

CUADERNOS DE MATEMÁTICA  
DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

HOLGER CAPA SANTOS

---

---

SERIES TEMPORALES

*La ciencia y el arte de los pronósticos*

---

---



## **Cuaderno de Matemática No. 10**

**SERIES TEMPORALES: LA CIENCIA Y EL ARTE DE LOS PRONÓSTICOS**

**HOLGER CAPA SANTOS**

**Responsable de la Edición: ?**

**Revisión técnica: ?**

**Asistentes: Andrés Merino**

**Portada: Andrés Merino**

Registro de derecho autoral No.

ISBN:

Publicado por la Unidad de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2015

Primera impresión: 2015

© Escuela Politécnica Nacional 2015

# Índice general

<b>1</b>	<b>Modelos de Heteroscedasticidad Condicional</b>	<b>3</b>
1.1	Modelos Arch–Garch Simétricos . . . . .	3
1.2	Modelos GARCH asimétricos . . . . .	5
1.3	Metodología de la Modelación . . . . .	7
1.4	Ejemplos con Heteroscedasticidad Condicional . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Modelos Multivariantes de Series Temporales</b>	<b>11</b>
2.1	Procesos Estacionarios . . . . .	11
2.1.1	Proceso estrictamente estacionario . . . . .	11
2.1.2	Proceso débilmente estacionario . . . . .	11
2.2	Matrices de Correlación Cruzada (Cross-Correlation) . . . . .	12
2.2.1	Dependencia Lineal . . . . .	13
	<b>Índice Alfabético</b>	<b>17</b>



# Índice de figuras

1.1	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3 para la SVM . . . . .	8
1.2	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3 para la SVM	8
1.3	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM . . . .	9
1.4	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM . . . . .	9



# Índice de tablas

1.1	Información sobre los coeficientes del Modelo 3 para la SVM . . . . .	8
1.2	Información estadística para el Modelo 3-ARCH(1) para la SVM . . . . .	9





# Notaciones

- $E(.)$  : Esperanza matemática de una variable aleatoria.
- $V(.)$  : Varianza de una variable aleatoria.
- $\text{Cov}(.,.)$  : Covarianza de dos variables aleatorias.
- $N(\mu, \sigma^2)$  : Distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .
- $\hat{\cdot}$  : Denota un estimador del parámetro estadístico que se encuentra bajo el símbolo.
- $c$  : De manera general, representa a una constante numérica.
- i.i.d : Representa a la frase: independientes e idénticamente distribuidas.
- i.i.d (0,1) : Variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza matemática 0 y varianza 1.
- $\gamma(l)$  : Función de autocovarianza de orden  $l$ .
- $\rho(l)$  : Función de autocorrelación de orden  $l$ .
- $r(l)$  : Función de autocorrelación parcial de orden  $l$ .
- $1_A$  : Función indicatriz sobre el conjunto  $A$ .
- $L_c^2(\Omega)$  : Espacio de variables aleatorias de  $\Omega$  en  $C$ , de cuadrado integrable.
- $L_c^2(E)$  : Espacio de funciones medibles de  $E$  en  $C$ , de cuadrado integrable.
- $\Sigma$  : Matriz de varianzas - covarianzas
- $\Sigma_u$  : Matriz de varianzas – covarianzas residuales
- $\therefore$  : Significa: por tanto



# Capítulo 1

## Modelos de Heteroscedasticidad Condicional

### 1.1 Modelos Arch–Garch Simétricos

En esta sección, se presentará un breve resumen de la teoría desarrollada alrededor de los modelos ARCH – GARCH, los cuales determinan un patrón de comportamiento estadístico para la varianza condicional, denominados modelos Auto-Regresivos con Heteroscedasticidad Condicional.

El análisis de series temporales económicas, tradicionalmente se ha centrado en el estudio de modelos para la media condicional en los que se asume que la varianza condicional es constante; en este caso se dice que existe homoscedasticidad. Si este no fuera el caso, se estaría enfrentado un problema de no estacionariedad de la serie.

En 1982, Robert Engle revolucionó los modelos de volatilidad introduciendo el estudio de las estructuras cuadráticas, ampliando así la visión de la metodología Box–Jenkins, en la cual los modelos lineales de tipo ARIMA admiten que las innovaciones son un ruido blanco, con media cero y varianza constante.

Los modelos de volatilidad condicional son importantes por el papel que juega el riesgo y el concepto de incertidumbre en el desarrollo de las teorías modernas de modelos financieros, que relacionan de forma directa el riesgo con la volatilidad. Estos modelos permiten relacionar el valor de la varianza condicional (no constante) en función del conjunto de información disponible en periodos anteriores; están específicamente diseñados para modelar y pronosticar varianzas condicionales.

**Definición 1.1.** Un Modelo ARCH( $r$ ) se define por:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r Z_{t-r}^2 \end{aligned}$$

donde los  $(u_t)$  son independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza uno (i.i.d.  $(0,1)$ ),  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0$  para  $i > 0$ .

En la práctica se supone que  $u_t \sim N(0,1)$  o que siguen una distribución t-student. Los coeficientes  $\alpha_i$  deben satisfacer ciertas condiciones (en general no negatividad:  $\alpha_0 > 0$  y

$\alpha_i \geq 0$  para  $i > 0$  y  $\sum_{i=1}^r \alpha_i < 1$ ), dependiendo del tipo de restricciones que se coloquen sobre el proceso  $Z_t$ .

Las restricciones de signo de los coeficientes de la ecuación de varianza garantizan que la varianza condicional sea positiva en todos los períodos. Lo que se necesita es que, una vez que se haya estimado el modelo, genere una serie de varianzas positiva, lo que puede suceder aún si algunos de los coeficientes  $\alpha_i$  fueran negativos. Esto se puede considerar como un contraste de validez del modelo.

Por la propia definición, a valores grandes de  $Z_t$  les siguen otros valores grandes de la serie.

$h_t$  es la varianza condicional de  $Z_t$  dado  $Z_s$ ,  $s < t$ .

**Observación 1.1.** Se puede demostrar que un proceso  $ARCH(r)$  implica que se puede representar  $X_t^2$  como un proceso  $AR(r)$ , con residuos que no son gaussianos. Además, el coeficiente de apuntamiento (curtosis) es mayor que 3, por lo cual las colas de la distribución serán más pesadas que en la distribución normal.

**Definición 1.2.** Un modelo  $GARCH(r, s)$ , está definido por:

$$Z_t = \sqrt{h_t} u_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_t$$

donde los  $u_t$  son i.i.d.  $(0, 1)$  con  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  para  $i > 0$  y

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1$$

Como en el caso de los modelos  $ARCH$ , usualmente se supone que los  $u_t$  son normales o siguen una distribución  $t$ -student.

Las restricciones de no negatividad impuestas sobre los coeficientes en la definición son para asegurarse que la varianza no llegue a tomar un valor negativo. Además, en algunos casos se pueden encontrar condiciones menos restrictivas para estos coeficientes, que aseguren que la varianza sea positiva.

**Observación 1.2.** Se puede demostrar que un proceso  $GARCH(rs)$  implica que se puede representar  $Z_t^2$  como un proceso  $ARMA(rs)$ , con residuos que no son gaussianos (más precisamente con residuos que representan una diferencia martingala). También, en este caso, el coeficiente de apuntamiento (curtosis) es mayor que 3, por lo cual las colas de la distribución serán más pesadas que en la distribución normal.

## Modelos IGARCH

Este modelo fue descrito originalmente por Engle y Bollerslev (1986). Si el modelo polinomial AR del modelo  $GARCH$  tiene una raíz unitaria, se tiene un modelo  $IGARCH$ . Los modelos  $IGARCH$  son modelos  $GARCH$  con una raíz unitaria. Estos modelos tienen la característica que los impactos de los choques al cuadrado sobre  $Z_t^2$  son persistentes; esto se

puede expresarse por:

$$\eta_{t-i} = Z_{t-i}^2 - h_{t-i}, \quad \text{para } i > 0$$

**Definición 1.3.** Un modelo IGARCH( $r, s$ ), se define por:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s (1 - \beta_j) h_{t-j} \end{aligned}$$

tal que,

$$\sum_{j=1}^s \beta_j + \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$$

Como en el caso de los modelos ARCH, usualmente se supone que los  $u_t$  son normales o siguen una distribución  $t$ -student.

Los modelos IGARCH son un caso específico dentro de la familia de los “modelos con varianza persistente” en los que la información actual (en el instante “ $t$ ”) es importante para realizar predicciones óptimas con cualquier horizonte temporal.

## 1.2 Modelos GARCH asimétricos

Una característica de los modelos GARCH, dado que la varianza depende fundamentalmente de valores cuadráticos pasados, es que la volatilidad que generan frente a cambios positivos o negativos inesperados de la variable (piénsese en retornos de inversiones), dan una respuesta simétrica a estos. Sin embargo, se ha probado empíricamente que la reacción que tiene la volatilidad o varianza condicional de muchas variables financieras a este tipo de cambios es asimétrica; es decir, existe diferencia en la respuesta de la volatilidad de la variable, dependiendo de si el cambio es positivo o negativo.

Con el fin de modelar esta respuesta asimétrica se han desarrollado una variedad de modelos asimétricos; los más representativos son los modelos EGARCH, TARCH, PARCH.

### Modelos EGARCH

Las restricciones de no negatividad para asegurar la positividad de la varianza en los modelos GARCH en muchas ocasiones son difíciles de lograr. Nelson (1991) propuso los modelos EGARCH (*Exponential GARCH*), como solución a este problema; éstos, además, incorporan efectos asimétricos.

**Definición 1.4.** Un modelo EGARCH( $r, s$ ), se define por:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ \ln(h_t) &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^s \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{i=1}^r (\alpha_i |u_t| + \gamma_i u_t) \end{aligned}$$

Nótese que el lado izquierdo de la ecuación es el logaritmo de la varianza condicional; esto implica que su efecto es exponencial y garantiza que las predicciones de ésta serán no

negativas. Cuando  $\gamma_i \neq 0$ , el efecto asimétrico deber incorporarse al Modelo GARCH.

Obsérvese también que se puede escribir  $\frac{Z_t}{\sqrt{h_t}}$  en lugar de  $u_t$ , en las fórmulas anteriores.

Como en el caso de los modelos ARCH, usualmente se supone que los  $u_t$  son normales o siguen una distribución  $t$ -student.

## Modelos TARCh

Los modelos TARCh (*Threshold ARCH*) fueron introducidos independientemente por Zakoian (1990) y Glosten, Jaganathan y Runklen (1993), por lo que también se conocen como GJR-GARCH. Estos modelos incluyen una variable adicional  $d_t$ , que determina el carácter asimétrico del modelo.

**Definición 1.5.** Un modelo TARCh( $r, s$ ), se define por:

$$Z_t = \sqrt{h_t} u_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_{t-i}^2 + \gamma Z_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

donde los  $u_t$  son i.i.d.  $(0, 1)$  con  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  para  $i, j > 0$  y  $\gamma \neq 0$

$$d_t = \begin{cases} 1, & \text{si } Z_t < 0 \\ 0, & \text{si } Z_t \geq 0 \end{cases}$$

Si  $\gamma = 0$  se pierde el efecto asimétrico del modelo.

En este modelo, las malas noticias ( $Z_t < 0$ ) y las buenas noticias ( $Z_t \geq 0$ ) (piénsese otra vez en retornos), tienen efectos diferentes sobre la varianza condicional.

## Modelos PARCH

Los modelos PARCH (*Power ARCH*) desarrollados independientemente por Taylor (1986) y Schwert (1989), introducen la desviación estándar a los modelos ARCH; donde se modela la desviación estándar en lugar de la varianza. Este modelo fue generalizado por Ding y otros (1993).

En el modelo PARCH, el parámetro de potencia  $\delta$  de la desviación estándar puede ser estimado antes que impuesto y los parámetros opcionales  $\gamma$  se agregan para capturar la asimetría dentro de los datos.

**Definición 1.6.** Un modelo PARCH( $r, s$ ), se define por:

$$Z_t = \sqrt{h_t} u_t$$

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i (|u_{t-i}| - \gamma_i u_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}^\delta$$

donde  $\delta > 0$ , es el parámetro del término de la potencia.  $\gamma_i$  se dicen los parámetros de apalancamiento.

En series de valores simétricos  $\gamma_i = 0$  para todo  $i$ . Nótese que si  $\delta = 1$  y  $\gamma_i = 0$  para todo  $i$ , el modelo PARCH es simplemente una especificación GARCH estándar. Si los  $\gamma_i = 0$  se pierde el efecto asimétrico del modelo.

Los modelos GARCH asimétricos, se estiman por el método de máxima verosimilitud condicional, por lo cual se requiere de ciertos supuestos acerca del comportamiento de los errores. Por lo general, se suponen i.i.d con distribución normal o incluso con una distribución  $t$ -student.

## 1.3 Metodología de la Modelación

El objetivo es encontrar un modelo que represente adecuadamente a los datos históricos de una determinada variable, combinando especificaciones tanto para la media como para la varianza condicional. Los tipos de modelos que se considerarán serán los ARIMA – GARCH, de tal manera que la media condicional de la serie sea descrita por un modelo del tipo ARIMA y su varianza condicional por uno de la familia de modelos ARCH – GARCH o de sus extensiones asimétricas PARCH, TARCH y EGARCH. La modelación se realizará utilizando el paquete EViews.

El primer paso es, por tanto, modelar la serie de datos por un modelo del tipo ARIMA o incluso SARIMA, con lo que se obtiene un modelo para la media condicional de la serie.

Luego de haberse eliminado toda correlación lineal en la serie, se debe indagar si existe heteroscedasticidad condicional residual, para lo cual deben analizarse los residuos estandarizados estimados al cuadrado; el correleograma correspondiente, permite llevar a cabo un análisis gráfico de identificación, para ver si algún valor es estadísticamente diferente de cero, y por tanto, existe autocorrelación en su forma residual cuadrática.

Si se verifica la existencia de heteroscedasticidad condicional en los residuos, se rechaza el supuesto de la varianza constante; se intentará entonces obtener una especificación para la varianza condicional, a través de la modelación de los residuos estimados obtenidos por el modelo ARIMA, mediante un modelo del tipo ARCH – GARCH o sus extensiones asimétricas.

Inicialmente se mantiene la estructura para la media condicional, obtenida por el modelo ARIMA, pero esta puede modificarse con la nueva especificación. Los residuos estimados deben analizarse, tanto en su forma simple como en la cuadrática, para eliminar toda evidencia de autocorrelación lineal (deben aceptarse como un ruido blanco).

La estimación y verificación permiten encontrar uno o varios modelos que cumplan las condiciones que se impusieron en la modelación ARIMA; es decir, todos los coeficientes deben ser significativos; las raíces de los polinomios característicos, tanto de la parte autorregresiva como de la media móvil, deben estar fuera del círculo unidad, para así asegurar la estacionariedad e invertibilidad del proceso. Además, los coeficientes de la ecuación de la varianza condicional deben satisfacer las restricciones de no negatividad para la varianza (modelos ARCH – GARCH).

Para la verificación de la presencia de una estructura ARIMA en los residuos (simples o cuadráticos) pueden utilizarse la FAC y la FACP; además, también se debe realizar la prueba global (estadístico  $Q$ ) de Box – Pierce – Ljung.

Una vez que un modelo ha sido estimado y ha superado las diversas verificaciones, se convierte en un instrumento útil para las predicciones de valores futuros. Como en la modelación ARIMA, si varios modelos son plausibles, se elige entre estos al mejor, mediante

los criterios ya citados previamente.

## 1.4 Ejemplos con Heteroscedasticidad Condicional

Aunque los datos de las ventas que se vienen utilizando no corresponden al ámbito financiero, sirven muy bien para ilustrar la modelación para la varianza condicional. En esta ocasión se adoptará el Modelo 3 con el cual se modeló la media condicional (SARIMA). La Figura 4.2 no permite aceptar la hipótesis de que la serie tenga una varianza constante.

Una posibilidad para amortiguar los efectos de varianza no constante es utilizar la transformación logaritmo o, en general, la transformación de Box y Cox; sin embargo, en esta ocasión se tratará de modelar directamente la varianza a través de los Modelos ARCH-GARCH o sus extensiones asimétricas.

En la Tabla 4.1 y en las figuras 4.1 y 4.2 se presentan la información estadística y residual para el Modelo 3 de la SVM:

**Tabla 1.1:** Información sobre los coeficientes del Modelo 3 para la SVM

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	156.1661	34.82541	4.484257	0.0000
AR(1)	0.325909	0.107494	3.031876	0.0033
AR(12)	-0.335945	0.114892	-2.924008	0.0045
MA(13)	0.480540	0.111556	4.307611	0.0000

**Figura 1.1:** FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3 para la SVM

**Figura 1.2:** FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3 para la SVM

Se observan fuertes correlaciones entre los residuos cuadráticos estandarizados estimados, por lo cual se hace necesaria la modelación de la varianza condicional del Modelo 3.

En general, es difícil establecer el orden para los modelos ARCH-GARCH. Lo usual es probar los modelos con parámetros (1,0), (1,1), (1,2) o (2,2). Para este caso se empezó probando con el modelo  $ARCH(1)$ ; los resultados aparecen en la Tabla 4.2 y en las Figuras 4.3 y 4.4.



**Tabla 1.2:** Información estadística para el Modelo 3-ARCH(1) para la SVM

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	115.3958	36.57140	3.155355	0.0016
AR(1)	0.483776	0.103019	4.695993	0.0000
AR(12)	-0.449722	0.078830	-5.704935	0.0000
MA(13)	0.798959	0.041313	19.33915	0.0000
Variance Equation				
C	16129.50	3530.889	4.568113	0.0000
RESID(-1) <sup>2</sup>	0.610436	0.249248	2.449115	0.0143
R-squared	0.335639	Mean dependent var	157.1548	
Adjusted R-squared	0.310726	S.D. dependent var	258.2531	
S.E. of regression	214.4082	Akaike info criterion	13.23093	
Sum squared resid	3677671.	Schwarz criterion	13.40456	
Log likelihood	-549.6992	Hannan-Quinn criter.	13.30073	
Durbin-Watson stat	2.201103			
Inverted AR Roots	,96 - ,24i	,96 + ,24i	,71 + ,65i	,71 - ,65i
	,28 - ,89i	,28 + ,89i	-,21 + ,90i	-,21 - ,90i
	-,63 - ,66i	-,63 + ,66i	-,87 + ,24i	-,87 - ,24i
Inverted MA Roots	.95-.24i	.95+.24i	.74-.65i	.74+.65i
	,35 + ,92i	,35 - ,92i	-,12 - ,98i	-,12 + ,98i
	-,56 - ,81i	-,56 + ,81i	-,87 + ,46i	-,87 - ,46i
	,98			

**Figura 1.3:** FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM**Figura 1.4:** FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM

Las Figuras 4.3 y 4.4 evidencian que existen problemas ya no solo en los residuos cuadráticos, sino también en los residuos simples. En la figura 4.4, la FACP en el orden 13 es significativo (y cercano a la estacionalidad 12); por lo cual, se decidió incluir un término AR(13) en el Modelo 3; esto tampoco solucionó totalmente la falta de independencia de los residuos cuadráticos. Luego, de algunas pruebas se encontró como modelo final aquel que contiene términos c, SAR(12), MA(12) y AR(13) para la media (se lo llamará Modelo 4) y ARCH(1) para la varianza. Los resultados se muestran en la Tabla 4.3 y en las Figuras 4.5 y 4.6.



## Capítulo 2

# Modelos Multivariantes de Series Temporales

Una serie temporal multivariante es un proceso estocástico  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , con  $X_t$  un vector donde cada componente se define como una serie temporal univariante. En este documento se utilizará la notación de vectores como columnas. Así se denota:

$$X_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})' \text{ el vector de } k \text{ series univariantes en el instante } t$$

Lo importante de tratar series multivariantes es que, a más de considerar simultáneamente observaciones de dos o más series univariantes, también se puede analizar las correlaciones existentes entre ellas; esto evidentemente enriquece el análisis, aunque los procesos operativos serán más complejos que en el caso univariante.

### 2.1 Procesos Estacionarios

Para poder estimar las características de los procesos se necesita suponer que son estables a lo largo del tiempo; esto implica, que son estacionarios.

#### 2.1.1 Proceso estrictamente estacionario

Un proceso estocástico multivariado  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , con  $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})'$ , es estrictamente estacionario (o fuertemente estacionario) si las distribuciones conjuntas de cualquier conjunto finito de variables se mantienen por saltos.

Es decir, si:

$$F_{t_1+l, \dots, t_k+l}(x_{t_1+l}, \dots, x_{t_k+l}) = F_{t_1, \dots, t_k}(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$  y para todo  $t_1, \dots, t_k, l \in \mathbb{Z}$

Donde,  $F_{t_1, \dots, t_k}$  denota la distribución conjunta de  $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$ .

#### 2.1.2 Proceso débilmente estacionario

Un proceso estocástico multivariado  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , con  $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})'$ , se dice que es *débilmente estacionario* si sus momentos de primer y segundo orden son invariantes en el tiempo

(no dependen de  $t$ ); es decir:

1.  $E(X_t) = \mu \quad \forall t$  (el vector media es constante).
2.  $Cov(X_t, X_{t-l}) = E[(X_t - \mu)(X_{t-l} - \mu)'] = \Gamma_l \quad \forall t$ ; es decir, la matriz de *covarianzas cruzadas* entre  $X_t$  y  $X_{t-l}$  es independiente de  $t$  (solo depende del salto  $l$ ).

La media  $\mu$  es un vector  $k$ -dimensional compuesto por las esperanzas de las componentes de  $X_t$ . La matriz de covarianzas cruzadas es de orden  $k * k$ .

El  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\Gamma_0$  es la varianza de  $X_{it}$ ; mientras que, el elemento  $(i, j)$  de  $\Gamma_0$  es la covarianza entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$ . El elemento  $(i, j)$  de  $\Gamma_l$  es la covarianza entre  $X_{it}$  y  $X_{j,t-l}$ .

**Observación 2.1.** Se puede demostrar que si un proceso  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es débilmente estacionario entonces también lo será cada una de sus componentes.

## 2.2 Matrices de Correlación Cruzada (Cross-Correlation)

En lo que sigue se considera que  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es estacionaria.

Sea  $D$  una matriz diagonal de orden  $k * k$  compuesta por las desviaciones estándar de  $X_{it}$  para  $i = 1, \dots, k$ , que se denota por:  $D = \text{diag} \{ \sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)} \}$ . La matriz de correlaciones cruzadas de  $X_t$  se define como:

$$\rho_0 \equiv [\rho_{ij}(0)] = D^{-1} \Gamma_0 D^{-1}$$

De manera particular, el elemento  $(i, j)$  de  $\rho_0$  es:

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(X_{it}, X_{jt})}{de(X_{it})de(X_{jt})},$$

donde,  $de(\cdot)$  es la desviación estándar.

$\rho_{ij}(0)$  es el coeficiente de correlación lineal entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$ . En el análisis de series de tiempo, dicho coeficiente se conoce como de concurrencia (en el mismo instante). Es fácil ver que:

- i)  $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$
- ii)  $-1 \leq \rho_{ij}(0) \leq 1$
- iii)  $\rho_{ii}(0) = 1$

Así,  $\rho(0)$  es una matriz simétrica con 1 en la diagonal.

Hay que mencionar que las matrices  $\Gamma_l$  contienen las **relaciones en retardo** entre las componentes de las series. Por lo tanto, las matrices de correlación cruzada se utilizan para medir la fuerza de la dependencia lineal entre las series de tiempo.

La matriz de correlación cruzada de  $X_t$  con  $X_{t-l}$  se define como:

$$\rho_l \equiv [\rho_{ij}(l)] = D^{-1} \Gamma_l D^{-1}$$

donde,  $D$  es la matriz diagonal de las desviaciones estándar de las series individuales. De la definición se tiene:

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0) \Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\text{Cov}(X_{it}, X_{jt-l})}{\text{de}(X_{it}) \text{de}(X_{jt})} = \frac{\text{Cov}(X_{it}, X_{jt-l})}{\text{de}(X_{it}) \text{de}(X_{jt-l})}$$

que es el coeficiente de correlación lineal entre  $X_{it}$  y  $X_{jt-l}$ . Cuando  $l > 0$ , este coeficiente de correlación mide la dependencia lineal de  $X_{it}$  con respecto  $X_{jt-l}$  ( $X_{t-l}$  ocurre con anterioridad al instante  $t$ ). Consecuentemente, si  $\rho_{ij}(l) \neq 0$  y  $l > 0$ , se dice que la serie  $X_{jt}$  **conduce** a la serie  $X_{it}$  con retardo  $l$ .

Similarmente,  $\rho_{ji}(l)$  mide la dependencia lineal de  $X_{jt}$  con respecto a  $X_{it-l}$  y se puede decir que la serie  $X_{it}$  **conduce** a la serie  $X_{jt}$ , con retardo  $l$ , si  $\rho_{ij}(l) \neq 0$  y  $l > 0$ .

Se pueden mencionar las siguientes propiedades cuando  $l > 0$ :

1. En general,  $\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l)$  para  $i \neq j$ , porque los dos coeficientes de correlación miden diferentes relaciones lineales entre las series. Por lo tanto,  $\Gamma_l$  y  $\rho_l$  son, generalmente, no simétricas.
2. Utilizando  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  y suponiendo que las series son estacionarias, se tiene:

$$\text{Cov}(X_{it}, X_{jt-l}) = \text{Cov}(X_{jt-l}, X_{it}) = \text{Cov}(X_{jt}, X_{it+l}) = \text{Cov}(X_{jt}, X_{it-(-l)})$$

Así que  $\Gamma_{ij}(l) = \Gamma_{ji}(-l)$ , donde  $\Gamma_{ji}(-l)$  es el elemento  $(j, i)$  de  $\Gamma_{-l}$ ; la igualdad se cumple para  $1 \leq i, j \leq k$ . Es decir,  $\Gamma_l = \Gamma_{-l}'$ .

### 2.2.1 Dependencia Lineal

Considérense las matrices de correlación cruzada  $\{\rho(l) | l = 0, 1, 2, \dots\}$  de una serie temporal vectorial estacionaria; éstas contienen la siguiente información:

1. Los elementos de la diagonal de la matriz de correlación cruzada  $\rho_{ii}(l)$  son las funciones de autocorrelación de  $X_{it}$ .
2. El elemento fuera de la diagonal  $\rho_{ij}(0)$  mide la relación lineal de concurrencia entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$ .
3. Para  $l > 0$ , el elemento fuera de la diagonal  $\rho_{ij}(l)$  mide la dependencia lineal de  $X_{it}$  con respecto a  $X_{jt-l}$ .

Por lo tanto, si  $\rho_{ij}(l) = 0$  para todo  $l > 0$ ,  $X_{it}$  no depende linealmente de ningún valor del pasado  $X_{jt-l}$ .

### Resumen e interpretación.

En general, la relación lineal entre dos series de tiempo  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  puede resumirse en la siguiente forma:

1.  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  no tienen relación lineal si  $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0, \quad \forall l \geq 0$ .
2.  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  están al mismo tiempo correlacionadas si  $\rho_{ij}(0) \neq 0$ .
3.  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  no tienen relación de avance-retardo si  $\rho_{ij}(l) = 0$  y  $\rho_{ji}(l) = 0, \quad \forall l > 0$ . En este caso, se dice que las series son desacopladas.
4. Existe una *relación unidireccional* desde  $X_{it}$  hacia  $X_{jt}$  si  $\rho_{ij}(l) = 0, \quad \forall l > 0$ , pero  $\rho_{ji}(v) \neq 0$  para algún  $v > 0$ . En este caso,  $X_{it}$  no depende de ningún valor del pasado de  $X_{jt}$ , pero  $X_{jt}$  depende de algún valor del pasado de  $X_{it}$ .
5. Existe una *relación de retroalimentación* entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  si  $\rho_{ij}(l) \neq 0$  para algún  $l > 0$  y  $\rho_{ji}(v) \neq 0$  para algún  $v > 0$ .

Las formulaciones anteriores son suficientes para analizar la dependencia lineal entre series temporales. Un enfoque más informativo para estudiar las relaciones entre las series temporales es construir un modelo multivariante para las series, porque un modelo correctamente especificado considera simultáneamente el número de series y las correlaciones cruzadas de las mismas.

En la práctica se utilizan los estimadores de las matrices antes mencionadas; en particular para  $\Gamma(l)$ :

$$\hat{\Gamma}(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-l} - \bar{X})', \quad l \geq 0$$

donde,

T: número de observaciones

$$\bar{X} = \frac{\left( \sum_{t=1}^T X_t \right)}{T} : \text{vector de medias muestrales}$$

y para  $\rho(l)$  :

$$\hat{\rho}(l) = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_X(l) \hat{D}^{-1}, \quad l \geq 0$$

donde,

$\hat{D}$  : Es la matriz diagonal de orden  $(k * k)$  que contiene las desviaciones estándar muestrales del vector  $X_t$  en la diagonal.

**Ejemplo 2.1.** Se consideran tres series de datos económicos de un país sudamericano: el producto interno bruto (PIB), denotada por  $(X_{1t})$ ; el consumo interno (CI), denotada por  $(X_{2t})$  y la demanda final interna (DFI), denotada por  $(X_{3t})$ . Se dispone de 56 datos trimestrales, desde noviembre de 2010 hasta junio de 2015 (Ver Anexo D.1). Para efectos de comparaciones se trabajará únicamente con los primeros 50 datos y se guardarán los 6 restantes para comparar con predicciones posteriores (enero 2015 - junio de 2015). Se desea estimar las matrices de correlaciones cruzadas de las series.

	Media	Mediana	Máximo	Mínimo	Desv. Est.	Asimetría	Curtosis
$X_{1t}$	96,52	89,79	165,31	49,79	34,15	0,35	1,92
$X_{2t}$	78,10	73,72	126,01	43,05	24,89	0,31	1,84
$X_{3t}$	98,71	92,34	166,66	50,51	34,48	0,30	1,87

	retardo 1			retardo 2			retardo 3		
$X_{1t}$	0,94	0,94	0,94	0,87	0,88	0,87	0,81	0,82	0,81
$X_{2t}$	0,93	0,94	0,94	0,87	0,88	0,87	0,80	0,81	0,81
$X_{3t}$	0,93	0,94	0,94	0,87	0,88	0,87	0,80	0,81	0,81

**Resolución.**  
Las matrices de correlación cruzada se las construyen de manera manual, considerando cada escenario de posibles combinaciones entre las variables; así, en este caso, se obtiene:





# Índice alfabético

## ARCH

Definición, 3

Restricciones, 4

Dependencia lineal multivariante, 13

## EGARCH

Definición, 5

## GARCH

Definición, 4

## IGARCH

Definición, 4

## Matriz

Correlaciones cruzadas, 12

## PARCH

Definición, 6

Relaciones en retardo, 12

## TARCH

Definición, 6