pues, como $x < 1$, entonces $g(x) = x + 1 < 2$. Por lo tanto, tenemos que

$$|f(x) - 2| = g(x)|x - 1| < 2|x - 1|.$$

En resumen, si $0 < x < 1$, entonces

$$|f(x) - 2| < 2|x - 1|. \tag{1.34}$$

Ahora bien, si el miembro de la derecha de la expresión anterior fuera menor que ϵ, el de la izquierda también lo sería; es decir, se verifica la siguiente implicación lógica:

$$2|x - 1| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < 2|x - 1| < \epsilon,$$

la misma que puede ser expresada de la siguiente manera:

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |f(x)-2| < \epsilon.$$

Vemos, entonces, que, si $0 < x < 1$, un buen candidato para δ es $\frac{\epsilon}{2}$.

Sin embargo, recordemos que supusimos que también se verifica la condición $|x-1| < 1$. Por lo tanto, el número 1 también es un candidato para δ. ¿Cuál de los dos debemos elegir? El más pequeño.

Así, para este primer caso, la elección para δ es la siguiente:

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{2}\right\}. \tag{1.35}$$

Caso 2: $1 < x < 2$. Puesto que, para estos valores de x, se tiene que $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, el lado izquierdo de la desigualdad (1.32) puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |f(x)-2| &= |-2x^2 + 8x - 4 - 2| \\ &= |2x^2 - 8x + 6| \\ &= 2|x^2 - 4x + 3| = 2|x-3||x-1|. \end{aligned}$$

Si definimos $g(x) = 2|x-3|$, tenemos que:

$$|f(x)-2| < g(x)|x-1|.$$

Ahora encontremos una cota superior para $g(x)$. Para ello, recordemos que $1 < x < 2$. De estas desigualdades, tenemos que:

$$1-3 < x-3 < 2-3.$$

Es decir, se verifica que

$$-2 < x-3 < -1 < 2.$$

Por lo tanto:

$$|x-3| < 2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2|x-3| < 4.$$

Entonces, para x tal que $1 < x < 2$, se verifica la desigualdad:

$$|f(x)-2| < 4|x-1|.$$

De esta desigualdad tenemos la siguiente implicación:

$$4|x-1| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x)-2| < 4|x-1| < \epsilon,$$

la misma que puede ser expresada de la siguiente manera:

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{4} \quad \Rightarrow \quad |f(x)-2| < \epsilon.$$

Con un razonamiento similar al caso anterior, la elección de δ es la siguiente:

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{4}\right\}. \tag{1.36}$$

Conclusión. De los dos casos estudiados, podemos concluir que, si $0 < x < 2$, el δ buscado debe ser elegido de la siguiente manera:

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{4}\right\}.$$

Pero, como

$$\frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2},$$

si

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{4}\right\},$$

se verifica la siguiente implicación:

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-2| < \epsilon.$$

Esto prueba que

$$2 = \lim_{x\to 1} f(x).$$

Segunda observación: no importa qué valor tome la función en el punto donde se calcula el límite

En efecto, la definición de
$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$
no exige que el número a esté en el dominio de la función f. De hecho, en los ejemplos anteriores, se puede ver que los x que se utilizan para aproximar L con $f(x)$ siempre son distintos de a, pues estos x satisfacen la desigualdad:
$$0 < |x - a|.$$

Los siguientes ejemplos nos muestran porqué no es necesario tomar en cuenta al número a en la definición de límite.

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x) = 2x + 1.$$
Entonces:
$$3 = \lim_{x \to 1} f(x).$$
En efecto: sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que se verifique la igualdad
$$|f(x) - 3| < \epsilon, \tag{1.37}$$
siempre que
$$0 < |x - 1| < \delta.$$

Para hallar el número δ, ya sabemos qué hacer. En primer lugar, tenemos que:
$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= |(2x + 1) - 3| \\ &= |2x - 2| \\ &= 2|x - 1|. \end{aligned}$$
Es decir, se verifica que:
$$|f(x) - 3| < 2|x - 1|.$$
Por lo tanto, si existiera el número δ, debería satisfacerse la desigualdad:
$$|f(x) - 3| < 2|x - 1| < 2\delta.$$
De esta última desigualdad, se ve que, para que se verifique la desigualdad (1.37), basta elegir el número δ tal que
$$2\delta = \epsilon,$$
es decir, tal que
$$\delta = \frac{\epsilon}{2}.$$

En efecto: si x es tal que
$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{2},$$
entonces:
$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= 2|x - 1| \\ &< 2\delta \\ &= 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

2. Sea $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Entonces:

$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \neq 1$. Es decir, g y f son casi la misma función, excepto por el valor que cada una de ellas toma en el número $x = 1$, pues

$$g(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(1) = 3.$$

Sin embargo:

$$3 = \lim_{x \to 1} g(x).$$

En efecto: sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar un número $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - 3| < \epsilon, \tag{1.38}$$

siempre que

$$0 < |x - 1| < \delta.$$

Ahora bien, encontrado el número δ, lo que tenemos que probar es que si

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

se verifica la desigualdad (1.38). Es decir, debemos probar que para $x \neq 1$, pues $|x-1| > 0$, tal que $|x - 1| < \delta$, se verifica la desigualdad (1.38). Pero, recordemos que

$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \neq 1$. Entonces, para estos x, la desigualdad (1.38) se transforma en la desigualdad:

$$|f(x) - 3| < \epsilon. \tag{1.37}$$

Y ya probamos, en el ejemplo anterior, que esta desigualdad se cumple siempre que

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{2}.$$

De manera que para todo x que cumpla con estas dos desigualdades se cumple la desigualdad (1.38). Y esto significa que el número 3 es el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima al número 1.

3. Sea $h\colon \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}.$$

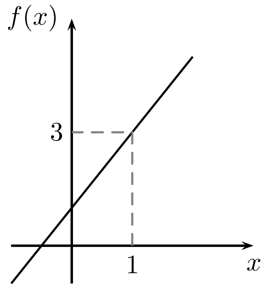
En este caso, h no está definida en 1 por lo que es distinta tanto de f como de g. Sin embargo, para todo $x \neq 1$, se verifican las igualdades:

$$h(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} = 2x + 1 = g(x) = f(x).$$

De manera análoga al caso de g, podemos demostrar que

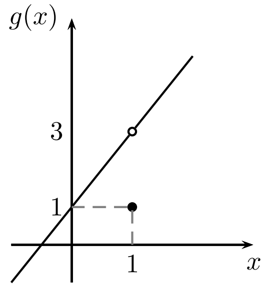
$$3 = \lim_{x \to 1} h(x).$$

En estos tres ejemplos podemos ver que, en lo que se refiere al límite de una función en un punto a, *no importa el valor que pueda tomar la función en el punto a*; incluso, la función puede no estar definida en este punto. *Lo que importa realmente es el comportamiento de la función alrededor del punto a.* Las gráficas de las funciones f, g y h, que están a continuación, ilustran esta última afirmación:



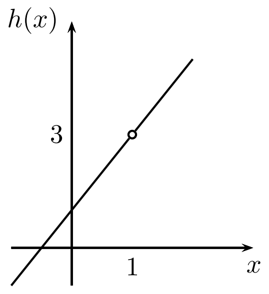
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x+1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$$



$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 3 \neq g(1)$$



$$h\colon \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x) = 2x+1$$

$$\lim_{x\to 1} h(x) = 3$$

$h(1)$ no existe

Podemos resumir la situación que se ilustra en estos ejemplos, diciendo que si dos funciones solo difieren en un punto de su dominio, o bien las dos tienen límite en dicho punto, y es el mismo límite, o bien ninguna tiene límite. De manera más precisa se expresa este resultado en el teorema del límite de funciones localmente iguales, que presentaremos a continuación.

Definición 1.2 (Funciones localmente iguales)
Sean:

a un número real;

I un intervalo abierto que contiene al número a; y,

f y g dos funciones reales definidas en I, salvo

talvez en a (es decir, $I \subset$)

Diremos que "$f = g$ localmente cerca de a" o simplemente que "$f = g$ cerca de a", si existe $r > 0$ tal que para todo $x \in]a-r, a+r[- - \{a\}$, $f(x) = g(x)$.

Teorema 1.1 (Límite de funciones localmente iguales)
Sean I y J dos intervalos abiertos y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $a \in I \cap J$ y:

1. $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I \cap J$ y $x \neq a$; y
2. existe L tal que:
$$L = \lim_{x\to a} g(x).$$

Entonces f también tiene límite en a y:
$$L = \lim_{x\to a} f(x).$$

Este es el caso de las funciones f, g y h. Se diferencian únicamente en $a = 1$. Como el límite de f existe y es igual a 3, entonces los límites de g y h existen también y son iguales a 3.

Este teorema se utiliza de la siguiente manera. Supongamos que queremos calcular
$$\lim_{x\to a} f(x).$$
Se busca una función g cuyo límite en a se conozca y tal que
$$g(x) = f(x)$$
para todo x en la intersección de los dominios de f y g y que sea diferente de a. Entonces, lo que podemos afirmar es que
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Ejemplo 1.5

Supongamos conocido que
$$\lim_{x\to 1}(x+2) = 3.$$
Calcular
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}.$$

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R} - 1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}.$$
Debemos hallar una función g que sea igual a f, excepto en 1, y cuyo límite conozcamos.

Esto se puede hacer, pues
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2,$$
para todo $x \neq 1$. Por lo tanto, si se define
$$g(x) = x+2,$$
sabemos que:

1. $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$; y
2. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$.

Por lo tanto, el teorema (1.1), podemos afirmar que: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3.$

Para terminar esta sección, presentamos el siguiente teorema, que es una consecuencia inmediata de la definición de límite, que es muy útil en diferentes aplicaciones del concepto de límite.

Teorema 1.2
Sea $f\colon \operatorname{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces:

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow 0 = \lim_{x\to a}(f(x)-L) \Leftrightarrow 0 = \lim_{x\to a}|f(x)-L|.$$

La demostración es un buen ejercicio para trabajar la definición de límite por lo que se sugiere al lector la haga por sí mismo.

Un uso típico de este teorema es el siguiente. Queremos demostrar que

$$3 = \lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}.$$

En lugar de ello, probaremos que

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1} - 3.$$

Pero, como

$$\frac{x+3}{x+1} - 3 = -\frac{2x}{x+1},$$

lo que hay que probar es

$$0 = \lim_{x\to 0} -2\frac{x}{x+1}.$$

Y, como

$$\left|-2\frac{x}{x+1}\right| = 2\left|\frac{x}{x+1}\right|,$$

una alternativa es probar que

$$0 = 2\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}.$$

En sentido estricto, no hay mayor diferencia en la manera cómo se demuestra cualquiera de estas igualdades, salvo, en ciertas ocasiones, en las que algunas operaciones algebraicas suelen simplificarse. El lector debería realizar cada una de estas prueba para que compare y determine cuáles podrían ser esas simplificaciones.

1.3.4 Ejercicios

1. Demuestre, usando la definición de límite, que:
   (a) $\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12$
   (b) $\lim_{x\to 3}(8x-15) = 9$
   (c) $\lim_{x\to -2}(5x+14) = 4$
   (d) $\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$
   (e) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x+2} = -8$
   (f) $\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-2} = -5$
   (g) $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$
   (h) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}(-9x^2+3x+1) = 1$
   (i) $\lim_{x\to -1}\frac{x+4}{x-1} = -\frac{3}{2}$
2. Use el teorema 1.1 para hallar los siguientes límites:
   (a) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}$
   (b) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
   (c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{x^2-1}$
   (d) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

1.4 Continuidad de una función

Las tres funciones utilizadas en la sección precedente tienen límite en el número 1. La primera y la segunda también están definidas en 1; es decir, 1 está en el dominio de f y g. Sin embargo, en el caso de la primera, como $f(1) = 3$, el valor de f en 1 es igual al límite; en el caso de la segunda, como $g(1) = 1 \neq 3$, esto no ocurre. Para la tercera función, el número 1 no está en el dominio de h.

Los dibujos de estas tres funciones muestran que en el gráfico de las funciones g y h hay un "salto" al cruzar la recta vertical de ecuación $x = 1$ (en la jerga matemática, se suele decir que "hay un salto al pasar por 1"). Si dibujáramos los gráficos de estas funciones, trazándolo de izquierda a derecha, en el caso de la segunda y de la tercera, deberíamos "interrumpir" o "discontinuar" el trazo. Para f eso no ocurrirá. Por esa razón, la función f va a ser una función "continua", mientras que las otras dos no.

Lo que diferencia a f de g y h es el hecho de que, a más de existir el límite en 1, la función está definida allí y su valor es igual al límite. Ésta es la definición de continuidad:

Definición 1.3 (Función continua)
Una función $f\colon\ \mathrm{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $I \subseteq \mathrm{Dm}(f)$ es un intervalo abierto, es *continua* en a si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Una función es continua en el intervalo abierto I si es continua en todos y cada uno de los elementos de I.

La continuidad de una función es un tema central en el estudio del Cálculo. A lo largo de este libro, conoceremos diversas propiedades de las funciones continuas. Por ahora, veamos que la definición de límite ofrece una definición equivalente de continuidad:

Teorema 1.3 (Función continua)
Sea $f\colon\ \mathrm{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $I \subseteq \mathrm{Dm}(f)$ es un intervalo abierto. Sea $a \in I$. Entonces, f es continua en a si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

siempre que $|x - a| < \delta$ y $x \in I$.

Observemos que no hace falta excluir el caso $x = a$, como se hace en la definición de límite, porque, al ser f continua en a, si $x = a$, se verifica que:

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon.$$

Veamos un par de ejemplos sencillos de funciones continuas.

Ejemplo 1.6

La función constante es continua en su dominio.

Solución. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Probemos que la función f es continua en todo $a \in \mathbb{R}$.

Para ello, sea $a \in \mathbb{R}$. Puesto que $a \in \mathrm{Dm}(f)$, solo nos falta verificar que:

1. existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; y que
2. $f(a) = c = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Probaremos la segunda condición únicamente, ya que con ello es suficiente para probar la primera.

Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - c| < \epsilon \tag{1.39}$$

siempre que

$$|x - a| < \delta.$$

Ahora bien, puesto que

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, la desigualdad (1.39) será verdadera cualquiera que sea el $\delta > 0$ elegido. Es decir, el número c es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a.

Por lo tanto, este límite existe, lo que prueba que la función constante es continua en a y, como a es cualquier elemento del dominio de f, la función es continua en su dominio.

Este ejemplo nos muestra, además, la veracidad de la siguiente igualdad:

$$c = \lim_{x \to a} c. \tag{1.40}$$

Esta igualdad suele enunciarse de la siguiente manera:

el límite de una constante es igual a la constante.

Ejemplo 1.7

La función identidad es continua en todo su dominio

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Probemos que la función f es continua en todo $a \in \mathbb{R}$.

Para ello, sea $a \in \mathbb{R}$. Puesto que $a \in \mathrm{Dm}(f)$, solo nos falta verificar que:

1. existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; y que
2. $f(a) = a = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Probaremos la segunda condición únicamente, ya que con ello es suficiente para probar la primera.

Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - a| < \epsilon \tag{1.41}$$

siempre que

$$|x - a| < \delta.$$

Como

$$|f(x) - a| = |x - a|,$$

es obvio que el número δ buscado es igual a ϵ. Si lo elegimos así, habremos probado que a es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a. Por lo tanto, éste límite existe, lo que prueba que la función identidad es continua en a, de donde, es continua en su dominio.

Este ejemplo nos demuestra que la siguiente igualdad es verdadera:

$$a = \lim_{x \to a} x. \tag{1.42}$$

Esta igualdad se enuncia de la siguiente manera:

el límite de x es igual al número a cuando x se aproxima al número a.

En una sección posterior, desarrollaremos algunos procedimientos para el cálculo de límites lo que, a su vez, nos permitirá estudiar la continuidad de una función.

1.5 Interpretación geométrica de la definición de límite

Como hemos podido ver, encontrar el número δ dado el número ϵ no siempre es una tarea fácil. Los ejemplos que hemos trabajado son sencillos relativamente. En general, demostrar que un cierto número es el límite de una función suele ser una tarea de considerable trabajo. Por ello, el poder "visualizar" la definición es de mucha ayuda para poder manipular luego las desigualdades con los ϵ y δ. Esta visualización puede ser realizada de la siguiente manera.

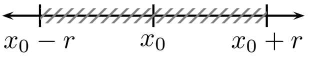
En primer lugar, recordemos que la desigualdad

$$|x - x_0| < r, \tag{1.43}$$

donde x, x_0 y r son números reales y, además, $r > 0$, es equivalente a la desigualdad

$$x_0 - r < x < x_0 + r.$$

Por lo tanto, el conjunto de todos los x que satisfacen la desigualdad (1.43) puede ser representado geométricamente por el intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$; es decir, por el intervalo abierto con centro en x_0 y radio r:



La longitud de este intervalo es igual a $2r$.

Supongamos que el número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a. Esto significa que, dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que se verifica la desigualdad

$$|f(x) - L| < \epsilon, \tag{1.44}$$

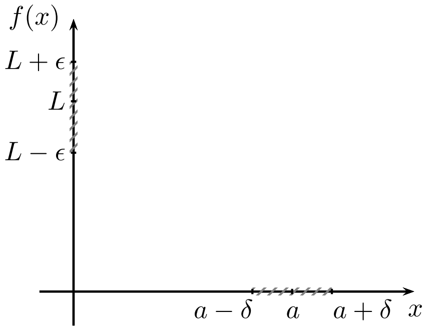
siempre que se satisfagan las desigualdades

$$0 < |x - a| < \delta. \tag{1.45}$$

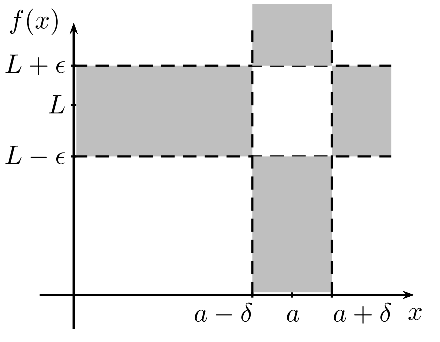
Con la interpretación geométrica realizada previamente, esta definición de límite puede expresarse en términos geométricos de la siguiente manera:

dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x)$ se encuentre en el intervalo de centro L y radio ϵ, siempre que x se encuentre en el intervalo de centro a y radio δ y $x \neq a$.

Esta formulación puede ser visualizada de la siguiente manera. En un sistema de coordenadas, en el que se va a representar gráficamente la función f, dibujemos los dos intervalos que aparecen en la definición de límite: $]a - \delta, a + \delta[$ y $]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Obtendremos lo siguiente:



A continuación, dibujemos dos bandas: una horizontal, limitada por las rectas horizontales cuyas ecuaciones son $y = L - \epsilon$ y $y = L + \epsilon$, y una vertical, limitada por las rectas verticales cuyas ecuaciones son $x = a - \delta$ y $x = a + \delta$:



El rectángulo obtenido por la intersección de las dos bandas está representado por el siguiente conjunto:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]a-\delta, a+\delta[, \quad y \in\ ]L-\epsilon, L+\epsilon[\}.$$

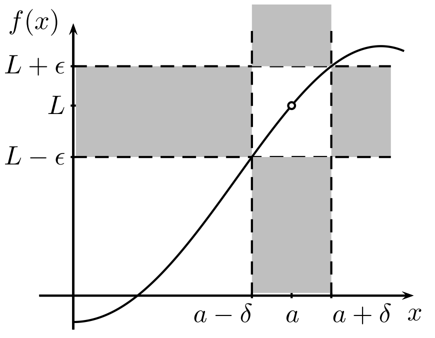
La definición de límite afirma que $f(x)$ estará en el intervalo $]L-\epsilon, L+\epsilon[$ siempre que x, siendo distinto de a, esté en el intervalo $]a-\delta, a+\delta[$. Esto significa, entonces, que la pareja $(x, f(x))$ está en el conjunto C. Es decir, todos los puntos de coordenadas

$$(x, f(x))$$

tales que $x \neq a$ pero $x \in\ ]a-\delta, a+\delta[$ están en el interior del rectángulo producido por la intersección de las dos bandas. Pero todos estos puntos no son más que la gráfica de la función f en el conjunto $]a-\delta, a+\delta[-\{a\}$. En otras palabras:

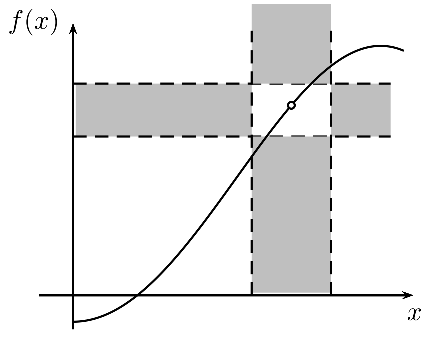
> **dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que la gráfica de f en el conjunto $]a-\delta, a+\delta[-\{a\}$ está en el interior del conjunto C.**

El siguiente dibujo muestra lo que sucede cuando L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxime al número a:



Al conjunto C se le denomina *caja* para el gráfico de f en el punto de coordenadas (a, L). De manera más general, una *caja para el gráfico de una función en el punto de coordenadas* (x, y) es el interior de una región rectangular cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, que contiene al punto de coordenadas (x, y), de modo que ningún punto del gráfico de la función f que esté en la banda vertical, salvo, tal vez, el punto de coordenadas $(x, f(x))$, no puede estar ni sobre la región rectangular ni bajo de ella. Si el punto de coordenadas (x, y) es también el centro de la región rectangular (es decir, es la intersección de las diagonales del rectángulo), entonces la región rectangular es denominada *caja centrada en el punto de coordenadas* (x, y).

Un ejemplo de una región rectangular que no es una caja para el gráfico de f es el siguiente:

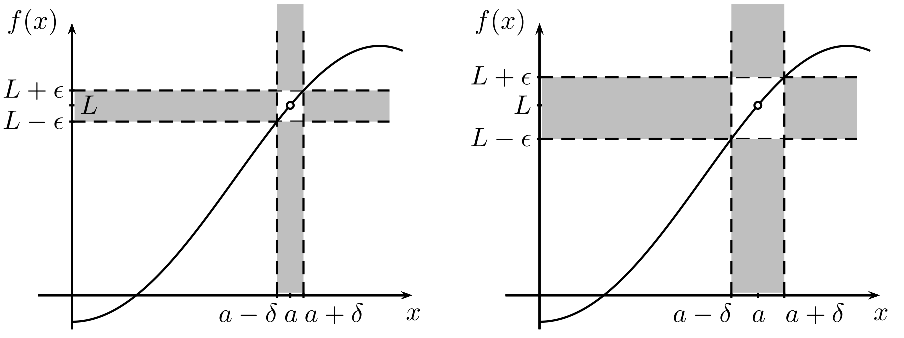


Con la definición de caja, podemos decir que el conjunto C es, efectivamente, una caja para el gráfico de f centrada en el punto de coordenadas (a, L). En este caso, la caja C tiene una altura igual a 2ϵ y una base igual a 2δ.

En términos de cajas, la definición de límite garantiza que:

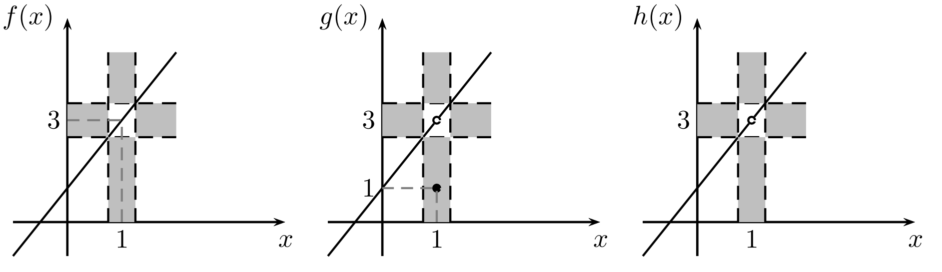
si L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, entonces, el gráfico de f tiene cajas de todas las alturas positivas posibles centradas en el punto (a, L).

El siguiente dibujo, muestra dos cajas para el gráfico de f, ambas centradas en (a, L):



Estos dos últimos dibujos sugieren que el gráfico de f tiene cajas centradas en (a, L) de todas las alturas posibles.

A continuación, podemos visualizar por qué las funciones f, g y h de la sección anterior, las que utilizamos para mostrar por qué en la definición de límite no importa el valor que pueda tener (o no tener), tienen el mismo límite:



Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.8

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Encuentre un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $|f(x) - 9| < \epsilon = \frac{1}{2}$.
2. Construya una caja, tal como está definida en el texto, que ilustre el resultado encontrado en el primer punto.

Solución.

1. En el ejemplo de la página 14, probamos que

$$9 = \lim_{x\to 3} x^2.$$

Para probar esta igualdad, dado $\epsilon > 0$, encontramos que el número

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}$$

es tal que, si $|x-3| < \delta$, entonces $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Por lo tanto, como $\epsilon = \frac{1}{2}$, el número buscado es:

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\frac{1}{2}}{7}\right\} = \frac{1}{14}.$$

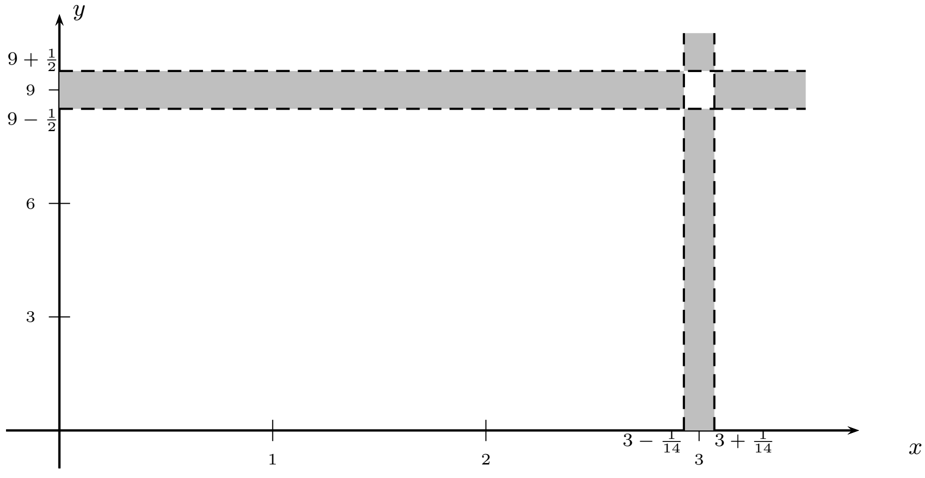
En resumen, si $|x-3| < \frac{1}{14}$, entonces $|x^2 - 9| < \frac{1}{2}$.

2. Como $9 = \text{lím}_{x\to 3} x^2$, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, el conjunto

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left]3 - \frac{1}{14}, 3 + \frac{1}{14}\right[,\ y \in \left]9 - \frac{1}{2}, 9 + \frac{1}{2}\right[\right\}$$

es una caja para el gráfico de f en el punto de coordenadas $(3, 9)$.

El siguiente, es un dibujo de esta caja:



Ahora bien, por la definición de caja, como

$$9 = \lim_{x\to 3} x^2,$$

el gráfico de la función f en el intervalo $]3 - \frac{1}{14}, 3 + \frac{1}{14}[$ debe estar contenido plenamente en la caja. Constatemos esto.

En primer lugar, veamos que $f(x)$ es mayor que $9 - \frac{1}{2}$ cuando $x = 3 - \frac{1}{14}$. Por un lado tenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(3 - \frac{1}{14}\right) &= f\left(\frac{41}{14}\right) \\ &= \frac{1\,681}{196} = 8 + \frac{113}{196}, \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$9 - \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2} = 8 + \frac{98}{196}.$$

Por lo tanto:

$$f\left(3 - \frac{1}{14}\right) = 8 + \frac{113}{196} > 8 + \frac{98}{196} = 9 - \frac{1}{2}.$$

En segundo lugar, veamos que $f(x)$ es menor que $9 + \frac{1}{2}$ cuando $x = 3 + \frac{1}{14}$. Por un lado tenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(3 + \frac{1}{14}\right) &= f\left(\frac{43}{14}\right) \\ &= \frac{1\,849}{196} = 9 + \frac{85}{196}, \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$9 + \frac{1}{2} = 9 + \frac{1}{2} = 9 + \frac{98}{196}.$$

Por lo tanto:

$$f\left(3 - \frac{1}{14}\right) = 9 + \frac{85}{196} < 9 + \frac{98}{196} = 9 + \frac{1}{2}.$$

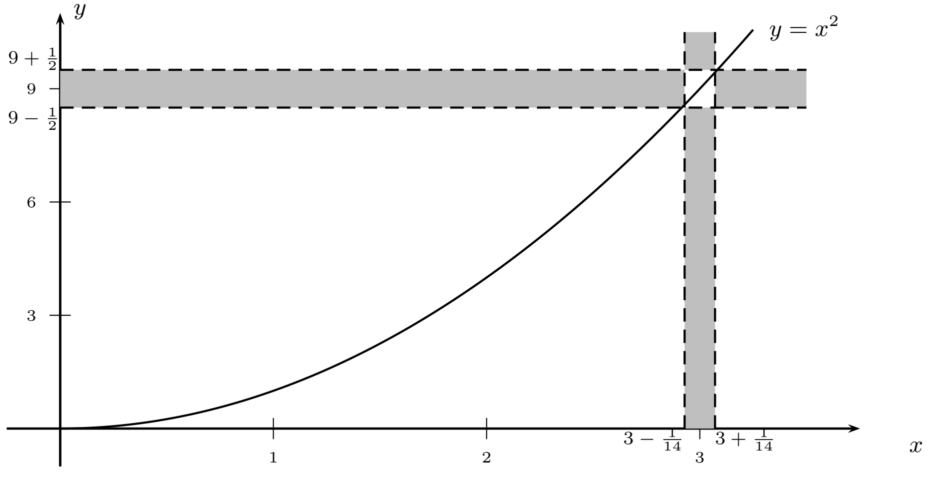
Finalmente, como la función f es creciente en $[0,+\infty[$, entonces

$$9-\frac{1}{2}<f(x)<9+\frac{1}{2}$$

siempre que

$$3-\frac{1}{14}<x<3+\frac{1}{14}.$$

Por esta razón, al dibujar el gráfico de f en este intervalo, éste deberá estar contenido plenamente en la caja, como lo asegura la definición de límite y de caja. El siguiente es un dibujo de la situación:



Para terminar esta sección, veamos cómo la interpretación geométrica nos puede ser de ayuda para demostrar que un cierto número L no es límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a.

De la definición de límite, decir que L no es el límite equivale a decir que:

existe un número $\epsilon > 0$ tal que, para todo número $\delta > 0$, existe un número x tal que

$$\boldsymbol{0<|x-a|<\delta \quad \text{y} \qquad |f(x)-L|\geq\epsilon.}$$

Ilustremos estas ideas con un ejemplo.

Ejemplo 1.9

Demostrar que

$$\lim_{x\to 1} f(x)\neq\frac{3}{2}$$

si

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\ [0,1],\\ x+1 & \text{si } x\in\ ]1,2]. \end{cases}$$

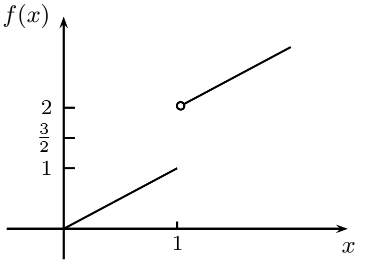
Solución. Para demostrar que el número $\frac{3}{2}$ no es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 si f está definida de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\ [0,1],\\ x+1 & \text{si } x\in\ ]1,2], \end{cases}$$

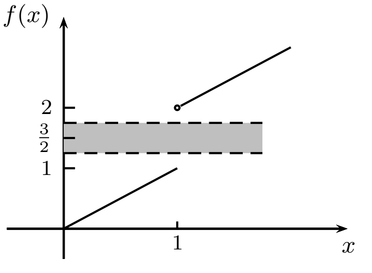
debemos hallar un número $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, encontremos un número $x \in \mathrm{Dm}(f)$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \quad \text{y} \quad \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \geq \epsilon.$$

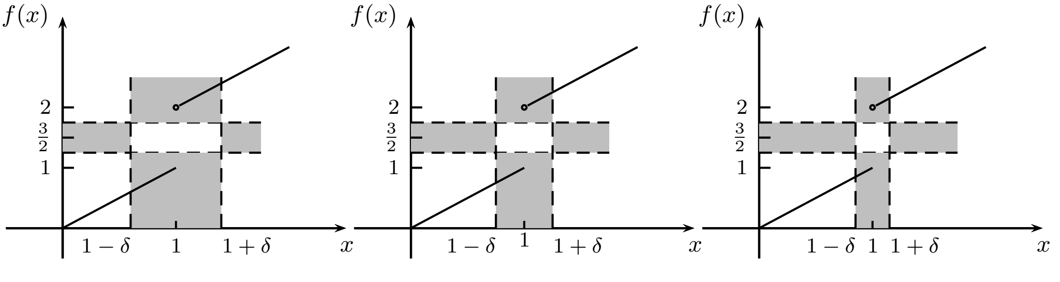
Para ello, primero dibujemos la función f:



Este dibujo nos permite ver que cualquier caja del gráfico de f ubicada entre las rectas horizontales de ecuaciones $y = 1$ y $y = 2$ no contendrá ningún elemento del gráfico de f. Recordemos que el alto de la caja es 2ϵ: una distancia de un ϵ sobre $\frac{3}{2}$ y una distancia de un ϵ bajo $\frac{3}{2}$. Por lo tanto, si elegimos ϵ igual a $\frac{1}{4}$, la banda horizontal alrededor de $\frac{3}{2}$ se vería así:



A continuación, podemos dibujar tres bandas verticales alrededor del número 1, lo que nos sugerirá que ninguna caja del gráfico de f con el alto 2ϵ elegido contendrá elementos del gráfico:



Estos dibujos nos sugieren cuál debe ser el x que buscamos para el cual se verifiquen las condiciones siguientes:

$$0 < |x-1| < \delta \quad \text{y} \quad \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \geq \epsilon.$$

Cualquier $x \neq 1$ que esté en el dominio de f y en el intervalo $]1-\delta, 1+\delta[$ satisfará estas dos condiciones.

Procedamos, entonces, a demostrar que el número $\frac{3}{2}$ no es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1.

Sean $\epsilon = \frac{1}{4}$ y $\delta > 0$. Si $\delta > 1$, la banda vertical abarcaría más que el dominio de la función f. En este caso, $x = 0$, satisfaría las condiciones. En efecto:

1. x está en el dominio de f;
2. Como $x = 0$, entonces $x \neq 1$ y

$$|x-1| = |0-1| = 1 < \delta;$$

3. Como $0 \in [0, 1]$, entonces $f(0) = 0$ y, por ello:

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| &= \left|0 - \frac{3}{2}\right| \\ &= \frac{3}{2} > \frac{1}{4} = \epsilon.\end{aligned}$$

Ahora, si $\delta \leq 1$, podemos elegir el número x que está en la mitad entre 1 y $1 - \delta$. Ese número es:

$$x = \frac{(1-\delta)+1}{2} = 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Entonces:

1. x está en el dominio de f, pues, como
   (a) $1 - \delta \geq 0$, ya que $\delta \leq 1$ y
   (b) $\frac{\delta}{2} < \delta$, ya que $\delta > 0$,

   se tiene que
   $$0 \leq 1 - \delta < 1 - \frac{\delta}{2} < 1;$$
   es decir, $x \in [0, 1[$.
2. Como $\delta > 0$, entonces $\frac{\delta}{2} > 0$, entonces
   $$x = 1 - \frac{\delta}{2} \neq 1.$$
3. Como $x \in [0, 1]$, entonces
   $$f(x) = x = 1 - \frac{\delta}{2}.$$
   Por lo tanto:
   $$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| &= \left|\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{3}{2}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} > \frac{1}{4} = \epsilon,\end{aligned}$$
   pues
   $$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{\delta}{2} > 0.$$

   Por lo tanto, el número $\frac{3}{2}$ no puede ser el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1.

En la sección próxima, vamos a mostrar un ejemplo de cómo se puede resolver un problema aplicando el método de encontrar un número δ dado el número ϵ.

1.5.1 Ejercicios

En los ejercicios propuestos a continuación, se busca que el lector adquiera un dominio básico del aspecto operativo de la definición de límite, a pesar de que luego, en la práctica del cálculo de límites, no se recurra a esta definición, sino a las propiedades que se obtienen y se demuestran a partir de esta definición.

1. Sean $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$:

   (a) encuentre un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$; y

   (b) construya una caja de $f(x)$ centrada en (a, L) y de altura 2ϵ que ilustre el resultado encontrado en el punto anterior

   para cada f, a, L y ϵ dados a continuación:

   (a) $f(x) = x - 2$; $a = 5$; $L = 3$; $\epsilon = 0.02$.
   (b) $f(x) = x - 2$; $a = -2$; $L = -4$; $\epsilon = 0.01$.
   (c) $f(x) = -2x+1$; $a = -2$; $L = 5$; $\epsilon = 0.05$.
   (d) $f(x) = 4x - 3$; $a = 1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.03$.
   (e) $f(x) = \frac{2x^2-7x+6}{x-2}$; $a = 2$; $L = 1$; $\epsilon = 0.04$.

(f) $f(x) = \frac{8x^2+10x+3}{2x+1}$; $a = -\frac{1}{2}$; $L = 1$; $\epsilon = 0.003$.

(g) $f(x) = x^2$; $a = 3$; $L = 9$; $\epsilon = 1$.

(h) $f(x) = x^2$; $a = 3$; $L = 9$; $\epsilon = 0.1$.

(i) $f(x) = x^2$; $a = -2$; $L = 4$; $\epsilon = 0.3$.

(j) $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $a = 1$; $L = -1$; $\epsilon = 0.4$.

(k) $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $a = -1$; $L = -7$; $\epsilon = 0.08$.

2. Demuestre, utilizando la definición de límite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{6x}{x+2} = 2$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \sqrt{x+7} = 3$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-3x}{x-3} = 12$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{8x^2+10x+3}{2x+1} = 1$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (2x^2-3x+4) = 3$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-7x+5}{-2x+3} = -1$.

1.6 Energía solar para Intipamba

Intipamba es una pequeña comunidad asentada en una meseta. Desde allí, se tiene la sensación de poder acariciar las trenzadas montañas que, más abajo, están rodeadas por un límpido cielo azul la mayor parte del año. El sol es un visitante asiduo de Intipamba. En algunas ocasiones se ha quedado tanto tiempo que las tierras alrededor de Intipamba no han podido dar su fruto, y los lugareños han tenido que ir muy lejos en busca de agua.

Los viejos ya no recuerdan cuando llegó la energía eléctrica a Intipamba y los jóvenes, si no la tuvieran ya, la extrañarían, pues, desde que tienen memoria, la han tenido. Pero en los últimos años la energía eléctrica que llega al pueblo ya no es suficiente. El gobierno les ha dicho que llevar más energía es muy costoso. Sin embargo, una organización no gubernamental ha propuesto a la comunidad solventar la falta de energía mediante la construcción de una pequeña planta que genere energía eléctrica a partir de energía solar, para aprovechar, así, "el sol" de Intipamba.

Para abaratar los costos, la comunidad entera participará en la construcción de la planta. Entre las tareas que realizarán los lugareños, está la construcción de los paneles solares. Las especificaciones técnicas indican que los paneles deben tener una forma rectangular, que el largo debe medir el doble que el ancho, el cuál no debe superar los tres metros, y que el área debe ser de ocho metros cuadrados, tolerándose a lo más un error del uno por ciento.

Se ha decidido que cada panel tenga por dimensiones 2 y 4 metros, lo que satisface el requerimiento de que la longitud del largo sea el doble que la del ancho. El problema en que se encuentran los encargados de la construcción de los paneles consiste en determinar con qué grado de precisión debe calibrarse la maquinaria que corta los paneles para que se garantice que el área obtenida no difiera de los ocho metros cuadrados en más del uno por ciento.

1.6.1 Planteamiento del problema

En primer lugar, ¿qué significa que el área no difiera de los ocho metros cuadrados en más del uno por ciento? Ninguna máquina cortará los lados de cada panel de dos y cuatro metros exactamente, sino que, en algunos cortes, por ejemplo, la dimensión del ancho será un poco menos que dos metros; en otros cortes, podría ser un poco más; una situación similar ocurrirá respecto de la dimensión del largo. El resultado de esto es que el área de cada panel no será exactamente igual a ocho metros cuadrados.

La diferencia entre el área real de un panel y los ocho metros cuadrados esperados se denomina *error*. Esta cantidad puede ser positiva o negativa, según el área real sea mayor o menor a ocho metros cuadrados. Para cuantificar únicamente la diferencia entre el área real y la esperada, se define el concepto de *error absoluto* como el valor absoluto del error. El error absoluto no da cuenta de si el área obtenida es mayor o menor que los ocho metros cuadrados esperados, solo da cuenta de la diferencia positiva entre estos dos valores.

Si se representa con la letra a el número de metros cuadrados que mide el área real de un panel, el error absoluto se expresa de la siguiente manera:

$$\text{error absoluto } = |a - 8|.$$

La especificación de que "el área no difiera de los ocho metros cuadrados en más del uno por ciento" quiere decir, entonces, que el error absoluto sea menor que el uno por ciento del área esperada; es decir, que el error absoluto sea menor que el uno por ciento de ocho metros, valor igual a 0.08 metros cuadrados. Por lo tanto, para que se cumpla con la especificación técnica, la calibración de la máquina debe asegurar la verificación de la siguiente desigualdad:

$$|a - 8| < 0.08.$$

En resumen, el problema a resolver por el equipo de Intipamba es:

calibrar la máquina de los paneles para garantizar que la desigualdad

$$|a - 8| < 0.08. \tag{1.46}$$

sea verdadera.

1.6.2 El modelo

¿Qué se quiere decir con "calibrar la máquina" para garantizar que la desigualdad (1.46) sea verdadera? Desde el punto de vista de la máquina, cuando ésta "dice que va a cortar el ancho de dos metros", cortará, en realidad, de un poco más de dos metros, en algunas ocasiones; en otras, de un poco menos que dos metros. Lo mismo sucederá con el largo. Esto significa que el área del panel obtenida en cada corte no será, con toda seguridad, igual a ocho metros cuadrados. La calibración consiste, entonces, en decirle a la máquina en cuánto se puede equivocar a lo más en el corte del largo y del ancho para que asegure a los lugareños de Intipamba que el "error absoluto" en el área del panel no difiera de ocho metros cuadrados en más del uno por ciento. En otras palabras, los constructores de los paneles quieren saber en cuánto la máquina puede equivocarse en el corte del largo y del ancho para que el área del panel no difiera en más del uno por ciento; es decir, quieren saber el valor máximo permitido para el error en las longitudes de los cortes, de manera que el área no difiera en más del uno por ciento con el área esperada.

El área real de cada panel no es, entonces, constante; dependerá de las dos dimensiones del panel que la máquina cortadora produzca realmente. Bajo la suposición de que ésta máquina siempre logra cortar el largo de una longitud el doble que la del ancho, el área real de cada panel se puede expresar exclusivamente en función de una de las dimensiones. Por ejemplo, el ancho.

En efecto, los encargados de la construcción de los paneles utilizan la letra x para representar el número de metros que mide el ancho real de un panel; entonces, $2x$ representa el número de metros que mide el largo del panel. De esta manera, si el área de cada panel es de a metros cuadrados, a puede ser expresada en función de x de la siguiente manera:

$$a = 2x^2.$$

Vamos a representar con la letra A esta relación funcional entre a y x. Así, la función A definida por

$$A(x) = 2x^2$$

nos permite escribir las siguientes igualdades:

$$a = A(x) = 2x^2.$$

¿Cuál es el dominio de la función A? La respuesta se encuentra después de averiguar los valores que puede tomar la variable x. Dentro de las especificaciones técnicas para la construcción de los paneles, se indica que el ancho del panel no puede superar los tres metros; como, además, el ancho no puede ser medido por el número cero ni por un número negativo, se puede elegir[2] como dominio de A el intervalo $]0, 3]$. En resumen, A es una función de $]0, 3]$ en $\mathbb{R}^+$.

El equipo de Intipamba encargado de los paneles ya pueden representar simbólicamente el error absoluto que comete la máquina en el corte del ancho de un panel: el valor absoluto de la diferencia entre x, el valor de la longitud real del ancho, y 2, el valor esperado para el ancho:

$$\text{error absoluto } = |x - 2|.$$

El problema que tienen los constructores es, entonces, saber de qué valor no debe superar este error absoluto para asegurar que el área del panel no difiera del uno por ciento del área esperada. Es decir, los constructores necesitan encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - 2| < \delta, \text{ entonces } |A(x) - 8| < 0.08;$$

es decir, deben hallar un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - 2| < \delta, \text{ entonces } |2x^2 - 8| < 0.08.$$

Ahora los lugareños de Intipamba acaban de formular un *modelo matemático* del problema; es decir, tienen una representación mediante símbolos que, por un lado, representan elementos del problema de construcción de los paneles, pero que, por otro lado, representan conceptos matemáticos que, en su interrelación, plantean un problema "matemático" que, al ser resuelto, permita ofrecer una solución al problema de los paneles solares. El modelo se puede resumir de la siguiente manera:

Modelo para el problema de los paneles solares

Sean

x : *el número de metros que mide el ancho real de un panel y que no puede ser mayor que tres metros.*

a : *el número de metros cuadrados que mide el área real de un panel cuyo ancho y largo miden x y $2x$ metros, respectivamente.*

A es un función de $]0, 3]$ en $\mathbb{R}^+$ definida por

$$A(x) = a = 2x^2.$$

Se busca un número $\delta > 0$ tal que si la desigualdad

$$|x - 2| < \delta \tag{1.4}$$

fuera verdadera, la desigualdad

$$|A(x) - 8| = |2x^2 - 8| < 0.08 \tag{1.5}$$

también sería verdadera.

[2]No hay una sola manera de realizar esta elección; es decir, hay varias alternativas para el dominio de la función A. En efecto, aunque los constructores de los paneles no saben de cuánto exactamente es el ancho de cada panel, están seguros que no podrá ser muy diferente de dos metros. Esto significa que se podría elegir como dominio de la función A, por ejemplo, el intervalo $[1.5, 2.5]$; también se podría tomar el intervalo $[1, 2.5]$.

1.6.3 El problema matemático

El modelo plantea un problema exclusivamente matemático:

Dada la función $A\colon]0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A(x) = 2x^2,$$

se busca un número real $\delta > 0$ tal que si la desigualdad

$$|x-2| < \delta \tag{1.4}$$

fuera verdadera, la desigualdad

$$|A(x) - 8| = |2x^2 - 8| < 0.08 \tag{1.5}$$

también sería verdadera.

En esta formulación, el significado de los símbolos que aparecen (A, x y δ) carece de importancia. Solo importa que estos símbolos representan, respectivamente, una función, cualquier número real en el intervalo $]0,3]$ y un número real positivo.

El reto en este momento es resolver este problema. Si lo podemos hacer, usaremos la solución encontrada para responder la pregunta que se formularon los habitantes de Intipamba: ¿cuál es la calibración de la máquina que corta los paneles solares para garantizar que el área de los mismos no difiera de los ocho metros cuadrados en más del uno por ciento?

1.6.4 Solución del problema matemático

Podemos aplicar el método aprendido en la sección anterior para encontrar el número δ. Sin embargo, para resolver este problema, por tratarse de $2x^2$, podemos hacer un atajo en el método.

Para empezar, tenemos que:

$$\begin{aligned}|2x^2 - 8| &= |2(x^2-4)| \\ &= 2|x^2-4| \\ &= 2|(x-2)(x+2)| \\ &= 2|x-2||x+2|.\end{aligned}$$

Es decir,

$$|2x^2 - 8| = 2|x-2||x+2|. \tag{1.47}$$

Ahora debemos acotar $g(x) = 2|x+2|$. Para ello, recordemos que x representa un número que pertenece al dominio de la función A, es decir, x está en el intervalo $]0,3]$. Por lo tanto, se verifican las desigualdades siguientes:

$$0 < x \leq 3.$$

Ahora, si sumamos 2 a cada lado de estas desigualdades, obtendremos lo siguiente:

$$2 < x+2 \leq 5. \tag{1.48}$$

Como $x+2$ es mayor que cero, entonces,

$$x+2 = |x+2|,$$

de donde la desigualdad de la derecha en (1.48) se escribe así:

$$|x+2| \leq 5. \tag{1.49}$$

Por lo tanto:

$$g(x) \leq 10.$$

Entonces, de la igualdad (1.47), concluimos que:

$$|2x^2 - 8| \leq 10|x-2|. \tag{1.50}$$

para todo $x \in \ (0,3]$.

Ahora, si para el número δ que buscamos se cumple (1.4):

$$|x-2| < \delta,$$

entonces:

$$|2x^2 - 8| < 10\delta,$$

para $x \in \ (0,3]$.

Por lo tanto, para que se verifique la desigualdad (1.5), podemos elegir δ de modo que:

$$10\delta = 0.08.$$

Y de aquí, obtendríamos que

$$\delta = \frac{0.08}{10} = 0.008.$$

Si este es el valor del número δ que estamos buscando, estaremos seguros de lo siguiente: si $x \in]0,3]$ tal que se verifica la desigualdad (1.4):

$$|x-2| < \delta,$$

se cumplirá también la desigualdad (1.5):

$$|2x^2 - 8| < 10\delta = 10 \times 0.008 = 0.08.$$

Y esto es precisamente lo que buscábamos.

Antes de seguir, observemos que hay más de un valor para δ que satisface la condición del problema. En efecto, si en lugar de elegir $\delta = 0.008$, lo elegimos de tal manera que

$$10\delta < 0.008,$$

es decir, tal que

$$\delta < \frac{0.08}{10} = 0.008,$$

también se cumple la condición del problema: si $x \in \ ]0,3]$ tal que se verifica la desigualdad (1.4):

$$|x-2| < \delta,$$

se cumplirá también la desigualdad (1.5):

$$|2x^2 - 8| < 10\delta < 10 \times 0.008 = 0.08,$$

de donde

$$|2x^2 - 8| < 0.08.$$

Es decir, todo los números positivos menores que 0.008 aseguran el cumplimiento de la desigualdad (1.5).

El problema matemático ha sido resuelto. La solución puede resumirse así:

si se elige el número $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq 0.008,$$

entonces, si $x \in]0,3]$ y $|x-2| < \delta$, necesariamente se cumplirá la siguiente desigualdad:

$$|2x^2 - 8| < 0.08.$$

Observemos también que hemos hecho algo más que resolver este problema particular. Si en lugar de 0.08, tuviéramos cualquier número positivo ϵ, lo que hemos demostrado es lo siguiente:

dado $\boldsymbol{\epsilon > 0}$, el número

$$\boldsymbol{\delta = \frac{\epsilon}{10}}$$

es tal que, si $\boldsymbol{x \in]0,3]}$ y $\boldsymbol{|x-2| < \delta}$, se verifica que

$$\boldsymbol{|2x^2 - 8| < \epsilon.}$$

En otras palabras, el número 8 es el límite de $2x^2$ cuando x se aproxima a 2.

1.6.5 Solución del problema

A partir de la solución matemática, es decir, de la solución del problema matemático, vamos a proponer una solución al problema de los constructores de los paneles solares. Para ello, debemos *interpretar* los elementos matemáticos del problema, para lo cual debemos recordar el significado que estos elementos tienen.

La letra x representa el valor de la longitud del ancho de cualquier panel medida en metros. La desigualdad

$$|x-2| < \delta$$

expresa la cota superior admisible para el error absoluto en la longitud del ancho del panel. Finalmente, la desigualdad

$$|2x^2 - 8| < 0.08$$

indica la cota superior admisible para el error absoluto en el área del panel solar cuyo ancho mide x metros y cuyo largo es $2x$ metros.

De la solución matemática, podemos asegurar que, si se elige $\delta < 0.008$, es decir, si se asegura que el error cometido en el corte del ancho es menor que 8 milímetros, el área obtenida para ese panel no difiere de ocho metros cuadrados en más de 0.08 metros cuadrados. En resumen:

si se calibra la máquina cortadora de paneles de modo que se asegure que el error absoluto cometido en el corte del largo de cada panel no supere los 8 milímetros, entonces se asegurará que el área obtenida para cada panel no diferirá de ocho metros cuadrados en más del uno por ciento.

1.6.6 Epílogo

Luego de resolver el problema, el equipo encargado de la fabricación de los paneles procedió a la calibración de la máquina cortadora. En las especificaciones del equipo, se indicaba que podía ser calibrado para que el error absoluto en el corte de una cierta longitud no supere los 5 milímetros. Dado que 5 es menor que 8, los constructores de los paneles solares procedieron a realizar dicha calibración; estaban seguros que con ella el área de cada panel satisfaría las especificaciones técnicas para asegurar el correcto funcionamiento de la planta de energía solar.

La comunidad entera trabajó para completar la construcción de la planta. Luego de mucho esfuerzo, Intipamba ya tiene energía eléctrica para satisfacer las necesidades de su gente. El esfuerzo hubiera sido mayor, si la gente de Intipamba no hubiera resuelto el problema, con lo que su adelanto se habría detenido, y si no se hubieran sentado antes a pensar en el problema y buscar una solución que, con la ayuda de la poderosa matemática, encontraron.

1.6.7 Ejercicios

1. PRODAUTO es una empresa productora de automóviles. La gerencia ha establecido que el costo de producción mensual, expresado en miles de dólares, de n vehículos puede ser obtenido aproximadamente a través de la siguiente fórmula:

$$C = 2000 + 11n - 0.000\,12n^2.$$

   Actualmente, el nivel de producción mensual es de 5 000 vehículos. El equipo de la gerencia ha previsto que, dadas las condiciones variables del mercado, habrán variaciones del nivel de producción. Esto significa que los correspondientes costos de producción variarán.

   Luego de un análisis de los flujos de caja y teniendo en cuenta la predisposición de los inversionistas, se ha establecido que las variaciones del monto que se puede destinar a financiar los costos de producción deberán ser menores a 4 millones de dólares por mes. Como la planificación del trabajo, compra de insumos, planes de ventas, entre otras actividades de PRODAUTO dependen del nivel de producción, el equipo de la gerencia debe establecer un margen para el nivel de producción actual, sabiendo que este nivel no puede variar en más de 500 autos mensualmente. Determinar el margen para el nivel de producción actual.

2. Los constructores de una central hidroeléctrica de reserva han establecido que la relación existente entre la altura h metros del espejo de agua del reservorio respecto al nivel mínimo de operación y la energía acumulada E Mwh que se puede generar si se activan una o más turbinas, según las necesidades planteadas por la demanda, viene dada por la siguiente fórmula:

$$E = 75h + 10h^2 - 0.2h^3.$$

   A pesar de que el nivel máximo es de 35 m, han recomendado mantener el nivel en valores cercanos a 25 metros.

   En la época de estiaje es recomendable tener disponible la energía acumulada de este embalse, pero, al ser necesaria la operación de la central hidroeléctrica, se ha decidido permitir que las variaciones de la reserva de energía diarias sean menores a 500 MWh. Una manera simple de controlar el cumplimiento de esta restricción es evitar variaciones muy grandes del nivel de agua, de modo que se garantice que se respetarán las restricciones a las variaciones de la reserva de energía. Determinar la variación de la altura del agua permitida para asegurar que la variación de la energía disponible esté siempre por debajo de los 500 MWh.

1.7 Propiedades de los límites

La definición de límite nos permite verificar si un número es el límite o no de una función. Sin embargo, no nos permite encontrar el límite de una función. Las propiedades de los límites que vamos a estudiar en esta sección son, en realidad, un conjunto de reglas de cálculo de límites a partir del conocimiento de los límites de algunas funciones.

Por ejemplo, demostramos que el límite de una constante es la misma constante y que a es el límite de x cuando x se aproxima al número a. Probaremos más adelante que, cuando x se aproxima al número a, si L es el límite de $f(x)$ y M es el límite de $g(x)$, entonces LM es el límite de $f(x)g(x)$. De estos tres resultados, podremos concluir que—sin más trámite que su aplicación inmediata—, para una constante cualquiera k, el número ka^2 es el límite de kx^2 cuando x se aproxima al número a.

Vamos a ver que un conjunto relativamente pequeño de reglas de cálculo nos permitirán obtener los límites de una gran variedad de funciones.

Teorema 1.4 (Unicidad del límite)
Hay un único número L tal que
$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Los dos teoremas siguientes dan las herramientas necesarias para poder calcular el límite de cualquier función racional
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
donde P y Q son polinomios, cuando x se aproxima al número a y este número no es un cero de Q.

El primer teorema ya lo demostramos. La prueba del anterior y de la mayoría de los siguientes, se presentarán en el siguiente capítulo.

Teorema 1.5 (Límites básicos)
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$. Supongamos que k no depende de x. Entonces:

1. *Límite de una constante*: $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

   Es decir, la función constante es continua.

2. *Límite de la función identidad*: $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

   Es decir, la función identidad es continua.

El siguiente teorema muestra que el límite de una función "preserva" las operaciones de suma, producto e inverso multiplicativo de funciones, pues el límite de la suma, del producto y del inverso multiplicativo siempre es igual a la suma, producto e inverso multiplicativo de los límites, siempre y cuando estos límites existan y, en el caso del inverso multiplicativo, el límite sea diferente de cero.

Teorema 1.6 (Propiedades algebraicas)
Si existen $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $M = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. *Límite de la suma*: existe el límite de $f(x) + g(x)$ y:
$$L + M = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)).$$

2. *Límite del producto*: existe el límite de $f(x)g(x)$ y:
$$LM = \lim_{x \to a} (f(x)g(x)).$$

3. *Límite del inverso multiplicativo*: si $M \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{g(x)}$ y:
$$\frac{1}{M} = \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}.$$

Por ejemplo, si $a \neq 0$, por la tercera parte de este teorema, podemos afirmar que

$$\frac{1}{a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x},$$

pues, de la segunda parte del teorema del límite de la función identidad (teorema 1.5), podemos asegurar que

$$a = \lim_{x \to a} x.$$

Más adelante, calcularemos una gran variedad de límites con el uso de estos teoremas. Ahora hagamos la demostración del primer numeral.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon, \tag{1.51}$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{Dm}(f + g) = \mathrm{Dm}(f) \cap \mathrm{Dm}(g).$$

Para todo $x \in \mathrm{Dm}(f + g)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para hacer tan pequeño como queramos a

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)|$$

es suficiente que hagamos tan pequeño como queramos a

$$|f(x) - L| \quad \text{y} \quad |g(x) - M|.$$

para el x adecuado.

Ahora bien, estas dos diferencias sí pueden hacerse tan pequeñas como se quiera, pues L es el límite de $f(x)$ y M el de $g(x)$ cuando x se aproxima al número a. De manera más precisa, para obtener la desigualdad (1.51), es suficiente encontrar el x adecuado para que

$$|f(x) - L| \quad \text{y} \quad |g(x) - M|$$

sean, cada uno, menores que $\frac{\epsilon}{2}$. Procedamos.

Como L es el límite de $f(x)$ y $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.52}$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{Dm}(f).$$

Además, por ser M el límite de $g(x)$ y $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.53}$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{Dm}(g).$$

¿Qué x satisfará simultáneamente las desigualdades (1.52) y (1.53)? Aquel que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

$$0 < |x - a| < \delta_1, \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad x \in \mathrm{Dm}(f) \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{Dm}(g).$$

¿Cómo podemos elegir, entonces, el número δ? Así:

$$\delta = \mathrm{mín}\{\delta_1, \delta_2\},$$

¿Y cómo elegir x? Así:

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{Dm}(f) \cap \mathrm{Dm}(g).$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

En otras palabras, $L+M$ es el límite de $f(x)+g(x)$ cuando x se aproxima al número a.

□

De este teorema, es consecuencia inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.7 (Propiedades algebraicas)
Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Si existen

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{y} \quad M = \lim_{x\to a} g(x),$$

entonces:

1. *Límite del producto de un escalar por una función*: existe el límite de $\alpha f(x)$ y:
$$\alpha L = \lim_{x\to a} (\alpha f(x)).$$
2. *Límite de la resta*: existe el límite de $f(x) - g(x)$ y:
$$L - M = \lim_{x\to a} (f(x) - g(x)).$$
3. *Límite de una combinación lineal*: existe el límite de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ y:
$$\alpha L + \beta M = \lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)).$$
4. *Límite del cociente*: existe el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $M \neq 0$. Entonces:
$$\frac{L}{M} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De este corolario, y su correspondiente teorema, se deduce que las operaciones algebraicas entre funciones continuas producen funciones continuas. De manera precisa:

Teorema 1.8 (Propiedades algebraicas de la continuidad)
Si $f\colon \mathrm{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon \mathrm{Dm}(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en a. Entonces

> la *suma* $(f+g)$, la *resta* $(f-g)$, el *producto* (fg) y el *cociente* (f/g) (siempre que $g(a) \neq 0$)

son funciones continuas en a.

Ejemplo 1.10

Calcular
$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-5}.$$

Solución. Sea $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = \frac{x+3}{x-5}.$$
Entonces, el límite pedido es:
$$\lim_{x\to 2} F(x).$$

La función F puede ser expresada como el cociente de las funciones $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por
$$\varphi(x) = x+3 \quad \text{y} \quad \psi(x) = x-5.$$
Es decir,
$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$
Entonces, para calcular el límite de $F(x)$, podemos utilizar el teorema del "límite del cociente", es decir, el corolario 1.7 del teorema 1.6. Para poder hacerlo, tenemos que constatar que se verifiquen las condiciones de este teorema. Estas son tres:

1. Existe el límite $\lim\limits_{x\to 2} \varphi(x)$.
2. Existe el límite $\lim\limits_{x\to 2} \psi(x)$.
3. Si el límite anterior existe, éste debe ser diferente de cero.

Verifiquemos que se cumplen estas tres condiciones.

1. La función φ es la suma de la función identidad y una función constante. Entonces su límite existe y es igual a:
$$\lim_{x\to 2} \varphi(x) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 2+3 = 5.$$
2. La función ψ es la resta de la función identidad y una función constante. Entonces su límite existe y es igual a:
$$\lim_{x\to 2} \psi(x) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 5 = 2-5 = -3.$$
Como se puede observar, el límite de la función ψ es diferente de 0.

Podemos, entonces, aplicar el teorema del "límite del cociente". Éste afirma que el límite del cociente de dos funciones cuyo límites existen y el del denominador es diferente de 0, es igual al cociente de ambos límites. Por lo tanto, podemos proceder de la siguiente manera:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to 2} \varphi(x)}{\lim\limits_{x\to 2} \psi(x)}\\ &= \frac{5}{-3}.\end{aligned}$$

Es decir: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x-5} = -\dfrac{5}{3}$.

Ejemplo 1.11

Calcule $\lim\limits_{s\to 7} \dfrac{s^2-21}{s+2}$ si existe

Solución. Para aplicar el teorema del límite del cociente necesitamos saber si existen los límites de las funciones numerador y denominador, y si el límite del denominador es distinto de 0. Empecemos con el numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 7}(s^2-21) &= \lim_{s\to 2} s^2 + \lim_{s\to 2}(-21)\\ &= \lim_{s\to 2} s \times \lim_{s\to 2} s - 21\\ &= 77-21 = 28.\end{aligned}$$

Ahora el límite del denominador:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 7}(s+2) &= \lim_{s\to 7} s + \lim_{s\to 7} 2\\ &= 7+2 = 9 \neq 0.\end{aligned}$$

Podemos, entonces, aplicar el teorema del límite del cociente:

$$\lim_{s\to 7}\frac{s^2-21}{s+2} = \frac{\lim\limits_{s\to 7}(s^2-21)}{\lim\limits_{s\to 7}(s+2)} = \frac{28}{9}.$$

Ejemplo 1.12

Calcule $\lim\limits_{t\to 1}(2t+3)(3t^2-5)$ si existe.

Solución.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}(2t+3)(3t^2-5) &= \left(\lim_{t\to 1}(2t+3)\right)\left(\lim_{t\to 1}(3t^2-5)\right)\\ &= \left(\lim_{t\to 1}2t + \lim_{t\to 1}3\right)\left(\lim_{t\to 1}3t^2 + \lim_{t\to 1}(-5)\right)\\ &= \left(2\lim_{t\to 1}t + \lim_{t\to 1}3\right)\left(3\lim_{t\to 1}t^2 + \lim_{t\to 1}(-5)\right)\\ &= \left(2\lim_{t\to 1}t + \lim_{t\to 1}3\right)\left(3\left[\lim_{t\to 1}t\right]\left[\lim_{t\to 1}t\right] + \lim_{t\to 1}(-5)\right)\\ &= (2\cdot 1+3)(3[1\cdot 1]+(-5))\\ &= (2+3)(3-5) = -10.\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{t\to 1}(2t+3)(3t^2-5) = -10.$$

Ejemplo 1.13

Calcule $\lim\limits_{y\to 0} y\left(\dfrac{4}{y}-1\right)$ si existe.

Solución. Si intentamos calcular el límite como producto de límites no podríamos hacerlo, ya que no tenemos aún a disposición ninguna herramienta que nos diga como obtener el límite del segundo factor. En situaciones como ésta, es necesario efectuar una manipulación algebraica previa al cálculo del límite:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} y\left(\frac{4}{y}-1\right) &= \lim_{y\to 0}\left(\frac{4}{y}y - y\right)\\ &= \lim_{y\to 0}(4-y) = 4-0 = 4.\end{aligned}$$

De donde:

$$\lim_{y\to 0} y\left(\frac{4}{y}-1\right) = 4.$$

1.7.1 Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios, calcule el límite dado si él existe. De ser necesario, realice primero una manipulación algebraica.
   (a) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2 - 3x + 2)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2 + x - 1}{-3x + 1}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x + 3}{2x - 7}$.
   (d) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3 - 1}{t - 1}$.
   (e) $\lim\limits_{z\to -3}\dfrac{3z + 9}{36 - 4z^2}$.
   (f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x - \dfrac{1}{x-1}\right)$.
   (g) $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$.
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^3(-x^4 + 3x^3)^{-1}$.
   (i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x^2 - 5x - 1}{x}\right)$.
   (j) $\lim\limits_{r\to 1}(ar^2 - br)^3$ con a y b constantes. No desarrolle el cubo.
   (k) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left((x+h)^3 - x^3\right)$.
2. Calcule los límites dados usando las propiedades de los límites. Indique qué propiedades usó.
   (a) $\lim\limits_{x\to 3} 7.9$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 5}(4x - 8)$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 2}(x^5 - 7x + 1)$.
   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x - 7}{7x^2 + 8}$.

1.7.2 Generalizaciones

Los teoremas y el corolario sobre las propiedades algebraicas de los límites y de la continuidad están formulados para las propiedades de dos funciones: la suma de dos funciones, el producto, etcétera. En el siguiente teorema se generalizan los anteriores para cualquier número de funciones.

Corolario 1.9 (Generalización de las propiedades algebraicas)
Sean $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tales que

$$L_i = \lim_{x\to a} f_i(x) \quad \text{y} \quad M_i = \lim_{x\to a} g_i(x)$$

para todo i tal que $1 \le i \le n$. Entonces:

1. $\displaystyle \lim_{x\to a}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to a} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i.$
2. $\displaystyle \lim_{x\to a}\prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n}\lim_{x\to a} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} L_i.$
3. Si f_i es continua en a para todo i tal que $1 \le i \le n$, entonces $\sum_{i=1}^{n} f_i$ y $\prod_{i=1}^{n} f_i$ son continuas en a.

La demostración es sencilla si se aplica el método de inducción matemática sobre n.

Ahora es fácil probar que los polinomios y las funciones racionales son continuas:

Teorema 1.10 (Continuidad de un polinomio y una función racional)
Todo polinomio es una función continua en $\mathbb{R}$ y toda función racional es continua en $\mathbb{R}$, excepto en aquellos números en los que el denominador es igual a cero. De manera más precisa: si P y Q son dos polinomios, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$, siempre que $Q(a) \neq 0$.

Del límite del producto generalizado, se obtiene que si $f(x)$ tiene L como límite cuando x se aproxima al número a, entonces L^n es el límite de $f^n(x)$. Esto también es verdadero para el caso de la raíz n-ésima, aunque la demostración de esta propiedad, que no se deriva del teorema anterior, no es elemental.

Teorema 1.11 (Límite de la raíz n-ésima)
Si $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ impar, se verifica que

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Si n es par, es necesario que $L > 0$.

Para la demostración de este teorema es necesario antes demostrar que la composición de funciones también preserva el límite y la continuidad, pues, probaremos que la función h_n, definida por

$$h_n(x) = \sqrt[n]{x}$$

es continua en $\mathbb{R}$ si n es impar, mientras que es continua en $[0, +\infty[$ si n es par. Eso lo haremos en el siguiente capítulo. Ahora veamos algunos ejemplos de límites que involucran raíces.

Ejemplo 1.14

Calcule $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x^2 - 7}$ si existe.

Solución. El límite pedido existirá si existe el $\lim\limits_{x\to 4}(2x^2 - 7)$ y si éste es positivo. Entonces, calculemos primero dicho límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4}(2x^2 - 7) &= 2\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4}(-7) \\ &= 2(4)(4) - 7 = 25 > 0. \end{aligned}$$

Entonces, el límite buscado existe y se lo calcula así:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4} \sqrt{2x^2 - 7} &= \sqrt{\lim_{x\to 4}(2x^2 - 7)} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x^2 - 7} = 5$.

Ejemplo 1.15

Calcule $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{x - 7}$ si existe.

Solución. A diferencia del ejercicio anterior, y por ser raíz impar, basta que exista el $\lim\limits_{x\to 3}(x-7)$. Como

$$\lim_{x\to 3}(x-7) = -4,$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x-7} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x-7)}\\ &= \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}.\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{x-7} = -\sqrt[3]{4}$.

1.7.3 Ejercicios

Si los límites existen, calcularlos:

1. $\lim\limits_{x\to 10}\sqrt{\dfrac{10x}{2x+5}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-10}}{\sqrt{x^3-3}}$.
3. $\lim\limits_{t\to 2}(t+2)^{\frac{3}{2}}(2t+4)^{\frac{1}{3}}$.
4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$, $x>0$.
5. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+x+1}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{3x-5}{2x^2-x+1}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x^3-3x+2}}{\sqrt[3]{1-2x+x^4}}$.

1.8 El límite de una composición: cambio de variable

Más adelante, en este capítulo, probaremos que la función sen es continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, se cumplirá que:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Por otra parte, sabemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0.$$

¿Cómo podemos utilizar estos dos resultados para calcular

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{sen}(x^2-1)$$

si tener que recurrir a la definición de límite?

Como puede verse, este último es el límite de la composición de las dos funciones presentes en los dos primeros límites. El siguiente teorema, nos dice cómo se puede calcular el límite de una composición a partir de los límites de las funciones que conforman la composición.

Teorema 1.12 (Límite de una composición)
Supongamos que existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ y que f sea continua en b. Entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ y

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

En el siguiente capítulo demostraremos este teorema.

Ahora, las hipótesis de este teorema no siempre se verifican. Por ejemplo, si queremos calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x},$$

deberemos recurrir al límite

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

Como se puede ver, la función f, definida por

$$f(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

para todo $y \neq 0$, no es continua en 0, pues no está definida en este número. Sin embargo, aún se puede calcular el límite de una composición si se modifican la hipótesis del teorema anterior.

De manera más precisa, probaremos que la hipótesis de que f sea continua en b puede *debilitarse*; es decir, puede ser sustituida por una condición que no exige la continuidad de f en b, sino solamente la propiedad de que exista un intervalo alrededor del número a en el cual, a excepción tal vez de a, la función g es diferente de b. En los ejemplos que veremos a continuación, así como en los ejercicios propuestos, es necesario verificar que la función g satisface esta condición en los casos de que la función f no sea continua en b.

En la práctica, este teorema se utiliza bajo la siguiente formulación:

Teorema 1.13 (Cambio de variable para límites)
Para calcular el límite de una composición como el siguiente

$$\lim_{x\to a} f(g(x)),$$

se puede usar el *cambio de variable* $y = g(x)$ cuando existan $b = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $L = \lim\limits_{y\to b} f(y)$, y siempre que se satisfaga una de las tres condiciones siguientes:

1. f es continua en b;

2. f no está definida en b; y,

3. $L \neq f(b)$ y existe $r > 0$ tal que para todo $x \in\,]a - r, a + r[-a$, $g(x) \neq b$.

Se tiene, entonces, que:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

El utilizar la función g y la composición con f para calcular el límite de $f(g(x))$ se denomina *método del cambio de variable*. Veamos cómo se utiliza este teorema en los dos ejemplos con los que se abre esta subsección.

Ejemplo 1.16

Calcular

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{sen}(x^2 - 1).$$

Solución. Sean f y g definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2 - 1$. Además, hagamos $a = 1$. Entonces:

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(x^2 - 1) = \lim_{x \to 1} f(g(x)).$$

Veamos si las funciones f y g satisfacen las condiciones del teorema 1.13. En primer lugar, determinemos si el límite de $g(x)$ existe cuando x tiende a 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} g(x) &= \lim_{x \to 1} (x^2 - 1) \\ &= (\lim_{x \to 1} x)^2 - \lim_{x \to 1} 1 \\ &= 1^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Entonces:

$$0 = \lim_{x \to 1} g(x).$$

Por lo tanto, $b = 0$.

Ahora debemos determinar si f es continua en 0, o si existen $\lim\limits_{y \to 0} f(y)$ y un intervalo centrado en 1 en el cual g sea diferente de 0 (salvo, tal vez, en 1).

Como la función f es la función sen, entonces f es continua en 0 y, además:

$$\lim_{y \to 0} f(y) = \lim_{y \to 0} \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Podemos, entonces, aplicar el teorema 1.13. Al hacerlo, obtendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(g(x)) &= \lim_{y \to 0} f(y) \\ &= \lim_{y \to 0} \operatorname{sen} y = 0. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(x^2 - 1) = 0.$$

Veamos qué sucede en el segundo ejemplo.

Ejemplo 1.17

Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}.$$

Solución. Si hacemos el cambio de variable $y = g(x) = 2x$, tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \frac{\operatorname{sen} y}{\frac{y}{2}} = 2\frac{\operatorname{sen} y}{y}.$$

Si definimos f por:

$$f(y) = 2\frac{\operatorname{sen} y}{y},$$

lo que debemos calcular es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} f(g(x)).$$

Apliquemos el teorema de cambio de variable. En este caso $a = 0$. Busquemos b. Para ello, debemos calcular $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} 2x = 2 \lim_{x \to 0} x = 2 \times 0 = 0.$$

Por lo tanto, $b = 0$.

Para poder aplicar el teorema, nos falta determinar si f o bien es continua en 0 o si existe su límite en $b = 0$ y, en un intervalo centrado en $a = 0$, la función g es diferente de $b = 0$ (salvo, tal vez, en 0).

En primer lugar, sí existe el límite de f en 0, pues

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} 2\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2\times 1 = 2.$$

Ahora bien, dado que f no está definida en 0, no puede ser continua en 0. Es decir, la primera condición no se verifica, pero si se cumple la segunda.

También $g(x) = 2x$ es diferente de 0 en todos los puntos de un intervalo centrado en 0, salvo en 0, por lo que, en este caso, también se cumple la tercera condición.

Entonces, el teorema del cambio de variable es aplicable, con lo que obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} &= \lim_{x\to 0} f(g(x))\\ &= \lim_{y\to 0} f(y) = 2.\end{aligned}$$

Es decir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 2.$$

En este segundo ejemplo, la función f del teorema 1.13 satisface las condiciones segunda y tercera, pero no la primera. Sin embargo, el límite de este ejemplo puede ser resuelto aplicando la primera condición si se define f de tal manera que sí sea continua en 0.

En efecto, si definimos

$$f(y) = \begin{cases} 2\frac{\operatorname{sen} y}{y} & \text{si } y \neq 0,\\ 2 & \text{si } y = 0,\end{cases}$$

entonces la función f sí es continua en 0, pues está definida en dicho punto, y su valor allí es 2, y el límite de f en 0 es 2. Hemos "extendido o prolongado de una manera continua la función f al punto 0".

Obviamente, al aplicar el teorema de cambio de variable a esta f, obtenemos el mismo resultado que con la definición anterior.

En la práctica, muchos cambios de variable se realizan sin explicitar la función f. Por ejemplo, el caso del último ejemplo, se suele proceder así:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} &= \lim_{x\to 0} 2\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\\ &= 2\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 2\times 1 = 2,\end{aligned}$$

donde $y = 2x$ y $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

Si bien se puede proceder como en este ejemplo, el lector debe verificar que se satisfagan las hipótesis del teorema del cambio de variable, pues, en el caso contrario, sus conclusiones podrían no son correctas, como nos lo muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.18

Sean

$$f(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } t \neq 1\\ 3 & \text{si } t = 1,\end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 2\\ 0 & \text{si } x = 2.\end{cases}$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) \neq \lim_{t\to 1} f(t).$$

Es decir, el teorema 1.13 del cambio de variable no es aplicable para calcular el límite de la compuesta de f con g en 2.

Solución. En primer lugar, tenemos que $a = 2$ y, como se verifica que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

entonces $b = 1$. Además, si hacemos el cambio $t = g(x)$, entonces

$$\lim_{t\to 1} f(t) = 4.$$

En segundo lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \begin{cases} 4 & \text{si } g(x) \neq 1 \\ 3 & \text{si } g(x) = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{si } x \neq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = 3.$$

Y, como $3 \neq 4$, entonces:

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) \neq \lim_{t\to 1} f(t).$$

Esto significa que el teorema de cambio de variable no es aplicable. ¿Por qué?

Porque aunque f sí está definida en $b = 1$, no es continua en este punto $b = 1$ y $g(x)$ es igual a $b = 1$ en cualquier intervalo centrado en $a = 2$, salvo en 2.

Aplicar el teorema del cambio de variable (o cualquier teorema) sin verificar que las hipótesis requeridas se satisfacen puede conducirnos a un error. Y, aunque no lo hiciera, hacerlo es un error, porque no sabemos si el resultado obtenido es correcto o no.

Veamos algunos ejemplos adicionales en los que sí se puede aplicar el teorema del cambio de variable.

Ejemplo 1.19

Sean

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Utilizar el teorema del cambio de variable, si es aplicable, para mostrar que

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = f(\lim_{x\to 2} g(x))$$

Solución.

En primer lugar, calculemos el límite de la composición sin utilizar el teorema del cambio de variable. Luego lo aplicamos y miramos que el resultado obtenido es el mismo.

Puesto que

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x \neq 2 \\ f(1) & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2, \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = \lim_{x\to 2} 3 = 3.$$

Por otra parte:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 0.$$

Por lo tanto:

$$f\left(\lim_{x\to 2} g(x)\right) = f(0) = 3.$$

Esto prueba que:

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to 2} g(x)\right).$$

Podemos llegar a la misma conclusión al aplicar el teorema de cambio de variable, pues existe el limite de $f(y)$ cuando y se aproxima a 0 y es igual a 3; existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a 2 y es igual a 0. Como f es continua en 0, el teorema es aplicable con $a = 2$ y $b = 0$.

Ejemplo 1.20

Probar que, si $f(x) = \dfrac{2\tan(x^2 - 1)}{x^4 - x^2}$, entonces

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Solución. Sean

$$k(x) = \frac{2}{x^2\cos(x^2-1)} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}.$$

Como $f(x) = k(x)h(x)$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \left(\lim_{x\to 1} k(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} h(x)\right),$$

si los límites del lado derecho existen.

Probemos que sí existen. Para el primero, constatamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\cos(x^2-1) &= \cos\left(\lim_{x\to 1}(x^2-1)\right)\\ &= \cos(0)\\ &= 1,\end{aligned}$$

pues podemos aplicar el teorema del límite de una composición, dado que la función cos es continua en $\mathbb{R}$, como lo probaremos más adelante, y:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 1^2 - 1 = 0.$$

Por consiguiente, usando el teorema de las propiedades algebraicas de los límites se tiene:

$$\lim_{x\to 1} k(x) = \frac{2}{(\lim_{x\to 1} x^2)\,(\lim_{x\to 1}\cos(x^2-1))} = \frac{2}{(1)(1)} = 2.$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$, notemos que $h(x) = j(x^2-1)$. En este caso, utilicemos el cambio de variable $t = g(x) = x^2 - 1$, para la cual conocemos que

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0.$$

Como la función j no es continua en 0, para utilizar el teorema de cambio de variable, debemos probar que g es distinta de 0 en un intervalo centrado en 1, excepto quizás en 1. El intervalo puede ser $[0,2]$, pues, allí, tenemos que

$$g(x) = x^2 - 1 \neq 0$$

si $x \neq 1$ (pues g se hace 0 únicamente en 1 y en -1). Por el teorema de cambio de variable tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} j(x^2-1) = \lim_{t\to 0} j(t) = 1.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} k(x)\cdot\lim_{x\to 1} h(x) = 2\cdot 1 = 2.$$

1.8.1 Ejercicios

1. Use el teorema del cambio de variable para calcular los límites dados, justificando su uso en cada caso.

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x^4-16}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2-3x+4}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2-2x+2}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{-x+8}{x+2}}$.

2. Pruebe que si f no es continua, no se puede usar el teorema del cambio de variable para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} f\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right),$$

   aunque se conozca que existe $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = L$.

3. Supongamos que existen

$$\lim_{y\to b} f(y) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

   Pruebe que se puede aplicar el teorema de cambio de variable para calcular $\lim_{x\to a} f(g(x))$, si poniendo $h(x) = g(x) - b$, la función h cambia de signo en a.

4. Si existe, halle el valor del límite dado. Haga uso de las siguientes igualdades, cuya validez será demostrada más adelante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

   De ser el caso, realice un cambio de variable adecuado.

   (a) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3s}{5s}$.

   (b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 8t}{7t}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{3+\cos x}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-3x+2}$.

   (e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+x-10}{\tan(2-x)}$.

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{sen} x}$.

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$.

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{\operatorname{sen} x + \tan x}$.

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$.

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

1.9 El teorema del "sandwich"

En las últimas unidades, hemos venido utilizando el siguiente límite:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Con las propiedades sobre los límites que hemos desarrollado hasta ahora, no es posible que probemos que esta igualdad es verdadera.

En efecto, no podemos aplicar el límite de un cociente, porque el límite del denominador es igual a 0. Por otro lado, no se vislumbra un cambio de variable que nos conduzca a algún límite ya calculado.

En esta sección, vamos a enunciar un teorema, conocido como el teorema del "sandwich", que nos proveerá de una herramienta muy útil para el cálculo de límites. En el siguiente capítulo, demostraremos la validez de este resultado.

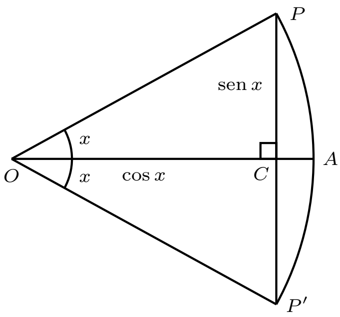
Antes de enunciar el teorema, veamos cuál es la idea subyacente a él. Para ello, analicemos el caso del límite

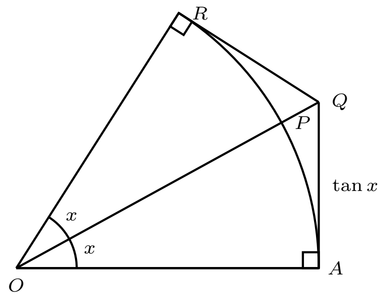
$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

La interpretación geométrica de las funciones sen, cos y tan nos permiten establecer las siguientes desigualdades: para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$, se verifica

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Para demostrarlas, consideremos un círculo de centro O y radio igual a 1, como los que se muestran en la siguiente figura:





Entonces, si x es la medida en radianes de un ángulo agudo; es decir, si $x \in \,]0, \pi/2[$, entonces $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\tan x$ son las medidas de los segmentos $\overline{CP}$, $\overline{CO}$ y $\overline{AQ}$, respectivamente.

Adicionalmente, tenemos que:

1. $OA = OP = OP' = OR = 1$.

2. La longitud de la cuerda $\overline{PP'}$ es menor que la longitud del arco $\widehat{PAP'}$. Puesto que $CP = CP' = \operatorname{sen} x$, la desigualdad entre la cuerda y el arco se traduce en la siguiente desigualdad:
$$2 \operatorname{sen} x < \ell(\widehat{PAP'}), \tag{1.54}$$
donde $\ell(\widehat{PAP'})$ indica la longitud del arco $\widehat{PAP'}$.

3. La longitud de la línea quebrada $\widehat{AQR}$ es mayor que la longitud del arco $\widehat{APR}$. Como $AQ = RQ = \tan x$, la desigualdad se traduce en:
$$\ell(\widehat{APR}) < 2 \tan x. \tag{1.55}$$

4. Puesto que la longitud del arco $\widehat{AP}$ es la mitad de la longitud del arco $\widehat{PAP'}$ y la longitud del arco $\widehat{AP}$ es la mitad de la longitud del arco $\widehat{APR}$, las desigualdades (1.55) y (1.54) implican las siguientes desigualdades:
$$\ell(\widehat{AP}) < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x < \ell(\widehat{AP}).$$
Por lo tanto, se deben verificar las siguientes desigualdades:
$$\ell(\widehat{AP}) \cos x < \operatorname{sen} x < \ell(\widehat{AP}).$$
Y, si suponemos que $x \neq 0$, entonces $\ell(\widehat{AP}) \neq 0$. Entonces, estas dos últimas desigualdades implican las siguientes:
$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{\ell(\widehat{AP})} < 1. \tag{1.56}$$

5. La longitud del arco $\widehat{AP}$ es igual a x, pues, por la definición de radián, se verifica que:
$$\ell(\widehat{AP}) = OAx = 1 \times x = x.$$
Por lo tanto, las desigualdades (1.56) se escriben de la siguiente manera:
$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{1.57}$$

En resumen, como x es un ángulo agudo, entonces $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Y es para estos valores de x que las igualdades (1.57) se verifican.

El mismo procedimiento realizado para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ puede ser realizado para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Lo que prueba que las desigualdades (1.57) son verdaderas para todo x distinto de 0 tal que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ahora bien, cuando x tiende a 0, probaremos más adelante que $\cos x$ tiende a $\cos 0$; es decir, tiende a 1. Lo mismo sucede con la constante 1. Es decir, las dos cotas de la fracción

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

la mayor y la menor, tienden a 1 cuando x tiende a 0. ¿Podría suceder, entonces, que la fracción no tendiera a 0? El teorema del "sandwich" nos asegura que eso no puede suceder. Es decir, este teorema nos asegura que es verdad que

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Este es el enunciado del teorema:

Teorema 1.14 (Teorema del sandwich o de los dos gendarmes, o principio de intercalación) Sean $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathrm{Dm}(f) \to \mathbb{R}$, $g : \mathrm{Dm}(g) \to \mathbb{R}$, $h : \mathrm{Dm}(h) \to \mathbb{R}$ tres funciones tales que sus dominios contienen un intervalo abierto I centrado en a, excepto quizás el punto a. Supongamos que: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$ y que $L = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$. Entonces $L = \lim_{x \to a} g(x)$.

Para el caso del límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

tenemos que $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $h(x) = 1$ para todo $x \in D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\}$ y que

$$L = 1 = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x).$$

El nombre de "sandwich" –o en español "emparedado"– se debe al hecho de que la función g (el queso) se "coloca" entre f y h (los panes). Los franceses lo llaman teorema "de los dos gendarmes" (f y h) que "llevan preso a g entre ellos".

Ejemplo 1.21

Calcular

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}.$$

Solución.

1. Si definimos f, g y h tales que

$$g(x) = 0, \quad f(x) = x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} \quad \text{y} \quad h(x) = x^2,$$

tenemos que, para todo $x \neq 0$:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Como

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0,$$

por el teorema del sandwich tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

2. Definamos:
$$g(x) = 0, \quad f(x) = \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \quad \text{y} \quad h(x) = |x|.$$
Tenemos que, para todo $x \neq 0$:
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$
Por consiguiente:
$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \lim_{x \to 0} \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = 0.$$
Puesto que (ver el teorema 1.2)
$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} |\varphi(x)| = 0,$$
tendremos entonces que
$$\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0.$$

Como otro ejemplo, demostremos que las funciones sen y cos son continuas. El teorema del sandwich será de ayuda para ello.

Ejemplo 1.22

Las funciones sen y cos son continuas en $\mathbb{R}$. Y, por lo tanto, las otras cuatro funciones trigonométricas son también continuas en sus respectivos dominios.

Solución.

1. En primer lugar, probemos que sen es continua en 0. Para ello, probemos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.
   Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|$. La certeza de esta desigualdad puede ser obtenida del procedimiento seguido para probar que el cociente $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está acotado entre $\cos x$ y 1, desarrollado en páginas anteriores. Por el teorema del sandwich y el teorema (1.2) tenemos que:
$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sen} x| = \lim_{x \to 0} 0 = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$
   Por lo tanto, otra vez por el teorema 1.2, podemos afirmar que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.
2. Ahora probemos que cos es continua en 0. Para ello, debemos probar que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Esto equivale a probar que $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$. Como $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y como
$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0$$
   (usando el cambio de variable $t = \frac{x}{2}$, lo que se puede ya que $x \neq 0$ implica $t \neq 0$), tenemos que
$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 2 \left(\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^2 = 2(0) = 0$$
   (por las propiedades algebraicas de los límites).
3. Sea $a \neq 0$. Vamos a probar que $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. Para ello, probemos que $\lim\limits_{x \to a} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a) = 0$. Hagamos el cambio de variable $x = a + t$. Esto es posible, ya que $\lim\limits_{x \to a} t = 0$ y que $x \neq a$ implica $t \neq 0$. Entonces, como $t = x - a$, tenemos que
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a) &= \lim_{t \to 0} [\operatorname{sen}(t + a) - \operatorname{sen} a] \\
&= \lim_{t \to 0} [\operatorname{sen} t \cos a + \cos t \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} a] \\
&= \lim_{t \to 0} [\operatorname{sen} t \cos a + \operatorname{sen} a (\cos t - 1)] \\
&= \cos a \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} a \lim_{t \to 0} (\cos t - 1)] \\
&= (\cos a)(0) + (\operatorname{sen} a)(0) = 0.
\end{aligned}$$

4. Sea $a \neq 0$. Probemos que $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$. Para ello, probemos que $\lim_{x \to a} (\cos x - \cos a) = 0$. Con el mismo cambio de variable que en el numeral anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (\cos x - \cos a) &= \lim_{t \to 0} [\cos(t + a) - \cos a] \\
&= \lim_{t \to 0} [\cos t \cos a - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} a - \cos a] \\
&= \lim_{t \to 0} [(\cos t - 1) \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} t] \\
&= \cos a \lim_{t \to 0} (\cos t - 1) - \operatorname{sen} a \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t \\
&= (\cos a)(0) - (\operatorname{sen} a)(0) = 0.
\end{aligned}$$

1.9.1 Ejercicios

1. Use el teorema del sandwich para calcular:
   (a) $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \cos \dfrac{\pi}{x-1}$.
   (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$, si se sabe que $1 - |x-1| \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 2$.
   (c) $\lim_{x \to -1} (x+1)^2 g(x)$, si se conoce que existe $M > 0$ tal que para todo x, $|g(x)| < M$.
2. Diga si se puede aplicar el teorema del sandwich para calcular $\lim_{x \to 1} g(x)$ si se conoce que para todo x
$$2 - |x-1| \leq g(x) \leq x^2 - 2x + 4.$$
3. Diga si se puede aplicar el teorema del sandwich para calcular $\lim_{x \to 1} g(x)$ si se conoce que para todo x, se verifica la desigualdad siguiente:
$$|g(x) + 3| \leq (x-1)^4.$$
4. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

1.10 Límites unilaterales

Como una aplicación de la propiedad arquimediana de los números reales, sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un único número entero n tal que

$$n \leq x < n + 1. \tag{1.58}$$

A este número n se le denomina el *suelo* de x. Por ejemplo, el suelo de 32.45 es 32, pues

$$32 \leq 32.45 < 33.$$

En este caso, $n = 32$.

En el caso de que x sea mayor que 0, el suelo de x será la parte entera de su representación decimal. Por ello, al número n también se le conoce como la *parte entera de* x y se le suele representar[3] con $\lfloor x \rfloor$.

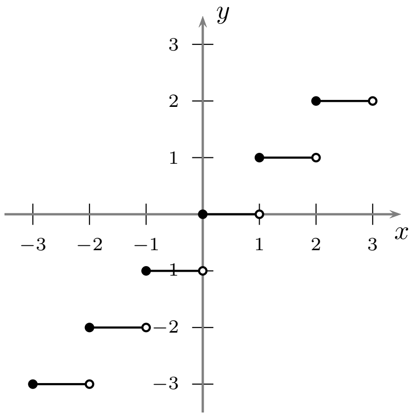
Dado un $x \in \mathbb{R}$, la unicidad del número n que satisface las desigualdades (1.58), nos permite definir la función *suelo* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lfloor\ \rfloor \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\
x &\longmapsto \lfloor x \rfloor = n,
\end{aligned}$$

donde n satisface las desigualdades (1.58).

El lector puede constatar por sí mismo que dibujar el gráfico de la función suelo es muy sencillo. Deberá obtener algo similar al siguiente dibujo:

[3] La notación $[x]$ también suele ser utilizada para representar la parte entera del número x.



A pesar de la sencillez de la función suelo, es muy útil a la hora de cuantificar ciertas magnitudes en situaciones en las que los números reales no pueden captar la esencia del problema. Por ejemplo, un problema que aparece frecuentemente en el campo de las ciencias de la computación es el de contar el número de veces que se ejecutan las instrucciones de un algoritmo.

Para concretar, imaginemos el caso de tener que buscar un número de cédula en una lista de un millón de números de cédulas (como puede suceder en un padrón electoral). Supongamos que, cada vez que se registra un número de cédula en la lista, la lista es ordenada en forma ascendente. A pesar de este orden, a la hora de requerir la información relacionada a uno de estos números de cédula, es necesario buscar dicho número en la lista. El algoritmo de búsqueda denominada *búsqueda binaria* realiza, cuando el número buscado no está en la lista o es localizado en la última comparación,

$$W(n) = \lfloor \lg(n+1) \rfloor + 1$$

comparaciones del valor que busca con los valores que están en la lista, donde n es el número de elementos en la lista y lg es la función logaritmo en base 2.

En el caso del ejemplo, $n = 10^6$. Entonces

$$W(10^6) = \lfloor \lg(10^6+1) \rfloor + 1 = 20.$$

Es decir, el algoritmo de búsqueda binaria solo deberá realizar 20 comparaciones para indicar que el número de cédula buscado no está en la lista.

Como puede observarse, la función lg retorna un número real. La función suelo "transforma" este número real en un entero, positivo en este ejemplo, y que refleja correctamente la naturaleza del problema.

En los ejercicios se presentará una guía para calcular $W(10^6)$ sin recurrir a una calculadora electrónica para calcular el valor de $\lg(10^6+1)$.

Del gráfico de la función suelo, se puede observar que esta función es continua en todo número real que no es un entero. Utilizando la definición de límite, se puede probar que la función suelo no es continua en cada entero al mostrar que no existe el límite allí.

¿Por qué no existe ese límite, por ejemplo en el número 1? Porque $\lfloor x \rfloor$ tiene un comportamiento diferente antes del número 1, pero cerca de él, y otro luego del número 1, pero también cerca de él.

En casos como el de este ejemplo, resulta conveniente introducir la noción de límites unilaterales en el sentido de que x se aproxima al número 1 bajo la condición de que $x > 1$ o bajo la condición de que $x < 1$. Si una función tiene límite en el punto 1, la aproximación bajo cualquiera de las dos condiciones deberá producir el mismo límite; es decir, deberá suceder que la función tenga los dos límites unilaterales y, además, sean iguales.

Este principio es adecuado para probar también que el límite de una función no existe en un punto: se prueba que o no existe uno de los unilaterales, o se prueba que son diferentes. Por ejemplo, es fácil probar que

$$1 = \lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor \quad \text{cuando } x > 1$$

y que

$$0 = \lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor \quad \text{cuando } x < 1.$$

Las definiciones de límites unilaterales son similares a la definición general de límite, lo mismo que las propiedades de estos límites.

Definición 1.4 (Límites unilaterales)
L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a *por la derecha*, y se escribe:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $0 < x - a < \delta$.
Análogamente: L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a *por la izquierda*, y se escribe:

$$L = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $0 < a - x < \delta$.

Con estas definiciones, podemos afirmar que:

$$1 = \lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor \quad \text{y} \quad 0 = \lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor.$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor,$$

Esto es suficiente para afirmar que no existe el límite de $\lfloor x \rfloor$ cuando x se aproxima a 1. De hecho, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.15
L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a si y solo si existen los dos límites unilaterales y son iguales a L.

Las propiedades de los límites que enunciamos en teoremas anteriores se verifican también para los límites unilaterales con las evidentes modificaciones en cada caso.

Con la noción de límites unilaterales se puede definir la *continuidad por la derecha* y por *la izquierda* mediante la siguiente modificación de la definición de continuidad: en lugar de que $f(a)$ sea el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, hay que cambiar, en el caso de la continuidad por la derecha, que x se aproxima a a por la derecha; lo mismo para el caso de la continuidad por la izquierda. Es inmediato de esta definición que una función será continua en un punto si y solo si es continua por la derecha y por la izquierda del punto. Este hecho lo expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.16
Una función es continua en a si y solo si es continua en a por la derecha y es continua en a por la izquierda.

Ejemplo 1.23

Sea $f\colon [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ definida por $f(x)=\sqrt{x}$. Entonces f es continua en 0 por la derecha.

Solución. Puesto que

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a},$$

para $a>0$, f es continua en $\mathbb{R}^+$. Como $f(x)$ no está definida para $x<0$, no existe

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}.$$

Sin embargo, tenemos que f *es continua en* 0 *por la derecha*, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=\sqrt{0}.$$

En efecto: sea $\epsilon>0$. Debemos hallar $\delta>0$ tal que

$$|\sqrt{x}-0|<\epsilon,$$

siempre que $0<x<\delta$.

Sea $x>0$. Como $|\sqrt{x}-\sqrt{0}|=\sqrt{x}$, tenemos que

$$|\sqrt{x}-0|<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad x<\epsilon^2.$$

Tomemos, entonces, $\delta=\epsilon^2$. En ese caso, tenemos:

$$0<x<\delta \quad\Rightarrow\quad x<\epsilon^2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}<\epsilon \quad\Rightarrow\quad |\sqrt{x}-\sqrt{0}|<\epsilon.$$

Hemos probado entonces que $0=\sqrt{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$; es decir, hemos probado que f es continua en 0 por la derecha.

Es claro que la función f no puede ser continua en 0 por la izquierda, pues f no está definida para ningún $x<0$.

Ejemplo 1.24

Sea

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{si } x>1\\ 2 & \text{si } x=1\\ -x^2+3x & \text{si } x<1\end{cases}$$

¿Es f continua en 1, por la derecha de 1, por la izquierda?

Solución. Para saber si es continua en 1, veamos si es continua por la izquierda y por la derecha. Para ello, calculemos $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$. En primer lugar:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x^2+3x),$$

pues $f(x) = -x^2 + 3x$ si $x < 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1}(-x^2 + 3x)\\ &= -(1)^2 + 3 \times 1 = 2.\end{aligned}$$

En segundo lugar, como $f(x) = 2x^2 - 1$ si $x > 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1}(2x^2 - 1)\\ &= 2(1)^2 - 1 = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

En conclusión, f es continua en 1 por la izquierda, pero no lo es por la derecha, ni tampoco es continua en 1.

Ejemplo 1.25

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Entonces f es discontinua en x si y solo si $x \in \mathbb{Z}$.

Solución.

Sean x y n tales que $f(x) = n$. Entonces:

$$n \leq x < n + 1.$$

Por lo tanto, f es constante en $]n, n+1[$, por lo que es continua en cualquier intervalo entre dos enteros consecutivos.

Veamos ahora que no es continua en ningún entero. Para ello calculemos los límites laterales en n. Para empezar:

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n} n = n = f(n).$$

Por otra parte, si $x < n$, $f(x) = n - 1$. Entonces:

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n}(n-1) = n - 1 \neq f(n).$$

Por lo tanto, para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = n - 1 \neq n = f(n) = \lim_{x\to n^+} f(x).$$

Entonces: f es discontinua en n para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.26

Sea $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$. El número $g(x)$ es la "parte fraccionaria de x". Entonces g es discontinua en x si y solo si $x \in \mathbb{Z}$.

Solución.

Sean f definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y h definida por $h(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $g = h - f$, pues

$$g(x) = h(x) - f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Si g fuera continua en $n \in \mathbb{Z}$, como h es continua en $\mathbb{R}$, es continua en n. Por lo tanto: $g + h$ sería continua en n. Pero $f = h - g$ sería continua en n, ya que h y g lo son. Pero sabemos por el ejercicio anterior que f no es continua en ningún entero. Por lo tanto, g no puede ser continua en n.

¿Por qué el número $g(x)$ es llamado la "parte fraccionaria de x"?

1.10.1 Ejercicios

1. Dibuje la gráfica de f y determine, si existen, los límites para el valor de a dado:

$$\lim_{x\to a-} f(x), \quad \lim_{x\to a+} f(x), \quad \lim_{x\to a} f(x).$$

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x+1 & \text{si } x > 2. \end{cases} \qquad a = 2$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(11-x) & \text{si } x > 2. \end{cases} \qquad a = 2$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{2-x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \qquad a = 1$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si } |x| < 3 \\ x+1 & \text{si } |x| \geq 3. \end{cases} \qquad a = 3$$

(e) $f(x) = 1 + \lfloor x \rfloor$; $a \in \mathbb{Z}$.

2. Mostrar que

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Estudie la continuidad de la función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lfloor x+1 \rfloor$.

4. Calcule los límites siguientes, si existen. En los casos en que no exista el límite, demuéstrelo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-3x+2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-x+6}{x^2-3x+2}$.

5. Diga si la función f es continua en 1 por la derecha o por la izquierda:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ 2x^2+x+1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x^2-3x+3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2} & \text{si } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$

6. Use las definiciones de límites laterales para probar que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$, si

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 2 \\ -x^2+3 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sqrt{-x^3+1} = 0$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{2}{3}^+} \sqrt[4]{3x-2} = 0$.

7. Pruebe que no existe el límite dado.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$, si

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x < -1 \\ 2x+1 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{x^4-4}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-5x+4}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x-3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

8. Con ayuda de las propiedades de la función lg se puede probar, sin recurrir al uso de una calculadora electrónica, el valor de $W(10^6)$, dado por:

$$W(10^6) = \lfloor \lg(10^6+1) \rfloor + 1.$$

En primer lugar, el lector debe constar mediante un cálculo directo que

$$2^{19} < 10^6 + 1 < 2^{20}.$$

A continuación, debe recordar que la función lg es estrictamente creciente y $\lg(x)$ es el número real al que hay que elevar 2 para obtener x. Es decir:

$$y = \lg(x) \iff x = 2^y.$$

Esta información es suficiente para obtener el valor exacto de $W(10^6)$.

1.11 Límites infinitos y al infinito

Cuando una función tiene límite en un punto, se dice que la función *converge* al límite en ese punto. Cuando la función no tiene límite, se dice que *diverge*. Por ejemplo, la función suelo diverge en todo número entero.

Hay varias maneras de divergir. Una como la de la función suelo. Otra, cuando la función crece indefinidamente o decrece indefinidamente. En ese caso se dice que la divergencia es al infinito, o que el límite es "infinito". Por ejemplo, probaremos que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ crece indefinidamente cuando x tiende a 0.

Por otra parte, puede suceder que un número esté tan cerca como se quiera de $f(x)$ cuando x crece indefinidamente o cuando decrece indefinidamente; en ese caso, no hay divergencia, pues el límite existe. En estas circunstancias, se dice que los "límites son al infinito". Por ejemplo, mostraremos que la $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tiende a 0 cuando x crece indefinidamente.

Hay numerosas situaciones en las que surgen estos dos tipos de límites. En las siguientes subsecciones, vamos a ver un ejemplo de cada uno.

1.11.1 Límites infinitos

En 1905, Albert Einstein corrigió un error que encontró en las leyes del movimiento enunciadas por Newton doscientos años atrás.

En efecto, la segunda ley de Newton asume implícitamente que la masa de un cuerpo es constante. Sin embargo, Einstein descubrió que la masa de un cuerpo varía con su velocidad[4].

De manera más precisa, Einstein estableció que la masa de un cuerpo es una función de su velocidad, que puede ser calculada a través de la siguiente igualdad:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa que el cuerpo tiene cuando está en reposo, $v\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ es su velocidad y $c\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ es la velocidad de la luz (aproximadamente $3 \times 10^5\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$). Se supone, además, que la velocidad del cuerpo es menor que la velocidad de la luz.

¿Qué sucedería si la velocidad del cuerpo se acercara a la velocidad de la luz?

Esta pregunta puede ser expresada en términos de límites de la siguiente manera: ¿a qué es igual el límite de $m(v)$ cuando v tiende a c?

Si damos a v algunos valores cercanos a c, veremos que $m(v)$ crece. Probaremos en esta sección que esto es, efectivamente, así.

La idea subyacente de que $f(x)$ crece indefinidamente cuando x se acerca a un número a consiste en que, dado cualquier número positivo R, por más grande que éste sea, siempre hay un intervalo alrededor de a en donde $f(x)$ es más grande que R. En otras palabras, no es posible acotar superiormente el conjunto de valores de la función f. Se dice que $f(x)$ tiende a "más infinito" para representar este "crecimiento indefinido" y se utiliza el símbolo $+\infty$ para representar este comportamiento de la función f alrededor del punto a. En la siguiente definición, precisamos esta idea.

[4]Un tratamiento conceptual, profundo, pero al mismo tiempo sencillo, se encuentra en el libro de Richard Feynman, "The Feynman Lectures on Physics", en el capítulo 15 del primer volumen.

Definición 1.5 (Límites infinitos)
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si y solo si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R,$$

siempre que $x \in \mathrm{Dm}(f)$ y $0 < |x - a| < \delta$.
Análogamente: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si y solo si para todo $R < 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < R,$$

siempre que $x \in \mathrm{Dm}(f)$ y $0 < |x - a| < \delta$.

En los ejemplos y en los ejercicios de esta sección, veremos definiciones análogas a los límites laterales para el caso de límites infinitos.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.27

Probar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Solución. Sea $R > 0$. Debemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{x^2} > R, \tag{1.59}$$

siempre que $0 < |x| < \delta$.

Para encontrar el número δ, analicemos, en primer lugar, la desigualdad (1.59) con miras a establecer una relación de esta desigualdad con las desigualdades $0 < |x| < \delta$.

Para $x \neq 0$, las siguientes equivalencias son verdaderas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} > R \ &\Leftrightarrow\ 0 < x^2 < \frac{1}{R} \\ &\Leftrightarrow\ 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{x^2} > R \ \Leftrightarrow\ 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{R}}. \tag{1.60}$$

Esta última equivalencia nos garantiza que el número δ buscado es:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{R}},$$

pues, si se elige x de modo que $0 < |x| < \delta$, por las equivalencia (1.60), se verifica la desigualdad (1.59). Por lo tanto, hemos probado que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

En el siguiente ejemplo, se requiere un trabajo mayor para encontrar el número δ que exige la definición de límite infinito. Para encontrarlo, las siguientes reflexiones sobre este concepto son de mucha ayuda.

Supongamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Entonces, dado un número real $R > 0$, por la definición de límite, podemos asegurar la existencia de un número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R$$

para todo $x \in A =]a - \delta, a + \delta[- \{a\}$.

Como $R > 0$, podemos asegurar que $f(x) > 0$ para todo $x \in A$.

En resumen, si $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende al número a, entonces $f(x)$ es positiva, excepto, quizás, en a, en todos los puntos de un intervalo abierto centrado en a.

De manera similar, podemos concluir que, si $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende al número a, entonces $f(x)$ es negativa, excepto, quizás, en a, en todos los puntos de un intervalo abierto centrado en a.

Resumamos estos resultados en el siguiente teorema:

Teorema 1.17

Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > 0$$

para todo $x \in]a - \delta, a + \delta[- \{a\}$.

Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < 0$$

para todo $x \in]a - \delta, a + \delta[- \{a\}$.

Esta característica de una función cuando tiende a más o menos infinito, reduce el espacio de búsqueda del número δ.

En efecto, en el caso de que se quiera demostrar que $f(x)$ tiende a $+\infty$, el análisis para la búsqueda del número δ solo debe reducirse al subconjunto del dominio de f en la que ésta es positiva. En el caso de que sea $-\infty$, el análisis se realiza en el conjunto donde f sea negativa. En otras palabras, conocer los valores de x donde $f(x)$ es positiva o es negativa es de mucha ayuda a la hora de buscar el número δ. Veamos cómo se puede hacer esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.28

Pruebe que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(5 - x)(1 - x)}{(x - 2)^2} = -\infty$.

Solución.

Sean $f(x) = \dfrac{(5 - x)(1 - x)}{(x - 2)^2}$ y $R < 0$. Debemos hallar $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < R, \tag{1.61}$$

siempre que $0 < |x - 2| < \delta$ y $x \neq 2$.

Para encontrar el valor de δ, analicemos la desigualdad 1.61:

$$\frac{(5 - x)(1 - x)}{(x - 2)^2} < R.$$

Observemos que, como el factor $(x-2)$ está en el denominador, si se verificara la condición

$$0 < |x-2| < \delta,$$

entonces se verificaría la condición

$$0 < (x-2)^2 < \delta^2,$$

de donde también se verificaría que

$$\frac{1}{(x-2)^2} > \frac{1}{\delta^2}. \tag{1.62}$$

Ahora, busquemos un intervalo centrado en 2 donde $f(x)$ sea un número negativo. Como $(x-2)^2 > 0$, entonces, en dicho intervalo, deberá ocurrir que

$$(5-x)(1-x) < 0.$$

Y, si encontráramos una constante $M < 0$ tal que

$$(5-x)(1-x) < M$$

en dicho entorno, la desigualdad (1.62) implicaría que

$$f(x) = \frac{(5-x)(1-x)}{(x-2)^2} < \frac{M}{\delta^2}, \tag{1.63}$$

siempre que $0 < |x-2| < \delta$ y $f(x) < 0$.

Entonces, si comparamos la desigualdad (1.63) con la desigualdad (1.61), vemos que el número δ que hay que elegir es aquel garantice que

$$\frac{M}{\delta^2} = R \quad \text{y} \quad f(x) < 0.$$

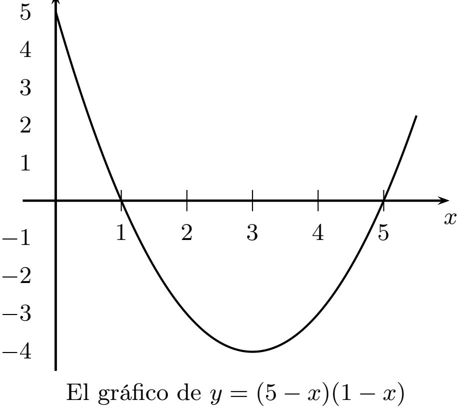
En resumen, lo que nos queda por hacer es encontrar:

1. un intervalo centrado en 2 en el que $f(x) < 0$; y
2. una constante $M < 0$ tal que $(5-x)(1-x) < M$ en dicho entorno.

Empecemos por encontrar los valores de $x \neq 2$ para los cuales $f(x) < 0$. Para ello consideremos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\frac{(5-x)(1-x)}{(x-2)^2} < 0 &\iff (5-x)(1-x) < 0, \quad \text{pues } (x-2)^2 > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\\
&\iff (x-5)(x-1) < 0\\
&\iff x \in \,]1,5[.
\end{aligned}$$

La verdad de la última equivalencia se puede determinar si se considera que el gráfico del polinomio $(x-5)(x-1)$ es una parábola convexa que corta el eje x en los abscisas 1 y 5, por lo que la parte de la parábola que está bajo el eje x está entre 1 y 5, como se muestra en el siguiente dibujo:



El gráfico de $y = (5-x)(1-x)$

En resumen, la función f es negativa en el intervalo $]1,5[-\{2\}$. Es decir, vemos que

$$f(x) < 0,$$

siempre que $1 < x < 5$ y $x \neq 2$.

Ahora, encontremos la constante M. Como el límite es en 2, elijamos valores de x cercanos a 2. Por ejemplo, tomemos $x \neq 2$ tales que $|x-2| < \frac{1}{2}$. Esto equivale a

$$-\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2},$$

de donde

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}. \tag{1.64}$$

Como para estos valores de x, $f(x) < 0$, si $x \neq 2$, entonces, busquemos M en el intervalo $\left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$.

Para ello, definamos $g(x) = (5-x)(1-x)$. Sabemos que, en el intervalo $\left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$, el gráfico de g es una parábola, como se mostró anteriormente. El mínimo de g en este intervalo está en el punto medio de las dos raíces; es decir, en $x = 3$. Por lo tanto, en el intervalo $\left]\frac{3}{2}, 3\right[$, y por ende en $\left]\frac{3}{2}, 3\right[$, la función g es decreciente, por lo que

$$g(x) < g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

para todo $x \in \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$. Esto significa, entonces, que $M = -\frac{7}{4}$.

Resumamos: si x es tal que $|x-2| < \frac{1}{2}$, entonces $(5-x)(1-x) < M = -\frac{7}{4}$.

Por otro lado, δ debe cumplir con

$$\frac{M}{\delta^2} = R,$$

de donde

$$\delta^2 = \frac{M}{R},$$

de donde, como $M < 0$ y $R < 0$, tenemos que δ puede ser elegido así:

$$\delta = \sqrt{\frac{M}{R}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-7}{R}}.$$

Por lo tanto, si elegimos δ tal que:

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-7}{R}}\right\},$$

se verifica que

$$\frac{(5-x)(1-x)}{(x-2)^2} < R$$

siempre que $0 < |x-2| < \delta$.

Hemos probado, entonces, que

$$\lim_{x \to 2} \frac{(5-x)(1-x)}{(x-2)^2} = -\infty.$$

La definición de límite lateral infinito es similar a la de límite infinito con la inclusión de la condición de que x sea o menor que a o mayor que a. Así, la expresión

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

quiere decir que, dado cualquier número real positivo R, siempre existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R$$

siempre que $0 < x - a < \delta$.

Definiciones similares se tienen para el caso de que x tiende al número a por la izquierda.

Con estas definiciones, podemos expresar el hecho de que la masa de un cuerpo, según la teoría especial de la relatividad de Einstein, crezca indefinidamente cuando su velocidad se acerca a la de la luz de la siguiente manera:

$$\lim_{v\to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = +\infty. \tag{1.65}$$

Para probar que esta igualdad es verdadera, podríamos recurrir a la definición directamente. Sin embargo, igual que ocurre con los límites "comunes y corrientes", vamos a utilizar propiedades de los límites infinitos que nos permitirán calcular muchos límites, entre ellos el de la masa de un cuerpo, conociendo algunos límites infinitos solamente.

Teorema 1.18

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

La demostración de este teorema es sencilla y se la deja para que el lector la realice.

El siguiente teorema es una generalización del anterior, y es la fuente de cálculo de muchos límites, entre los que se encuentra el límite (1.65). Pero, para una formulación más compacta, necesitamos ampliar la idea de límites laterales al valor del límite.

De manera más precisa, si ocurre que

$$L = \lim_{x\to a} f(x),$$

pero ocurre que $f(x) > L$ en un intervalo centrado en a; es decir, si existe un número $r > 0$ tal que $f(x) > L$ para todo $x \in]a-r, a+r[-a$, entonces diremos que "$f(x)$ tiende a L por la derecha cuando x tiende al número a", y lo expresaremos simbólicamente así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L^+ \quad \text{o así} \quad f(x) \to L^+.$$

Como un ejemplo, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+,$$

pues $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$.

De manera similar hablaremos de que una función $f(x)$ "tiende a L por la izquierda", y escribiremos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L^- \quad \text{o así} \quad f(x) \to L^-,$$

cuando $L = \lim_{x\to a} f(x)$ y exista $r > 0$ tal que $f(x) < L$ siempre que $x \in]a-r, a+r[-a$.

Teorema 1.19

Sean I, un intervalo abierto, $a \in I$ y f una función real tal que $I \subset \mathrm{Dm}(f) \cup \{a\}$. Entonces:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0^+$ si y solo si $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = 0^-$ si y solo si $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Este teorema también es válido si los límites son laterales. En los ejercicios de esta sección, el lector tendrá la oportunidad de probar esta afirmación.

Antes de estudiar la demostración de este teorema, vamos a utilizarlo para calcular el límite (1.65).

Ejemplo 1.29

Cálculo del límite
$$\lim_{v\to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Solución. Para poder utilizar la primera parte del teorema (1.18), primeramente expresemos $m(v)$ de la siguiente manera:
$$m(v) = \frac{1}{\frac{1}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$
Ahora, podemos definir la función f así:
$$f(v) = \frac{1}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
para todo $v \in [0, c[$.

Lo que ahora tenemos que probar es que $f(v)$ tiende a 0^+ cuando x tiende a c por la izquierda.

Por un lado, tenemos que
$$f(v) > 0$$
para todo $v \in [0, c[$.

Por otro lado, cuando v tiende a c por la izquierda, entonces tenemos que:
$$\lim_{v\to c^-} \frac{v}{c} = 1^-,$$
pues $v < c$. Por lo tanto, podemos concluir que:
$$\lim_{v\to c^-} 1-\frac{v^2}{c^2} = 0^+.$$
Así que, obtenemos que:
$$\lim_{v\to c^-} \frac{1}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0^+.$$
Por lo tanto, por el teorema 1.18, podemos concluir que
$$\lim_{v\to c^-} m(v) = \lim_{v\to c^-} \frac{1}{\frac{1}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = +\infty.$$
Es decir, cuando la velocidad de un cuerpo es cercana a la velocidad de la luz, su masa crece indefinidamente.

Probemos a continuación el primer numeral del teorema 1.19. El segundo se deja a que el lector lo realice como un ejercicio.

Demostración. Supongamos que
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0^+. \tag{1.66}$$
Vamos a demostrar que
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$
Para ello, sea $R > 0$. Debemos hallar $\delta > 0$ tal que
$$\frac{1}{f(x)} > R \tag{1.67}$$
siempre que $0 < |x-a| < \delta$.

La igualdad (1.66) implica, por un lado, que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \tag{1.68}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Por otro lado, la igualdad (1.66) también implica que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{1}{R} \tag{1.69}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$, ya que $\frac{1}{R} > 0$.

Por lo tanto, si tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces tenemos que las desigualdades (1.68) y (1.69) se verifican simultáneamente si $0 < |x - a| < \delta$. Es decir, se verifica que

$$0 < f(x) = |f(x)| < \frac{1}{R}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Pero estas dos desigualdades últimas implican que

$$\frac{1}{f(x)} > R$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

En resumen, hemos probado que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. La demostración de que esta última igualdad implica la igualdad (1.66) es similar, por lo que se deja al lector que la haga como un ejercicio. □

1.11.2 Propiedades de los límites infinitos

La definición de límites infinitos nos permite si un límite es $+\infty$ o $-\infty$, pero no nos permite saber de antemano si un límite es o no infinito. Los límites infinitos poseen propiedades que nos permiten determinar si una función diverge a partir de saber que ciertas funciones divergen. En el teorema 1.19 se presentan dos de esas propiedades. En el siguiente teorema, se reúnen algunas de las propiedades más útiles, que también son verdaderas si los límites son laterales únicamente. Pero antes de enunciarlo, es necesario hablar del concepto de *función acotada* y su relación con el concepto de límite.

Definición 1.6 (Función acotada)
Sean $f\colon \text{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset \text{Dm}(f)$. La función f está:

1. *acotada superiormente en* A si existe una constante M tal que $f(x) < M$ para todo $x \in A$;
2. *está acotada inferiormente en* A si $f(x) > M$ para todo $x \in A$.
3. *está acotada en* A si está acotada superiormente e inferiormente en A. Esto es equivalente a que exista un intervalo $]K, M[$ tal que $f(x) \in]K, M[$. También es equivalente a la afirmación de que exista un número $P > 0$ tal que $|f(x)| < P$ para todo $x \in A$.

Si $A = \mathbb{R}$, se dice, por ejemplo, "A está acotada *siempre*", en lugar de "acotada en $\mathbb{R}$".

Veamos algunos ejemplos. La función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x$$

1. está acotada en cualquier intervalo finito $[a, b]$ o $]a, b[$;

2. está acotada inferiormente, pero no superiormente en cualquier intervalo $[a, +\infty[$ o $]a, +\infty[$;

3. está acotada superiormente, pero no inferiormente en cualquier intervalo $]-\infty, a]$ o $]-\infty, a[$.

Las funciones sen y cos están siempre acotadas (es decir, están acotadas en $\mathbb{R}$), pues

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\cos x| \leq 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A continuación, estudiemos la conexión entre el concepto de acotación y el de límite. Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Sabemos, entonces, que $f(x)$ puede estar tan cerca de L como se quiera siempre que x esté lo suficientemente cerca de a. Esto significa que existirá un intervalo I centrado en a tal que f esté acotada en $I - \{a\}$. Probemos esta afirmación.

Sea $\epsilon > 0$. Existe, entonces, $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Por lo tanto

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

para todo $x \neq a$ tal que $a - \delta < x < a + \delta$.

Si definimos $K = L - \epsilon$, $M = L + \epsilon$ e $I =]a - \delta, a + \delta[$, entonces $f(x) \in]K, M[$ para todo $x \in I - \{a\}$.

Resumamos estos razonamientos en el siguiente teorema.

Teorema 1.20
Si $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, entonces existe un intervalo abierto centrado en a tal que f está acotada en $I - \{a\}$.

En el caso de que una función tienda a $+\infty$ o a $-\infty$, la función no está acotada superiormente, en el primer caso, e inferiormente en el segundo. La demostración, que es similar a la del caso de los límites finitos, la dejamos como un ejercicio para el lector. Enunciemos este resultado como el siguiente teorema.

Teorema 1.21
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, entonces f no está acotada superiormente en ningún intervalo centrado en a. En cambio, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, la función f no está acotada inferiormente en ningún intervalo centrado en a.

Ahora ya podemos formular algunas de las propiedades de los límites infinitos.

Teorema 1.22 (Propiedades de límites infinitos)
Sean f y g dos funciones reales. Entonces:

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lambda < 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a}[\lambda f(x)] = -\infty.$$

3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y g está acotada inferiormente en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty.$$

5. Si f está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^+$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

6. Si f está acotada en un intervalo alrededor de a y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se pueden formular propiedades similares cuando las funciones tienden a $-\infty$. Esto se hará en el siguiente capítulo. En ese capítulo también se estudiarán algunas de las demostraciones. Sin embargo, el lector interesado en adquirir una comprensión más profunda del concepto de límite, debería realizar por sí mismo estas demostraciones.

A continuación, veamos algunos ejemplos del uso de las propiedades enunciadas.

Ejemplo 1.30

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} + \operatorname{sen} x\right)$.

Solución. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces, por el teorema 1.19, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

ya que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+.$$

Por otro lado, para todo x, se tiene que $\operatorname{sen} x \geq -1$; es decir, la función g está acotada inferiormente en cualquier intervalo que contenga a 0. Por lo tanto, por la tercera propiedad del teorema 1.22, podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} + \operatorname{sen} x\right) = \lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = +\infty.$$

Ejemplo 1.31

> Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$.

Solución. Sean $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$.

Por un lado, para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$f(x) = x^2 + 1 \geq 1.$$

Por lo tanto, f está acotada inferiormente por un número positivo en cualquier intervalo cuyo extremo inferior sea el número 1.

Por otro lado, dado que

$$\lim_{x\to 1^+} x^3 - 1 = 0^+,$$

entonces

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^3-1} = +\infty.$$

De modo que, si aplicamos la cuarta propiedad enunciada en el teorema 1.22, podemos concluir que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1^+} f(x)g(x) = +\infty.$$

Podemos llegar a la misma conclusión de otra manera. En efecto, dado que $x \neq 0$, podemos escribir lo siguiente:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^3}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 + \dfrac{1}{x^2}}{x - \dfrac{1}{x^2}},$$

podemos utilizar la cuarta propiedad del teorema 1.22 para calcular el límite.

Para ello, definamos $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x - \frac{1}{x^2}$. Entonces tenemos que f está acotada inferiormente por el número 1 en un intervalo abierto cuyo extremo inferior es el número 1, ya que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 1$ pues $\dfrac{1}{x^2} > 0$. Adicionalmente, tenemos que

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 1 - 1 = 0$$

y, como

$$x - \frac{1}{x^2} > 0,$$

pues

$$\begin{aligned} x > 1 &\Longrightarrow x^2 > 1 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{x^2} > -1 \\ &\Longrightarrow x - \frac{1}{x^2} > 0, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 0^+.$$

Entonces, si aplicamos la cuarta propiedad obtenemos que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, el teorema 1.22 no dice nada sobre $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ ni sobre $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Los siguientes ejemplos nos van a decir por qué.

Ejemplo 1.32

Calcular los límites

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} [f(x)-g(x)]$$

si:

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ y $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; $a=0$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ y $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$; $a=1$.

Solución.

1. Tenemos que $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$, que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\dfrac{1}{x}=+\infty$ (por el numeral tres del teorema 1.22). Es decir:

$$\lim_{x\to o^+}\frac{x+1}{x}=+\infty. \tag{1.70}$$

Por otro lado, es fácil demostrar que si $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=+\infty$, entonces[5] $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\phi(x)}=+\infty$. Si aplicamos esta propiedad en (1.70), entonces tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x+1}{x}}=+\infty.$$

Un procedimiento similar nos permite afirmar que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Ahora calculemos el límite de la diferencia $[f(x)-g(x)]$.
Para empezar:

$$f(x)-g(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

por el primer numeral del teorema 1.22, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=+\infty,$$

de donde, por el teorema 1.19 (página 76), podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 0^+}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)=0.$$

2. Dado que, para $x>1$, tenemos que $(x-1)^3>0$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^3=0^+$. Por lo tanto, por el teorema 1.19, podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^3}=+\infty.$$

[5] En los ejercicios de esta sección, se propone al lector la demostración de esta propiedad.

Un razonamiento similar nos conduce a concluir que:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Por último, puesto que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} = (2-x)\frac{1}{(x-1)^3},$$

tenemos que, por la cuarta propiedad del teorema 1.22, tenemos que

$$\lim_{x\to 1^+} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 1^+} (2-x)\frac{1}{(x-1)^3} = +\infty,$$

ya que, para $x \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$, tenemos que

$$2 - x > \frac{1}{2},$$

es decir, $(2-x)$ está acotado inferiormente por un número positivo.

En el primer límite de este ejemplo, obtenemos que el límite de la diferencia de dos funciones que tienden a $+\infty$ es 0; en el segundo, en cambio, el límite es $+\infty$. Y hay casos en que ese límite puede ser un número real diferente de 0, $-\infty$, etcétera. En otras palabras, no podemos concluir nada sobre el límite de la diferencia; cada caso deberá ser analizado con sus particularidades.

Ocurre algo similar para el caso de la división de dos funciones que tienden a $+\infty$. El siguiente ejemplo ilustra lo dicho.

Ejemplo 1.33

Calcular el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ si:

1. $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución. En los tres ejemplos, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty.$$

Veamos lo que sucede con el límite del cociente entre $f(x)$ y $g(x)$ en cada caso.

1. Tenemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. Tenemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x$. Por lo tanto: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
3. Tenemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}$. Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Los límites de diferencias y cocientes de funciones que tienden a $+\infty$ se suelen representar por $+\infty - \infty$ y $\frac{+\infty}{+\infty}$. Puesto que según las funciones, estos límites pueden tomar cualquier número real, o ser infinitos, se los denomina *formas indeterminadas*, y cada caso deberá ser resuelto de modo particular.

Estas formas indeterminadas ya aparecieron anteriormente; es el caso del cociente de dos funciones que convergen cada una a 0. Por ejemplo, tenemos los límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Uno de los resultados estudiados en este capítulo que ayuda a calcular los límites del tipo $\frac{0}{0}$ es el teorema 1.1 enunciado en la página 28.

1.11.3 Límites al infinito

En las ciencias de la computación, para un mismo problema, se han desarrollado diversos algoritmos para resolverlo. Por ejemplo, para ordenar un conjunto de datos (los números de cédula de los ciudadanos empadronados para una elección), existen el ordenamiento por inserción, Quicksort, Mergesort, entre otros.

La complejidad computacional es una rama de las ciencias de la computación dedicada a determinar aproximadamente el número de instrucciones que un algoritmo realiza para una determinada tarea, y a desarrollar nuevos algoritmos que hagan las mismas tareas en un número menor de instrucciones.

Por ejemplo, para multiplicar dos matrices cuadradas de orden n, existen al menos dos algoritmos: el que utiliza la definición de multiplicación y que realiza

$$f(n) = 2n^3 - n^2$$

operaciones (sumas, restas y multiplicaciones), y el algoritmo de Winograd (1970), que utiliza

$$g(n) = 2n^3 + 3n^2 - 2n$$

operaciones.

La complejidad computacional busca determinar cuál de los dos algoritmos es más eficiente, para lo cual se determina la relación entre $f(n)$ y $g(n)$ cuando n es un valor grande. De manera más precisa, el problema se plantea en términos de límites: ¿a dónde tiende el cociente $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ cuando n crece indefinidamente?

En otras palabras, la pregunta que se formula es: ¿existe un número real tan cerca como se quiera del cociente $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ para todo n a partir de un cierto n_0?

El concepto de límite al infinito permite responder esta pregunta.

Definición 1.7 (Límites al infinito)
$L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $x \in \mathrm{Dm}(f)$ y $x > R$.
Análogamente: $L = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $M < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $x \in \mathrm{Dm}(f)$ y $x < M$.

De la definición se desprende que

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Y de estos resultados, podemos demostrar que:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el caso de que x tienda a $+\infty$, estamos exigiendo que exista un intervalo del tipo $]R,+\infty[$ con $R > 0$ que esté contenido en el dominio de la función f; esto se traduce en que podemos excluir el caso $x \leq 0$ cuando analicemos un límite donde x tiende a $+\infty$. De manera similar, cuando x tiende a $-\infty$, el dominio de la función debe contener un intervalo del tipo $]-\infty,M[$ con $M < 0$. Por lo tanto, podemos excluir el caso $x \geq 0$ cuando se analice un límite donde x tiende a $-\infty$.

Ejemplo 1.34

Mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Solución.

1. Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar $R > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \tag{1.71}$$

para todo $x > R$.

Para ello, procedamos de manera similar al caso de los límites finitos. Analicemos, pues, la desigualdad (1.71).

Como x tiende a $+\infty$, supongamos que $x > 0$. Entonces, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon &\Longleftrightarrow \frac{1}{x} < \epsilon\\ &\Longleftrightarrow x > \frac{1}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos $R = \frac{1}{\epsilon}$, obtendremos la desigualdad (1.71) siempre que $x > R$.

2. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $M < 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \tag{1.72}$$

para todo $x < M$.

Como x tiende a $-\infty$, supongamos que $x < 0$. Dado que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} < \epsilon \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{\epsilon},$$

si definimos $M = -\frac{1}{\epsilon}$, la desigualdad (1.72) es verdadera para todo $x > M$.

En la sección anterior se definió $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L^+$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L^-$. Podemos extender estas definiciones cuando, en lugar de a tenemos $+\infty$ o $-\infty$. La única diferencia está que, $f(x)$ debe ser mayor que L o menor que L en un intervalo del tipo $]R,+\infty[$ con $R > 0$ cuando x tiende a $+\infty$, y en un intervalo del tipo $]-\infty,M[$ con $M < 0$ cuando x tiende a $-\infty$.

Con estas extensiones, podemos reformular los dos límites del ejemplo de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0^-.$$

Examinemos un ejemplo más.

Ejemplo 1.35

Demostrar que:

$$1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1}.$$

Solución.

Sea $\epsilon > 0$. Buscamos un número $R > 0$ tal que, si definimos

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

se verifique que

$$|f(x) - 1| < \epsilon \tag{1.73}$$

siempre que $x > R$.

Podemos suponer que $x > 0$; más aún, podemos suponer que $x > 1$, así $f(x) > 1$, con lo cual restringiremos el análisis a un intervalo donde f es positiva.

Por otro lado, dado que:

$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} > 1,$$

pues $x > 1$, tenemos que

$$|f(x) - 1| = \frac{2}{x-1}.$$

Por lo tanto, para que se verifique la desigualdad (1.73), es suficiente que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{2}{x-1} < \epsilon.$$

Pero:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} < \epsilon &\iff \frac{x-1}{2} > \frac{1}{\epsilon} \\ &\iff x - 1 > \frac{2}{\epsilon} \\ &\iff x > 1 + \frac{2}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Es decir, para que se verifique la desigualdad (1.73), es suficiente que $x > 1$ y que

$$x > 1 + \frac{2}{\epsilon}.$$

Dado que $\epsilon > 0$, entonces

$$1 + \frac{2}{\epsilon} > 1,$$

por lo que podemos elegir $R = 1 + \frac{2}{\epsilon}$ para estar seguros de que la desigualdad (1.73) sea verdadera para todo $x > R$.

Podemos también afirmar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1^+,$$

ya que $f(x) > 1$ para $x > 1$.

Igual a lo que sucede con los límites finitos y los infinitos, existen propiedades de los límites al infinito que nos permiten calcular los límites de muchas funciones a partir de ciertos límites que ya nos son conocidos. Estas propiedades son similares a las de los límites finitos: el límite de una suma, resta, multiplicación, división, raíz, composición, es la suma, resta, etcétera, de los límites cuando estos existen con las correspondientes restricciones para el caso de la división y las raíces pares. En otras palabras, en todos los teoremas que se enuncian las propiedades de los límites finitos se pueden sustituir el número a (a donde tiende x) por $+\infty$ o $-\infty$. En aquellas propiedades en las que se exige un comportamiento de f en un intervalo centrado en a, en el caso de los límites al infinito, ese comportamiento deberá suceder en un intervalo del tipo $]R, +\infty[$ con $R > 0$ o $]-\infty, M[$ con $M < 0$.

Las demostraciones son dejadas para que el lector las realice, pues no ofrecen ninguna dificultad y son, más bien, un buen entrenamiento para su comprensión del concepto de límite. A continuación, se ofrecen algunos ejemplos del uso de las propiedades mencionadas.

Ejemplo 1.36

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{2x-5}$.

Solución. Puesto que $x \neq 0$, tenemos que

$$\frac{3x+1}{2x-5} = \frac{3+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{5}{x}}$$

y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{2x-5} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{5}{x}}\\ &= \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.37

Estudiemos la relación entre las complejidades computacionales de los dos algoritmos para multiplicar matrices dadas por las funciones

$$f(x) = 2x^3 - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Solución. Para ello, vamos a calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x^2}{2x^3 + 3x^2 - 2x}.$$

Puesto que:

$$\frac{2x^3 - x^2}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{2 - \dfrac{1}{x}}{2 + 3\dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{x^2}}$$

y que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

podemos concluir que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x^2}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{2-0}{2+3\times 0 - 2\times 0} = 1.$$

Es decir: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

¿Cómo se interpreta este resultado? Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe $R > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \epsilon$$

para todo $x > R$. Es decir, $1 - \epsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < 1 + \epsilon$ siempre que $x > R$. Más aún, dado que $g(x) > 0$ para todo $x > 0$, se verifica para todo $x > R$:

$$(1 - \epsilon)g(x) < f(x) < (1 + \epsilon)g(x).$$

Estas dos desigualdades nos dicen algo importante: a partir de un cierto orden para las matrices (x representa lo que n en el ejemplo de inicio de esta sección), $f(x)$ está acotada por arriba y por abajo por $g(x)$ multiplicada por sendas constantes que, si elegimos ϵ muy pequeño (algo que podemos hacer a nuestro gusto), dichas constantes son cercanas a 1. En otras palabras, los valores de $f(x)$ y de $g(x)$ son similares, por lo que, cuando x es grande, el número de operaciones que realizan ambos algoritmos no difieren de manera significativa. En este sentido, ambos algoritmos son o igual de buenos o igual de malos.

Para terminar esta sección, podemos reunir los límites infinitos y al infinito. De manera más precisa, podemos definir los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ se tiene cuando para todo $R > 0$, existe $M > 0$ tal que $f(x) > R$ para todo $x \in \mathrm{Dm}(f)$ y $x < -M$.

Como un buen ejercicio, el lector debería formular las restantes definiciones.

La propiedades de estos límites se pueden expresar a través de las propiedades de los límites infinitos y los límites al infinito. Por ejemplo, si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0^-.$$

O, si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty,$$

entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

Por supuesto, también son indeterminados límites del tipo

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

si tanto $f(x)$ como $g(x)$ tienden, por ejemplo, a $-\infty$.

En los ejercicios de esta sección, se pide demostrar algunas de las propiedades de estos límites.

1.11.4 Ejercicios

1. Mediante la definición correspondiente, demuestre que:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2.$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1.$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(2-x)(2x-1)}{|x-1|}=+\infty.$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-2}{x^2+|x|}=-\infty.$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(2x-1)(7-2x)}{|x^2-3x+2|}=+\infty.$
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=0.$
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x}{|x^2-1|}=-\infty.$
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{x^2+1}=2.$
   (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty.$
   (j) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{-5+4x}{x^2-5x+4}=+\infty.$

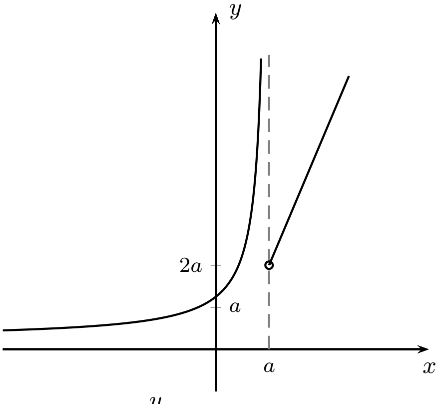
2. Calcule los límites dados
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2-3x+2}.$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-3x+2}.$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+3}.$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2+3}.$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x+1|}.$
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x+1|}.$
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)(4-3x)}{|x-1|}.$
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x-5}{|x-2||x-1|}.$

3. Demostrar las siguientes propiedades de límites infinitos y al infinito:
   (a) Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=L>0$, entonces
   $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}.$$
   (b) Si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, entonces
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0^-.$$
   (c) Si $f>M>0$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0^+$, entonces
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$
   (d) Si f está acotada y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, entonces
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

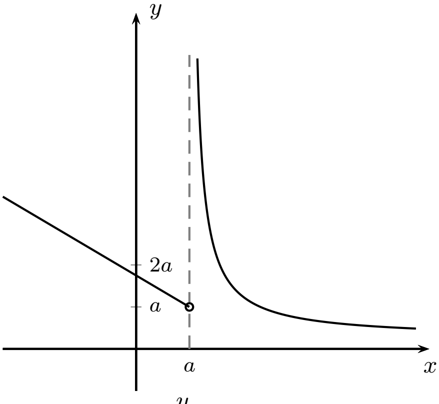
4. Una recta no vertical de ecuación $y=ax+b$ es una *asíntota*[6] de la curva de ecuación $y=f(x)$ si una de las dos igualdades siguientes es verdadera (o ambas):
   $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$
   o
   $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0.$$
   Una recta vertical de ecuación $x=a$ es una *asíntota vertical* de la curva de ecuación $y=f(x)$ si una de las dos igualdades siguientes es verdadera (o ambas):
   $$\lim_{x\to a^+}|f(x)|=+\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-}|f(x)|=+\infty,$$
   y si f es monótona cerca de a por la derecha o por la izquierda, según el caso. Determine si la curva de ecuación $y=f(x)$ tiene asíntotas verticales u horizontales.
   (a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}.$
   (b) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+2}.$
   (c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}.$
   (d) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{2x^2+1}.$
   (e) $f(x)=\dfrac{2}{1-|x+1|}.$
   (f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}.$

5. En cada uno de los siguientes dibujos se muestra el gráfico de la función f. Con la información contenida en él, encuentre, si existen, los siguientes límites de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$, a^+ y a^-.

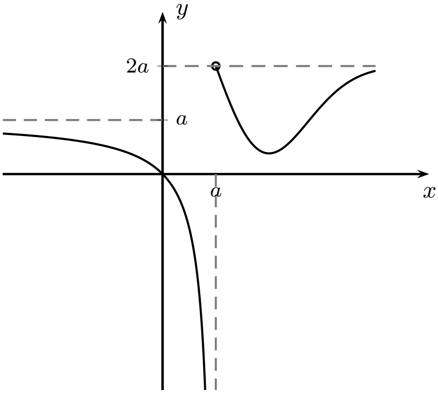
[6] Cuando se estudie el concepto de derivada y se aplique a la obtención del gráfico de una curva, se hará un tratamiento más profundo del concepto de asíntota que el dado en este ejercicio



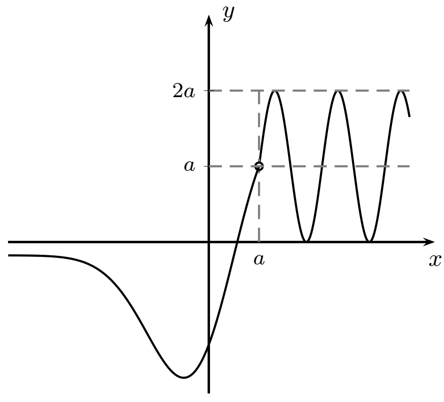
(a)



(b)



(c)



(d)

6. Dada $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si existen los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = b$, pruebe que la recta de ecuación $y = mx + b$ es asíntota horizontal si $m = 0$, u oblicua si $m \neq 0$ de f del gráfico de f por la derecha. El resultado es análogo por la izquierda, tomando en cada caso el límite cuando x tiende a $-\infty$. Aplique este resultado para hallar las asíntotas horizontales u oblicuas de f si:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

   (c) $f(x) = e^{-x^2} + 2$.

   (d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + \cos(x+1)}{x - 1}$.

   (e) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7e^{-x}}{x + 2}$.

   (f) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 7x + 2}{5x^3 + 2x + \cos x}$.

Capítulo 2

La derivada: su motivación

Veamos algunos problemas que llevan a un mismo concepto: el de derivada.

2.1 La recta tangente a una curva

En la segunda sección del capítulo de límites, estudiamos el concepto de recta tangente a una curva. Vimos que si ésta es el gráfico de una función $g\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y P es un punto de la curva con coordenadas $(a, g(a))$, para conocer la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P, que es

$$y = m(x - a) + g(a),$$

bastaba con calcular su pendiente m.

Para ello, aproximamos m con la pendiente de una recta que pasa por P y por otro punto Q de la recta de coordenadas $(x, g(x))$, que la notamos m_x, y que es igual a:

$$m_x = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Para obtener m, la idea era "acercar" Q a P, esperando que, al hacerlo, m_x se acercara a m. En el ejemplo estudiado, vimos que eso era así y que, de hecho:

$$m = \lim_{x \to a} m_x = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

En efecto, teníamos que g está definida por $g(x) = 3x^2$ y que $a = 2$. Por lo tanto, $g(a) = g(2) = 12$ y:

$$m_x = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

$$m = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = 12.$$

La recta l de ecuación

$$y = 12 + 12(x - 2) = 12x + 10$$

es, efectivamente, la tangente al gráfico de g que es una parábola p. Más aún, la recta l es la única recta que pasa por el punto de P de coordenadas $(2, 12)$ y tiene un solo punto en común con la parábola p de ecuación

$$y = g(x) = 3x^2,$$

que es, justamente, el punto P.

Por otra parte, si exceptuamos el punto P, toda la parábola está "de un solo lado" de la recta l, y "ninguna otra recta se interpone en el espacio entre" la recta l y la parábola p, como lo exige la definición de Euclides.

Mostraremos más tarde que esta afirmación es verdadera, cuando estudiemos otras definiciones de tangencia y mostremos algunas propiedades notables de la recta tangente. Por ejemplo, probaremos que de entre todas las rectas que pasan por el punto de tangencia, la recta tangente es la que mejor aproxima a la curva.

Ahora bien, del ejemplo citado resaltaremos el hecho de que la pendiente m de la recta tangente al gráfico de g en el punto $(a, g(a))$ está dada por

$$m = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Esta propiedad la cumple la pendiente de la recta tangente en un punto dado de una gran variedad de curvas que son el gráfico de funciones (como son los polinomios, funciones racionales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etcétera). Esto nos motiva a cambiar la tradicional definición de recta tangente a una curva por la siguiente:

Definición 2.1 (Recta tangente)
Dada una función real f definida en un intervalo abierto I y $a \in I$, diremos que el gráfico de f tiene una recta tangente en el punto $(a, f(a))$ si existe

$$m := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En este caso, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = m(x - a).$$

Ejemplo 2.38

Hallar, si existe, la ecuación de la recta tangente al gráfico de la hipérbola de ecuación $y = 2 - \frac{1}{x}$ en el punto de coordenadas $(1, 1)$.

Solución. Si ponemos $a = 1$ y definimos f por

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x},$$

entonces $f(a) = f(1) = 1$. Además:

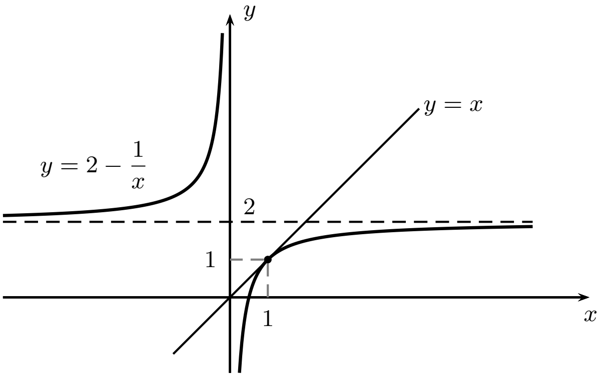
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right) - (2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x(x - 1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1. \end{aligned}$$

Como el límite existe, la recta tangente tendrá por ecuación a

$$y - 1 = 1(x - 1);$$

es decir, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto de coordenadas $(1, 1)$ es $y = x$.

Una de las aplicaciones más valiosas del concepto de derivada que vamos a estudiar es el proveer una herramienta para realizar un dibujo aproximado del gráfico de una función. Más adelante, podremos constatar que el gráfico de f y de la tangente al gráfico de f en el punto de coordenadas $(1,1)$ es el siguiente:



Ejemplo 2.39

> Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la cúbica de ecuación $y = x^3$ en el punto de coordenadas $(-1,-1)$.

Solución. Si ponemos $a = -1$ y definimos $f(x) = x^3$, entonces $f(-1) = -1$ y

$$m = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} x^2 - x + 1 = 3.$$

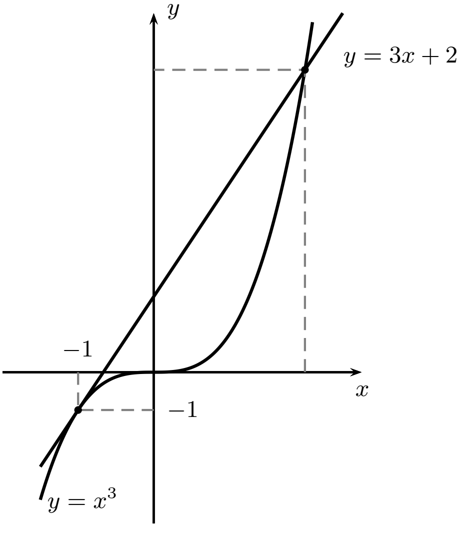
Por lo tanto, la recta buscada tiene como ecuación la siguiente:

$$y - (-1) = 3(x - (-1)) = 3x + 3,$$

de donde, la ecuación buscada es:

$$y = 3x + 2.$$

El gráfico de f y de la tangente en $(-1,-1)$ es el siguiente:



Observemos en el dibujo que la recta tangente a la curva no tiene con ésta un único punto en común sino dos. El un punto, que es el de tangencia, tiene coordenadas $(-1,-1)$. Podemos averiguar las coordenadas del otro punto resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y &= & x^3 \\ y &= & 3x+2 \end{cases}$$

Al igualar las ecuaciones, obtenemos que

$$x^3 = 3x + 2,$$

lo que equivale a

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Esta ecuación puede tener hasta tres raíces reales. Sabemos que una de ellas es -1, porque la tangente y la curva se "encuentran" en el punto de coordenadas $(-1,-1)$. Entonces, el polinomio cúbico $x^3 - 3x - 2$ tiene como factor $(x+1)$.

Por lo tanto, podemos obtener el otro factor si dividimos el cúbico por $(x+1)$. Al hacerlo, obtenemos que:

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)(x+1)(x-2).$$

Entonces, el polinomio tiene las tres raíces son reales e iguales a -1, de multiplicidad 2, y 2.

Entonces, ya estamos seguros que la curva y la recta tangente se encuentran exactamente en dos puntos: $(-1,1)$ y $(2, f(2)) = (2,8)$.

Pero, £no se suele decir que la tangente y la curva solo deben tener un punto en común? Sí, eso suele decirse, sin embargo, tal definición no es del todo precisa, pues, en las "cercanías" de $(-1,-1)$ la tangente y la curva tienen, efectivamente, un comportamiento de tangente en el sentido tradicional.

Por esto, la propiedad de tangencia es de carácter "local"; es decir, no importa el "comportamiento" de la curva y de la recta "lejos" del punto de tangencia sino en sus "cercanías".

2.2 £Cómo medir el cambio?

Tengamos en cuenta que la Matemática desarrollada hasta antes del Renacimiento estudiaba más bien conceptos "estáticos": describir formas geométricas que no cambian, calcular áreas de figuras simples, llevar cuentas, etcétera. La geometría de Euclides, la aritmética de Diofanto y el álgebra desarrollada por Al-Khowarizmi fueron instrumentos idóneos para responder a esta visión estática.

Pero cuando la humanidad intenta describir el movimiento que se produce en gran cantidad de fenómenos estudiados, se hace necesaria la creación de nuevos conceptos matemáticos que permitan responder adecuadamente a estos requerimientos.

Dado que el movimiento es percibido como el cambio de la posición de un cuerpo en el tiempo, una de las preguntas más importantes que la matemática enfrentó fue "£cómo medir el cambio?".

Veamos en esta sección cómo la respuesta a esta pregunta nos lleva también al concepto de derivada.

2.2.1 £Cuánto cuesta producir autos?

El administrador de una fábrica de autos desea tener información adecuada respecto a los costos de producción de la fábrica en función del número de vehículos en un mes dado. Así, desearía saber cómo varían estos costos al variar la producción. £Qué información requiere y cómo presentarla? £Cómo medir la variación o cambio de los costos de la producción?

£Cómo relacionar la producción con los costos y la dependencia entre la variación de la producción y la de los costos?

Para responder a éstas y a otras preguntas relacionadas, se requerirá de algunos conceptos matemáticos como son el de “variable numérica”, “función real”, “incremento absoluto”, “incremento relativo”, “razón de cambio”, “derivada”, etcétera, los mismos que expondremos a lo largo de esta sección.

2.2.2 Las variables representan magnitudes

Cuando estudiamos determinados fenómenos físicos, sociales o económicos —como el problema planteado en la sección anterior—, identificamos ciertas magnitudes que consideramos importantes para dicho estudio.

Por ejemplo, al estudiar un circuito eléctrico, la tensión V voltios y la intensidad I amperios de la corriente eléctrica, y la resistencia R ohmios de los dispositivos instalados son importantes. Cuando se monitorea el trabajo de una represa, será de interés la cota del nivel de agua h metros y la energía E MW-h almacenada. Al dirigir una fábrica de autos se deseará conocer el costo total C miles de dólares y el correspondiente costo unitario CU miles de dólares al producir x vehículos, etcétera.

Establecida la unidad de medida que corresponda y luego de realizar las mediciones o cálculos necesarios, se determinará, para cada magnitud, un determinado valor numérico en un momento dado. El símbolo que represente a dicho valor numérico, el cual oscila entre un valor mínimo y un valor máximo, dados por el fenómeno concreto que se está estudiando, se llama *variable*. En los ejemplos dados, tenemos que V, I, R, h, E, C, CU y x son variables.

Por ejemplo, la fábrica de autos producirá x automóviles por año y x no puede ser menor a $1\,000$ porque no sería rentable producir menos, pero tampoco producirá más de $10\,000$, dado que la capacidad instalada de la fábrica no lo permite. Matemáticamente, expresamos estas dos restricciones “haciendo que” la variable x pertenezca al intervalo $[1\,000, 10\,000]$.

2.2.3 La función como modelo de la dependencia entre magnitudes

Hemos visto el concepto de función. Ilustremos con tres ejemplos su uso como modelo de la dependencia entre magnitudes.

Costo de producción en una fábrica de autos

Como el costo C de producción de los autos, en miles de dólares, depende del número x de vehículos producidos, esta dependencia es modelizada con una función $f\colon \mathrm{Dm}(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$C = f(x).$$

Como solo nos interesan los valores de x entre $1\,000$ y $10\,000$, el dominio de f será $\mathrm{Dm}(f) = [1\,000, 10\,000]$.

Luego de los estudios correspondientes, los administradores de la empresa determinan que:

$$C = f(x) = 2\,000 + 11x - 0.000\,12x^2.$$

Por lo tanto, el costo unitario C_U, es decir el costo promedio de un auto es:

$$C_U = \frac{f(x)}{x} = \frac{2\,000}{x} + 11 - 0.000\,12x.$$

A manera de ejemplo, en la siguiente tabla, se muestran los valores de C y del costo unitario C_U que cuesta producir cada auto si se producen x autos, dados en miles de dólares, correspondientes al año anterior:

x	$C = f(x)$	$C_U = \frac{f(x)}{x}$
1 000	12 880	12.880
2 000	23 520	11.760
3 000	33 920	11.307
5 000	54 000	10.800
6 000	63 680	10.613
7 000	73 120	10.446
8 000	82 320	10.290
9 000	91 280	10.142
10 000	100 000	10.000

Energía potencial en una represa

La *energía potencial* E, medida en MW-h, que está almacenada en una represa depende de la *cota* h, medida en m, se define como la altura sobre el nivel del mar del espejo de agua en la represa.

Supongamos que, en una determinada represa, la cota puede estar entre 2 900 y 2 950 metros, existe una función $g\colon \operatorname{Dm}(g) \longrightarrow \mathbb{R}$, con dominio $\operatorname{Dm}(g) = [2\,900, 2\,950]$, tal $g(h)$ es la energía almacenada E cuando la cota es h. Es decir:

$$E = g(h).$$

El diámetro y el volumen de un globo

Un globo, en la parte superior, tiene forma de un hemisferio achatado; en su parte inferior, es un hemisferio alargado que culmina con una abertura cilíndrica.

Los fabricantes han determinado que el volumen V, medido en dm^3, de la cámara de gas del globo depende de su diámetro d, medido en dm. Entonces, existe una función $\varphi\colon \operatorname{Dm}(\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$V = \varphi(d) = \frac{1}{2\,000} d^3.$$

El diseño de los globos de esta fábrica establece que el globo se eleva si el diámetro mide, al menos, 6 m. Además, el mayor diámetro al que el globo puede ser inflado es de 12 m. Por ello, el dominio de φ es $\operatorname{Dm}(\varphi) = [60, 120]$.

Si el helio costara 40 centavos de dólar por cada m^3, podríamos establecer el gasto G en dólares que deberíamos hacer por concepto de gas en función del diámetro del globo. Así, existe una función $\psi\colon \operatorname{Dm}(\psi) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G = \psi(d) = 0.40\varphi(d) = 0.000\,2d^3.$$

En la siguiente tabla, se muestran valores del volumen del globo y del gasto en el que hay que incurrir para inflarlo para algunos valores del diámetro:

d dm	$V = \varphi(d)$ dm^3	$G = \psi(d)$ dólares
60	108.0	43.20
70	171.5	68.60
80	256.0	102.40
90	364.5	145.50
100	500.0	200.00
110	665.5	260.20
120	864.0	345.60

2.2.4 La variaciones absoluta y relativa como medidas del cambio

Cuando una variable, digamos x, toma diversos valores luego de haber tomado un "valor inicial" x_0, unos dirán que varió mucho, otros lo contrario. Esto es algo subjetivo. Por ello, se hace necesario establecer medidas objetivas del cambio producido. Para ello, nos serviremos de los conceptos de *variación absoluta* y *relativa*.

La variación absoluta o incremento

En el ejemplo del globo, si trabajáramos con un diámetro de 80 dm, veríamos que el volumen de gas necesario sería de $256\,\mathrm{m}^3$ y que el costo del gas sería de 102.40 dólares. Si infláramos algo más el globo, digamos hasta un diámetro d decímetros, la *variación* o *cambio* del diámetro se define como la diferencia $d - 80$ decímetros, a la que llamaremos *variación absoluta* o *incremento* del diámetro, la notaremos con Δd y será leída "delta d" y está dada también en decímetros. Así $\Delta d = d - 80$.

El incremento puede ser positivo o negativo. Por supuesto que $\Delta d > 0$ significa que el diámetro creció mientras que $\Delta d < 0$ significa lo contrario. En este caso, a Δd también se le llama *decremento*.

Al variar d, naturalmente, varían también el volumen del gas $V = \varphi(d)\,\mathrm{dm}^3$ cúbicos y el costo que hay que pagar por este gas $G = \psi(d)$ dólares. La *variación absoluta* del volumen será:

$$\Delta V = V - 256 = \varphi(d) - \varphi(80)\,\mathrm{dm}^3$$

y la *variación absoluta* del costo será:

$$\Delta G = G - 102.40 = \psi(d) - \psi(80) \text{ dólares.}$$

Ejemplo 2.40

Consideremos la situación de la fábrica de autos una vez más. Si su producción, en un mes dado, fuera de, digamos, 5 000 autos y, en el mes siguiente, ésta pasara a ser de x autos, entonces la variación absoluta de la producción estaría dada por:

$$\Delta x = x - 5\,000.$$

En este caso, la variación absoluta de los costos, que pasarían de 54 000 miles de dólares a C miles de dólares sería igual a:

$$\Delta C = C - 54\,000.$$

Como

$$C = f(x) = 2\,000 + 11x - 0.000\,12x^2,$$

se tendrá que

$$\Delta C = f(x) - 54\,000 = -52\,000 + 11x - 0.000\,12x^2.$$

Análogamente, la variación absoluta del costo unitario, que pasó de 10.8 miles de dólares a C_U miles de dólares, estaría dado por:

$$\Delta C_U = C_U - 10.8.$$

Puesto que:

$$C_U = \frac{f(x)}{x} = \frac{2\,000}{x} + 11 - 0.000\,12x,$$

se tendría que:

$$\Delta C_U = \frac{f(x)}{x} - 10.8 = \frac{2\,000}{x} + 0.2 - 0.000\,12x.$$

Por ejemplo, si $x = 6\,000$ autos, entonces:

$$f(6\,000) \approx 63\,680$$

y

$$\frac{f(6\,000)}{6\,000} \approx 10.613.$$

Además, tendremos que:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 6\,000 - 5\,000 = 1\,000,\\ \Delta C &\approx 63\,680 - 54\,000 = 9\,680,\\ \Delta C_U &\approx 10.613 - 10.8 = -0.187.\end{aligned}$$

Es decir que, si la producción aumentara en 1 000 autos, los costos subirían en 9.68 millones de dólares, mientras que ąel costo unitario bajaría en 187 dólares por auto!

La variación relativa

Si el precio del kilogramo de arroz se incrementara de un precio inicial de $p_0 = 0.40$ dólares a un precio de $p = 0.70$ dólares, el incremento del precio se mediría por su variación absoluta:

$$\Delta p = p - p_0 = 0.70 - 0.40 = 0.30 \text{ dólares}.$$

Si el precio de una llanta pasara de $p_0 = 20.00$ dólares a $p = 20.30$ dólares, la variación absoluta sería también de 0.30 dólares.

Obviamente, la importancia del alza de 0.30 dólares al precio del kilogramo de arroz no es la misma que la del alza al precio de una llanta. En el primer caso, el precio casi se ha duplicado, mientras que, en el caso de la llanta, el alza es insignificante.

Para medir este fenómeno, se utiliza el concepto de *variación relativa* que es el cociente de la variación absoluta dividida por el valor inicial que tiene la variable. Así, en el ejemplo del arroz, la variación relativa es:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{0.30}{0.40} = 0.75.$$

La variación relativa suele también expresarse como un porcentaje al que se lo denomina *variación porcentual.*

Teniendo en cuenta la identidad $\% = \frac{1}{100}$ (o $100\,\% = 1$), podemos decir que la variación porcentual del precio del kilogramo de arroz es:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \times 100\,\% = 0.75 \times 100\,\% = 75\,\%$$

y que la variación porcentual del precio de la llanta es:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \times 100\,\% = 0.015 \times 100\,\% = 1.5\,\%.$$

Ejemplo 2.41

En el caso de la fábrica de autos, considerando las mismas variaciones absolutas de autos, tendremos que la variación relativa de la producción es:

$$\frac{\Delta x}{5\,000} = \frac{x - 5\,000}{5\,000},$$

la variación relativa del costo:

$$\frac{\Delta C}{54\,000} = \frac{C - 54\,000}{54\,000}$$

y la del costo unitario:

$$\frac{\Delta C_U}{10.8} = \frac{C_U - 10.8}{10.8} = \frac{\dfrac{f(x)}{x} - 10.8}{10.8}.$$

Si $x = 6\,000$ autos, se tendrá que la variación porcentual de la producción sería:

$$\frac{\Delta x}{5\,000} \times 100\,\% = \frac{1\,000}{5\,000} \times 100\,\% = 20\,\%,$$

la variación porcentual del costo sería:

$$\frac{\Delta C}{54\,000} \times 100\,\% = \frac{9\,680}{54\,000} \times 100\,\% \approx 18\,\%$$

y la del costo unitario sería:

$$\frac{\Delta C_U}{10.8} \times 100\,\% = \frac{-0.187}{10.8} \times 100\,\% \approx -1.7\,\%.$$

En otras palabras, al subir la producción en un 20 %, los costos aumentan en un 18 %, mientras que el costo unitario baja en 1.7 %.

2.3 Razón de cambio, elasticidad y magnitudes marginales

Vimos que la dependencia entre las dos variables numéricas que describen un fenómeno, digamos una variable y que depende de otra variable x, puede ser descrita mediante una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo en el cual toma sus valores la variable independiente x.

Por ejemplo, y miles de dólares representa el costo de producir x autos en una fábrica durante un mes, el intervalo I es, digamos, $[1\,000, 10\,000]$ y la función f está definida por:

$$f(x) = 2\,000 + 10x.$$

Ahora bien, si, en un mes dado, la producción fue de $x_0 = 4\,800$ autos, los costos de producción ese mes fueron de y_0 miles de dólares. Entonces:

$$y_0 = f(x_0) = 2\,000 + 10x_0.$$

Por lo tanto:

$$y_0 = 2\,000 + 48\,000 = 50\,000.$$

Supongamos que, en el siguiente mes, la producción se elevó a x autos. Este cambio se puede medir, según vimos, por la variación absoluta Δx, llamada también *incremento* de x, y por la variación relativa $\frac{\Delta x}{x_0}$ de la variable x. En este caso:

$$\Delta x = x - x_0 = x - 4\,800. \tag{2.1}$$

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{x - 4\,800}{4\,800}. \tag{2.2}$$

Obviamente, si $\Delta x > 0$, implica que la variable x creció; en el caso contrario, decreció. En la práctica, a un incremento negativo se le llama *decremento*.

Por otra parte, como la dependencia del costo respecto del nivel de producción está descrito por la función f, mediante la igualdad $y = f(x)$, la variable costo sufrirá también un cambio, descrito por la variación absoluta o incremento Δy y por la variación relativa de y, que es $\frac{\Delta y}{y_0}$. Podemos calcular ambas variaciones:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = (2\,000 + 10x) - 50\,000$$

$$\Delta y = -48\,000 + 10x \tag{2.3}$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{-48\,000 + 10x}{50\,000}. \tag{2.4}$$

Ahora bien, como y depende de x, y esta dependencia está descrita por $y = f(x)$, para un x_0 fijo dado, es de esperar que la dependencia del incremento Δy respecto del incremento Δx pueda describirse fácilmente, al igual que la dependencia de la variación relativa o porcentual $\frac{\Delta y}{y_0}$ respecto de $\frac{\Delta x}{x_0}$, la variación relativa o porcentual de x. Veamos que sí es así.

¡Resulta que Δy es directamente proporcional a Δx, así como $\frac{\Delta y}{y_0}$ es directamente proporcional a $\frac{\Delta x}{x_0}$! Es decir, existen constantes κ y η tales que

$$\Delta y = \kappa \Delta x \tag{2.5}$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \eta \frac{\Delta x}{x_0}. \tag{2.6}$$

A la constante κ se le llama *razón de cambio* y a la constante η, *elasticidad* de y respecto de x. Calculemos estas dos constantes. De (2.1), (2.3) y (2.5) tenemos que:

$$\kappa = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-48\,000 + 10x}{x - 4\,800} = 10. \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) obtenemos:

$$\eta = \frac{\dfrac{\Delta y}{y_0}}{\dfrac{\Delta x}{x_0}} = \frac{x_0}{y_0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\,800}{50\,000} \cdot 10 = 0.96. \tag{2.8}$$

Es fácil verificar que esta sencilla dependencia de Δy respecto de Δx y de $\frac{\Delta y}{y_0}$ respecto de $\frac{\Delta x}{x_0}$ se da siempre que f sea un polinomio de grado menor que o igual a 1:

Teorema 2.1

Si $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = mx + b$, y para todo $x_0 \in I$ y todo $x \in I$, si:

$$y_0 = f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0),$$

se tiene que:

$$\Delta y = \kappa \Delta x, \quad \frac{\Delta y}{y_0} = \eta \frac{\Delta x}{x_0}, \tag{2.9}$$

donde

$$\kappa = m \quad \text{y} \quad \eta = \frac{x_0}{y_0} m. \tag{2.10}$$

Recordemos que el gráfico de f es una recta con pendiente m. Por lo tanto, la razón de cambio κ es igual a m. Naturalmente, ese caso es excepcional. En general, tenemos las siguientes definiciones inspiradas en (2.7) y (2.8).

Definición 2.2 (Razón de cambio)
Sean $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x \longmapsto y = f(x)$. Para $x_0 \in I$ y $x \in I$ tales que $x \neq x_0$, si

$$y_0 = f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

la *razón de cambio de y respecto de x en el intervalo de extremos x_0 y x* es

$$f'(x_0; x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2.11}$$

Obviamente, Δy no es, en general, directamente proporcional a Δx, puesto que, si bien

$$\Delta y = f'(x_0; x)\Delta x, \tag{2.12}$$

se tiene que $f'(x_0; x)$ no es constante la mayoría de las veces, sino que depende de x_0 y de x. Sin embargo, para muchas funciones, el valor de $f'(x_0; x)$ es muy cercano a una constante para valores pequeños de Δx. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo. En el caso del globo, el costo G en dólares del gas necesario para inflar el globo de diámetro d decímetros está dado por:

$$G = \psi(d) = \frac{1}{2\,000} d^3, \ d \in [60, 120].$$

Si tomamos $d_0 = 80$ y diferentes valores de d cercanos a 80 (ver la tabla a continuación), tendremos que los valores que toma la razón de cambio

$$\psi'(d_0; d) = \frac{\Delta G}{\Delta d} = \frac{\psi(d) - \psi(d_0)}{d - d_0}$$

son muy similares entre sí y se acercan cada vez más a 3.84. En otras palabras, podemos ver que ąese número es el límite de la razón de cambio $\psi'(d_0; d)$ cuando d tiende a d_0!

d	$\psi(d)$	$\psi(d) - \psi(d_0)$	$\psi'(d_0, d)$
78	94.91	-7.49	3.74
79	98.61	-3.79	3.79
79.5	100.49	-1.91	3.82
79.9	102.02	-0.38	3.84
80	102.40	0	$\downarrow$ 3.84 $\uparrow$
80.1	102.78	0.38	3.84
80.5	104.33	1.93	3.86
81	106.29	3.89	3.89
82	110.27	7.87	3.94

Entonces, si definimos $\psi'(d_0)$ por:

$$\psi'(d_0) = \lim_{d \to d_0} \psi'(d_0; d) = \lim_{d \to d_0} \frac{\psi(d) - \psi(d_0)}{d - d_0} = \lim_{\Delta d \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta d} = 3.84,$$

podremos escribir

$$\Delta G \approx 3.84 \Delta d \approx \psi'(d_0)\Delta d,$$

si Δd es pequeño. Es decir, ΔG es "casi" directamente proporcional a Δd, si Δd es pequeño. Al valor $\psi'(d_0)$ se le llama *razón de cambio instantánea de ψ en d_0*.

En general:

Definición 2.3 (Razón de cambio instantánea)
Si una variable y depende de una variable x mediante una función $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y, para un x_0 dado existe:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0, x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

diremos que $f'(x_0)$ es la *razón de cambio instantánea de y con respecto a x*.

Para Δx pequeños, tendremos que:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x.$$

En otras palabras, para variaciones pequeñas de x respecto de x_0, las variaciones de y respecto de y_0 son "casi" directamente proporcionales a las variaciones de x, donde $f'(x_0)$ es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 2.42

En la fábrica de autos, cuyo costo C miles de dólares está dado por

$$C = f(x) = 200 + 11x - 0.000\,12x^2,$$

obtuvimos que el costo unitario es igual a:

$$C_U = f_1(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{2\,000}{x} + 11 - 0.000\,12x.$$

Si la producción pasó de $5\,000$ a x autos, la razón de cambio de los costos C en el intervalo de extremos $5\,000$ y x está dada por:

$$f'(5\,000, x) = \frac{f(x) - f(5\,000)}{x - 5\,000} = \frac{-52\,000 + 11x - 0.000\,12x^2}{x - 5\,000}.$$

Además, la razón de cambio del costo unitario C_U en el mismo intervalo será:

$$\frac{f_1(x) - f_1(5\,000)}{x - 5\,000} = \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{f(5\,000)}{5\,000}}{x - 5\,000} = \frac{\frac{2\,000}{x} + 0.2 - 0.000\,12x}{x - 5\,000}.$$

Al tomar, en estos dos casos, el límite cuando x se aproxima a $5\,000$ o, lo que es lo mismo, el límite cuando Δx se aproxima a 0, obtendremos las respectivas razones de cambio instantáneas para un nivel de producción igual a $x = 5\,000$ autos:

$$C' = f'(5\,000) = \lim_{x \to 5\,000} \frac{-52\,000 + 11x - 0.000\,12x^2}{x - 5\,000} = 9.8,$$

$$C_U' = f_1'(5\,000) = \lim_{x \to 5\,000} \frac{\frac{2\,000}{x} + 0.2 - 0.000\,12x}{x - 5\,000} = -0.000\,2.$$

Por la definición de razón de cambio instantánea, si Δx es pequeño, a partir de un nivel de producción igual a $x = 5\,000$ autos tendremos que:

$$\Delta C \approx f'(5\,000)\Delta x = 9.8\Delta x,$$
$$\Delta C_U \approx f_1'(5\,000)\Delta x = -0.000\,2\Delta x.$$

Si $\Delta x = 1\,000$, entonces:

$$f'(5\,000)\Delta x = 9.8(1\,000) = 9\,800$$

y $\Delta C = 9\,600$. Es decir, a pesar de que Δx no es tan pequeño, es cercano a ΔC.

También

$$f_1'(5\,000)\Delta x = -0.000\,2(1\,000) = -0.2$$

es cercano a ΔC_U que, en este caso, es

$$\Delta C_U = -0.187.$$

2.3.1 Magnitudes marginales en Economía

En el ejemplo de la empresa de autos que produce 5 000 autos por mes, los administradores quisieran saber cuánto le costaría a la fábrica producir 1 auto más al mes; es decir, quisieran averiguar el costo de producción del auto número 5 001. A este costo se lo conoce con el nombre de *costo marginal*.

Para averiguar el costo marginal al nivel de producción de 5 000 autos mensuales solo hay que calcular el incremento del costo en el intervalo $[5\,000, 5\,001]$. En este caso, $\Delta x = 1$ y:

$$\Delta C = f(5\,001) - f(5\,000) \approx f'(5000) = 9.8,$$

que aproxima al *costo marginal* para una producción de $x = 5\,000$ autos, ya que Δx es pequeño. Es decir, producir un auto más cuesta 9 800 dólares aproximadamente. El costo marginal es aproximado por la razón de cambio instantánea del costo, por lo cual a esta magnitud se la llama, por simplicidad, costo marginal.

En cambio, el *costo unitario marginal* para este mismo nivel de producción sería:

$$\Delta C_U = f_1(5\,001) - f_1(5\,000) \approx f_1'(5\,000) = -0.000\,2.$$

Es decir, el costo unitario de producir el auto número 5 001 es $-0.000\,2$ aproximadamente y, por ser negativo, hay una ganancia de 20 centavos de dólar cuando se produce el auto número 5 001.

Para ésta y otras magnitudes como costo unitario, ingreso, utilidad, demanda, etcétera, a la razón de cambio instantánea correspondiente se la llama, respectivamente, costo unitario marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, demanda marginal, etcétera.

2.3.2 Elasticidad

En esta sección, se definió la *elasticidad*. Veamos esta cuestión más de cerca.

Si una variable y depende de otra variable x a través de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y si variamos el valor de x a partir de un valor inicial x_0, nos interesa en qué porcentaje varía y a partir del valor inicial $y_0 = f(x_0)$, si x varía en un porcentaje dado.

Conocida la variación porcentual de x:

$$\frac{\Delta x}{x_0} 100\,\%$$

y la variación porcentual de y:

$$\frac{\Delta y}{y_0} 100\,\%,$$

queremos conocer cómo depende $\frac{\Delta y}{y_0}$ de $\frac{\Delta x}{x_0}$, donde

$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0),$$

con $x \neq x_0$.

En el ejemplo en el que los costos y en miles de dólares vienen dados a través de la función f definida por

$$y = f(x) = 2000 + 10x,$$

donde $x \in [1\,000, 10\,000]$, vimos que si, en un momento dado, se estuvieran fabricando $x_0 = 4\,800$ autos a un costo de $y_0 = f(4\,800) = 50\,000$ miles de dólares, nos interesaría saber en qué porcentaje se incrementarían los costos si eleváramos la producción en un $10\,\%$.

Recordemos que, cuando f es un polinomio de grado menor o igual a 1 de la forma $f(x) = mx+b$, ¡la variación relativa de y es directamente proporcional a la variación relativa de x! Es decir, existe una constante η tal que

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \eta \frac{\Delta x}{x_0}.$$

A esta constante la llamamos, precisamente, *elasticidad de y respecto de x*.

Como

$$\eta = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

tendremos:

$$\begin{aligned}
\eta = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} &= \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}} \\
&= \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot \frac{(mx+b)-(mx_0+b)}{x-x_0} \\
&= \frac{mx_0}{f(x_0)} \cdot \frac{x-x_0}{x-x_0}.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\eta = \frac{mx_0}{f(x_0)}.$$

Se dice que y es elástica si $|\eta| > 1$, inelástica si $|\eta| < 1$ y que la elasticidad es unitaria si $|\eta| = 1$.

En nuestro ejemplo: $y = f(x) = 2000 + 10x$, $m = 10$, $x_0 = 4800$, $y_0 = f(x_0) = 5000$, por lo que:

$$\eta = \frac{10 \times 4800}{5000} = 0.96.$$

Entonces

$$\frac{\Delta y}{y_0} = 0.96 \frac{\Delta x}{x_0},$$

por lo que, si la producción se incrementara en un $10\,\%$, es decir si $\frac{\Delta x}{x_0} = 10\,\%$, los costos se incrementarán en $\frac{\Delta y}{y_0} = 0.96 \times 10\,\%$; es decir, en un $9.6\,\%$.

En el caso general, si calculamos η de modo que

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \eta \frac{\Delta x}{x_0},$$

obtendremos que

$$\eta = \eta(x_0, x) = \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

por lo que η depende de x_0 y de $x \neq x_0$. Sin embargo, si existe la razón de cambio instantánea

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se puede observar que para valores de x cercanos a x_0; es decir, cuando Δx es pequeño, los valores que toma $\eta(x_0, x)$ son muy similares entre sí y se acercan cada vez más a

$$\eta(x_0) = \lim_{x \to x_0} \eta(x_0, x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$\eta(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} f'(x_0).$$

A $\eta(x_0)$ se le llama *elasticidad puntual* de y en x_0, y si Δx es pequeño, tendremos que

$$\frac{\Delta y}{y_0} \approx \eta(x_0) \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Ejemplo 2.43

Luego de un estudio de mercado, se determinó que la demanda D de una marca de lavadoras es de $f(p)$ unidades si el precio es de p dólares. Como su producción no es rentable si $p < 200$ y la marca del competidor cuesta 500 dólares, tendremos que $D(f) = [200, 500]$. El estudio reveló también que

$$f(p) = 2\,000 - 0.4p + \frac{22\,500}{p}$$

mide la demanda de lavadoras cuando el precio de cada una es de p dólares.

El precio actual es de 300 dólares. Se desea conocer aproximadamente en qué porcentaje aumentaría la demanda si se hiciera un descuento del 5 %.

En este caso, tendríamos que $p_0 = 300$, por lo que:

$$D_0 = f(p_0) = 1\,955.$$

Como lo veremos en el siguiente capítulo, se tiene que

$$f'(p) = -0.4 - \frac{22\,500}{p^2},$$

por lo que:

$$f'(p_0) = -0.65.$$

Se desea conocer el valor aproximado de $\frac{\Delta D}{D_0}$. Como:

$$\eta(p_0) = \frac{p_0}{D_0} f'(p_0) = \frac{300}{1\,955}(-0.65) = \frac{39}{391} \approx -0.1,$$

tenemos que:

$$\frac{\Delta D}{D_0} \approx \eta(p_0) \frac{\Delta p}{p_0} = \left(-\frac{39}{391}\right)(-5\,\%) \approx 0.5\,\%$$

Es decir, una rebaja del precio en un 5 % significaría un incremento en la demanda de apenas el 0.5 %.

Ejemplo 2.44

En el caso de la primera fábrica de autos cuyo nivel de producción mensual pasaría de 5 000 autos a x autos, como los costos son C miles de dólares y

$$C = f(x) = 2\,000 + 11x - 0.000\,12x^2,$$

la *elasticidad media* de los costos en el intervalo de extremos 5000 y x sería:

$$\eta(5\,000, x) = \frac{5\,000}{f(5\,000)}\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{5\,000}{54\,500}\frac{-52\,000 + 11x - 0.000\,12x^2}{x - 5\,000}.$$

La *elasticidad puntual* de los costos para $x_0 = 5000$ será :

$$\eta(5\,000) = \frac{5\,000}{f(5\,000)}f'(5\,000) = \frac{5\,000}{54\,500}9.8 \approx 0.899\,1.$$

Esto quiere decir que si el nivel de producción variara, digamos en $a\,\%$, los costos variarían en $0.899\,1a\,\%$ aproximadamente.

Así, si la producción subiera en un $5\,\%$, los costos variarían en $0.899\,1 \times 5\,\% \approx 4.5\,\%$. Los costos son, pues, "poco elásticos" respecto al nivel de producción.

Un cálculo análogo lo podemos realizar para el costo unitario C_U, teniendo en cuenta que:

$$C_U = f_1(x) = \frac{2\,000}{x} + 11 - 0.000\,12x,$$
$$f_1(5\,000) = 10.8,$$
$$C_U' = f_1'(x) = -\frac{2\,000}{x^2} - 0.000\,12,$$
$$f_1'(5\,000) = -0.000\,2,$$

la elasticidad media del costo unitario en el intervalo de extremos 5 000 y x sería:

$$\eta_1(5\,000, x) = \frac{5\,000}{f_1(5\,000)}\frac{\Delta C_U}{\Delta x} = \frac{5\,000}{10.8}\frac{\frac{2\,000}{x} + 0.2 - 0.000\,12x}{x - 5\,000},$$

y la elasticidad puntual del costo unitario para un nivel de producción $x_0 = 5\,000$ autos sería:

$$\eta_1(5\,000) = \frac{5\,000}{f_1(5\,000)}f_1'(5\,000) = \frac{5\,000}{10.8}(-0.000\,2) \approx -0.1.$$

Esto quiere decir que, si el nivel de producción aumentara, digamos en un $5\,\%$, el costo unitario variaría en $(-0.1)5\,\%$ aproximadamente, es decir, bajaría en $0.5\,\%$.

2.4 La descripción del movimiento

Uno de los grandes descubrimientos de la humanidad es el concepto de tiempo. Obedeció a la existencia de ciclos naturales como el día y la noche, las lunas llenas, las estaciones del año, el movimiento regular de los astros. Esos ciclos naturales dieron lugar a la determinación de unidades de medir el tiempo: los días y sus fracciones (horas, minutos y segundos), los meses, los años y, por consiguiente, a la creación de relojes y calendarios.

En la física, para estudiar un fenómeno descrito por uno o más parámetros que varían con el tiempo, se hace necesario medir a éste. Para ello se adopta una unidad de medida del tiempo $\mathrm{u_T}$, por ejemplo $\mathrm{u_T}$ puede ser un segundo, una hora, un año, etcétera, y se escoge un instante de referencia a partir del cual se inicia la medición del tiempo. Así, si han transcurrido $t\,\mathrm{u_T}$, diremos que estamos en el instante t. La cantidad t es pues un número, por lo cual el tiempo puede ser representado gráficamente en la recta real, cuyo origen representa el instante en que se empezó a medir el tiempo y un punto T de abscisa t, representará al que llamamos instante t. Hemos establecido así *un sistema de medición del tiempo*. Podemos ahora introducir la variable t para describir el tiempo en el estudio de los fenómenos en los que esté involucrado.

Por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una recta, una vez que hemos adoptado una unidad de longitud ($\mathrm{u_L}$), podemos escoger un punto de referencia O en la recta y un sentido a partir de O, digamos a la derecha de O, que se lo considerará positivo, por lo que podemos asumir que el movimiento se realiza a lo largo de una recta real. Escogida una unidad de tiempo ($\mathrm{u_T}$), y si consideramos que t es el número de unidades de tiempo transcurrido desde el tiempo inicial τ_0, el movimiento de la partícula quedará descrito siempre que podamos establecer la posición $x = f(t)$ de la partícula en cada instante $t \geq \tau_0$. La posición $x = f(t)$ es también denominada *coordenada de la partícula en el instante* t.

Si la partícula que estaba en $x_0 = f(\tau_0)$ en el instante τ_0 pasó a ocupar la posición $x = f(t)$ en el instante t, diremos que su desplazamiento es

$$\Delta x = \Delta x(\tau_0, t) = f(t) - f(\tau_0).$$

Esto sucederá en el lapso

$$\Delta t = \Delta t(\tau_0, t) = t - \tau_0 > 0.$$

Notemos que si $\Delta x > 0$, la partícula se ha desplazado a la derecha y si $\Delta x < 0$, a la izquierda de donde estaba en el instante τ_0; esto es, a la derecha de $x_0 = f(\tau_0)$ o a la izquierda de $x_0 = f(\tau_0)$, respectivamente.

2.4.1 El concepto de velocidad

Cuando una partícula se mueve a lo largo de la recta, un observador puede opinar que ésta se mueve rápidamente, otro que se mueve lentamente. El concepto de rapidez tiene pues cierta carga de subjetividad, pero se la puede medir objetivamente gracias a la cantidad llamada *velocidad*. Veamos el concepto de velocidad en dos casos.

El movimiento uniforme

Supongamos que medimos la longitud en metros y el tiempo en segundos. Si $x = f(t)$, con $\tau_0 \leq t$, es la posición de una partícula, entre un instante t_0 y otro instante t, $\tau_0 \leq t_0 < t$, habrá transcurrido un *lapso* de Δt segundos, donde $\Delta t = t - t_0$.

En ese lapso, se habrá producido un desplazamiento de la partícula desde la posición $x_0 = f(t_0)$ hasta la posición $x = f(t)$. El desplazamiento será de Δx metros, donde $\Delta x = x - x_0 = f(t) - f(t_0)$.

Diremos que el movimiento es *uniforme* si Δx es directamente proporcional a Δt, es decir si existe una constante de proporcionalidad v tal que

$$\Delta x = v\Delta t.$$

Esto equivale a decir que el cociente

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t_0, t)}{\Delta t(t_0, t)} = v$$

es constante.

Evidentemente, en este caso, el valor absoluto de v, es decir $|v|$, nos dará una idea clara de cuán rápido se mueve la partícula, mientras que el signo de v nos indica si la partícula se mueve de "izquierda a derecha", en el caso de que $v > 0$ y, en sentido contrario, si $v < 0$.

El número v nos sirve entonces para medir la *velocidad* de la partícula. Diremos que $v\,\mathrm{u_V}$ es la velocidad de la partícula. Como

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

se puede escribir simbólicamente, en este caso, lo siguiente:

$$\text{velocidad de la partícula} = \frac{\text{desplazamiento de la partícula}}{\text{lapso transcurrido}}$$

o también

$$v\,\mathrm{u_V} = \frac{\Delta x \text{ m}}{\Delta t \text{ s}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y como $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, es cómodo escribir $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en vez de $\mathrm{u_V}$, la unidad de la velocidad. Si se escoge otra unidad $\mathrm{u_L}$ del desplazamiento Δx y otra unidad $\mathrm{u_T}$ del lapso Δt, se tendrá otra unidad de la velocidad $\mathrm{u_V}$.

En general, si la longitud se mide en $\mathrm{u_L}$ y el tiempo en $\mathrm{u_T}$, pondremos $\frac{\mathrm{u_L}}{\mathrm{u_T}}$ en vez de $\mathrm{u_V}$.

Es fácil notar que, si $x = f(t)$ es un polinomio de grado menor o igual a 1, el movimiento es uniforme.

En efecto, en este caso:

$$x = f(t) = at + b,$$

donde a y b son constantes. Por lo tanto:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t_0, t)}{\Delta t(t_0, t)} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{(at + b) - (at_0 + b)}{t - t_0} = a.$$

Es decir, $v = a$ es la velocidad y no depende de t_0 ni de t.

Notemos que, sin importar el valor de t_0, para valores iguales de Δt, se obtiene valores iguales para el desplazamiento, ya que $\Delta x = a\Delta t$. Esto justifica el nombre de *movimiento uniforme.*

Por otro lado, si $\Delta t = 1$, tendremos que $\Delta x = v$, es decir que v m es el desplazamiento de la partícula en 1 segundo. En general, $v\,\mathrm{u_L}$ es el desplazamiento en el lapso $1\,\mathrm{u_T}$.

Ejemplo 2.45

La empresa de transporte pesado TRANSLIT despachó desde Guayaquil el camión Nº 17 *a las 8h00 con una pequeña carga destinada a un cliente en Balzar, y otra muy pesada a un cliente en Santo Domingo. El chofer del camión es cambiado en Quevedo. El recorrido hacia Santo Domingo es realizado por otro chofer.*

El cliente que vive en Balzar llamó para indicar que recibió el despacho a las 10h00, aunque se le había prometido que se le entregaría el envío a las 9h30. Se le explicó que el camión estaba completamente cargado por lo que debió viajar lentamente. La empresa deberá telefonear al chofer que espera en Quevedo para indicarle la hora aproximada de llegada del camión para el cambio de conductor. £A qué hora llegará el camión a Quevedo? £A qué hora se espera que el camión llegue a Santo Domingo?

Para resolver el problema, observemos la información con que contamos sobre las distancias entre las ciudades:

- *Guayaquil-Balzar*: 96 km,
- *Balzar-Quevedo*: 72 km,
- *Quevedo-Santo Domingo*: 120 km,
- *Guayaquil-Quevedo*: 168 km,
- *Guayaquil-Santo Domingo*: 288 km.

Ahora, definamos las cantidades involucradas en el problema:

t : *instante en horas en que se da cada suceso; es el tiempo transcurrido desde las 0 horas del día del viaje.*
τ_0 : *instante que coincide con las* 0 *horas del día del viaje.*
t_0 : *instante inicial en el que el camión inició su recorrido desde Guayaquil.*
x : *posición del camión en la carretera Guayaquil-Balzar-Quevedo-Santo Domingo; es la distancia recorrida en kilómetros desde Guayaquil al punto en la carretera en el momento* t.
x_0 : *posición inicial del camión en Guayaquil al tiempo* t_0.
x_1 : *posición del camión al pasar por Balzar.*
t_2 : *hora de llegada a Quevedo.*
t_3 : *hora de llegada a Santo Domingo.*

Bajo el supuesto de que el movimiento del camión será uniforme aproximadamente, la posición del camión en cualquier momento t puede ser descrito por la función f definida por:

$$x = f(t) = at + b.$$

Para poder calcular la posición del camión, debemos, entonces, determinar a y b.

En primer lugar, $t_0 = 8$, pues el camión inicia el recorrido a las ocho de la mañana. Entonces: $x_0 = f(8)$. Como en ese momento, el camión aún no se ha movido, $f(8) = 0$, por lo que $x_0 = 0$.

En segundo lugar, a las diez de la mañana, el camión llegó al Balzar, después de recorrer 96 kilómetros. Por lo tanto:

$$x_1 = f(10) = 96.$$

Entonces:

$$\begin{cases} 0 & = & 8a & + & b \\ 96 & = & 10a & + & b \end{cases}$$

Al restar la primera ecuación de la segunda y, luego de dividir el resultado por 2, se obtendrá que $a = 48$ y, por consiguiente, que $b = -384$, pues $b = -8a$.

Entonces, tenemos que:

$$x = f(t) = 48t - 384.$$

Ahora hallemos t_2. Éste es el momento en que el camión llega a Quevedo. Como esta ciudad está a 168 kilómetros de Guayaquil, t_2 debe verificar la siguiente igualdad:

$$x_2 = 168 = f(t_2) = 48t_2 - 384,$$

lo que nos da que:

$$t_2 = \frac{168 + 384}{48} = \frac{552}{48} = 11.5.$$

En otras palabras, el camión llegará a Quevedo a las 11h30.

Finalmente, para determinar la hora de llegada a Santo Domingo, debemos calcular t_3, que satisface la igualdad

$$x_3 = 288 = f(t_3) = 48t_3 - 384,$$

pues la distancia entre Guayaquil y Santo Domingo es de 288 kilómetros. Por lo tanto:

$$t_3 = \frac{228 + 384}{48} = \frac{672}{48} = 14.$$

Es decir, se espera que el camión llegue a Santo Domingo a las 14h00.

Así, pues, la empresa TRANSLIT deberá telefonear al chofer que espera en Quevedo para indicarle que el camión N° 17 llegará aproximadamente a las 11h30 para el cambio de conductor. Si la empresa TRANSLIT es eficiente también telefoneará a sus oficinas en Santo Domingo para que avisen al cliente que su carga estará llegando alrededor de las 14h00.

2.4.2 Caso general: movimiento no-uniforme

Si el cociente
$$v_m(t_0, t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t_0, t)}{\Delta t(t_0, t)}$$
no es constante, diremos que el movimiento es *no-uniforme* y a $v_m(t_0, t)$ le llamaremos *velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo* $[t_0, t]$.

Obviamente,
$$\Delta x = v_m(t_0, t)\Delta t,$$
por lo que mientras mayor sea $|v_m(t_0, t)|$ más rápido será el movimiento de la partícula y viceversa, lo que justifica su nombre.

Si el lapso considerado Δt toma valores cada vez más pequeños para ciertas funciones de posición $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x = f(t)$, puede suceder que los correspondientes valores de la velocidad media $v_m(t_0)$ sean muy similares y se acerquen al límite de $v_m(t_0, t)$ cuando t tiende a t_0 (o cuando Δt tiende a 0) que lo notaremos $v_0 = g(t_0)$. Es decir
$$v_0 = g(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$
A $v_0 = g(t_0)$, que viene dada en ($\mathrm{u_L}$ / $\mathrm{u_T}$), le llamaremos *velocidad instantánea* de la partícula en el instante t_0.

Dado que para valores pequeños de Δt,
$$v_0 = g(t_0) \approx v(t_0, t) = v(t_0, t_0 + t),$$
tendremos que:
$$\Delta x \approx v_0 \Delta t,$$
lo que justifica que a $v_0 = g(t_0)$ se le llame *velocidad instantánea en el instante* t_0.

En efecto, para un Δt dado, mientras mayor sea v_0, más grande será el desplazamiento que se produzca en el lapso Δt, lo que indica que la partícula se mueve más rápidamente. Por otra parte, $x_0(\mathrm{u_L})$ es el desplazamiento que tendría si no se acelerara o frenara a la partícula o, lo que es lo mismo, si sobre la partícula no actuara fuerza alguna.

Ejemplo 2.46

Si se deja caer un objeto desde lo alto de un rascacielos de 122.5 m *de altura, sea* $x = f(t)$ *metros la altura del objeto medida desde el suelo después de t segundos. Entonces, las leyes de Newton nos dicen que:*
$$x = f(t) = 122.5 - 4.9t^2.$$
£Con qué velocidad choca el objeto con el suelo y en cuánto tiempo lo hace? £Cuál es la velocidad media con la que ha hecho el recorrido?

Sea t_1 segundos el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo. Podemos determinar t_1 de la igualdad
$$x_1 = f(t_1) = 0,$$
puesto que 0 es la altura del objeto al llegar al suelo. Entonces:
$$x_1 = 0 = f(t_1) = 122.5 - 4.9t_1^2,$$
lo que nos da que $t_1^2 = 25$ o $t_1 = 5$. La otra solución de la ecuación cuadrática es -5. Aunque es solución de la ecuación, no es solución del problema, pues no hay como asignar un significado a $t_1 = -5$.

En resumen, el objeto llegará al suelo en 5 segundos.

Como $v_1 = x_1' = f'(t_1)$ es la velocidad del objeto en el instante t_1, podemos escribir lo siguiente:
$$v_1 = f'(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to t_1} \frac{(122.5 - 4.9t^2) - (122.5 - 4.9t_1^2)}{t - t_1}\\
&= \lim_{t\to t_1} \frac{-4.9(t^2 - t_1^2)}{t - t_1}\\
&= \lim_{t\to t_1} \frac{-4.9(t + t_1)(t - t_1)}{t - t_1}\\
&= \lim_{t\to t_1} (-4.9)(t + t_1)\\
&= -9.8t_1.
\end{aligned}
$$

Es decir:

$$v_1 = f'(t_1) = -9.8t_1.$$

Para $t_1 = 5$, tendremos que:

$$v_1 = f'(5) = -9.8(5) = -49.$$

Es decir, el objeto llegará al suelo con una velocidad de -49 metros por segundo.

El signo negativo de la velocidad indica que el movimiento es hacia abajo, puesto que la altura se mide desde el suelo hacia arriba.

Finalmente, calculemos la velocidad media en el intervalo $[0, t_1]$:

$$v_m(0, t_1) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - 0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1} = \frac{(122.5 - 4.9t_1^2) - 122.5}{t_1} = -4.9t_1.$$

Para $t_1 = 5$, tendremos $v_m(0, 5) = -4.9(5) = 24.5$.

Es decir, la velocidad media del objeto en el lapso $[0, 5]$ será de 24.5 metros por segundo.

Notas importantes

1. Solo por facilitar la exposición hemos supuesto que $t_0 < t$. Nada impide que $t < t_0$. Solo que en este caso $\Delta t = t - t_0 < 0$. Es por eso que, en la definición de velocidad instantánea, pusimos:
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x(t_0, t)}{\Delta t(t_0, t)} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t) - x(t_0)}{\Delta t - t_0}$$
y no hace falta poner $\lim_{\Delta t\to 0+}$ o $\lim_{t\to t_0+}$.

2. Δt representa el lapso (de tiempo, por supuesto) o el intervalo $[t_0, t]$ si $t > t_0$, o $[t, t_0]$ si $t < t_0$, en cuyo caso $\Delta t < 0$.

3. "Acelerar" equivale a ir cada vez más rápidamente.

4. "Frenar" equivale a ir cada vez más lentamente.

5. El signo de Δx da el sentido del desplazamiento: si $\Delta x > 0$ quiere decir que $x(t)$ está a la derecha de $x(t_0)$ y viceversa. Por consiguiente, como $v(t_0) > 0$, se tiene que
$$\frac{\Delta x(t_0, t)}{\Delta t(t_0, t)} > 0$$
para $|\Delta t|$ pequeño. Esto significa que la partícula se mueve de izquierda a derecha. Por el contrario, si $v(t_0) < 0$, el movimiento será de derecha a izquierda.

2.5 Conclusión

En los cuatro problemas que hemos tratado en este capítulo, hemos llegado a establecer una función $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto, para la cual, si $a \in I$, existe el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A este límite le hemos representado con $f'(a)$ y se le denomina la *derivada* de f en a. En el siguiente capítulo, será objeto de estudio pues, como lo hemos visto, es una herramienta poderosa que resuelve una clase amplia de problemas. Un capítulo más adelante, veremos algunas de sus principales aplicaciones.

2.6 Ejercicios

1. Hallar, si existe, la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $P(a, f(a))$:
   (a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, $a = 2$.
   (b) $f(x) = x^3 - x$, $a = -2$.
   (c) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x}$, $a = 1$.
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$.
   (e) $f(x) = \sqrt{2+x}$, $a = 0$.
   (f) $f(x) = 2(x+1)$, $a = -2$.
   (g) $\sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$.
   (h) $2\operatorname{sen} 3x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$.
2. £Para qué valores de a, el gráfico de f tiene una recta tangente en $P(a, f(a))$. Para estos valores, £cuál es la pendiente m_a?
   (a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$.
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$.
   (d) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$.
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   (f) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.
   (g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
   (h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$.
   Sugerencia: primero realice la división; así $f(x)$ se expresará como la suma de un polinomio y una expresión racional más sencilla.
   (i) $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{2x^2+1}$.
   (j) $f(x) = \cos 2x$.
   (k) $f(x) = x\sqrt{x}$.
3. Para la función f y $x_0 \in \mathbb{R}$ dados, y para $\Delta x \in \{0.001,\ 0.01,\ 0.1,\ 1\}$, calcule Δy si $y = f(x)$. Para los mismos valores Δx y x_0, calcule los incrementos relativos $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ y $\dfrac{\Delta y}{y_0}$, donde $y_0 = f(x_0)$. Resuma los resultados obtenidos en una tabla en la cual los incrementos relativos se expresen porcentualmente.
   (a) $f(x) = 3x + 5$, $x_0 = -3$.
   (b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 1$.
   (c) $f(x) = x^3 - 3$, $x_0 = 2$.
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$.
   (e) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$.
   (f) $f(x) = \cos \pi x$, $x_0 = \dfrac{1}{6}$.
4. Para la función f dada, observe que la razón de cambio promedio en un intervalo de extremos x_0 y $x_0 + \Delta x$, $f'(x_0, x_0 + \Delta x)$, aproxima a la razón de cambio instantánea en x_0, $f'(x_0)$, tomando 10 valores de Δx cercanos a x_0.
   (a) $f(x) = 5x - 3$, $x_0 = 2$.
   (b) $f(x) = x^2 - x + 1$, $x_0 = 1$.
   (c) $f(x) = x^3 + x + 3$, $x_0 = -1$.
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$.
5. Si los costos de una fábrica de refrigeradoras que produce x cientos de esos electrodomésticos por mes es de C miles de dólares, calcule el costo marginal y el costo unitario marginal si en un mes dado se produjeron tres mil aparatos. Se conoce que $x \in [10, 100]$.
   (a) $f(x) = 10 + 20x$.
   (b) $f(x) = 10 + 20x - 0.000\,1x^2$.
6. Si la fábrica del ejercicio precedente vende su producción total a un concesionario a un precio p miles de dólares por cada cien refrigeradoras, y si $p(x) = 30 - 0.002x$, calcule las funciones de ingreso I y de utilidades U, así como las de los ingresos marginal I' y de utilidades marginales U'. Para un nivel de producción $x_0 = 3$, interprete los valores que obtenga para $I'(x_0)$ y $U'(x_0)$. Compare estos valores con $I(x_0+1) - I(x_0)$ y con $U(x_0+1) - U(x_0)$, respectivamente.

7. Si para una empresa con un nivel de producción de x unidades por semana, los costos C y los ingresos I en miles de dólares están dados por

$$C = 2\,000x + 6\,000 \quad \text{y} \quad I = 10x(1\,000 - x),$$

determine la función de utilidades, así como los costos e ingresos marginales cuando el nivel de producción es de $x_0 = 50$. Compare la utilidad marginal con el incremento de las utilidades al subir la producción en una unidad.

8. Realice los cálculos pedidos en el ejercicio precedente si $x_0 = 100$ y si $x \in [20, 110]$:

   (a) $C(x) = 2x^2 + 650$, $I(x) = 1\,000x - 3x^2$.

   (b) $C(x) = x^2 + 30x + 100$, $I(x) = 450x - x^2$.

   (c) $C(x) = 2x^3 - 50x^2 + 30x + 12\,000$, $I(x) = x(20\,000 - x)$.

9. Si a un precio de p dólares la demanda de un bien es de x unidades y si $x = D(p)$, halle la elasticidad de la demanda para el precio p_0 dado. £Cómo varía la demanda si el precio baja 5 %? £Y si sube 5 %?

   (a) $D(p) = 1\,200 - 5p$, $10 \le p \le 200$, $p_0 = 100$.

   (b) $D(p) = (30 - p)^2$, $1 \le p < 30$, $p_0 = 20$.

   (c) $D(p) = 1\,000\sqrt{40 - p}$, $1 \le p < 40$, $p_0 = 10$.

   (d) $D(p) = 2\,000 + \dfrac{1\,000}{\sqrt{3+4}}$, $0 < p < 100$, $p_0 = 20$.

10. Se lanza un proyectil hacia arriba y la altura h metros es alcanzada luego de t segundos es de $f(t)$ metros aproximadamente, donde

$$f(t) = 10t - 4.9t^2.$$

Determine cuánto tiempo necesita para llegar al punto más alto y cuánto para regresar al punto de partida. Note que el instante en que el proyectil deja de subir es cuando alcanza el punto más alto para luego descender.

11. Si el conductor no frena, se ha establecido que en las carreras por las fiestas de Quito, el más veloz de los carritos de madera que bajan por la calle Las Casas recorre x metros luego de t segundos, donde

$$x = f(t) = 2t + t^2$$

hasta que la velocidad es de 10 metros por segundo. Luego el movimiento es uniforme. Si el recorrido que debe hacer es de 154 metros, escriba x y la velocidad v metros por segundo en función de t. £En cuánto tiempo llega a la meta?

Capítulo 3

La derivada: definición y propiedades

3.1 Definición

Definición 3.1 (Derivada de una función)
Sea $f\colon \operatorname{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \operatorname{Dm}(f)$. Si existe el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{3.1}$$

se dice que f es derivable en a. Este límite se representa por $f'(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$, y es denominado *derivada* de f en a. La función

$$\begin{aligned} f'\colon \operatorname{Dm}(f') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x), \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Dm}(f')$ es el subconjunto de $\operatorname{Dm}(f)$ donde f' existe, es denominada la *derivada* de f.

De esta definición se desprende que si f es derivable en a, entonces es continua en a. En efecto, como a está en el dominio de f, solo hay que probar que:

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

Para ello, procedamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= [f(x)-f(a)] + f(a) \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) + f(a), \end{aligned}$$

siempre que $x \neq a$. Entonces, como f es derivable en a, existe el límite de la fracción

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

y es igual a $f'(a)$. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f'(a)\cdot(a-a) + f(a) = f(a),$$

por las propiedades algebraicas de los límites. En resumen, acabamos de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.1
Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

El recíproco de este teorema no es verdadero. Por ejemplo, la función f definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ es continua en 0, pero no es derivable en 0. En efecto, el lector puede demostrar fácilmente que f es continua en 0. Veamos por qué no es derivable en 0.

Si lo fuera, existiría el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}.$$

Entonces, existirían los dos límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x},$$

y serían iguales uno a otro. Sin embargo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1, \end{aligned}$$

pues $x > 0$, y

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} -1 = -1, \end{aligned}$$

pues $x < 0$.

Por lo tanto, los límites laterales son diferentes entre sí, lo que significa que la función valor absoluto no es derivable en 0.

Ejemplo 3.47

La función constante es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función constante 0.

Solución. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostremos que el límite (3.1) existe para cada $a \in \mathbb{R}$.

Para ello, procedamos así. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $x \neq a$. Como

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{c - c}{x - a} \\ &= \frac{0}{x - a} = 0, \end{aligned}$$

el límite (3.1) existe para todo $a \in \mathbb{R}$ y es igual a 0. Esto significa que

$$f'(a) = 0$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Es decir, f' es la función constante nula.

Ejemplo 3.48

> La función identidad es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función constante 1.

Solución. Sea

$$\begin{aligned} I\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Demostremos que el límite (3.1) existe para cada $a \in \mathbb{R}$.

Para ello, procedamos de la siguiente manera. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $x \neq a$. Como

$$\frac{I(x) - I(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1,$$

el límite (3.1) existe para todo $a \in \mathbb{R}$ y es igual a 1. De manera que

$$I'(a) = 1$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. De modo que la derivada de I es la función constante 1.

Ejemplo 3.49

> Calcular la derivada de la función tan en 0

Solución. Debemos calcular el límite de la fracción:

$$\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0}$$

cuando x se aproxima a 0.

Como $\tan 0 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} &= \frac{\tan x}{x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Entonces:

$$\tan'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = 1.$$

Ejemplo 3.50

> Sean $f\colon \operatorname{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \operatorname{Dm}(f)$. Entonces f es derivable en a si y solo si existe el límite
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
>
> En el caso en que f sea derivable en a, se verifica que:
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Solución. Supongamos que f es derivable en a. Sean $x = g(h) = a + h$ y

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Entonces:

$$\lim_{h\to 0} g(h) = \lim_{h\to 0} a + h = a$$

y

$$\lim_{x\to a} F(x) = f'(a).$$

Como $g(h) \neq a$ si $h \neq 0$, por el teorema del cambio de variable de límites, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} F(x) = f'(a).$$

Recíprocamente, supongamos que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.2}$$

existe. Sea $h = \varphi(x) = x - a$. Entonces:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$$

y $\varphi(x) \neq 0$ si $x \neq a$. Entonces, por el teorema de cambio de variable, tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Para demostrar que una función f es derivable en a y calcular $f'(a)$, es común demostrar que existe el límite (3.2) y calcular su valor.

Ejemplo 3.51

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

Obtener f'.

Solución. Sea $x \in \mathbb{R}$. Veamos para qué valores de x existe el límite (3.2). Para ello, procedamos así. Sea $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^3 - (x+h) + 1] - (x^3 - x + 1)}{h} \\
&= \frac{[(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x+h)] - (x^3 - x)}{h} \\
&= \frac{3x^2 + 3xh^2 + h^2 - h}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2 - 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe el límite (3.2) cuando h se aproxima a 0, y es igual a

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Por lo tanto, el dominio de la función f' es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.52

Obtener la derivada de la función sen.

Solución. El dominio de la función sen es $\mathbb{R}$. Veamos para qué valores x de este dominio existe $\operatorname{sen}'(x)$. Para ello, procedamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} &= \frac{(\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x)-\operatorname{sen}x}{h}\\ &= \frac{\cos h-1}{h}\cdot\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}h}{h}\cdot\cos x,\end{aligned}$$

con $x\in\mathbb{R}$ y $h\neq 0$. Pero

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}h}{h}\cdot\cos x\right)\\ &= 0\cdot\operatorname{sen}x+1\cdot\cos x=\cos x\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}'(x)=\cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}'=\cos.$$

Ejemplo 3.53

Obtener la derivada de la función cos

Solución. El dominio de la función cos es $\mathbb{R}$. Veamos para qué valores $x\in\mathbb{R}$ existe $\cos'(x)$. Para ello, procedamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{(\cos x\cos h-\operatorname{sen}h\operatorname{sen}x)-\cos x}{h}\\ &= \frac{\cos h-1}{h}\cdot\cos x-\frac{\operatorname{sen}h}{h}\cdot\operatorname{sen}x,\end{aligned}$$

con $x\in\mathbb{R}$ y $h\neq 0$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\cos x-\frac{\operatorname{sen}h}{h}\cdot\operatorname{sen}x\right)\\ &= 0\cdot\cos x-1\cdot\cos x=-\operatorname{sen}x\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. Por lo tanto:

$$\cos'(x)=-\operatorname{sen}x \quad \text{y} \quad \cos'=-\operatorname{sen}.$$

Ejemplo 3.54

Sea $f\colon [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{x}$. Obtener la derivada de f.

Solución. Sea $x\in[0,+\infty[$. Veamos para qué valores de x existe $f'(x)$. Para ello, procedamos así:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}
\end{aligned}$$

con $h\neq 0$ y $x\geq 0$.

Dado que f no está definida para valores menores que 0, si $x=0$, para cualquier valor de h menor que 0, sucede que $x+h$ es menor que 0. Entonces, el límite de

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

no existe si $x=0$.

En cambio, para $x>0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

En resumen, para todo $x>0$, se verifica que:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad (\sqrt{\ }') = \frac{1}{2\sqrt{\ }}.$$

Para $x=0$, la derivada de la función raíz cuadrada no existe.

3.2 Ejercicios

1. Halle la derivada de la función $f\colon D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada en el punto x indicado, usando la definición de derivada:
   (a) $f(x)=2x^2+x+1$ en $x=2$.
   (b) $f(x)=\frac{2}{x+1}$ en $x=0$.
   (c) $f(x)=\frac{x-1}{x}$ en $x=1$.
   (d) $f(x)=\sec x$ en $x=0$.
   (e) $f(x)=\csc x$ en $x=\dfrac{\pi}{2}$.
   (f) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ en $x=\dfrac{1}{2}$.
   (g) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ si $x\notin\mathbb{Z}$.
   (h) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ si $x=0$.
   (i) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ si $x\in\mathbb{Z}$.
2. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, notaremos, si existen:

$$\begin{aligned}
f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\
f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.
\end{aligned}$$

Las derivadas $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ se denominan *derivada de f en x_0 por la derecha* y *derivada de f en x_0 por la izquierda*, respectivamente. Representan las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, considerando solamente la gráfica de f a la derecha y a la izquierda, respectivamente, del punto indicado.

En los siguientes ejemplos halle, si existen, $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ -2x^2 + 5x - 2 & \text{si } x > 1, \end{cases}$

$x_0 = 1$.

(b) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \le -1 \\ x & \text{si } x > -1, \end{cases}$

$x_0 = -1$.

(c) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$, $x_0 = -1$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \ge 1 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 1, \end{cases}$

$x_0 = 1$.

3. Demuestre que para $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, existe $f'(x_0)$ si y solo si:

   (a) Existen $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$; y

   (b) $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

   Además, en el caso de que exista $f'(x_0)$, siempre se verificará que

   $$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

4. Pruebe que f no es derivable en el punto indicado.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \ge 1 \\ x+1 & \text{si } x < 1, \end{cases}$ $\quad x = 1$.

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$, $x = 1$.

   (c) $f(x) = \sqrt[4]{2x-9}$, $x = 4.5$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 0, \end{cases}$ $\quad x = 0$.

3.3 Propiedades de la derivada

Calcular la derivada de una función utilizando únicamente la definición puede resultar muy engorroso, como el lector puede comprobar en los ejercicios de la sección anterior. Para facilitar los cálculos, a partir de las propiedades algebraicas de los límites (límite de la suma, del producto, etcétera), se obtienen propiedades algebraicas de la derivada. Éstas permitirán calcular la derivada de muchas funciones si se conoce la derivada de funciones "más simples".

Por ejemplo, podemos calcular la derivada de $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow R$ definida por

$$f(x) = x + 2$$

sabiendo que la derivada de x es 1, de 2 es 0 y que la derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas de cada función. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+2)' \\ &= (x)' + (2)' = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Es decir, la derivada de f es la función constante 1.

El siguiente teorema enuncia las propiedades de la derivada que se obtienen de la simple aplicación del concepto de derivada y de las propiedades algebraicas de los límites (ver el teorema 1.6 en la página 48).

Teorema 3.2 (Propiedades algebraicas I)
Sean f y g dos funciones reales derivables en $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. *Suma*: $f + g$ es derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

2. *Producto*: fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. *Inverso multiplicativo*: Si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Y de este teorema, el siguiente se obtiene inmediatamente.

Teorema 3.3 (Propiedades algebraicas II)
Sean f y g dos funciones reales derivables en $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. *Escalar por función*: λf es derivable en a y
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

2. *Resta*: $(f - g)$ es derivable en a y
$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

3. *Cociente*: si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Dada una función f, debe estar claro que f es diferente de $f(x)$. El segundo símbolo indica el valor que toma la función f en x. Sin embargo, es común abusar del lenguaje y referirse a la función f a través de $f(x)$. Si no se especifica a qué conjunto pertenece x, se entiende tácitamente que el dominio de f es el conjunto más grande de $\mathbb{R}$ en el cual $f(x)$ está definida.

Es así que, si se pide "calcular la derivada de la función x^2", lo que se pide realizar es el cálculo de la derivada de la función f definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En general, en vez de decir "derivar la función f", se puede decir "derive $f(x)$", o "derive $f(t)$", etcétera. También se podrá decir "calcule $f'(x)$ o $f'(t)$".

La ventaja de este abuso del lenguaje es que nos ahorra el introducir un nombre para la función. A lo largo de este libro, utilizaremos indistintamente ambas formas de referirnos a las funciones, salvo que pueda haber lugar para confundir la función f con el valor que ésta puede tomar en algún x en particular.

Ejemplo 3.55

Calcular $(x^2)'$ y $(x^3)'$.

Solución. Como $x^2 = x \cdot x$, podemos aplicar la propiedad algebraica de la derivada para la derivada del producto de dos funciones (teorema 3.2).

En este caso, $f(x) = x$ y $g(x) = x$; estas dos funciones son la identidad cuya derivada existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y es igual a 1. Entonces:
$$x^2 = f(x)g(x).$$
Por lo tanto, x^2 es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada se obtiene de la siguiente manera:
$$\begin{aligned}(x^2)' &= (fg)'(x)\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

$$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = x + x,$$

pues $f'(x) = g'(x) = (x)' = 1$. Por lo tanto:

$$(x^2)' = 2x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para calcular la derivada de x^3, apliquemos nuevamente la regla de la derivada de un producto, pero esta vez a x^2 y a x:

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x^2 \cdot x)' \\ &= (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' \\ &= (2x)(x) + (x^2)(1) = 2x^2 + x^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Ahora obtengamos una fórmula general para la derivada de x^n con n un número natural. Para ello, recordemos el siguiente "producto notable":

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Ejemplo 3.56

Obtener $(x^n)'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtengamos la derivada de f para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Sea $x \neq a$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{x^n - a^n}{x-a} \\ &= \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \cdots + a^2a^{n-3} + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1},\end{aligned}$$

pues la suma tiene n términos. Por lo tanto:

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, $(x^6)' = 6x^5$.

Ejemplo 3.57

Esta función es la suma y resta de funciones de la forma ax^n. Cada una de esas funciones tiene derivada para cada número real x. La propiedad de la derivada para la suma de dos funciones (teorema 3.2), el del producto de un escalar por una función (teorema 3.3) y el de la resta de dos funciones (teorema 3.3) nos permiten proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x^5+2x^4-3x^3-4x^2+5x-1)' &= (x^5)'+(2x^4)'-(3x^3)'-(4x^2)'+(5x)'-(1)'\\ &= 5x^4+2(x^4)'-3(x^3)'-4(x^2)'+5(x)'-0\\ &= 5x^4+2(4x^3)-3(3x^2)-4(2x)+5(1)\\ &= 5x^4+8x^3-9x^2-8x+5.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(x^5+2x^4-3x^3-4x^2+5x-1)' = 5x^4+8x^3-9x^2-8x+5$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.58

Sea $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$. Calcular $f'(x)$.

Solución. La función f es el cociente de las funciones g y h definidas por

$$g(x) = 1-x+x^2 \quad \text{y} \quad h(x) = 1+x-x^2.$$

El dominio de f es $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, pues las raíces de la ecuación

$$1+x-x^2 = 0$$

son $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Para todo $x \in \mathrm{Dm}(f)$, se tiene que:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

pues $h(x) \neq 0$ para dichos x.

Por la propiedad de la derivada de un cociente (teorema 3.3) tenemos que:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)'\\ &= \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}\\ &= \frac{(1-x+x^2)'(1+x-x^2)-(1-x+x^2)(1+x-x^2)'}{(1+x-x^2)^2}\\ &= \frac{(0-1+2x)(1+x-x^2)-(1-x+x^2)(0+1-2x)}{(1+x-x^2)^2}\\ &= \frac{-(1-2x)(1+x-x^2)-(1-2x)(1-x+x^2)}{(1+x-x^2)^2}\\ &= \frac{-(1-2x)(1+x-x^2+1-x+x^2)}{(1+x-x^2)^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)}{(1-x+x^2)^2}$$

para todo $x \in \mathrm{Dm}(f)$.

Solución 2. En este caso, es posible calcular la derivada de f de una manera más simple.

En efecto, la ley de asignación de la función f, que es el cociente de dos polinomios de segundo grado, puede ser expresada de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} = -1 + \frac{2}{1+x-x^2}.$$

Esta representación se obtiene al dividir el numerador por el denominador y obtener el cociente y el residuo.

Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-1 + \frac{2}{1+x-x^2}\right)' \\ &= 0 + 2\frac{-(1+x-x^2)'}{(1+x-x^2)^2} \\ &= 2\frac{-0-1+2x}{(1+x-x^2)^2} = \frac{2(2x-1)}{(1+x-x^2)^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.59

Sea f una función real definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} x$$

para $x \neq 0$. Obtener f'

Solución. El dominio de f es $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Para $x \in \mathrm{Dm}(f)$, $f(x)$ es el producto de la función $\frac{1}{x}$ y $\operatorname{sen} x$. Entonces, por la propiedad de la derivada de un producto de funciones (teorema 3.2) tenemos que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'(\operatorname{sen} x) + \frac{1}{x}(\operatorname{sen} x)'.$$

Pero

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

por la propiedad de la derivada del inverso multiplicativo (teorema 3.3), ya que $x \neq 0$. También tenemos que:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\cos x \\ &= \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \end{aligned}$$

para todo $x \neq 0$.

Ejemplo 3.60

Sea f una función polinomial de grado $n = 1$. Es decir,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_x^k,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcular f'.

Solución. Utilizando inducción matemática sobre el número de términos, se obtiene que la derivada de la suma de un número arbitrario de funciones es igual a suma de las derivadas de cada una de esas funciones. Como f puede ser visto como la suma de las $n + 1$ funciones f_k definidas por:

$$f_k(x) = a_k x^k,$$

para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$; entonces:

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{n} f_k'(x).$$

Pero, para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$f_k'(x) = k a_k x^{k-1},$$

ya que la derivada de un escalar por una función es igual al producto del escalar por la derivada de la función (ver teorema 3.3) y por el ejemplo 3.3.

Para $k = 0$, en cambio, tenemos que:

$$f_0'(x) = (a_0)' = 0,$$

pues la derivada de una función constante es la función cero.

Por lo tanto:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.61

Obtener la derivada de tan.

Solución. Para todo $x \in \mathrm{Dm}(\tan)$, se tiene que:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Por lo tanto, para obtener la derivada de tan, podemos aplicar la derivada del cociente de dos funciones (teorema 3.3). Obtendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' \\
&= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cos x - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\tan'(x) = \sec x^2 = 1 + \tan^2 x,$$

para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, pues $\mathrm{Dm}(\tan) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 3.62

Obtener la derivada de cot.

Solución. Recordemos que
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$
para todo $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, mediante la aplicación de la regla para derivar el inverso multiplicativo de una función (teorema 3.3), tenemos que:
$$\begin{aligned}\cot'(x) &= \left(\frac{1}{\tan x}\right)' \\ &= -\frac{\tan' x}{\tan^2 x} \\ &= -\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} = -\left(\frac{1}{\tan^2 x} + 1\right).\end{aligned}$$
Por lo tanto:
$$\cot' x = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x$$
para todo $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.63

Obtener la derivada de sec.

Solución. Puesto que
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que:
$$\begin{aligned}\sec' x &= -\frac{\cos' x}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$
para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Por lo tanto:
$$\sec' x = \tan x \sec x$$
para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.64

Obtener la derivada de csc.

Solución. Para todo $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, se verifica que:
$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$
Por lo tanto:
$$\csc' x = -\frac{\operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

para todo $x \neq k\pi$. Entonces:

$$\csc' x = -\cot x \csc x$$

para todo $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

3.4 Ejercicios

Halle $f'(x)$ usando las propiedades algebraicas de la derivada (teoremas 3.2 y 3.3).

1. $f(x) = 5x^2 + 7$.
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$.
3. $f(x) = 3x^2 - x + 1$.
4. $f(x) = 7x^{15} + 8x^{-7}$.
5. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
6. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$.
7. $f(x) = x^n - x^{n-1} + 1,\ n \geq 2$.
8. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 1$.
9. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{5}{x^5}$.
10. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{-3} + \dfrac{5}{x^4}$.
12. $f(x) = x^{\sqrt{3}} - x^{-\sqrt{3}}$.
13. $f(x) = 7x \cos x$.
14. $f(x) = (x^2 + 1)\tan x$.
15. $f(x) = x^2 \cot x + 5$.
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\tan x}$.
17. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

3.5 La regla de la cadena o la derivada de la compuesta

Con la ayuda de las propiedades algebraicas de la derivada se obtienen las derivadas de un considerable número de funciones. Sin embargo, no todas las funciones se pueden expresar como suma, resta, producto, división de otras funciones. Muchas funciones se expresan como la composición de dos o más funciones. La siguiente propiedad de las derivadas nos dice cómo obtener la derivada de la composición de dos funciones si éstas son derivables. Esta propiedad es conocida como la regla de la cadena. El porqué de este nombre se verá más adelante.

Teorema 3.4 (Regla de la cadena o derivada de la función compuesta)
Sean f y g dos funciones reales tales que existe $f \circ g$, y $a \in \mathrm{Dm}(f \circ g)$. Supongamos que:

1. g es derivable en a; y
2. f es derivable en $g(a)$.

Entonces la compuesta $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Ejemplo 3.65

Calcular la derivada de $\operatorname{sen}^2 x$.

Solución. Sea h una función real definida por

$$h(x) = \operatorname{sen}^2 x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Aunque fuera posible expresar $h(x)$ como suma, producto, etcétera de otras funciones cuyas derivadas conozcamos, no es fácil ver cuáles serían esas funciones. Sin embargo, mediante la regla de la cadena podemos obtener la derivada de h, pues es la composición de las funciones f y g definidas de la siguiente manera:

$$f(u) = u^2$$

para todo $u \in \mathbb{R}$ y

$$g(x) = \operatorname{sen} x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

En efecto, si $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 x = h(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $h = f \circ g$ y su dominio es $\mathbb{R}$.

Ahora bien, f y g son derivables en todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, h es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}h'(x) &= (f \circ g)'(x) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

Pero

$$f'(u) = 2u \quad \text{y} \quad g'(x) = \cos x.$$

Por lo tanto

$$f'(g(x)) = 2g(x) = 2 \operatorname{sen} x.$$

Entonces:

$$h'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto:

$$(\operatorname{sen}^2 x)' = \operatorname{sen} 2x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, la derivada del cuadrado del sen es dos veces el sen (como si fuera la función x^2) multiplicada por la derivada del sen, que es el cos.

3.6 Ejercicios

1. Antes de ejercitarse en la aplicación de la regla de la cadena, conviene llenar los casilleros vacíos de la tabla 3.1 en la página 131.
2. Calcule $f'(x)$.

   (a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$.

   (b) $f(x) = \cos \sqrt{x+1}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{21 + \operatorname{sen} x}$.

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{\cos x + x^2}$.

   (e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$.

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x^2}}$.

   (g) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^4} + x^5 \sqrt[6]{x^7}$.

   (h) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^k$ con a, b, c, k en $\mathbb{R}$.

   (i) $f(x) = Ae^{kx}(a \operatorname{sen} x + b \cos x)$ con A, k, a, b en $\mathbb{R}$.

   (j) $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{x}}}$.

   (k) $f(x) = \sqrt[n]{\dfrac{ax + b}{ax - b}}$ con $n \in \mathbb{N}$ y a, b en $\mathbb{R}$.

(l) $f(x) = \ln\left(\ln \dfrac{x^2}{5}\right)$.

(m) $f(x) = \dfrac{x^2 + \tan x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(n) $f(x) = \ln|x + e^x|$.

(o) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^3 x)\cos(\operatorname{sen}^3 x)$.

(p) $f(x) = \dfrac{\tan x^2}{\tan^2 x}$.

(q) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$.

(r) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

3. Resuelva la ecuación $y'(x) = 0$ si

(a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

(b) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 10x + 25}$.

(c) $y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.

(d) $y = x(x+1)^2(x-1)^3$.

(e) $y = \dfrac{e^{|x-1|}}{x+1}$.

(f) $y = \text{máx}\{|x|^3, 7x - 6x^2\}$.

4. Si g y h son funciones derivables, calcule $f'(x)$:

(a)

(b) $f(x) = \sqrt[n]{[g(x)]^2 + [h(x)^2]}$ si $[g(x)]^2 + [h(x)^2] > 0$

(c) $f(x) = \ln\left|\dfrac{g(x)}{h(x)}\right|$ si $g(x)h(x) \neq 0$.

(d) $y = g(\operatorname{sen}^2 x) + h(\cos^2 x)$.

(e) $y = [g(x)]^{h(x)}$ si $g(x) > 0$.

5. Halle los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo que la función f dada a continuación sea continua en 0, derivable en 0 y su derivada sea continua en 0:

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{|x|^\beta} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

6. Halle los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo que la función f dada a continuación sea continua y derivable en $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2 & \text{si |x| <1}, \\ \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x & \text{si } |x| \leq 2, \\ \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \leq 1, \\ \alpha(x-1)(x-\beta) & \text{si } 1 < x < 2, \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

7. Halle los valores de α y β en $\mathbb{R}$ para que f sea derivable en $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x} & \text{si } x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < 0, \\ \alpha\cos x + \beta\operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

8. £Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x?

(a) $f(x) = |x^3(x+1)^2(x+2)|$.

(b) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.

(c) $f(x) = x|x|$.

(d) $f(x) = |\pi - x|\operatorname{sen} x$.

(e) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Halle $f'(x)$ para los x en las que existe:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2|x| - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(d) $f(x) = \arccos(\cos x)$.

10. Dé ejemplos de funciones f y g y $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que exista $(f \circ g)'(x_0)$ pero:

(a) Existe $f'(g(x_0))$ y no $g'(x_0)$.

(b) No existe $f'(g(x_0))$ y sí $g'(x_0)$.

(c) No existe $f'(g(x_0))$ ni $g'(x_0)$.

11. Diga si es correcta o no la afirmación siguiente y argumente su respuesta. Sea $I =]a, b[$

(a) Si f y g son derivables en I, entonces $f(x) < g(x)$ para todo $x \in I$ implica que $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \in I$.

(b) Si $f' < g'$ en I, entonces $f < g$ en I.

(c) Si f y g son continuas por la derecha en a y si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f(x) < g(x)$ para todo $x \in I$.

(d) Si f es derivable en $\mathbb{R}$ y f es par, entonces f' es impar.

(e) Si f es derivable en $\mathbb{R}$ y f es impar, entonces f' es par.

(f) Si f' es par, entonces f es impar.

(g) Si f' es impar, entonces f es par.

(h) Si f es derivable en I y $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

(i) Si f es derivable en I y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$.

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
e^x	$\cos x$	$e^{\cos x}$	$\cos(e^x)$
x^2+2x+3	$\sqrt[3]{x}$		
$\sqrt{x}+x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$2x+3$		
$2x+\cos x$	$h(x)+5$		
		$\sqrt{x^2+1}+e^{\sqrt{x^2+1}}$	
		$(\sec 3x+\cos x)^5$	
			$\cos\sqrt{x^2+3}$
			$\tan\sqrt[3]{(x^4+2)^5}$
		$(x^2+1)^{x^2+10}$	
		$\operatorname{sen}(\cos x)$	
		$\tan\left(\cos\dfrac{x^2+1}{3}\right)$	
			$(\sec(x+x^4))^{-5}$

Cuadro 3.1: Tabla de compuestas para los ejercicios de regla de la cadena

3.7 Razones de cambio relacionadas

Supongamos que dos o más magnitudes, digamos y, z, w, etcétera, que están relacionadas de alguna manera entre sí, dependan de una misma variable x (o t, o u, o v, etcétera). Ello hace que las razones de cambio

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dw}{dx},\ldots$$

también estén relacionadas entre sí. Esta última relación puede ser encontrada gracias a la regla de la cadena, estudiada en la sección anterior. También se puede obtener esa relación con ayuda de la derivación implícita, que estudiaremos en la siguiente sección.

Ejemplo 3.66

Para inflar un globo esférico inyectamos aire a razón de $500\,\mathrm{l}/\min$. £Con qué razón varía la longitud del radio cuando éste mide $1\,\mathrm{m}$?

Solución. Si V litros es el volumen del globo cuando su radio mide r decímetros[1], entonces:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{3.3}$$

Puesto que el aire ingresa al globo a una razón de 500 litros por minuto, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 500.$$

En este caso, las magnitudes V y r, que están relacionadas entre sí por medio de la igualdad (3.3), dependen, ambas, de una tercera magnitud: el tiempo t. Y lo que queremos calcular, la razón de cambio instantánea del radio cuando su longitud es 10 decímetros, es, precisamente, la razón de cambio es $\frac{dr}{dt}$ cuando $r = 10$, que está relacionada con la razón de cambio de V respecto de t.

Para ello, derivamos respecto de t ambos lados de la igualdad 3.3. Obtenemos así la relación entre las razones de cambio $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dV}{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Entonces:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}.$$

Por lo tanto, como $r = 10$ y $\frac{dV}{dt} = 500$, obtenemos que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{500}{4\pi\ 10^2} = \frac{5}{4\pi} \approx 0.398.$$

Es decir que la longitud del radio r varía a una velocidad de aproximadamente 3.98 centímetros por minuto.

3.8 Ejercicios

1. El agua escapa del reservorio cónico, mostrado en la figura 3.1a, a una razón de 20 litros por minuto: £Con qué velocidad disminuye el nivel de agua cuando su altura h desde el fondo es de 5 metros? £Cuál es la razón de cambio de radio r del espejo del agua en ese instante?
2. Un faro ubicado en un islote situado a 3 kilómetros de la playa emite un haz de luz que gira dando una vuelta entera cada minuto (figura 3.1b). £Con qué velocidad se "mueve" el punto P de la playa iluminado por el haz de luz FP emitido por el faro cuando P está situado a 2 kilómetros del punto Q, que es el punto de la playa más cercano al faro?
3. Un avión que está a 500 kilómetros al norte de Quito viene hacia la capital a 400 kilómetros por hora, mientras que otro, que está a 600 kilómetros al este, lo hace a una velocidad de 300 kilómetros por hora. £A qué velocidad se acercan el uno al otro?
4. Un rectángulo mide 10 metros de altura por 20 metros de base. Si la base aumenta a razón constante de un metro por minuto y la altura disminuye a una razón constante de dos metros por minuto, £con qué velocidad varía el área del rectángulo? El área, £aumenta o disminuye?
5. Si de un recipiente, que tiene la forma de una pirámide truncada invertida de base cuadrada, de 10 metros de altura, de 10 metros el lado del cuadrado más grande y de 5 metros el lado del cuadrado más pequeño, y que está lleno de agua a media altura, se extrae el líquido a una razón constante de un metro cúbico por minuto:
   (a) £Con qué rapidez baja el nivel del agua?
   (b) Si, por otro lado, el nivel del agua sube un metro por hora al bombear agua en el reservorio cuando está lleno hasta la mitad, £cuál es el caudal de agua que se introduce?
6. Un radar que está a 12 kilómetros de una base militar detecta que un avión sobrevuela la base a 9 000 metros de altura y que se dirige hacia el radar, manteniendo su altitud y velocidad. Si la rapidez con que decrece la distancia

[1] Hemos escogido como unidad de longitud el decímetro para que la unidad de volumen sea el litro, que es un decímetro cúbico.

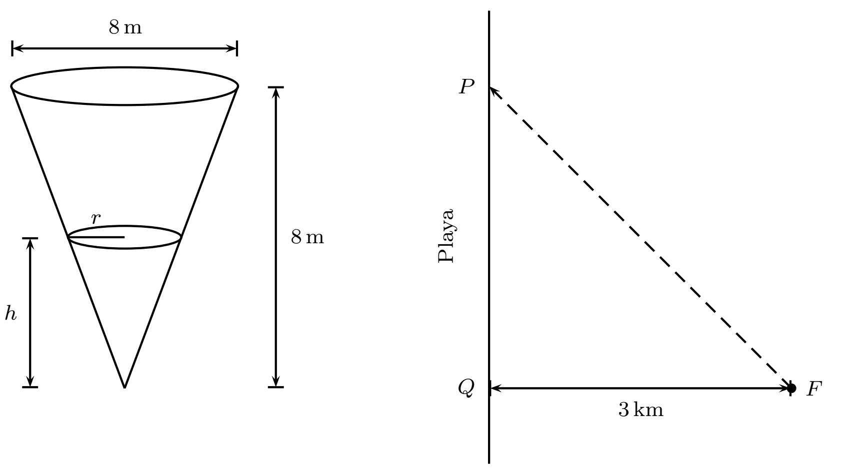
entre el avión y el radar es de 500 kilómetros por hora, £a qué velocidad vuela el avión?

7. £Con qué rapidez varía el área de la corona que queda entre dos circunferencias concéntricas de radios 10 metros y 20 metros respectivamente, si el diámetro de la más pequeña aumenta un metro por hora y el diámetro de la más grande disminuye dos metros por hora? £Y si los diámetros aumentan un metro por hora? Si el diámetro menor crece dos metros, £cómo debe variar el otro para que el área de la corona no cambie?

8. Una partícula se mueve en una trayectoria elíptica cuya forma está dada por la ecuación
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$
Supongamos que las longitudes están expresadas en metros.

   Si se sabe que en un punto de la abscisa 1, ésta se incrementa a una razón de dos metros por segundo, £qué sucede con la ordenada del punto con la abscisa dada? Considere los casos que se derivan según los cuadrantes en los que se halla la ordenada.

9. Un buque se acerca a un faro de 50 metros de altura. Se sabe que el ángulo entre la horizontal y la recta que une el buque con la punta del faro varía a una razón constante de α° por minuto, cuando el buque está a dos kilómetros del faro. £Cuál es la velocidad del buque? £Cuál sería un valor razonable para α?



(a) Ejercicio 1

(b) Ejercicio 2

Figura 3.1: Gráficos de los ejercicios sobre razón de cambio

3.9 Derivación implícita

La representación en el plano cartesiano de las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen una ecuación dada, llamada gráfico de esa ecuación, puede consistir en un punto, en una curva, etcétera.

Cuando ese gráfico es una curva, ésta no es necesariamente el gráfico de una función (sabemos que para que lo sea, su intersección con cualquier vertical tiene que consistir, a lo más, en un punto).

Por ejemplo, el gráfico de $x^2 + y^2 = 25$ es la circunferencia de radio 5 cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas. La recta vertical $x = 3$ la corta en dos puntos, $(3, -4)$ y $(3, 4)$, por lo que esta curva no puede ser el gráfico de una función.

Sin embargo, si tomamos solo un pedazo de esa curva, puede suceder que ese trozo sí cumple con el criterio de los cortes verticales por lo que puede ser el gráfico de una función.

En nuestro ejemplo, si tomamos el trozo de circunferencia que está sobre el eje horizontal, ese pedazo puede considerarse como el gráfico de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

Lo mismo hubiese sucedido si tomábamos la semicircunferencia que está bajo el eje horizontal, que puede considerarse como el gráfico de una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}.$$

En este caso, se dice que las funciones f y g están *definidas implícitamente* por la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 25,$$

o simplemente que son *funciones implícitas.*

Podemos ver que

$$\mathrm{Dm}(f) = \mathrm{Dm}(g) = [-5, 5],$$

y que para todo $x \in [-5, 5]$, se verifican las siguientes igualdades:

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25 \quad \text{y} \quad x^2 + [g(x)]^2 = 25.$$

Por otro lado, se pueden tomar otros pedazos o uniones de pedazos de circunferencia que pueden considerarse gráficos de funciones definidas implícitamente por la misma ecuación $x^2 + y^2 = 25$. En este ejemplo logramos hallar fórmulas para *definir explícitamente* a las funciones f y g.

Si una función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede definirse mediante una fórmula de la forma $y = h(x)$, se dice que h es una *función explícita.*

En general no siempre es posible explicitar una función implícita. Por ejemplo, para la ecuación

$$xy + x^5 + 5x^2y^4 - 9y^5 + 2 = 0, \tag{3.4}$$

vemos que no es posible despejar la y para ponerla en términos de x, es decir que no podemos explicitar las funciones implícitas cuyos gráficos sean subconjuntos del gráfico de esta ecuación.

Sin embargo, gracias a la regla de la cadena, es posible, en estos casos, hallar la derivada de las funciones implícitas, cuando, en las ecuaciones, cada uno de los miembros es una combinación (que consiste de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o composiciones finitas), de las funciones elementales conocidas (polinomios, exponenciales, trigonométricas, o las inversas de las mencionadas).

En estos casos, se puede derivar ambos miembros respecto a la variable consideradas independiente (x en el ejemplo), y luego se despeja fácilmente la derivada de la variable dependiente (y en el ejemplo), que aparece al utilizar la regla de la cadena en las expresiones que contienen la variable dependiente.

Al derivar ambos miembros de la ecuación (3.4), tenemos que:

$$y + xy' + 5x^4 + 10xy^4 + 20x^2y^3y' - 45y^4y' = 0,$$

de donde

$$y' = \frac{y + 5x^4 + 10xy^4}{-x - 20x^2y^3 + 45y^4}.$$

Ejemplo 3.67

Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.

Solución. La ecuación de la recta será

$$y = 4 + m(x - 3),$$

donde m es la pendiente.

Ahora bien, m es la derivada de la función explícita cuyo gráfico es un pedazo de la circunferencia que contenga al punto $(3, 4)$.

Para hallar y', derivemos explícitamente $x^2 + y^2 = 25$. Obtendremos que se verifica la igualdad siguiente:

$$2x + 2yy' = 0,$$

de donde se obtiene la derivada de y:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Para $(x, y) = (3, 4)$ tendremos $m = y' = -\frac{3}{4}$. Entonces, la ecuación de la recta será:

$$y = 4 - \frac{3}{4}(x - 3),$$

que es equivalente a:

$$3x + 4y - 25 = 0.$$

3.10 Ejercicios

1. Si una función $f\colon x \longrightarrow y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente por la ecuación dada a continuación, calcule $y' = f'(x)$.
   (a) $y^5 + y^3 + y - x = 0$.
   (b) $y - x = \epsilon \operatorname{sen} y$ con $|\epsilon| < 1$.
   (c) $y^2 = 2px$, con $y > 0$.
   (d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $y > 0$.
   (e) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $y < 0$.
   (f) $(2za - x)y^2 = x^3$, con $a > 0$ y $y < 0$.
   (g) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.
   (h) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, con $a > 0$, $y > 0$.
   (i) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ con $y < -1$.
   (j) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$ con $x < 2y - 1$.

2. Si una función $f\colon x \longrightarrow y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente por la ecuación dada a continuación, calcule $f'(a)$.
   (a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$, $y > -5$ y $a = 0$.
   (b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$, $y > 0$ y $a = \frac{11}{12}$.
   (c) $e^y + xy = e$, $y > 0$ y $a = 0$.
   (d) $xy + \ln y = 1$, $y < e^2$ y $a = 0$.

3.11 Derivada de la función inversa

Si $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es es inyectiva, existe la función inversa $f^{-1}\colon \operatorname{Im}(f) \longrightarrow D$ tal que

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Se verifican, entonces, las siguientes igualdades:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

para todo $x \in D(f)$; y

$$f(f^{-1}(y)) = y \tag{3.5}$$

para todo $y \in \mathrm{Dm}(f^{-1})$.

Si se conoce la derivada de f, podemos hallar la derivada de f^{-1}. Esto lo podemos hacer con ayuda de la regla de la cadena.

En efecto, la igualdad (3.5) puede ser considerada como una ecuación que define implícitamente x como función de y, donde

$$x = f^{-1}(y).$$

Podemos, entonces, calcular la derivada de x, es decir, la derivada de la inversa de f, si derivamos respecto de y ambos miembros de la igualdad (3.5). Al hacerlo, obtendremos que:

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1,$$

de donde:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \tag{3.6}$$

siempre que $y \in \mathrm{Dm}(f^{-1})$ y que el denominador sea diferente de cero.

Ejemplo 3.68

> Hallar la derivada de ln, la función inversa de f definida por $f(x) = e^x$.

Solución. En primer lugar:

$$f'(x) = e^x = f(x).$$

Por lo tanto:

$$f'(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Entonces, al utilizar la fórmula (3.6), obtenemos que:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\\ &= \frac{1}{f(f^{-1}(y))}\\ &= \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Como $\ln y = f^{-1}(y)$, entonces:

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}.$$

Ejemplo 3.69

> Hallar la derivada de la función arc sen.

Solución. En primer lugar, la función arc sen es la función inversa de la función sen restringida al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sea, entonces, f definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Entonces $f'(x) = \cos x$ y:

$$f'(f^{-1}(y)) = \cos(\operatorname{arc\,sen} y) \tag{3.7}$$

para todo $y \in [-1, 1] = \mathrm{Dm}(\operatorname{arc\,sen})$.

Ahora bien, sabemos que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

de donde

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

y, dado que $\cos x > 0$ para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tenemos que:

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}.$$

Con ayuda de esta última expresión, podemos reescribir la igualdad (3.7) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(y)) &= \cos(\operatorname{arc\,sen} y) \\ &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} y)} \\ &= \sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} y))^2} \\ &= \sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

Entonces, la fórmula (3.6) nos da:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(\operatorname{arc\,sen} y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

para todo $y \in [-1, 1]$.

Ejemplo 3.70

Las derivadas de arc cos, arctan y $\sqrt{\ }$.

Solución. El procedimiento es similar al del ejemplo anterior. Pero hay que considerar lo siguiente.

En el caso del $\arccos$, su dominio es $[-1, 1]$ y su imagen $[0, \pi]$. Esta función es la inversa de la función cos, restringida al intervalo $[0, \pi]$, cuya derivada es $-\operatorname{sen}$.

Como la función sen es positiva en el intervalo $[0, \pi]$, entonces:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Al aplicar la fórmula (3.6), obtendremos que:

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

para todo $y \in [-1, 1]$.

En el caso de arctan, su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y es la función inversa de tan, restringida a este último intervalo.

La derivada de tan es $\sec^2$. Con ayuda de la identidad

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x,$$

verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$, al aplicar la fórmula (3.6), obtendremos que

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + y^2}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

Finalmente, para obtener la derivada de $\sqrt{\ }$, solo hay que recordar que es la función inversa de la función x^2 restringida al intervalo $[0, +\infty]$. Al aplicar la fórmula (3.6), obtendremos que:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

para todo $y > 0$.

3.12 Ejercicios

1. Calcule la derivada $(f^{-1})'(y_0)$:
   (a) $f(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3$, $y_0 \in \{0, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{11}{3}\}$.
   (b) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2}\cos x$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.
   (c) $f(x) = 0.1x + e^{0.01x}$, $y_0 = 1$.
   (d) $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x > 1$ y $y_0 = 0$.
   (e) $f(x) = 2x^2 - x^4$, $0 < x < 1$ y $y_0 = \frac{3}{4}$.
2. Si conoce que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y que $\exp = \ln^{-1}$, calcule $\exp'$.
3. Si conoce que $\exp' = \exp$ y que $\ln = \exp^{-1}$, calcule $\ln'$.
4. Calcule fórmulas para las derivadas de las funciones inversas de sinh, cosh y tanh.
5. Calcule $(f^{-1})'$ y $\mathrm{Dm}((f^{-1})')$:
   (a) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
   (b) $f(x) = \exp x$.
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$, $x < 0$.
   (d) $f(x) = \coth x$, $x > 0$.
6. Si $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, calcule los valores de a y de b para los cuales se verifican las igualdades $(f^{-1})'(a) = +\infty$ y $(f^{-1})'(b) = -\infty$.

3.13 Derivadas de orden superior

Recordemos que, dada una función $f\colon \mathrm{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, se define la función $f'\colon \mathrm{Dm}(f') \longrightarrow \mathbb{R}$, la función derivada de f, cuyo dominio es:

$$\mathrm{Dm}(f') = \{x \in \mathrm{Dm}(f) : \text{ existe } f'(x)\}.$$

Al ser f' una función, es posible que también sea derivable en algunos elementos de su dominio. Esta situación conduce a la siguiente definición.

Definición 3.2 (Derivadas de segundo orden)
Sea $a \in D(f')$ para el cual existe la derivada de f'; es decir, existe $(f')'(a)$. Este número es denominado *segunda derivada de f en a* y es representado por:

$$f''(a) \quad \text{o} \quad \frac{d^2}{dx^2}f(a).$$

Es decir:

$$f''(a) = \frac{d^2}{dx^2}f(a) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f\right)(a) = (f')'(a).$$

Ejemplo 3.71

Calcular la segunda derivada de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x.

Solución. Sea f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces f es derivable en $\mathbb{R}$ y:

$$f'(x) = \cos x.$$

Por lo tanto, f' también es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es igual a la derivada de la función cos:

$$(f')'(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto:

$$(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x.$$

De manera similar se establece que $\cos x$ y e^x tienen segunda derivada y:

$$(\cos x)'' = (-\operatorname{sen} x)' = -\cos x;$$

y

$$(e^x)'' = (e^x)' = e^x.$$

Ahora bien, podría suceder que la función f'' también fuera derivable en algunos elementos de su dominio. Entonces, existiría la función f''', que se definiría por:

$$f''' = (f'')'.$$

Esta función es denominada la *derivada de tercer orden*.

En general, podemos hablar de la derivada de orden n, que se define inductivamente así:

Definición 3.3 (Derivada de orden n)
Sea $f\colon \operatorname{Dm}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define:

1. $f^{(0)} = f$.
2. $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, para $n \geq 0$.

Si existe $f^{(n)}(a)$, este número es denominado la n-ésima derivada de f en a y suele ser representado de la siguiente manera:

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n}{dx^n} f(a).$$

De esta definición, es inmediato que:

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n}{dx^n} f(a) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f\right)(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a).$$

Tiene sentido definir como la derivada de orden 0 a la misma función, pues se puede interpretar esto diciendo que no derivar la función es dejarla intacta.

Ejemplo 3.72

Establecer fórmulas generales para las derivadas de orden n para $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x.

Solución. En el ejemplo anterior, calculamos la segunda derivada de estas tres funciones. Calculemos ahora las derivadas de tercero y cuarto orden.

Para el caso de la función $\operatorname{sen} x$:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^{(3)} &= ((\operatorname{sen} x)^{(2)})' = (-\operatorname{sen} x)' = -\cos x.\\
(\operatorname{sen} x)^{(4)} &= ((\operatorname{sen} x)^{(3)})' = (-\cos x)' = \operatorname{sen} x.
\end{aligned}
$$

Como podemos ver, la derivada de orden 4 de $\operatorname{sen} x$ es igual a la función $\operatorname{sen} x$. Esto significa que la derivada de orden 5 es igual a la primera derivada; la derivada de orden 6, igual a la segunda derivada; la derivada de orden 7, igual a la tercera; y la de orden 8, a la de orden 4. Es decir, las derivadas se repetirán cada cuatro órdenes. Podemos resumir esto de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^{(4n)} &= \operatorname{sen} x.\\
(\operatorname{sen} x)^{(4n+1)} &= \cos x.\\
(\operatorname{sen} x)^{(4n+2)} &= -\operatorname{sen} x.\\
(\operatorname{sen} x)^{(4n+3)} &= -\cos x
\end{aligned}
$$

para todo $n \geq 0$.

De manera similar, se establece para $\cos x$ lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(\cos x)^{(4n)} &= -\operatorname{sen} x.\\
(\cos x)^{(4n+1)} &= -\cos x.\\
(\cos x)^{(4n+2)} &= \operatorname{sen} x.\\
(\cos x)^{(4n+3)} &= \cos x
\end{aligned}
$$

para todo $n \geq 0$.

Finalmente, la derivada de e^x siempre es igual a e^x, por lo que se verifica la siguiente fórmula:

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

para todo $n \geq 0$.

3.14 Ejercicios

Calcule $f^{(n)}$ con $n \in \mathbb{N}$:

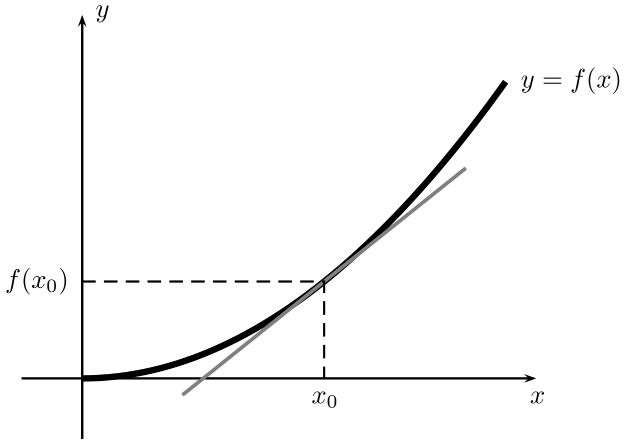
1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ si $n = 2$.
2. $f(x) = x^5 - 7x^2 + 1$ si $n = 2$.
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$.
4. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
5. $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$.
6. $f(x) = \cos(ax)$.
7. $f(x) = \ln x$.
8. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ con $m \in \mathbb{N} - \{0\}$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
10. $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)}$.
11. $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$.

3.15 Diferenciales

La derivada de una función f en un punto dado x_0 es el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, cuya ecuación es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Esta recta suele ser utilizada para aproximar el gráfico de f para valores cercanos a x_0, pues, como se puede apreciar el gráfico que está a continuación, los valores de la recta y de la función son próximos:



Ahora bien, si x varía desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$, el valor correspondiente de y cambia de $y_0 = f(x_0)$ a $y = f(x_0 + \Delta x)$. Este cambio o variación, representado por Δy se calcula así:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Entonces, vamos a utilizar el valor que toma $(x_0 + \Delta x)$ en la recta tangente, en lugar del que toma en f; es decir, en lugar de utilizar el valor $y = f(x_0 + \Delta x)$, utilizamos el dado por la ecuación de la recta tangente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)((x_0 + \Delta x) - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Esto implica que al cambio Δy lo estamos aproximando con el cambio que se produce en la recta al variar x, de x_0 a $x_0 + \Delta x$, que se nota dy y que se calcula así:

$$dy = [f(a) + f'(a)\,\Delta x] - f(a) = f'(a)\,\Delta x.$$

Se suele escribir $\Delta x = dx$; a dx se le llama diferencial de x. A dy se le llama *diferencial de f en a*. Se tiene entonces

$$dy = f'(a)\,dx.$$

Esta igualdad puede interpretarse como la ecuación de la recta tangente en un sistema de coordenadas (dx, dy) cuyo origen está en $(x_0, f(x_0))$ y que es paralelo al sistema de coordenadas (x, y).

Ejemplo 3.73

Si f está definida por $f(x) = 3x^2 + 2$, calcular el diferencial de f en 1.

Solución. Sea $y = f(x) = 3x^2 + 2$. Como $f'(x) = 6x$, para $x_0 = 1$, se tiene que:

$$dy = f'(1)\,dx = 6dx.$$

Ejemplo 3.74

Si g está definida por $g(t) = t + e^t$, calcular el diferencial de g en 2.

Solución. Sea $z = g(t) = t + e^t$. Como $g'(t) = 1 + e^t$, para $t_0 = 2$ se tiene que:

$$dz = g'(2)\,dt = (1 + e^2)dt.$$

Entre las aplicaciones de los diferenciales está la posibilidad de realizar ciertos cálculos aproximados.

Ejemplo 3.75

Calcular un valor aproximado para $\sqrt{50}$.

Solución. Ponemos $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 49, \Delta x = dx = 1$ y aproximamos Δy con dy:

$$dy = f'(x_0)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 1 = \frac{1}{14}.$$

Entonces

$$\sqrt{50} = f(50) = f(49) + \Delta y \approx f(49) + dy = \sqrt{49} + \frac{1}{14} = 7 + \frac{1}{14} = \frac{99}{14}.$$

Si se tiene en cuenta que $\sqrt{50} \approx 7.071068\ldots$ y que $\frac{99}{14} \approx 7.071429\ldots$, vemos que la aproximación es aceptable.

3.16 Ejercicios

1. Halle dy en función de x y de dx:
   (a) $y = x^2 - 3x$.
   (b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.
   (c) $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$.
   (d) $y = x^{\frac{2}{3}}$.
2. Para los valores de Δx y de x dados, calcule Δy y dy:
   (a) $y = x^2+x+1,\ \Delta x \in \{0.1, 0.5, 1\},\ x = 1$.
   (b) $y = \dfrac{2x}{x-1},\ \Delta x \in \{0.1, 0.5\},\ x = 1$.
   (c) $y = \dfrac{1}{x},\ \Delta x \in \{0.1, 0.5\},\ x = 1$.
3. Calcule, mediante diferenciales, un valor aproximado de:
   (a) $\sqrt{26}$.
   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$.
   (c) $\dfrac{0.9^3}{1.9}$.
   (d) $\operatorname{sen}(\pi/3 - 0.1)$.
   (e) $\sqrt{82}$.
   (f) $\dfrac{1}{\sqrt{37}}$.
   (g) $\operatorname{sen} 44°$ (¡Atención: utilice radianes!).
   (h) $(2.1)^3 + 3(2.1)^2$.

3.17 Cálculo de los ceros de funciones derivables

Si conocemos que una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en un intervalo abierto I, posee un cero en dicho intervalo (por ejemplo, si para a, b números reales tales que $a < b$, hemos constatado que $f(a)f(b) < 0$, con lo cual se garantizará, por el teorema del valor intermedio de las funciones continuas, la existencia de un cero $\overline{x}$ entre a y b), es útil conocer métodos para el cálculo aproximado de los ceros.

a) *Método de dicotomía:* Si $f(a)f(b) < 0$, ponemos $c_1 = (a+b)/2$ y c_1 es ya una aproximación del cero buscado, y el error de aproximación satisfará la desigualdad $|\overline{x} - c_1| < (b-a)/2$. Para $f(c_1)$, tenemos tres posibilidades:

   1. $f(c_1) = 0$, con lo cual $\overline{x} = c_1$.
   2. $f(c_1)f(a) < 0$. Se aplica la misma idea y se pone $c_2 = (c_1 + a)/2$, el punto intermedio entre a y c_1, y es una nueva aproximación de $\overline{x}$, y esta vez el error de aproximación satisface la desigualdad $|\overline{x} - c_2| < (b-a)/2^2$.
   3. $f(c_1)f(b) < 0$. Se aplica la misma idea, pero se pone $c_2 = (c_1 + b)/2$.

Y, así sucesivamente, se obtienen aproximaciones c_1, c_2, c_3, etcétera, de $\overline{x}$; en el paso n, para la aproximación c_n del cero $\overline{x}$, el error de aproximación satisface la desigualdad $|\overline{x} - c_n| < (b-a)/2^n$.

Se puede, entonces, calcular el número de pasos necesarios para lograr una aproximación con un error menor a un valor $\epsilon > 0$ pequeño y predeterminado. Si, por ejemplo, se desea obtener una aproximación con k cifras decimales exactas, bastará resolver la desigualdad

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{10^{-k}}{2} \tag{3.8}$$

para obtener el número n de pasos necesarios.

Ejemplo 3.76

Calcule $\sqrt{2}$ con dos cifras decimales exactas mediante el método de dicotomía.

Solución. El número $\sqrt{2}$ es un cero de la función $f\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$. Si en el n-ésimo paso trabajamos con el intervalo $[a_n, b_n]$, poniendo $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, $c_n = (a_n + b_n)/2$, y teniendo en cuenta que la inecuación (3.8) en este caso es

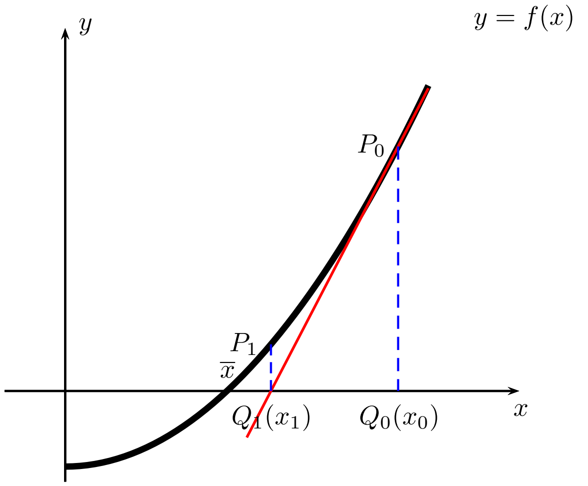
$$\frac{2-1}{2^n} < \frac{0.01}{2},$$

se tiene que $n = 7$ es suficiente. Los cálculos se resumen en el cuadro siguiente:

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	1	2	1.5	-1	2	0.25
1	1	1.5	1.25	-1	0.25	$-0.437\,5$
2	1.25	1.5	1.375	$-0.437\,5$	0.25	$-0.109\,375$
3	1.375	1.5	1.437 5	$-0.109\,375$	0.25	0.066 406 25
4	1.375	1.437 5	1.406 25	$-0.109\,375$	0.066 406 25	$-0.022\,460\,938$
5	1.406 25	1.4375	1.421 875	$-0.022\,460\,938$	0.066 406 25	0.021 728 516
6	1.406 25	1.421875	1.414 0625	$-0.022\,460\,938$	0.021 728 516	$-0.000\,427\,246$
7	1.414 062 5	1.421 875	1.417 968 75	$-0.000\,427\,246$	0.021 728 516	0.010 635 376

Se ve, entonces, que la aproximación buscada con dos decimales exactos es $c_7 = 1.41$.

b) *Método de Newton:* Cuando la función f es, además, derivable, es más efectivo y rápido el método de *Newton*, siempre y cuando la derivada tome valores distintos de 0 en I. La idea de este método es partir de una aproximación cualquiera x_0 del cero $\overline{x}$ y obtener una nueva aproximación x_1, reemplazando el gráfico de f con la tangente a él en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, como se puede observar en el siguiente dibujo:



En el triángulo rectángulo $Q_1Q_0P_0$, tenemos que

$$\tan \angle P_0Q_1Q_0 = \frac{Q_0P_0}{Q_1Q_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Como $\tan \angle P_0Q_1Q_0 = f'(x_0)$, tendremos que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si volvemos a aplicar la misma, pero ahora pariendo de x_1 en lugar de x_2, obtendremos una nueva aproximación x_2 de $\overline{x}$ mediante la fórmula

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

y así sucesivamente. Si notamos $y_n = f(x_n)$ y $y_n' = f'(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, tendremos que

$$x_n = x_{n-1} - \frac{y_{n-1}}{y_{n-1}'},$$

que es una fórmula iterativa de fácil aplicación.

Como criterio para suspender el cálculo, se puede exigir que para un valor $\epsilon > 0$, pequeño y predeterminado, se tenga $|y_n| < \epsilon$.

Apliquemos el método de Newton para volver a calcular una aproximación de $\sqrt{2}$, con $x_0 = 1$, $f(x) = x^2 - 2$ y $f'(x) = 2x$. Los cálculos se resumen en el cuadro siguiente:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1	-1	2
1	1.5	0.25	3
2	1.416 666 667	0.006 944 444	2.833 333 333
3	1.414 215 686	0.000 006 007	2.828 431 373
4	1.414 213 562	4.5×10^{-12}	2.828 427 125
5	1.414 213 562	0	2.828 427 125

La aproximación para el cero es 1.414 213 562.

Vemos que en 4 pasos se tiene ya una aproximación con 8 cifras decimales que no se va a modificar con más iteraciones.

3.18 Ejercicios

1. £En cuántos pasos el método de dicotomía le permitirá calcular el número dado con 3 cifras decimales exactas?
   (a) $\sqrt{3}$.
   (b) $1 + \sqrt{2}$.
   (c) $\sqrt{2} - 1$.
   (d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
   (e) La raíz de $x^3 + 5 = 0$.
   (f) La raíz de $\sinh x + 2 = 0$.
2. Compare los métodos de dicotomía y de Newton para los cálculos de aproximaciones de los números del ejercicio precedente.

Capítulo 4

La derivada: aplicaciones

4.1 Romeo y Julieta: la modelización matemática

Romeo estaba feliz. Acababa de recibir noticias de su amada Julieta, quien logró enviarle clandestinamente un corto recado, escrito apuradamente en un trozo de papel:

—Te esperaré, luego de la cena, en el muelle de mi residencia. Estaré oculta tras el farol que queda junto a los sauces.

El dichoso Romeo, quien descansaba ese momento en sus alojamientos, decidió ir lo antes posible en su bote a la cita. Recordó que, a un costado del lago, crecía un hermoso jardín lleno de bellas rosas en esta época del año, que él sabía que eran de sumo agrado para Julieta. ¡Cómo no llevarle un ramo de esas rosas! Estaba, sin embargo, apurado, porque estaba a punto de atardecer. Debía escoger el camino más corto posible para llegar cuanto antes donde su amada llevándole el más bello ramo de rosas.

Desde el inicio del pensamiento inteligente, éste consistió, fundamentalmente, en la búsqueda de modelos abstractos, teóricos, de la realidad. Pero, simultáneamente, desde el uso de piedrecillas (cálculos) y luego del más sofisticado ábaco, para hacer cuentas, seguido del de la ingeniosa regla de cálculo, y de las maravillosas máquinas electrónicas de que disponemos hoy en día, objetos físicos y máquinas inventadas y construidas por el hombre se constituyen en modelos físicos de objetos abstractos, como son los números y las operaciones que se realizan con ellos, las figuras y objetos geométricos y su representación gráfica.

Las Ciencias Naturales y, cada vez más, las Ciencias Sociales utilizan modelos matemáticos como instrumento fundamental para describir y entender lo más relevante de los objetos o fenómenos estudiados. La tecnología de la producción de bienes y servicios utiliza cada vez más problemas matemáticos como modelos de problemas reales que se presentan en el quehacer creativo. El advenimiento de las computadoras, cada día más poderosas, ha favorecido este fenómeno, porque problemas matemáticos cuya solución "teórica" es demasiado compleja, y a veces prácticamente imposible, es ahora abordable, con excelentes resultados, mediante métodos numéricos que proveen de soluciones aproximadas de calidad.

Es, pues, de vital importancia fortalecer la habilidad del matemático para tender puentes entre la realidad y la matemática, esto es la de utilizar adecuadamente los modelos matemáticos. La modelización matemática consiste, generalmente, en un proceso que puede ser descompuesto en las siguientes etapas, que las ilustraremos con el ejemplo de Romeo y Julieta.

1. *Identificación clara del problema, objeto o fenómeno que se quiere modelizar.* Como resultado de esta fase, se obtiene el "enunciado" del problema o la descripción precisa del objeto o fenómeno estudiado.

2. *Elaboración del modelo.* Consiste en la representación con símbolos y entes matemáticos (números constantes o variables, figuras geométricas, funciones, ecuaciones algebraicas o diferenciales, matrices y otros), los aspectos más relevantes del problema, objeto o fenómeno estudiado. Un aspecto fundamental en esta etapa es la del uso de un sistema coherente de unidades de medida, que permita escoger un modelo matemático que abstraiga este tipo de información, es decir que no contenga ya unidades de medida sino solo números, funciones numéricas, matrices numéricas, etcétera. Como resultado de esta fase, se obtiene el modelo matemático a utilizarse.

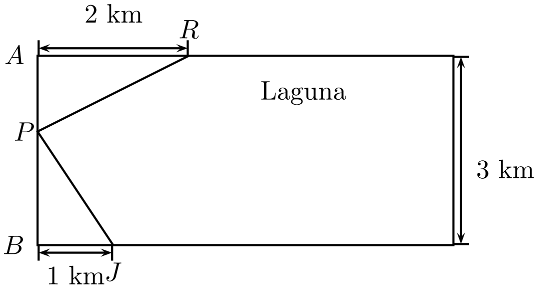
3. *Solución del problema matemático.* Estudio del modelo matemático y solución del problema matemático, de ser el caso. Al final de esta etapa, se obtiene una solución matemática del problema.

4. *Interpretación del modelo matemático.* Se interpretan los resultados del problema matemático para dar respuestas al problema original o se da la adecuada interpretación al estudio del modelo matemático escogido.

En este capítulo, vamos a conocer los métodos matemáticos que permiten resolver problemas como el de Romeo, entre otros. A manera de ejemplo, ilustremos las dos primeras etapas del proceso de modelización con el problema de Romeo y Julieta. Luego de desarrollar las técnicas apropiadas para resolver estos problemas mediante el cálculo diferencial, completaremos las otras dos etapas.

4.1.1 Identificación del problema

Sabemos que las residencias de Romeo y Julieta, representadas con los puntos R y J respectivamente, están separadas por una laguna rectangular de 3 kilómetros de ancho como se ilustra en el siguiente dibujo:



El jardín se halla entre el extremo A del lago, situado a 2 kilómetros de la residencia de Romeo, y el extremo B del lago, situado a 1 kilómetro de la de Julieta. Lo que debemos hallar es el punto P situado en algún lugar de la orilla AB del lago, para que el recorrido total, $RP + PJ$, sea lo más corto posible.

4.1.2 Elaboración del modelo matemático

Este es un problema de extremos, cuya solución se obtiene a través del concepto de derivada. Más adelante estudiaremos el siguiente modelo matemático que es adecuado para el problema de Romeo y Julieta.

> Dado un intervalo I y una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I, se busca $x_m \in I$ tal que
> $$f(x_m) = \min_{x \in I} f(x).$$

Determinemos la que sería la variable x, la función objetivo f y el intervalo I en el caso del problema de Romeo y Julieta.

Para ello, recordemos que lo que debemos minimizar es la longitud del recorrido de Romeo en su barca. Nombremos con d el número de kilómetros de dicha distancia. Entonces, tenemos que

$$d = RP + PJ,$$

donde la longitud del recorrido desde la casa de Romeo, situada en R hasta el punto P —allí el joven recogerá las rosas para su amada—, es igual a RP kilómetros, y la distancia recorrida desde P hasta el punto J —lugar en el que Julieta se encuentra— es igual a PJ kilómetros.

Sea $x = AP$, donde AP kilómetros es la distancia recorrida en línea recta desde A hasta P.

Como datos, tenemos que $AR = 2$, $AB = 3$, $BJ = 1$ y que los ángulos $\angle RAP$ y $\angle ABJ$ son rectos. En el triángulo $\triangle RAP$, RP es la hipotenusa, por lo que

$$RP = \sqrt{x^2 + 4}.$$

En el triángulo rectángulo $\triangle PBJ$, se tiene que $PB = 3 - x$. Entonces, por el teorema de Pitágoras, otra vez, se tiene que:

$$PJ = \sqrt{(3 - x)^2 + 1}.$$

Finalmente, tenemos que:

$$d = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(3 - x)^2 + 1}.$$

Puesto que se busca que la distancia d recorrida por Romeo sea la mínima, la función cuyo mínimo hay que hallar es f definida por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(3 - x)^2 + 1}.$$

De la definición de x —la distancia entre A y P—, se tiene que $x \in (0, 3) = I$. Entonces, $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida para todo $x \in I$.

Lo que resta del capítulo, lo vamos a dedicar a aprender cómo encontrar dicho x en I que optimice la función f.

4.2 Extremos globales o absolutos

Definición 4.1 (Conjunto acotado)
Un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es **acotado por abajo (arriba)** si existe $c_1 \in \mathbb{R}$ ($c_2 \in \mathbb{R}$) tal que $x \geq c_1$ ($x \leq c_2$) para todo $x \in A$. A c_1 se le llama **cota inferior de** A y a c_2, **cota superior de** A.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y no vacío. Si A es acotado por abajo, como consecuencia del axioma de completitud del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, existe la más grande de las cotas inferiores de A, a la que se le llama **ínfimo de** A y se la representa por $\operatorname{ínf} A$.

Análogamente, si A es acotado por arriba, existe la más pequeña de las cotas superiores de A, que se llama **supremo de** A y se la representa por $\sup A$.

Evidentemente, en estos casos, se verifican las siguientes desigualdades:

$$x \geq \operatorname{ínf} A \quad \text{y} \quad x \leq \sup A$$

para todo $x \in A$.

Puede ocurrir que $\inf A \in A$. En este caso, al ínfimo se le llama **mínimo de** A y se lo representa por $\min A$.

De manera similar, puede suceder que $\sup A \in A$, en cuyo caso, se lo denomina **máximo de** A y se lo representa por $\max A$.

Si A no es acotado por abajo, se dice que el ínfimo es $-\infty$ y se escribe $\inf A = -\infty$. Si A no es acotado por arriba, se dice que el supremo es ∞ y se escribe $\sup A = \infty$.

Usando la notación de los "infinitos", cuando A es acotado por abajo, se suele escribir $\inf A > -\infty$, y cuando es acotado por arriba, $\sup A < \infty$.

Resumamos estos conceptos en la siguiente definición:

Definición 4.2 (Ínfimo, supremo, mínimo y máximo)
Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces, se define

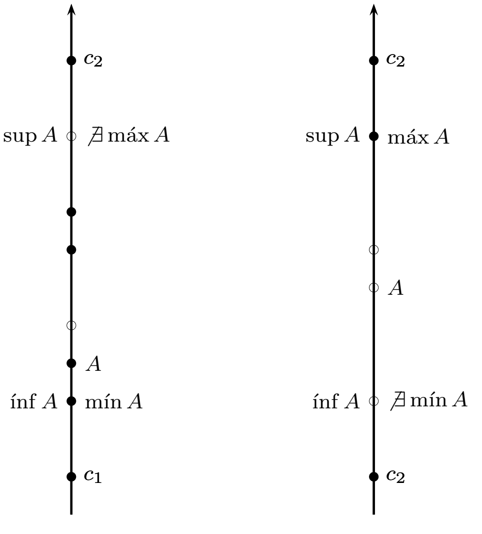
$$\inf A = \begin{cases} \text{más grande de las cotas inferiores de } A & \text{si } A \text{ es acotado por abajo,} \\ -\infty & \text{si } A \text{ no es acotado por abajo;} \end{cases}$$

$$\sup A = \begin{cases} \text{más pequeña de las cotas superiores de } A & \text{si } A \text{ es acotado por arriba,} \\ \infty & \text{si } A \text{ no es acotado por arriba;} \end{cases}$$

$\min A = \inf A$ si $\inf A \in A$ y $\inf A > -\infty$;

$\max A = \sup A$ si $\sup A \in A$ y $\sup A < \infty$.

En el siguiente dibujo se ilustran estas definiciones:



En el dibujo, representamos, sobre sendas rectas reales verticales, dos casos cuando $A \subset \mathbb{R}$ es acotado por arriba y por abajo. En casos así, se dice, simplemente, que A es acotado. Se tiene, entonces, la siguiente definición.

Definición 4.3 (Conjunto acotado)
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si y solo si A es acotado por arriba y por abajo.

En otras palabras, un conjunto A es acotado si y solo existen dos constantes reales c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \leq x \leq c_2$$

para todo $x \in A$. Si tomamos $R = |\max\{c_1, c_2\}|$, entonces, A es acotado si y solo si existe $R > 0$ tal que
$$|x| < R$$
para todo $x \in A$.

La siguiente es una caracterización del supremo y del ínfimo, muy útil a la hora de trabajar con estos dos números.

Teorema 4.1
Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces:

1. Si $\inf A > -\infty$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $\inf A \leq a < \inf A + \epsilon$.
2. Si $\inf A < \infty$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $\sup A - \epsilon < a \leq \sup A$.

Es decir, el $\inf A$ $(\sup A)$ puede ser aproximado por un elemento de A con la precisión que queramos.

Gracias a estos conceptos, podemos introducir otros análogos para las funciones reales, que son aquellas cuyo conjunto de llegada es $\mathbb{R}$.

Definición 4.4 (Función acotada)
Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, las función f es:

1. **acotada por abajo (arriba)** si y solo si el conjunto $\mathrm{Im}(f)$ es acotado por abajo (arriba).
2. **acotada** si y solo si el conjunto $\mathrm{Im}(f)$ es acotado.

A partir de las definiciones de conjuntos acotados, podemos caracterizar de la siguiente manera a las funciones acotadas.

Teorema 4.2
Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, las función f es:

1. **acotada por abajo** si y solo si el conjunto existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) \geq c_1,$$
2. **acotada por arriba** si y solo si el conjunto existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) \leq c_2,$$
3. **acotada** si y solo si el conjunto existen $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$ tales que
$$c_1 \leq f(x) \leq c_2,$$
4. **acotada** si y solo si el conjunto existe $R > 0$ tal que
$$|f(x)| < R,$$

para todo $x \in \Omega$.

Tenemos las siguientes definiciones.

Definición 4.5

Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos:

1. $\inf\limits_{x\in\Omega} f(x) = \inf \operatorname{Im}(f)$.
2. $\sup\limits_{x\in\Omega} f(x) = \sup \operatorname{Im}(f)$.
3. $\min\limits_{x\in\Omega} f(x) = \min \operatorname{Im}(f)$.
4. $\max\limits_{x\in\Omega} f(x) = \max \operatorname{Im}(f)$.

En el caso de que exista $\min \operatorname{Im}(f)$, existe $x_m \in \Omega$ tal que

$$f(x_m) = \min_{x\in\Omega} f(x).$$

Se dice, entonces, que **la función f alcanza su mínimo en x_m**.

De manera similar, si existiera $\max \operatorname{Im}(f)$, existiría $x_M \in \Omega$ tal que

$$f(x_M) = \max_{x\in\Omega} f(x).$$

Se dice, entonces, que **la función f alcanza su máximo en x_M**.

Los números x_m y x_M podrían no ser únicos; es decir, una función podría alcanzar o su máximo o su mínimo en varios elementos de su dominio. Por ejemplo, la función f definida por $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alcanza su valor máximo 1 tanto en $-\frac{\pi}{2}$ como en $\frac{\pi}{2}$.

A los números $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$, que se lee "mínimo de f en Ω", y $\max\limits_{x\in\Omega} f(x)$, que se lee "máximo de f en Ω", se les llama **extremos globales o absolutos de f**.

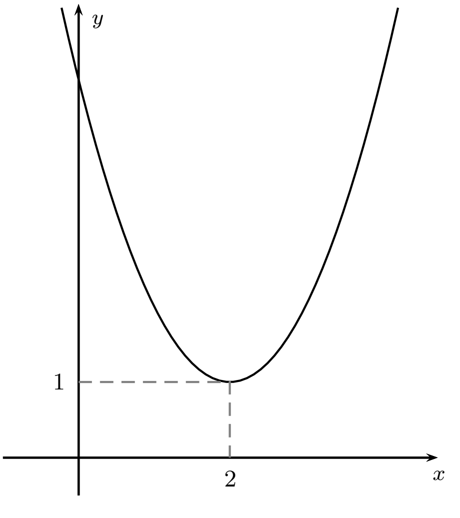
Ilustremos estos conceptos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.77

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + (x-2)^2.$$

1. Supongamos que $\Omega = \mathbb{R}$. Entonces, el gráfico de f es la parábola cuyo vértice es el punto de coordenadas $(2, 1)$, como se puede ver en el siguiente dibujo:



Se puede ver, entonces, que la función f es:

(a) no acotada por arriba, por lo que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$;

(b) acotada por abajo y:

$$\operatorname*{ínf}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \operatorname*{mín}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(2) = 1.$$

2. Supongamos que $\Omega = [1, 4[$. Entonces la función f es:

   (a) acotada por arriba, $\sup\limits_{x\in\Omega} f(x) = 5$ y no existe $\operatorname*{máx}\limits_{x\in\Omega} f(x)$;

   (b) acotada por abajo, $\operatorname*{ínf}\limits_{x\in\Omega} f(x) = 1 = \operatorname*{mín}\limits_{x\in\Omega} f(x) = f(2)$;

   (c) acotada.

3. Supongamos que $\Omega =]2, 4]$. Entonces la función f es:

   (a) acotada por arriba, $\sup\limits_{x\in\Omega} f(x) = 5 = \operatorname*{máx}\limits_{x\in\Omega} f(x) = f(4)$;

   (b) acotada por abajo, $\operatorname*{ínf}\limits_{x\in\Omega} f(x) = 1$, no existe $\operatorname{mín}_{x\in\Omega} f(x)$;

   (c) acotada.

4. Supongamos que $\Omega = [1, 4]$. Entonces la función f es:

   (a) acotada;

   (b) $\sup\limits_{x\in\Omega} f(x) = 5 = \operatorname*{máx}\limits_{x\in\Omega} f(x) = f(4)$;

   (c) $\operatorname*{ínf}\limits_{x\in\Omega} f(x) = 1 = \operatorname*{mín}\limits_{x\in\Omega} f(x) = f(2)$.

El último numeral del ejemplo es un caso particular del resultado notable sobre la existencia de los extremos globales:

Teorema 4.3 (Existencia de los extremos globales para funciones continuas)
Sean a y b en $\mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua en $[a, b]$. Entonces existen x_m y x_M en $[a, b]$ tales que

$$f(x_m) = \operatorname*{mín}_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_M) = \operatorname*{máx}_{x\in[a,b]} f(x).$$

Además, se tiene que $\operatorname{Im}(f) \subset [f(x_m), f(x_M)]$; es decir:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Como se verá más adelante, en realidad, se tiene que $\operatorname{Im}(f) = [f(x_m), f(x_M)]$.

El último ejemplo muestra lo indispensable que resulta exigir que Ω sea un intervalo cerrado y acotado. Por ejemplo, si Ω es uno de los siguientes intervalos: $]-\infty, b]$, $\mathbb{R}$, $[a, +\infty[$, $]a, b]$, $]a, b[$, etcétera, el resultado podría no darse.

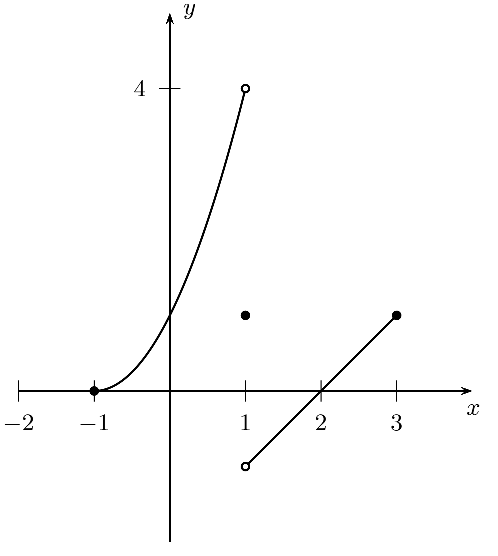
Es también de suma importancia que la función f sea continua. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.78

Sean $\Omega = [-1, 3]$ y $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } -1 \le x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ -2 + x & \text{si } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

El siguiente es el gráfico de f:



Como se puede ver, f no es continua en $x = 1$, por lo que f no es continua en Ω. También se puede ver que

$$\sup_{x\in\Omega} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \nexists \max_{x\in\Omega} f(x)$$

y que

$$\inf_{x\in\Omega} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \nexists \min_{x\in\Omega} f(x).$$

Si I es un intervalo y $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, el cálculo de $\operatorname{Im}(f)$ puede no ser tan simple como el dado en el teorema 4.3 para el caso $I = [a, b]$. Es muy útil, en estos casos, expresar I (cuando sea posible) como la unión finita de subintervalos de I, digamos $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$, de modo que f sea monótona en cada uno de los subintervalos I_k, porque se puede aplicar el resultado que sigue y el hecho de que $\operatorname{Im}(f) = \bigcup\limits_{k=1}^{N} f(I_k)$, donde $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ y A es un subconjunto del dominio de f.

Lema 4.1
Sean $I =]a, b[$ y $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, continua y monótona en I. Entonces $f(I)$ es el intervalo abierto de extremos $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

De manera más precisa, si $A = \lim_{x\to a^+} f(x)$ y $B = \lim_{x\to b^-} f(x)$, entonces

$$\operatorname{Im}(f) =]A, B[$$

si f es creciente; en cambio:

$$\operatorname{Im}(f) =]B, A[$$

si f es decreciente.

Si alguno de los límites laterales es infinito, digamos que $A = -\infty$; entonces tenemos que

$$\mathrm{Im}(f) =]-\infty, B[.$$

El lema sigue siendo verdadero si en lugar de intervalos finitos se tienen intervalos infinitos. Por otro lado, si I es cerrado en un de los dos extremos, o ambos, al ser f una función continua en I, el limite se reemplaza con el correspondiente valor de la función. Por ejemplo, si $I = [a, b[$ y f es decreciente, entonces

$$\mathrm{Im}(f) =]B, f(a)].$$

Ejemplo 4.79

Si $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

donde $I =]-1, 4]$, vamos a encontrar su imagen.

Sabemos que el gráfico de f es una parábola de vértice el punto de coordenadas $(2, -1)$ tal que la parábola es decreciente en $]-\infty, 2]$ y creciente en $[2, +\infty[$. En particular, f es decreciente en $I_1 =]-1, 2]$ y creciente en $I_2 = [2, 4]$. Además sabemos que $I = I_1 \cup I_2$.

Sabemos que

$$f(I_1) = [f(2), \lim_{x \to -1^+} f(x)[= [f(2), f(-1)[,$$

ya que f es continua en I. Por lo tanto:

$$f(I_1) = [-1, 8[.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$f(I_2) = [f(2), f(4)] = [-1, 3].$$

Entonces:

$$\mathrm{Im}(f) = f(I_1) \cup f(I_2) = [-1, 8[\cup[-1, 3] = [-1, 8[.$$

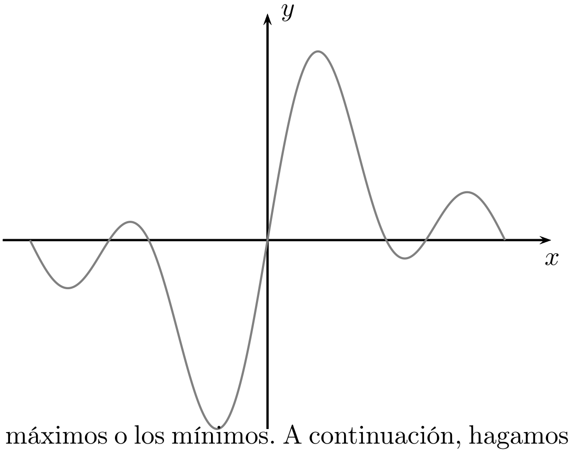
Además:

$$\min_{x \in I} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \sup_{x \in I} f(x) = 8$$

y no existe el máximo de f en I.

4.3 Extremos locales o relativos

Dada una función real f definida en un intervalo I, el gráfico de f puede tener "montes y valles", como se ilustra en gráfico de la derecha. Es interesante poder hallar las cimas —punto más alto de los montes, cerros y collados— y simas —cavidad grande y muy profunda en la tierra— que corresponderán a "máximos locales" y a "mínimos locales", respectivamente. £Qué queremos decir con "locales"? Que, como se aprecia en la figura, son los puntos más altos o los más bajos pero solamente en una "zona próxima a ellos" y no con respecto a todo el intervalo I. En otras palabras, "localmente" son los máximos o los mínimos. A continuación, hagamos precisas estas nociones y cómo los extremos locales nos permiten hallar los extremos globales para el caso de las funciones continuas.



Definición 4.6 (Extremos locales)
Sean I un intervalo y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sean $\underline{x}$ y $\overline{x}$ dos elementos de I. Entonces:

1. la función f **alcanza un mínimo local o relativo en** $\underline{x}$ si y solo si existe $r > 0$ tal que
$$f(\underline{x}) \leq f(x)$$
para todo $x \in I\cap\,]\underline{x} - r, \underline{x} + r[$.
2. la función f **alcanza un máximo local o relativo en** $\overline{x}$ si y solo si existe $r > 0$ tal que
$$f(\overline{x}) \geq f(x)$$
para todo $x \in I\cap\,]\underline{x} - r, \underline{x} + r[$.

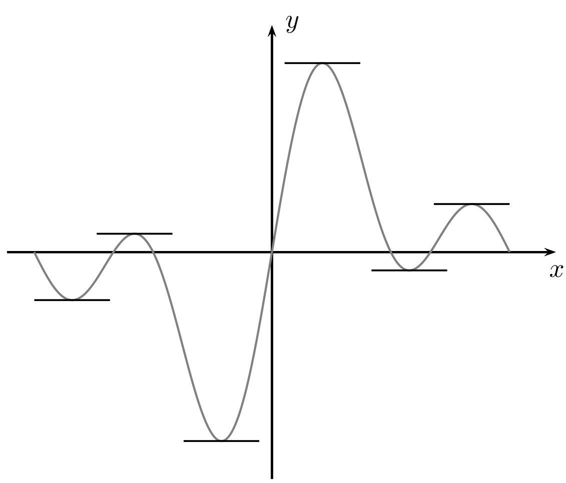
En otras palabras, un mínimo local en $\underline{x}$ es el valor más pequeño que toma una función en un cierto intervalo centrado en $\underline{x}$. De manera similar, un máximo local en $\overline{x}$ es el valor más grande que toma una función en un cierto intervalo centrado en $\overline{x}$.

Definición 4.7 (Interior de un intervalo)
Sea I un intervalo abierto. El interior de I, representado con I°, es el intervalo abierto más grande que está contenido en I.

Ejemplo 4.80

El interior de $I = [a, b]$ es $I^\circ =]a, b[$. El interior de $I = [a, b[$ es $I^\circ =]a, b[$. Para $I =]-\infty, b[$, el interior I° es $]-\infty, b[$.

Lo que ahora nos interesa es determinar un método para la obtención de los extremos locales de una función; es decir, para la localización de los máximos y mínimos locales de una función. En el dibujo de la derecha, podemos observar que las rectas tangentes en los extremos de la función lucen como rectas horizontales, es decir, con pendiente igual a 0. Si esto es así, la derivada de la función debería ser igual a 0 en estos puntos. Y esto es, efectivamente, así. Es decir, la recta pendiente en un extremo es horizontal. Por ello, se introduce el concepto de punto crítico. Luego de la siguiente definición se enuncia el teorema ilustrado por el dibujo.



Definición 4.8 (Punto crítico)
Dada una función real f, continua en un intervalo I de extremos a y b ($a < b$), a un número c del interior de I se lo llama **punto crítico de** f si y solo si $f'(c) = 0$ o si no existe $f'(c)$, es decir, si f no es derivable en c.

Ejemplo 4.81

Sea $f\colon [-2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } -2 \le x \le 1, \\ 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13 & \text{si } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

Encontremos los puntos críticos de f.

Definamos p_1 y p_2 de la siguiente manera:

$$p_1(x) = 1 - x^2 \quad \text{y} \quad p_2(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13.$$

Entonces, f es continua en $[-2,3]$ pues:

1. En el intervalo $[-2,1]$, la función $f = p_1$, por lo que f es continua en el abierto $]-2,1[$, continua en -2 por la derecha y continua en 1 por la izquierda.
2. En el intervalo $]1,3]$, la función $f = p_2$, por lo que f es continua en el abierto $]1,3[$ y continua en 3 por la izquierda.
3. En el punto $x = 1$, tenemos que:

   $$f(1) = p_1(1) = 0 = p_2(1) = \lim_{x \to 1^+} p_2(x),$$

   por lo que f es continua en 1.

Por otro lado, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 \le x < 1, \\ 6x^2 - 6x - 12 & \text{si } 1 < x \le 3, \end{cases}$$

y para $x = 1$, no existe $f'(x)$, pues

$$f'_-(1) = -2 \neq -12 = f'_+(1).$$

Entonces

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} -2x = 0 & \text{si } -2 \le x < 1, \\ 6x^2 - 6x - 12 = 0 & \text{si } 1 < x \le 3, \end{cases}$$

de donde

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{0, 2\}.$$

Por lo tanto, de acuerdo a la definición de punto crítico, a más de 0 y de 2, el número 1 también es un punto crítico de f.

El siguiente teorema es el mecanismo que tenemos para la determinación de los extremos relativos.

Teorema 4.4 (Extremos locales)
Sean I un intervalo, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in I^\circ$. Si f alcanza un extremo local en c, entonces c es un valor crítico de f.

Usaremos este teorema para la obtención de los extremos absolutos de una función real continua definida en un intervalo cerrado y acotado.

En efecto, supongamos que $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Entonces, existen x_m y x_M en $[a,b]$ en los cuales f alcanza el mínimo y el máximo globales, respectivamente. Sea K el conjunto de todos los puntos críticos de f; es decir:

$$K = \{c \in\,]a,b[: c \ \text{ es un punto crítico de } \ f\}.$$

Se tiene entonces que $x_m \in \{a,b\} \cup K$ y que $x_M \in \{a,b\} \cup K$, pues todo extremo global también es un extremo local.

Ahora bien, si K es finito, por ejemplo, $K = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, y es conocido, para encontrar los extremos globales de f es suficiente que hagamos una tabla de valores con los elementos del conjunto

$$\{f(a), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_N), f(b)\}.$$

Es obvio que el mayor de estos números corresponderá al máximo global de f y el menor, al mínimo global. En el caso de que $K = \emptyset$, los únicos extremos son $f(a)$ y $f(b)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.82

Sea $I = [0, \frac{5}{2}]$ y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$$

Determinemos el conjunto K.

Como $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-2)(x-1)$, tenemos que los $c \in I$ que satisfacen la igualdad $f'(c) = 0$ son $c = 1$ y $c = 2$. Además, como f es derivable en el interior de I, el conjunto K es, entonces $K = \{1, 2\}$.

Ahora construyamos la tabla de valores de f en $K \cup \{f(0), f(\frac{5}{2})\}$:

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$
$f(x)$	0	5	4	17.5

Por lo tanto, la función f alcanza el mínimo en 0 y el máximo en $\frac{5}{2}$. Además:

$$\min_{x \in I} f(x) = 0 = f(0) \quad \text{y} \quad \max_{x \in I} f(x) = 17.5 = f\left(\frac{5}{2}\right).$$

4.4 Monotonía

Dada una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, se dice que f es creciente si al aumentar el valor de la variable independiente x, lo hace también el valor $f(x)$. Si $f(x)$ decrece, entonces se dice que f es decreciente. Precisemos estos conceptos.

Definición 4.9 (Funciones creciente y decreciente)
Sean I un intervalo y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la función f es

1. **creciente en** I si y solo si $f(x_1) < f(x_2)$
2. **no decreciente en** I si y solo si $f(x_1) \leq f(x_2)$
3. **decreciente en** I si y solo si $f(x_1) > f(x_2)$
4. **no creciente en** I si y solo si $f(x_1) \geq f(x_2)$
5. **monótona** si y solo si es creciente o decreciente

para todo $x_1 \in I$ y todo $x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$;

Es claro de la definición que una función puede ser creciente en un subintervalo pero creciente en otro.

Ejemplo 4.83

Sea $f\colon]\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinemos si es creciente o decreciente. Para ello, sean x_1 y x_2 tales que sean mayores que $\frac{3}{2}$ y $x_1 < x_2$. Ahora estudiemos el signo de $f(x_2) - f(x_1)$.

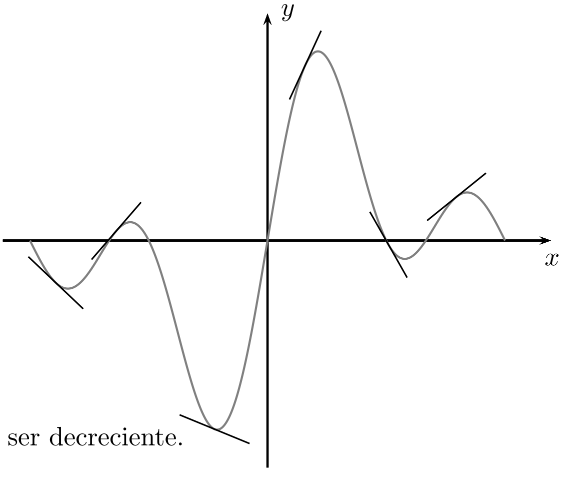
Para ello, observemos que:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^2 - 3x_2 + 2) - (x_1^2 - 3x_1 + 2) \\ &= (x_2^2 - x_1^2) - 3(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 3) \\ &= (x_2 - x_1)[(x_2 - \frac{3}{2}) + (x_1 - \frac{3}{2})] > 0, \end{aligned}$$

pues $x_1 < x_2$, $x_1 > \frac{3}{2}$ y $x_2 > \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $f(x_1) < f(x_2)$; es decir, f es creciente.

Probar que una función es creciente o decreciente no siempre es una tarea sencilla como la que muestra el último ejemplo. El lector podrá convencerse de esta afirmación si estudia la monotonía de la función f definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ con el método utilizado en el ejemplo. Constataría lo engorrosos que pueden llegar a ser los cálculos.

Viene entonces en nuestra ayuda un resultado que se ilustra, previamente, en el dibujo de la derecha. Podemos observar que la recta tangente en cualquier punto de la curva en los intervalos en los que es creciente tiene una pendiente positiva. En cambio, en los intervalos en que la curva es decreciente, la pendiente es negativa.



Esta observación, y el hecho de que la derivada representa la pendiente de la tangente, inducen a pensar que si la derivada de una función fuera positiva en (a, b), esa función debería ser creciente en ese intervalo y, en el caso contrario, si la derivada fuera negativa, la función debería ser decreciente.

Teorema 4.5

Sean I un intervalo de extremos $a < b$ $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua en I. Si, además, f es derivable en $]a, b[$, entonces:

1. si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en I; y
2. si $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en I.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.84

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$. Como $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$, los signos de f son los siguientes:

x		1		2	
$(x-1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vemos, entonces, que $f'(x) > 0$ si $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ y que $f'(x) < 0$ si $x \in]1, 2[$. Por lo tanto, la función f es creciente en $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ y es decreciente en $]1, 2[$.

Corolario 4.6 (Extremos locales)
Sean I un intervalo abierto, $c \in I$ y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $I - \{c\}$. Si c es un punto crítico de f y $f'(x)$ cambia de signo en c, entonces f alcanza un extremo local en c. De manera más precisa: si $x \in I$ y

1. si $f'(x) < 0$ para todo $x < c$; y
2. si $f'(x) > 0$ para todo $x > c$,

entonces f alcanza un mínimo local en c; y

1. si $f'(x) > 0$ para todo $x < c$; y
2. si $f'(x) < 0$ para todo $x > c$,

entonces f alcanza un máximo local en c.

Ejemplo 4.85

En el ejemplo precedente, si f está definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, la derivada $f'(x)$ de esta función cambia de signo en 1 y en 2. Antes de 1 es creciente, luego de 1 es decreciente; por lo tanto, f alcanza un máximo local en 1. Antes de 2 es decreciente y luego es creciente. Entonces, f alcanza un mínimo local en 2.

4.5 Ejercicios

1. Para la función f, halle los puntos críticos y los intervalos de monotonía. Distinga los puntos críticos que son extremos locales:
   (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.
   (b) $f(x) = 6x^4 - 8x^3 + 2$.
   (c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.
   (d) $f(x) = x^{\frac{4}{2}} - x^{\frac{1}{3}}$.
   (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+7)^{\frac{1}{3}}}$.
   (f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$.
   (g) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-x}}$.
   (h) $f(x) = (5x+2)^{\frac{1}{3}}$.
   (i) $f(x) = x^2(x+7)^{\frac{1}{3}}$.
   (j) $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$.
2. Halle los extremos absolutos de f en el intervalo I:
   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$; $I = [-1, 4]$.
   (b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $I = [-1, 3]$.
   (c) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$; $I = [0, 10]$.
   (d) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x)$; $I = [0, 2]$.
   (e) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$; $I = [-2, 4]$.
   (f) $f(x) = (x+1)^4(x-2)^2$; $I = [0, 5]$.
   (g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2}$; $I = \left[\dfrac{5}{4}, 5\right]$.
3. Halle los valores críticos y los extremos absolutos y relativos de la función f en el intervalo I:
   (a) $f(x) = x^4 - 4 - |x+2|$; $I = [-3, 3]$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } -2 \le x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{si } 1 \le x \le 3; \end{cases}$
   $I = [-2, 3]$.
   (c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$; $I = [-2, 3]$.
   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } -2 \le x < 1, \\ x^3 - 3x^2 + 2 & \text{si } 1 \le x \le 3; \end{cases}$

$I = [-2, 3]$.

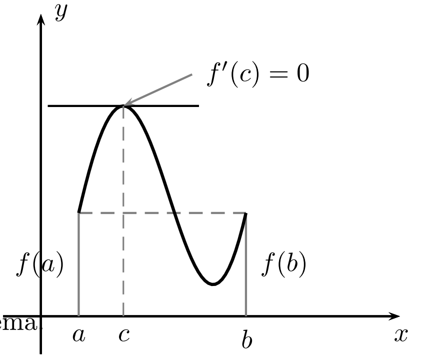
(e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1} - 1$; $I = [-10, 10]$.

(f) $f(x) = \lfloor x \rfloor$; $I = [-10, 2]$.

(g) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $I = [-L, L]$, con $L > 0$, y si $ad \neq bc$ o si $ad = bc$.

4.6 Teoremas del valor intermedio

En el dibujo de la derecha, se muestra el gráfico de una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ que es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Parece que, en el punto $c \in (a, b)$, punto en el que la función f alcanza un máximo local, la tangente al gráfico de f es horizontal; es decir, $f'(c) = 0$, de donde c es un punto crítico. Aunque no está dibujado, el punto dónde se alcanza el mínimo local, la recta tangente es también paralela al eje horizontal; esto significa también que ese punto es un punto crítico.



Y esta situación es siempre verdadera bajo las hipótesis adecuadas, como se expresa en el siguiente teorema

---

Teorema 4.7 (Teorema de Rolle)
Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(a) = f(b).$$

Entonces, existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejemplo 4.86

Vamos a utilizar el teorema de Rolle para averiguar si la función f definida por

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

tiene puntos críticos en el intervalo $]-\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+1[$.

Como f es derivable en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio, es continua en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, también es continua en $]-\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+1[$. Por lo tanto, los puntos críticos son todos los $x \in]-\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+1[$ para los cuales $f'(x) = 0$.

Como $f(-\sqrt{3}+1) = f(\sqrt{3}-1) = 0$, el teorema de Rolle nos garantiza que existe c en $]-\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+1[$ tal que $f'(c) = 0$. Para hallar tales números c, debemos resolver la ecuación $f'(c) = 0$.

Ahora bien, como $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, tenemos que

$$f'(c) = 0 \iff c(c-2) = 0 \iff c \in \{0, 2\}.$$

En resumen, los números 0y 2 son los puntos críticos buscados, puesto que $\{0, 2\}$ está incluido en $]-\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+1[$.

Teorema 4.8 (Teorema del valor intermedio o de los incrementos finitos)
Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o también:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ejemplo 4.87

Sea f la función real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Veamos cómo se aplica el teorema del valor intermedio en el intervalo $[1, 3]$.

Como f es un polinomio, es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ y, por ende, es continua en el intervalo $[1, 3]$ y derivable en el intervalo $]1, 3[$. Entonces, se verifican las hipótesis del teorema del valor intermedio, el que nos garantiza que existe $c \in\,]1, 3[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 1}{3 - 1} = 1.$$

Como $f'(x) = 3x^2 - 6x$, el número c satisface la ecuación

$$3c^2 - 6c = 1.$$

Las raíces de esta ecuación son $c_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $c_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Puesto que $c_1 \notin\,]1, 3[$, entonces el número c del teorema del valor intermedio es c_2.

Supongamos que una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de extremos a y b tales que $a < b$, tiene derivada nula en $]a, b[$; es decir, supongamos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in\,]a, b[$. Tomemos dos elementos en I, x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$. Si sucediera que $f(x_1) \neq f(x_2)$, por el teorema del valor intermedio, existe $c \in\,]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por un lado, $f'(c) = 0$; por otro, como $x_1 \neq x_2$ y, hemos supuesto que $f(x_1) \neq f(x_2)$, tenemos que

$$0 = f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0.$$

Esta contradicción nos indica que no es posible que $f(x_1) \neq f(x_2)$; por lo tanto, la función f debe ser constante en $]a, b[$.

Resumamos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 4.9
Si f está definida en un intervalo I de extremos a y b, y si f es derivable en el abierto tal que su derivada es igual a 0, entonces f es constante en I.

Finalmente, el siguiente es una generalización del teorema del valor intermedio. En los ejercicios de esta sección, se provee una sugerencia para la demostración del teorema general.

Teorema 4.10 (Teorema general del valor intermedio)
Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y que $g(a) \neq g(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.7 Ejercicios

1. Verifique si en el intervalo I se puede aplicar el teorema de Rolle para la f dada. De ser así, halle los c cuya existencia garantiza el mencio-

nado teorema.

(a) $f(x) = x^2 - 5$; $I = [-2, 2]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } -3 \leq x < 0, \\ -x^3 + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \end{cases}$

$I = [-3, 3]$.

(c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$; $I = [0, 1]$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ 8 - x^3 & \text{si } 0 < x \leq 1; \end{cases}$

$I = [-2, 1]$.

(e) $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$; $I = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$.

(f) $f(x) = \sec x$; $I = [0, 2\pi]$.

2. Verifique si en el intervalo I la función f satisface las hipótesis del teorema del valor intermedio. De ser así, halle los valores de c cuya existencia nos es garantizada por dicho teorema.

(a) $f(x) = x^3 - x + 1$; $I = [0, 3]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } -2 \leq x < 0, \\ 2 - x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \end{cases}$

$I = [-2, 3]$.

(c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$; $I = [0, 1]$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ 3 - x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

$I = [-2, 1]$.

(e) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } -3 \leq x \leq 1, \\ 2x^2 + 3x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$

$I = [-3, 2]$.

(f) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$; $I = [-1, 27]$.

3. Un camionero entra en una autopista y recibe un talón que marca la hora de ingreso, las 7 horas con 55 minutos. Antes de salir, 250 kilómetros después, paga el peaje y el recibo marca el valor pagado y la hora del pago: 10 horas con 35 minutos. Un policía le revisa los documentos y le multa por exceso de velocidad. £Cuál cree que era el límite de velocidad para el transporte pesado en ese tramo? Justifique su respuesta sustentándose en el teorema del valor intermedio.

4. Mediante el teorema del valor intermedio, demuestre el siguiente teorema (de los incrementos finitos). Sean I un intervalo abierto, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I, $x_0 \in I$ y Δx tales que $x_0 + \Delta x \in I$. Entonces existe $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x.$$

5. Usando el teorema de Rolle, pruebe el teorema general del valor medio. Sugerencia: Defina $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

6. Sea $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$. Use el teorema de Rolle para probar que la ecuación $f(x) = 0$ no puede tener dos raíces reales si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

7. Use el teorema de Rolle y el método de inducción para probar que un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y coeficientes reales tiene a lo sumo n raíces reales.

4.8 Convexidad

4.8.1 Punto intermedio

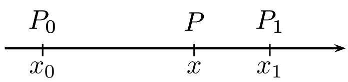
Sean P_0 y P_1 dos puntos cualesquiera, distintos entre sí y situados sobre una recta real. Sean x_0 y x_1 sus respectivas coordenadas. Si tomamos un punto arbitrario P situado entre P_0 y P_1, de coordenada x, resulta que x puede expresarse de una manera sencilla en función de x_0 y x_1. En efecto, tenemos el siguiente lema:

Lema 4.2

Sean x_0 y x_1 en $\mathbb{R}$ dos números reales distintos entre sí. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ "situado" entre ellos; es decir, tal que $x_0 < x < x_1$ o $x_1 < x < x_0$, existe $t \in (0, 1)$ tal que:

$$x = tx_1 + (1 - t)x_0. \tag{4.1}$$

Tenemos dos casos.

1. Supongamos que $x_0 < x < x_1$: 

   Vemos que las distancias entre P y P_0 y entre P_0 y P_1 son

   $$PP_0 = x - x_0 \quad \text{y} \quad P_0P_1 = x_1 - x_0.$$

   Además, como

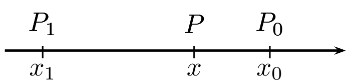
   $$0 < P_0P < P_0P_1,$$

   existe $t \in \,]0, 1[$ tal que

   $$P_0P = tP_0P_1 = t(x_1 - x_0).$$

   Por lo tanto:

   $$x = x_0 + P_0P = x_0 + t(x_1 - x_0) = tx_1 + (1 - t)x_0.$$

2. Supongamos que $x_1 < x < x_0$: 

   Vemos que las distancias entre P y P_0 y entre P_0 y P_1 son

   $$PP_0 = x_0 - x \quad \text{y} \quad P_0P_1 = x_0 - x_1.$$

   Además, como

   $$0 < P_0P < P_0P_1,$$

   existe $t \in \,]0, 1[$ tal que

   $$P_0P = tP_0P_1 = t(x_0 - x_1).$$

   Por lo tanto:

   $$x = x_0 - P_0P = x_0 - t(x_0 - x_1) = tx_1 + (1 - t)x_0.$$

4.8.2 Segmento que une dos puntos

El conjunto de puntos de la recta real situados entre P_0 y P_1, incluidos estos, es representado por $[P_0, P_1]$; es decir:

$$[P_0, P_1] = \{P_t : t \in [0, 1]\}, \tag{4.2}$$

donde x_t, la coordenada de P_t, se calcula con la fórmula

$$x_t = tx_1 + (1 - t)x_0. \tag{4.3}$$

Esta fórmula es una notación “feliz”, ya que, para $t = 0$ y $t = 1$, se obtienen x_0 y x_1, respectivamente.

Las fórmulas (4.2) y (4.3) se generalizan a dimensiones superiores. Así, por ejemplo, si P_0, P_1 están en $\mathbb{E}^3$, y si (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son las coordenadas de los puntos P_0 y P_1, respectivamente, la expresión (4.2) define el conjunto de puntos del segmento de recta de extremos P_0 y P_1 y las coordenadas de P_t son (x_t, y_t, z_t), donde:

$$x_t = tx_1 + (1 - t)x_0, \quad y_t = ty_1 + (1 - t)y_0, \quad z_t = tz_1 + (1 - t)z_0. \tag{4.4}$$

Si definimos

$$\overrightarrow{x_t} = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

para cada $t \in [0, 1]$, la expresión (4.4) se escribe de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{x_t} = t\overrightarrow{x_1} + (1 - t)\overrightarrow{x_0}. \tag{4.5}$$

Visualicemos este resultado en $\mathbb{E}^2$.

4.8.3 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados en $\mathbb{E}^2$

Sean $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ dos puntos distintos del plano $\mathbb{E}^2$ con $x_0 \neq x_1$. Si la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos es:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = l(x). \tag{4.6}$$

Si x está entre x_0 y x_1; es decir, si $x = x_t$ con

$$x_t = tx_1 + (1-t)x_0$$

y $t \in (0,1)$ o, lo que es lo mismo, si

$$x_t = x_0 + t(x_1 - x_0), \tag{4.7}$$

tendremos que, si

$$y_t = l(x_t), \tag{4.8}$$

entonces:

$$y_t = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}(x_0 + t(x_1 - x_0) - x_0) = y_0 + t(y_1 - y_0). \tag{4.9}$$

Cuando $x_0 = x_1$, como $P_0 \neq P_1$, tendremos que $y_0 \neq y_1$, la recta que pasa por P_0 y P_1 es vertical y se reduce al caso $\mathbb{E}^1$ con $x_t = x_0 = x_1$, y con $y_t = ty_1 + (1-t)y_0$. Se tendrá entonces, que si P_t es un punto del segmento $[P_0, P_1]$ y, si (x_t, y_t) son sus coordenadas, se verificará la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

que es la expresión (4.5) para $\mathbb{E}^2$.

4.8.4 Funciones convexas y cóncavas

Definición 4.10 (Funciones convexa y cóncava)
Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función definida en I. La función f *es convexa* (respectivamente *cóncava) en* I si para cualquier para $x_0 \in I$, $x_1 \in I$ tales que $x_0 < x_1$, el gráfico de f correspondiente al intervalo (x_0, x_1); es decir, el conjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\{(x, f(x)) : x \in (x_0, x_1)\} = \{(x_t, f(x_t)) : x_t = tx_1 + (1-t)x_0,\ 0 < t < 1\} \tag{4.11}$$

queda por debajo (respectivamente por encima) del segmento de recta $[P_0, P_1]$, con $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$, donde $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$.

Teniendo en cuenta la igualdad (4.9), la ecuación de la recta que une los puntos P_0 y P_1 es:

$$y = l(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \tag{4.12}$$

y si $x = x_t = tx_1 + (1-t)x_0$, obtenemos que:

$$y = y_t = l(x_t) = y_0 + t(y_1 - y_0) = ty_1 + (1-t)y_0. \tag{4.13}$$

Entonces, f es convexa (respectivamente cóncava) en el intervalo I si para todo x_0, x_1 en I tales que $x_0 < x_1$, se verifica que

$$f(x_t) \le l(x_t) \text{ (respectivamente } f(x_t) \ge l(x_t)) \tag{4.14}$$

para todo $t \in]0, 1[$. Es decir, f es convexa (respectivamente cóncava) si

$$f(x_t) \leq y_t \text{ (respectivamente } f(x_t) \geq y_t) \tag{4.15}$$

para todo $t \in]0, 1[$.

En resumen, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.11
Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa (respectivamente cóncava) si para todo $t \in]0, 1[$ se verifica que

$$f(x_t) \leq y_t \text{ (respectivamente } f(x_t) \geq y_t),$$

donde

$$y_t = ty_1 + (1 - t)y_0,$$

con $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$ y $x_0 < x_1$ elementos de I.

Ejemplo 4.88

Sea f una función definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Mediante el teorema 4.11, probemos que f es una función convexa cuando $a > 0$ y es cóncava si $a < 0$.

1. Supongamos que $a > 0$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 < x_1$. Definamos $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$. Sea $t \in]0, 1[$; entonces:

$$x_t = (1 - t)x_0 + tx_1 \quad \text{y} \quad y_t = (1 - t)y_0 + ty_1.$$

   Vamos a probar que $f(x_t) < y_t$. Por ello, calculemos y_t y $f(x_t)$.
   En primer lugar, tenemos que:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 - t)y_0 + ty_1 \\ &= (1 - t)f(x_0) + tf(x_1) \\ &= (1 - t)(ax_0^2 + bx_0 + c) + t(ax_1^2 + bx_1 + c) \\ &= a[(1 - t)x_0^2 + tx_1^2] + b[(1 - t)x_0 + tx_1] + c. \end{aligned}$$

   En segundo lugar, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x_t) &= a[(1 - t)x_0 + tx_1]^2 + b[(1 - t)x_0 + tx_1] + c \\ &= a[(1 - t)^2x_0^2 + t^2x_1^2 + 2t(1 - t)x_0x_1] + b[(1 - t)x_0 + tx_1] + c. \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y_t - f(x_t) &= a\left\{[(1 - t) - (1 - t)^2]x_0^2 - 2(1 - t)tx_0x_1 + (t - t^2)x_1^2\right\} \\ &= a(1 - t)t(x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2) = a(1 - t)t(x_0 - x_1)^2. \end{aligned}$$

   Como $a > 0$, $1 - t > 0$, pues $0 < t < 1$ y $(x_0 - x_1)^2 > 0$, ya que $x_0 \neq x_1$, entonces

$$y_t - f(x_t) \geq 0,$$

   de donde $f(x_t) \leq y_t$. Por lo tanto, por el teorema 4.11, f es convexa.
2. Si $a < 0$, un procedimiento similar al anterior muestra que $y_t - f(x_t) < 0$.

Cuando una función es derivable, su convexidad o concavidad está relacionada con la monotonía de la derivada. En el siguiente teorema, se muestra esta relación.

Teorema 4.12 (Criterio de la derivada para la convexidad)
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si f' es creciente (respectivamente decreciente) en (a,b), entonces f es convexa (respectivamente cóncava) en $[a,b]$.

Ejemplo 4.89

Sea $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. Mediante la monotonía de f', determinemos si f es o no convexa.

En primer lugar, tenemos que $f'(x) = 4x^3 + 2x$. Sean x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x_2) - f'(x_1) &= 4x_2^3 - 2x_2 - 4x_1^3 + 2x_1 \\ &= 4(x_2^3 - x_1^3) + 2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Como $x_2 > x_1$, entonces $x_2^3 - x_1^3 > 0$ (la función cúbica es creciente) y $x_2 - x_1 > 0$. Por lo tanto

$$f'(x_2) - f'(x_1) = 4(x_2^3 - x_1^3) + 2(x_2 - x_1) > 0.$$

Entonces $f'(x_1) < f'(x_2)$; es decir, f' es una función creciente. Entonces, por el teorema 4.12, f es una función convexa.

Del teorema 4.12 y por el teorema (4.5), es inmediato el siguiente teorema.

Teorema 4.13
Si f es continua en $[a,b]$ y existe f'' y es positiva (respectivamente negativa) en (a,b), entonces f es convexa (respectivamente cóncava) en $[a,b]$.

Ejemplo 4.90

Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 29x^2 + 2x - 7$. Probemos que esta función es convexa. Para ello, mostremos que la segunda derivada de f es siempre positiva. Así, por el teorema 4.13, f debe ser convexa.

Calculemos $f''(x)$. En primer lugar, tenemos que

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 58x + 2.$$

En segundo lugar:

$$f''(x) = 36x^2 - 24x + 58.$$

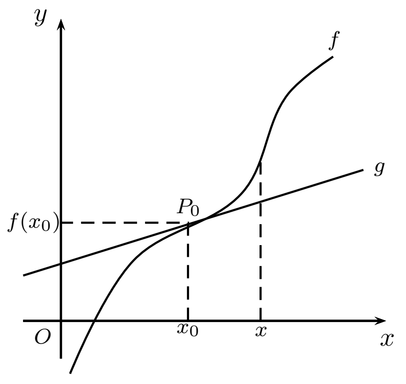
Ahora bien, el discriminante del polinomio de segundo grado $36x^2 - 24x + 58$ es negativo, pues

$$(24)^2 - 4(36)(58) = -7\,776.$$

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ $f''(x)$ tiene el mismo signo. Así, el signo de $f''(0)$ es el signo de todos los $f''(x)$. Pues, como $f''(0) = 58 > 0$, tenemos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, f es convexa.

4.9 Puntos de inflexión

En el dibujo:



f es una función definida en un intervalo abierto I y $x_0 \in I$ tal que existe $f'(x_0)$. El punto $P_0(x_0, f(x_0))$ tiene la propiedad de que la gráfica de f pasa de un lado a otro de la recta tangente a la gráfica de f en P_0, cuya ecuación es

$$y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

El punto P_0 es denominado *punto de inflexión* de la gráfica de f.

He aquí la definición precisa.

Definición 4.11 (Punto de inflexión)
Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Si f es convexa en $[a, x_0]$ y cóncava en $[x_0, b]$, o viceversa (cóncava en $[a, x_0]$ y convexa en $[x_0, b]$), se dice que el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ es un *punto de inflexión* del gráfico de f.

Observaciones

1. Si ponemos $h(x) = f(x) - g(x)$, P_0 es punto de inflexión de la gráfica de f si y solo si $h(x)$ cambia de signo en x_0, es decir, si y solo si el punto de coordenadas $(x_0, 0)$ es punto de inflexión de la gráfica de h.

2. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable en (a,b) y si f'' cambia de signo en $x_0 \in (a,b)$, entonces el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f.

3. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si para $x_0 \in (a,b)$, el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f, y si f es derivable en x_0, existirá $r > 0$ tal que el gráfico de f; es decir, de los puntos de coordenadas $(x, f(x))$, estarán de un lado de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ para $x \in (x_0 - r, x_0)$ y del otro lado para $x \in (x_0, x_0 + r)$.

La siguiente es una condición necesaria para la existencia de un punto de inflexión.

Teorema 4.14
Si existe $f''(x_0)$ y si $P_0(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(x_0) = 0$.

Esta condición no es suficiente; es decir, el recíproco de este teorema no es cierto. Por ejemplo, si $y = f(x) = x^4$, el punto $P(0,0)$ no es punto de inflexión de la gráfica de f a pesar de que $f''(0) = 0$.

Ejemplo 4.91

Analizar la función f y su gráfico si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f(x) = x^3 - px$$

con $p \in \mathbb{R}$, una constante dada. A la gráfica de f se le llama parábola cúbica.

Solución. En primer lugar, f es una función impar, pues:

$$f(-x) = (-x)^3 - p(-x) = -(x^3 - px) = -f(x).$$

Por lo tanto, la gráfica de f es simétrica respecto al punto de coordenadas $(0, 0)$. Esto significa que bastará con analizar f solo en uno de los dos intervalos: $[0, +\infty[$ o $]-\infty, 0]$, porque en el otro intervalo el gráfico se obtiene del primero por medio de un reflexión y una rotación, y los valores $f(x)$ de la identidad $f(x) = -f(-x)$.

Ahora, busquemos los cortes de la gráfica de f con el eje x; es decir, busquemos los x tales que $f(x) = 0$:

$$x^3 - px = 0 \tag{4.16}$$

La solución de esta ecuación depende del signo de p. Por lo tanto, hay tres casos que analizar.

1. Si $p < 0$, $x = 0$ es la única raíz real de (4.16); las otras dos son complejas.
2. Si $p = 0$, $x = 0$ es una raíz triple de la ecuación.
3. Si $p > 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = -\sqrt{p}$ y $x_2 = \sqrt{p}$ son las tres raíces reales de la ecuación (4.16).

Ahora calculemos la derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - p. \tag{4.17}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$, para lo cual es conveniente buscar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$, en los tres casos ya considerados.

1. Si $p < 0$, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces f será estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
2. Si $p = 0$, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; además, $f'(0) = 0$. Entonces f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

   Como en este caso $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$, y $f(0) = 0$, se concluye que también f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
3. Si $p > 0$, la ecuación (4.17) tiene dos raíces:

   $$\bar{x}_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

   Se tiene que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, \bar{x}_1)$ y en $(\bar{x}_2, +\infty)$, mientras que $f'(x) < 0$ en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, por lo que f es creciente en los dos primeros intervalos y decreciente en el tercer intervalo.

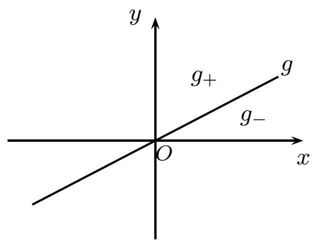
   Adicionalmente, esto implica que, en $(\bar{x}_1, f(\bar{x_1}))$, la función f tiene un máximo local y, en $(\bar{x}_2, f(\bar{x_2}))$, un mínimo local.

Ahora estudiemos los puntos de inflexión de la gráfica de f. Como $f'(0) = -p$, la recta g de ecuación

$$y = g(x) = -px$$

es tangente a la gráfica de f en $(0, 0)$. La recta g divide al plano en 3 partes: g_+ el semiplano superior, la propia recta g y g_- el semiplano inferior:

$$\begin{aligned} g_+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y > g(x) = -px\} \\ g &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = g(x) = -px\} \\ g_- &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y < g(x) = -px\}. \end{aligned}$$



Para ver la ubicación de los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f respecto a la recta $y = g(x) = -px$, basta analizar el signo de

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x^3 - px) - (-px) = x^3.$$

El signo de $h(x)$ coincide con el de x, por lo que la gráfica de f estará en el semiplano g_+ para $x > 0$ y en el semiplano g_- para $x < 0$.

El punto $(0, 0)$ es pues un punto de inflexión de la gráfica de f.

Como f es dos veces derivable para todo x y

$$f''(x) = 6x,$$

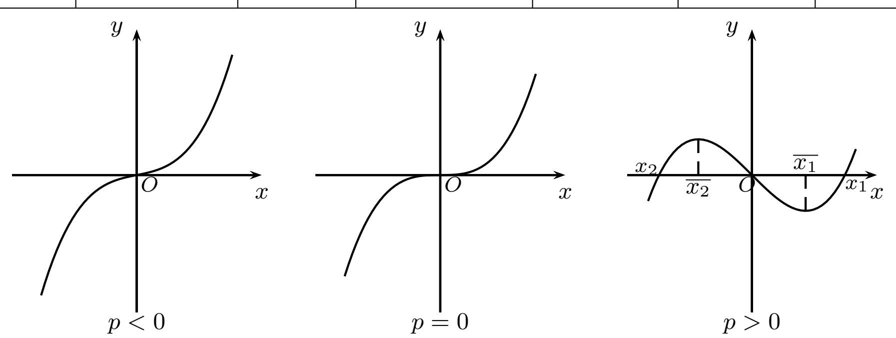
tenemos que

$$.f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Por lo tanto, como $(0, 0)$ es un punto de inflexión, éste será el único (de haber otros para $x \neq 0$, se tendría que $f''(x) = 0$; es decir, $6x = 0$, lo cual es imposible).

Los resultados que sirven para analizar la función se pueden resumir en una tabla donde se los anota a medida que se los obtiene y, finalmente, sirve para tener una idea completa del gráfico de la función que luego, con la ayuda de un número adecuado de puntos de la forma $(a, f(a))$, podrá ser realizado. En el ejemplo, para el tercer caso, $p > 0$, tenemos:

x	$(-\infty, -\sqrt{p})$	$-\sqrt{p}$	$\left(-\sqrt{p}, -\frac{\sqrt{p}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{p}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{p}}{3}, 0\right)$	0
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
Resultados				Máx. local		Punto infl.
x	0	$\left(0, \frac{\sqrt{p}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{p}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{p}}{3}, \sqrt{p}\right)$	$\sqrt{p}$	$(\sqrt{p}, +\infty)$
$f(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Resultados	Punto infl.		Mín local			



£Cómo se corta la gráfica de f con rectas horizontales de ecuación $y = c$? Para responder a esta pregunta en los tres casos considerados, podemos analizar las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$:

$$x^3 - px = c. \tag{4.18}$$

1. Si $p < 0$, la ecuación (4.18) tiene una raíz real simple para todo c.
2. Si $p = 0$, la ecuación tiene una raíz real simple para todo $c \neq 0$. Para $c = 0$, $x = 0$ es una raíz real triple.
3. Si $p > 0$, hay, a su vez, cuatro casos:
   (a) Si $c < f(\bar{x_2})$ o $c > f(\bar{x_1})$, la ecuación (4.18) tiene una sola raíz real simple.
   (b) Si $f(\bar{x_2}) < c < f(\bar{x_1})$, la ecuación tiene tres raíces reales distintas.
   (c) Si $c = f(\bar{x_2})$, $\bar{x_2}$ es raíz doble de la ecuación (4.18), y se tiene otra raíz simple y negativa.
   (d) Si $c = f(\bar{x_1})$, $\bar{x_1}$ es raíz doble de la ecuación, y se tiene otra raíz simple y negativa.

4.10 Ejercicios

1. Utilice la segunda derivada de f para determinar los intervalos en los cuales f es cóncava y en los cuales es convexa, así como los puntos de inflexión.
   (a) $f(x) = 14x - x^2$.
   (b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.
   (c) $f(x) = (x+2)^3 + 1$.
   (d) $f(x) = (x+1)(x-1)^3$.
   (e) $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4$.
   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$.
   (g) $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$.
   (h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 26}$.
   (i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   (j) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.
   (k) $f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x$.
   (l) $f(x) = \operatorname{sen} x$.
   (m) $f(x) = x - \cos x + 1$.
   (n) $f(x) = \tan x$.
2. Para la función f dada, utilice la segunda derivada para hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de f.
   (a) $f(x) = (2-3x)^2$.
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.
   (c) $f(x) = 5x^4 + x^2$.
   (d) $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x^2}$.
   (e) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+2)$.
   (f) $f(x) = x\sqrt{x+1}$.
   (g) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{x}{9}$.
   (h) $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$.
   (i) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.
   (j) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$.
3. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de la función f que tenga las propiedades dadas.
   (a) $f'(-1) = f'(2) = 0$; $f''(x) < 0$ para todo $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para todo $x > 1$; y $f(0) = 1$.
   (b) $f'(-2) = f'(-1) = f'(1) = f'(3) = 0$; $f''(x) > 0$ para todo $x < -\frac{3}{2}$ o $0 < x < 2$ y $f''(x) < 0$ para todo $-\frac{3}{2} < x < 0$ o $x > 2$; y $f(0) = 0$.
4. Halle los puntos de inflexión de f si
$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } x \geq 0, \\ -x^4 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
5. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de f.
   (a) $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \leq 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ -3(x-1) & \text{si no.} \end{cases}$

4.11 Graficación de funciones

Los resultados estudiados hasta ahora, a más de proveernos de la herramienta necesaria para resolver los problemas de optimización (encontrar el máximo o el mínimo de una función), se utilizan para trazar el gráfico de funciones de manera aproximada, como ya se ha propuesto en los ejercicios de la sección anterior.

En esta sección, vamos a establecer un procedimiento bastante general para dibujar el gráfico de una función. Empecemos con un ejemplo.

Ejemplo 4.92

Dibujar el gráfico de la función f definida por $y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{10}x^2 - \frac{8}{10}x$.

Solución. La primera y la segunda derivadas de f son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{9}{10}, \\ f''(x) &= \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Busquemos los puntos en los cuales se anulan f, f' y f''; es decir, sus raíces. Para

$$f(x_k) = 0,$$

tenemos que las raíces son

$$x_1 = -\frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx -1.85,\ x_2 = 0 \text{ y } x_3 = \frac{3}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 4.85.$$

Para

$$f'(x_k) = 0,$$

las raíces son:

$$x_4 = -1 \quad \text{y} \quad x_5 = 3.$$

Finalmente, para

$$f''(x_k) = 0,$$

obtenemos una sola raíz:

$$x_6 = 1.$$

En x_1, x_2 y x_3 el gráfico de f interseca con el eje horizontal. En x_4 y x_5 es posible que f tenga extremos locales, en x_5, un punto de inflexión. La siguiente tabla muestra los signos de f, f' y f'' en los intervalos comprendidos entre las raíces arriba encontradas:

x	-2	-1.85		-1		0		1	2	3	4	4.85	5
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$			0	$-$	$-$			$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$

De la información contenida en esta tabla, colegimos que:

1. La función f alcanza un máximo local en -1, ya que antes de este punto, la derivada es positiva y luego, negativa.
2. La función f alcanza un mínimo local en 3, ya que antes de este punto, la derivada es negativa y luego, positiva.
3. En el punto 1, hay un punto de inflexión, ya que antes de este punto, la segunda derivada es negativa y luego, positiva.

Dado que

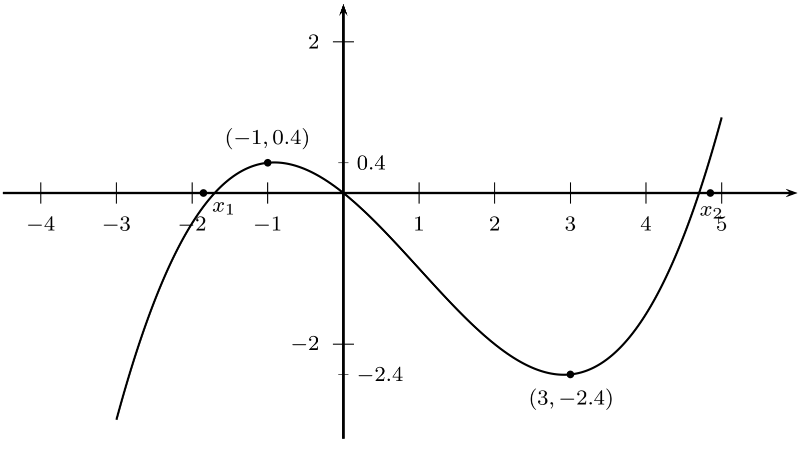
x	-1.85	-1	0	1	3	4.85
$f(x)$	0	0.4	0	-1	-2.4	0

podemos concluir que la gráfica de f:

1. corta el eje horizontal en -1.85, 0 y 4.85;

2. alcanza un máximo local igual a 0.4 en -1;
3. alcanza un mínimo local igual a -2.4 en 3;
4. es creciente en $]-\infty,-1]$ y $[3,+\infty[$;
5. es decreciente en $[-1,3]$;
6. es cóncava en $]-\infty,0]$; y
7. es convexa en $[0,+\infty[$.

Con esta información, podemos realizar el dibujo del gráfico de f y obtener algo similar al siguiente dibujo:



Ejemplo 4.93

Sea f una función real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & \text{si } x\le -1\\ x^3 & \text{si } |x|<1\\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x\ge 1.\end{cases}$$

Analice y dibuje el gráfico de f.

Solución. La función f está definida en $\mathbb{R}$. Hay cambio de definición en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

La función f es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ pues las partes en las cuales está definida son dos polinomios y una función racional, que son continuos en sus dominios. Averigüemos si es continua en $x=-1$ y $x=1$.

En primer lugar, f está definida en dichos puntos: $f(-1)=-1$ y $f(1)=1$. Veamos ahora si existen los límites en esos puntos. Calculamos primero los correspondientes límites laterales:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-2x-3)=-1 \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x^3)=-1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} x^3=1 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x^2}=1.$$

Como los correspondientes límites laterales son iguales, concluimos la verdad de las siguientes igualdades:

$$\lim_{x\to-1} f(x)=-1,$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=1.$$

Finalmente, podemos decir que la función es continua en $x=-1$ y $x=1$ porque

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1 = f(-1),$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1).$$

En resumen, la función f es continua en su dominio $\mathbb{R}$.

Como no existen puntos de discontinuidad no hay posibilidad de que existan asíntotas verticales. Veamos si existen asíntotas horizontales. Para ello, calculemos los límites al infinito:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (-2x-3) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Entonces $y=0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a $+\infty$.

Para continuar con el análisis de la función f, necesitaremos su primera y su segunda derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ -\frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 6x & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{6}{x^4} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Veamos si existe la primera derivada de f en $x=-1$ y $x=1$. Como en esos puntos la función cambia de definición, hallemos, primeramente, las derivadas laterales correspondientes:

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(-2x-3)-(-1)}{x-(-1)} \\ &= \lim_{x\to -1^-} \frac{-2(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} (-2) = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-(-1)}{x-(-1)} \\ &= \lim_{x\to -1^+} (x^2-x+1)) = 3, \end{aligned}$$

$$f'_-(-1) = -2 \neq 3 = f'_+(-1).$$

Entonces no existe $f'(-1)$.

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} (x^2+x+1) = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{x+1}{x^2}\right) = -2, \end{aligned}$$

$$f'_-(1) = 3 \neq -2 = f'_+(1).$$

Entonces no existe $f'(1)$.

Como en los puntos $x=-1$ y $x=1$ no existe la derivada, la gráfica de f no tiene tangente en esos puntos. Además, existe la posibilidad de que en ellos existan extremos locales. Claramente, $f'(0)=0$; entonces hay la posibilidad de que en $x=0$ exista un extremo local.

Como el $D(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, no existe la segunda derivada en $x = -1$ y $x = 1$ y, como en dichos puntos no existe recta tangente, no puede haber en ellos puntos de inflexión de la gráfica de f.

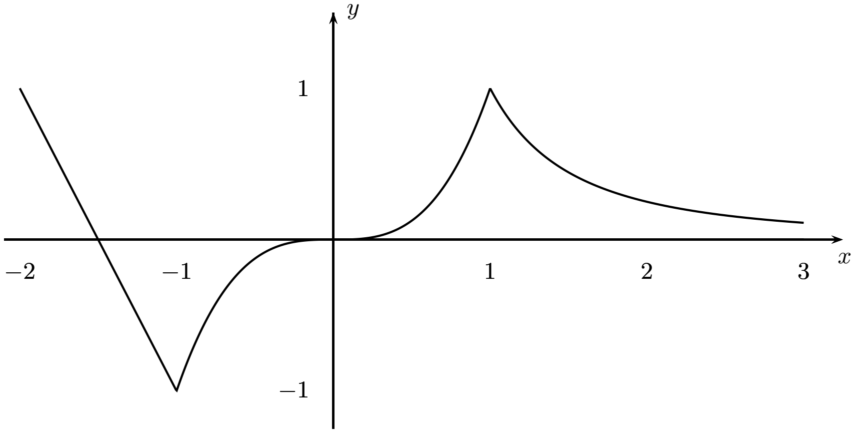
Ya solo falta averiguar en qué puntos la segunda derivada es igual a cero; ello sucede en $x = 0$. En $x = 0$ podría haber un punto de inflexión.

En resumen, en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ buscaremos extremos locales. En $x = 0$ además buscaremos un punto de inflexión. Esta búsqueda la realizamos con ayuda de la siguiente tabla:

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, +1[$	$+1$	$]+1, +\infty[$
$f(x)$		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$	n. e.	$+$	0	$+$	n. e.	$-$
Monotonía	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$f''(x)$	0	n. e.	$-$	0	$+$	n. e	$+$
Concavidad			$\frown$		$\smile$		$\smile$
Resultados		m. l.		p. i.		M. l.	

n. e. = no existe; m. l. = mínimo local; M. l. = máximo local; p. i. = punto de inflexión

A partir de la tabla podemos dibujar la forma de la gráfica de la función f como se muestra en la figura.



De los dos ejemplos, podemos proponer el siguiente procedimiento, bastante general, para analizar el gráfico de una función real.

1. Si la función es par o impar, basta considerar el intervalo $[0, +\infty[$.
2. Se identifican los "valores especiales" para f, que son sus raíces. También sus puntos de discontinuidad. Digamos que estos son $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$.
3. En cada uno de los intervalos $]-\infty, x_1[$, $]x_k, x_{k+1}[$ y $]x_N, +\infty[$ la función f no cambia de signo. Para determinar el signo en cada intervalo, basta calcular $f(x)$ para un x en el intervalo correspondiente.
4. El paso anterior se aplica también a f' y a f''.
5. Se elabora una tabla con los puntos especiales de f, f' y f''.

Con la tabla obtenida, podemos determinar los extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de monotonía, concavidad y convexidad.

4.12 Ejercicios

1. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de la función f.

   (a) $f(x) = x^3 + 2x$.

   (b) $f(x) = (x+2)^3(x-1)^2$.

   (c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

   (d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$.

   (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)}$.

   (f) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

   (g) $f(x) = -x + \cos x$.

   (h) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

   (i) $f(x) = x^2 \ln x$.

   (j) $f(x) = x^2 e^x$.

4.13 Problemas de extremos

Una de las principales aplicaciones de las derivadas consiste en proveer de un método para resolver problemas de optimización; es decir, problemas en los que hay que escoger de entre varias opciones para la solución la mejor o la más conveniente, o la menos inconveniente. Por ejemplo, en una empresa se busca que las pérdidas sean mínimas y que las utilidades sean máximas; un transportista busca la ruta más corta o la más rápida; un bodeguero trata de guardar más objetos en cada bodega, etcétera. El problema de Romeo y Julieta con el que iniciamos este capítulo, es un ejemplo de un problema de optimización.

El modelo matemático de una gran variedad de problemas de optimización se ajustan al siguiente problema matemático, denominado, **problema de optimización**:

Problema 4.1 (Básico de optimización)
Dados I un intervalo y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I, se debe determinar si existen el máximo y el mínimo de f en I. De existir, se debe hallar $x_m \in I$ y $x_M \in I$ tales que

$$\underline{y} = f(x_m) = \min_{x\in I} f(x) \quad \text{y} \quad \overline{y} = f(x_M) = \max_{x\in I} f(x).$$

A continuación vamos a enunciar los resultados desarrollados en las secciones anteriores y que nos permitirán establecer un “algoritmo” para el problema de optimización.

Teorema 4.15
Sean I un intervalo y $\overline{x} \in I^\circ$ tal que f alcanza un extremo local en $\overline{x}$. Entonces $\overline{x}$ es un punto crítico de f; es decir, $f'(\overline{x}) = 0$ o no existe la derivada de f en $\overline{x}$.

Al combinar estos dos resultados, tenemos el siguiente algoritmo para el problema de optmización cuando $I = [a,b]$ y f tiene un número finito de puntos críticos en el interior de I.

Algoritmo 4.1
Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

1. Hallar $K_0 = \{x \in\,]a,b[\, : f'(x) = 0\}$ y $K_1 = \{x \in\,]a,b[\, : \nexists f'(x)\}$. Si K_0 y K_1 son finitos, vaya al siguiente paso.

2. Sea $K = \{a,b\} \cup K_0 \cup K_1$. Este es el conjunto de los “candidatos” a ser los puntos en los que se alcancen los extremos globales. Obligatoriamente x_m y x_M, cuya existencia está garantizada por el primer teorema, son elementos de K.

   Escribamos $K = \{a_1 = a < a_2 < a_3 < \cdots < a_N = b\}$.

3. Calcular la tabla de valores $b_k = f(a_k)$ con $1 \leq k \leq N$, ordenando los valores de manera que $b_{k_1} \leq b_{k_2} \leq \cdots \leq b_{k_N}$.
4. Entonces $x_m = a_{k_1}$, $x_M = a_{k_N}$, $\underline{y} = b_{k_1}$ y $\overline{y} = b_{k_N}$.

Los siguientes teoremas, en cambio, nos permiten establecer un algoritmo cuando el intervalo I no es cerrado y acotado.

Teorema 4.16
Sean I un intervalo y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si existe un único extremo local en I, entonces este extremo es también es global.

Teorema 4.17
Sean I un intervalo y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces la imagen de f, el conjunto $\mathrm{Im}(f)$ es un intervalo. En particular, si $I = [a, b]$, entonces $\mathrm{Im}(f) = [f(x_m), f(x_M)]$.

Teorema 4.18
Si $I = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_n$ y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{k=1}^{n} f(A_k).$$

Y, finalmente:

Teorema 4.19
Sean $I =]a, b[$ y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces:

1. Si f es creciente en I, entonces $\mathrm{Im}(f) = \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$.
2. Si f es decreciente en I, entonces $\mathrm{Im}(f) = \left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$.
3. Resultados análogos a los anteriores son verdaderos si I es uno de los siguientes intervalos: $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ y $]-\infty, \infty[$.

Al combinar los resultados precedentes, se tiene el siguiente algoritmo para resolver el problema de optimización cuando I no es un intervalo cerrado y acotado, pero sí es la unión finita de subintervalos de I, digamos $I_1, I_2, \ldots, I_N$, en los cuales f es monótona. El algoritmo permite, además, hallar la imagen de f.

Algoritmo 4.2
Sean I un intervalo que no es cerrado ni acotado y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I.

1. Determinar los subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_N$ de I en los cuales f es monótona.
2. Calcular $J_k = f(I_k)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

3. Calcular $J = \operatorname{Im}(f) = \bigcup_{k=1}^{N} J_k$.
4. El conjunto J es un intervalo. Si J es uno de los intervalos:
   (a) $\mathbb{R}$, $]-\infty,\beta[$ o $]-\infty,\beta]$, entonces $\inf_{x\in I} f(x) = -\infty$ y f no alcanza el mínimo en I.
   (b) $]\alpha,\beta[$ o $]\alpha,\beta]$, entonces $\inf_{x\in I} f(x) = \alpha$ y f no alcanza el mínimo en I.
   (c) $[\alpha,\beta[$, $[\alpha,\beta]$ o $[\alpha,+\infty[$, entonces $\min_{x\in I} f(x) = \alpha$.
   (d) $\mathbb{R}$, $[\alpha,\infty[$ o $]\alpha,\infty[$, entonces $\sup_{x\in I} f(x) = +\infty$ y f no alcanza el máximo en I.
   (e) $]-\infty,\beta[$ o $]\alpha,\beta[$ o $[\alpha,\beta[$, entonces $\sup_{x\in I} f(x) = \beta$ y f no alcanza el máximo en I.
   (f) $]\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta]$ o $]-\infty,\beta]$, entonces $\max_{x\in I} f(x) = \beta$.

Este algoritmo sirve también si el dominio de la función se puede expresar como la unión finita de intervalos, pues se lo puede aplicar a cada uno de esos intervalos y luego se calcula la imagen de f con lo que, si existen, se determinan los extremos de la función.

Ahora resolvamos el problema de Romeo y Julieta.

Empecemos calculando la derivada de f para todo $x \in I$ ya que f es derivable en su dominio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + \frac{-2(3-x)}{2\sqrt{(3-x)^2+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)^2+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)^2+1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)^2+1}}. \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)^2+1}} &\Rightarrow x^2\left[(3-x)^2+1\right] = (3-x)^2(x^2+4) \\ &\Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \\ &\Rightarrow x \in \{2, 6\}. \end{aligned}$$

Es decir, si $f'(x) = 0$, necesariamente $x = 2$ ó $x = 6$.

Dado que $6 \notin I$ y

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{2}{\sqrt{2^2+4}} - \frac{3-2}{\sqrt{(3-2)^2+1}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \end{aligned}$$

tenemos que 2 es un punto crítico de f en I. Además, es el único punto crítico, por que si hubiera otro, diferente de 2, debería ser el número 6, lo que no es posible.

Ahora calculemos la segunda derivada de f en 2 para saber si, en este número, la función f alcanza un máximo o un mínimo local.

Para ello, luego de un cálculo sencillo, vemos que, para cualquier $x \in I$, tenemos que:

$$f''(x) = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(3-x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Entonces, $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$. En particular, $f''(2) > 0$. Esto significa que $f(2)$ es un mínimo local de f en I. Por lo tanto, el mínimo de f es:

$$f(2) = \min_{x \in I} f(x) = 3\sqrt{2} \approx 4.24.$$

Solución del problema original (interpretación de la solución del problema matemático)

Romeo irá donde Julieta, llevándole rosas recogidas a 2 kilómetros del extremo A del lago. Cuando el joven enamorado llegue, habrá remado aproximadamente un recorrido de 4 kilómetros con 240 metros aproximadamente. A su edad, y con el deseo enorme de encontrarse con su amada, ese recorrido no representará para él ningún problema.

Epílogo

Se cuenta que Romeo llegó con un bello ramo de rosas donde Julieta cuando ella estaba a punto de retirarse de su escondite creyendo que su amado no vendría. Las flores la llenaron de alegría y justificaron plenamente su impaciente espera.

Para terminar, examinemos algunos ejemplos adicionales de optimización.

Ejemplo 4.94

Sea $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x^2 - \frac{8}{x}.$$

Halle el punto en el cual la gráfica de f tiene la recta tangente de mínima pendiente.

Solución. El dominio de f es el conjunto $]0,+\infty[$.

La pendiente de la recta tangente m_x en un punto de coordenada x viene dada por la derivada de $f(x)$. Entonces:

$$m_x = g(x) = f'(x) = 2x + \frac{8}{x^2}.$$

El dominio de g es el conjunto $]0,+\infty[$.

El problema a resolver es hallar los extremos de la función g. Para ello necesitamos su derivada:

$$m'_x = g'(x) = 2 - \frac{16}{x^3} = 2\frac{x^3-8}{x^3}.$$

La función g no es derivable en $x = 0$ pero $0 \notin D(g)$.

Por otro lado, $g'(2) = 0$. Posiblemente, existe extremo local en $x = 2$. Para averiguarlo, necesitamos la segunda derivada de g (es decir, la tercera de f):

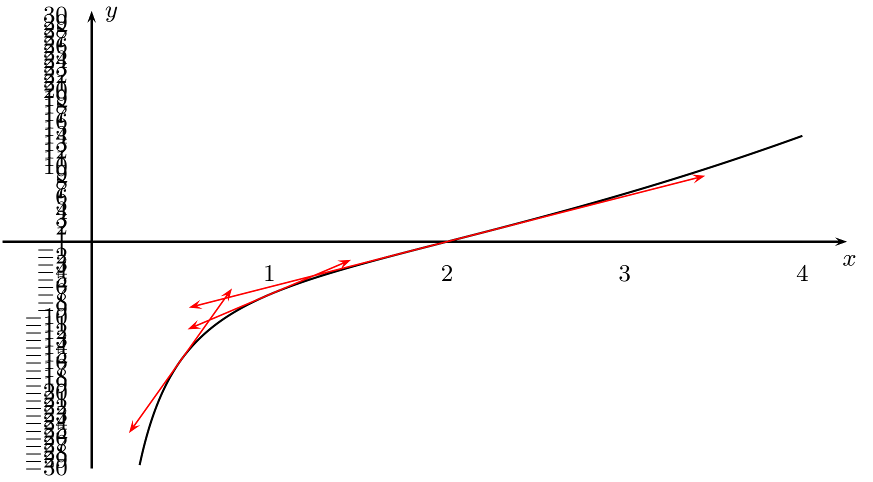
$$m''_x = g''(x) = \frac{48}{x^4}.$$

Tenemos que $g''(2) = 3 > 0$.

Por el criterio de la segunda derivada, podemos concluir que, en $x = 2$, la función g tiene un mínimo local. Debido a que es el único extremo en $D(g)$, es, a la vez, un mínimo absoluto y su valor es:

$$m_x\Big|_{x=2} = g(2) = 2(2) + \frac{8}{2^2} = 6.$$

Así, pues, la pendiente será mínima e igual a 6 para la recta tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(2,0)$.



Ejemplo 4.95

Halle dos números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.

Solución. Sea $x > 0$ uno de dichos números. El otro será $100 - x > 0$ para que su suma sea 100. Tenemos entonces que $0 < x < 100$.

Sea P el producto de los dos números. Naturalmente dependerá de x:

$$P = f(x) = x(100 - x) = 100x - x^2.$$

Debemos, entonces, hallar $x_1 \in]0, 100[$ tal que:

$$f(x_1) = \max_{x\in(0,100)} f(x).$$

Como f es derivable en $]0, 100[$, los puntos críticos de f en ese intervalo serán solución de

$$f'(x) = 100 - 2x = 0$$

que equivale a $x = 50$.

Como $f''(x) = -2 < 0$, en $x_1 = 50$, f alcanza un máximo local que por ser el único extremo en el intervalo de interés $]0, 100[$ es, a la vez, un máximo absoluto.

El otro número es $100 - x_1 = 100 - 50 = 50$. Los dos números buscados, tales que su suma es igual a 100 y su producto 2500 es máximo, son iguales a 50.

Ejemplo 4.96

Halle el punto de la parábola que es la gráfica de $y = 1 - x^2$ más cercano al punto $A(2.5, 2.75)$. Puede usar el hecho de que

$$(4x^3 + 9x - 5)\Big|_{x=0.5} = 0.$$

Solución. Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario de la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$, tendremos que $P(x, 1 - x^2)$.

La distancia entre los puntos A y P está dada por:

$$d = f(x) = \sqrt{(x - 2.5)^2 + [(1 - x^2) - 2.75]^2} = \sqrt{(x - 2.5)^2 + (x^2 + 1.75)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Como la función h definida por $h(x) = x^2$ para todo $x > 0$ es continua y estrictamente creciente, los extremos de $h \circ f$ coinciden con los extremos de f. Entonces, si la distancia d va a ser mínima, la distancia al cuadrado d^2 también será mínima. Sea

$$d^2 = g(x) = (x - 2.5)^2 + (x^2 + 1.75)^2, \ x \in \mathbb{R}.$$

Tenemos que resolver el problema: Hallar $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$. Necesitamos la derivada

$$g'(x) = 2(x - 2.5) + 4x(x^2 + 1.75) = 4x^3 + 9x - 5$$

para hallar los puntos críticos de g. La ecuación $g'(x) = 4x^3 + 9x - 5 = 0$ puede escribirse como

$$4x^3 + 9x - 5 = (2x - 1)(2x^2 + x + 5) = 0.$$

Puesto que el segundo factor es un trinomio de discriminante negativo, la única solución real de la ecuación cúbica es $x = \frac{1}{2}$ la cual es, a la vez, número crítico de g.

Ahora, usemos el criterio de la segunda derivada para saber si existe o no extremo en $x = \frac{1}{2}$. El signo del valor en $x = \frac{1}{2}$ de la segunda derivada $g''(x) = 12x^2 + 9$, que es

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 = 12 > 0,$$

nos dice que g tiene un mínimo local en $x = \frac{1}{2}$. Como $x = \frac{1}{2}$ es el único número crítico de g en su dominio dicho extremo es un mínimo absoluto, de modo que

$$d^2\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \min_{x\in\mathbb{R}} g(x),$$

y

$$d\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x).$$

El punto buscado es

$$P(x, 1 - x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),$$

y la distancia de A a P es

$$d\Big|_{x=\frac{1}{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2.5\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1.75\right)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 4\sqrt{2}.$$

4.14 Ejercicios

1. Resuelva el problema básico de optimización para las siguientes funciones f definidas en el intervalo I. Adicionalmente, determine el conjunto $\mathrm{Im}(f)$.
   (a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x, \ I = [0, 5]$.
   (b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x, \ I = [0, 5[$.
   (c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x, \ I =]0, 5[$.
   (d) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x, \ I =]0, 5]$.
   (e) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x, \ I = [0, 3]$.
   (f) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}, \ I = [0, +\infty[$.
   (g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 25}}, \ I = \mathbb{R}$.
   (h) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 7, \ I = [-1, 1]$.
   (i) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 7, \ I =]-3, 1]$.
   (j) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 7, \ I = [-4, 1]$.
   (k) $f(x) = 4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x, \ I = \mathbb{R}$.
   (l) $f(x) = 4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (m) $f(x) = 4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$, $I = \left[\arctan \dfrac{3}{4}, \pi\right[$.
   (n) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 2, \\ 3 - 3x & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ $I = [0, 3]$.

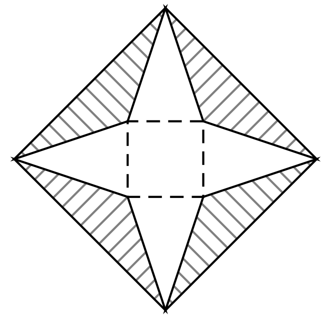
(o) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}(x-2) & \text{si } 2 < x, \end{cases}$ $I = [-1, 3]$.

(p) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $I = [-2, 1[$.

(q) $f(x) = (x^2 - 2x + 10)^{\frac{5}{2}}$, $I =]-7, 5[$.

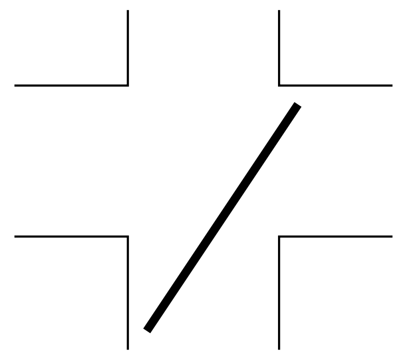
(r) $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si no,} \end{cases}$ $I = \mathbb{R}$.

2. Halle dos números no negativos tales que:
   (a) Su suma sea igual a 1 y su producto sea máximo.
   (b) Su producto sea igual a 1 y su suma sea mínima.
   (c) Su suma sea igual a 100 y el producto del cuadrado del primero y el cubo del segundo sea máximo.
3. Halle el punto de P de coordenadas (a, b) de la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$ más cercano al punto Q de coordenadas $(\frac{5}{2}, \frac{11}{4})$.
4. Dadas la recta l de ecuación $y = 4 - x$ y la parábola p de ecuación $y = 1 - x^2$, halle los puntos $P \in l$ y $Q \in p$ más cercanos entre sí.
5. Halle el punto del gráfico de f donde la pendiente de la recta tangente sea mínima si $f(x) = x^3 - 6x^2$.
6. Se desea cerrar un terreno que es rectangular junto a un río con una pared paralela a la orilla del río que cuesta 25 dólares el metro lineal y dos alambradas perpendiculares al río que cuestan 20 dólares el metro lineal. Si el terreno debe tener diez mil metros cuadrados de área, £cuáles deben ser sus dimensiones para que los costos sean mínimos?
7. Se quiere construir una caja abierta de un volumen dado V metros cúbicos, cuya base rectangular tenga el doble de largo que de ancho. £Cuáles deben ser sus dimensiones para que el costo de los materiales sea mínimo? £Y si la caja es cerrada?
8. Halle las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de diámetro D metros y de altura H metros.
9. Halle las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R metros.
10. Se desea elaborar tarros de un litro para conservas de duraznos. £Qué dimensiones tendrá cada tarro para que el costo por el metal utilizado sea mínimo?
11. De un trozo cuadrado de cartulina se desea elaborar una pirámide de base cuadrada desechando la parte rayada y doblando en las líneas punteadas como se muestra en el dibujo:

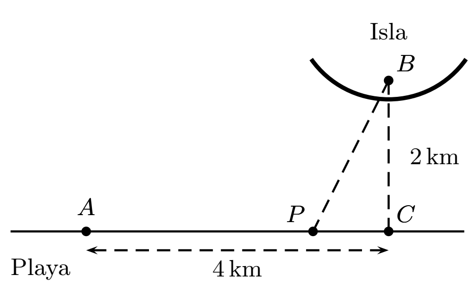


£Qué dimensiones tendrá la pirámide de volumen máximo si la cartulina tiene un metro de lado?

12. Dos calles de diez metros de ancho se intersecan. Se desea transportar horizontalmente una varilla larga y delgada, pero, en la intersección, se requiere virar a la derecha. £Cuál es el largo máximo de la varilla que se puede transportar si el grosor de la varilla es despreciable?



13. Halle las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que circunscribe una esfera de radio R.
14. Un joven puede remar a razón de dos kilómetros por hora y correr a seis kilómetros por hora. Si está en el punto A de la playa y desea llegar lo antes posible al punto B, situado en la isla de enfrente, que está a dos kilómetros del punto C en la playa, £hasta qué punto P de la playa debe correr para luego remar desde P hasta B? £En qué tiempo llegará?



4.15 Regla de L'Hôpital

4.15.1 Formas indeterminadas

Al tratar de utilizar las propiedades de los límites de la suma, producto, etcétera, se puede llegar a situaciones en que los resultados no se pueden aplicar por no cumplirse las condiciones que las garantizan. Y resulta que bajo condiciones similares, los resultados obtenidos no siempre son iguales. Por ejemplo, el límite del cociente de dos funciones tales que cada una tiende a 0, puede ser, en algunos casos, igual a 0; en otros, $+\infty$; en otros, no existir; etcétera. Se dice, entonces, que estamos frente a una *forma indeterminada*. Veamos algunos casos.

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo abierto I. Sea $x_0 \in I$:

1. Cuando se calculan límites de cocientes, como $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, sabemos que si existen los límites

   $$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

   y si $M \neq 0$ se tiene que

   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

   Puede suceder, sin embargo, que $L = M = 0$, de modo que, al tratar de aplicar este resultado se obtiene:

   $$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{0}{0}.$$

   La expresión $\frac{0}{0}$ es un ejemplo de "indeterminación". En este caso no se puede afirmar nada sobre la existencia o no del límite buscado. A veces existe, a veces no, como se ve en los siguientes ejemplos.

   Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$, entonces

   $$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = 1.$$

   En cambio, si $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1 - \cos x$, el límite

   $$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

   no existe.

2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (respectivamente $-\infty$) y si $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ (respectivamente $+\infty$), las expresiones $(f+g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ pueden tener diferentes comportamientos posibles cuando $x \to x_0$. La primera es una indeterminación del tipo $+\infty - \infty$ ($-\infty + \infty$, respectivamente), y la segunda, del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (o $-\infty$), la expresión $(fg)(x)$ puede comportarse de diferentes maneras cuando $x \to x_0$. Es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ o $0 \cdot (-\infty)$.

Hemos visto algunos casos en los que se pueden hallar los límites buscados como aplicación del teorema 1.1. Se dice entonces que "hemos levantado la indeterminación" Un método muy útil para ello también es la regla de L'Hôpital que veremos a continuación.

4.15.2 Regla de L'Hôpital

Teorema 4.20 (Regla de L'Hôpital)
Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y si

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Se tiene un resultado similar si, en vez de que x tienda al número a, lo haga a a^+, a^-, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 4.97

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solución. Como el límite es una indeterminación de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, y como

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

existe, entonces, por la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 4.98

Calcular $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Solución. Como el

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

existe, entonces, por la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Con ciertas manipulaciones previas, el teorema es también útil para levantar otras indeterminaciones como son

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0 \ \text{ y } \ 1^\infty.$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.99

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución. Este límite conduce a la indeterminación $\infty-\infty$.

Pero como

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}},$$

el límite del segundo miembro de la expresión anterior conduce a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, que puede ser tratada con la regla de L'Hôpital.

El límite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}-1}{3x}=-\infty.$$

De donde, por la la regla de L'Hôpital se tiene el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)=-\infty.$$

Ejemplo 4.100

Pruebe, utilizando la regla de L'Hôpital, que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x^2+\tan^2 x}=0.$$

Solución. Sean $f(x)=\operatorname{sen}x-x\cos x$ y $g(x)=x^2+\tan^2 x$. Se pide demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Aplicando propiedades de los límites se encuentra fácilmente que

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}x-x\cos x)=0,$$
$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+\tan^2 x)=0.$$

Como el límite de la función del denominador $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ es igual a cero no podemos aplicar el teorema del límite de un cociente de funciones. Pero, por otro lado, tenemos que la función $\frac{f}{g}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x=0$, lo cual nos permitiría aplicar la regla de L'Hôpital. Para ello debemos encontrar el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Si este límite existe la regla de L'Hôpital nos dice que el límite buscado es igual al anterior. Veamos, pues, si existe dicho límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}x-x\cos x)'}{(x^2+\tan^2 x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\operatorname{sen}x}{2x+2\tan x\sec^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x}{2x+2\tan x\sec^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2+2\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sec^3 x}=\frac{0}{2+2(1)(1)}=0.\end{aligned}$$

Una inspección rápida del límite anterior nos dice que la función $\frac{f'}{g'}$ tiene también la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = 0$. Intentamos nuevamente aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(f'(x))'}{(g'(x))'} &= \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x \operatorname{sen} x)'}{(2x + 2\tan x \sec^2 x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{2 + 2\sec^4 x + 2\tan^2 x \sec^2 x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como el último límite existe podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(f'(x))'}{(g'(x))'} = 0.$$

Esto nos permite aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Con lo cual hemos probado que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2 + \tan^2 x} = 0.$$

4.16 Ejercicios

1. Calcule los siguientes límites.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^3 \sin x}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\epsilon \ln x$ donde $\epsilon > 0$.

   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\arctan x}$.

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$.

   (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$.

   (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$.

   (j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x - 5}{\sec x + 4}$.

2. Demuestre la regla de L'Hopital si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$, para el caso $L \in \mathbb{R}$. *Indicación:* Use el Teorema 4.10 (Teorema General del Valor Intermedio) para $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Bibliografía

[1] T. Apostol. *Clculus*. Revert, 1990.

[2] B. Demidovich. *Problemas y ejercicios de Anlisis Matemtico*. Editorial Mir Mosc, 1967.

[3] L. Leithold. *El Clculo*. Oxford University Press, 2007.