

CUADERNOS DE MATEMÁTICA  
DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

HOLGER CAPA SANTOS

---

---

SERIES TEMPORALES

*La ciencia y el arte de los pronósticos*

---

---



## **Cuaderno de Matemática No. 10**

**SERIES TEMPORALES: LA CIENCIA Y EL ARTE DE LOS PRONÓSTICOS**

**HOLGER CAPA SANTOS**

**Responsable de la Edición: ?**

**Revisión técnica: ?**

**Asistentes: Andrés Merino**

**Portada: Andrés Merino**

Registro de derecho autoral No.

ISBN:

Publicado por la Unidad de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2015

Primera impresión: 2015

© Escuela Politécnica Nacional 2015

# Índice general

<b>1</b>	<b>Modelos de Heteroscedasticidad Condicional</b>	<b>3</b>
1.1	Modelos Arch–Garch Simétricos . . . . .	3
1.2	Modelos GARCH asimétricos . . . . .	5
1.3	Metodología de la Modelación . . . . .	7
1.4	Ejemplos con Heteroscedasticidad Condicional . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Modelos Multivariantes de Series Temporales</b>	<b>11</b>
2.1	Procesos Estacionarios . . . . .	11
2.1.1	Proceso estrictamente estacionario . . . . .	11
2.1.2	Proceso débilmente estacionario . . . . .	11
2.2	Matrices de Correlación Cruzada (Cross-Correlation) . . . . .	12
2.2.1	Dependencia Lineal . . . . .	13
2.3	Modelos de Vectores Autoregresivos (VAR) . . . . .	17
2.3.1	El caso bivalente . . . . .	17
2.3.2	Representación general de un VAR . . . . .	19
2.4	Representación VARMA de una Serie Multivariante . . . . .	21
2.4.1	La representación VMA . . . . .	21
2.4.2	Representación lineal de un VAR(p) . . . . .	21
2.4.3	La representación VARMA . . . . .	23
2.5	Formulación de un modelo VAR . . . . .	24
2.5.1	Estimación . . . . .	24
2.5.2	Determinación del número de retardos . . . . .	25
2.5.3	Diagnóstico y validación del modelo . . . . .	26
2.6	Predicción . . . . .	29
2.7	La Causalidad . . . . .	40
2.7.1	La causalidad según Granger . . . . .	41
	<b>Índice Alfabético</b>	<b>43</b>



# Índice de figuras

1.1	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3 para la SVM . . . . .	8
1.2	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3 para la SVM	8
1.3	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM . . . .	9
1.4	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM . . . . .	9
2.1	Correlaciones cruzadas entre $X_{1t}$ y $X_{2t}$ . . . . .	16
2.2	Correlaciones cruzadas entre $X_{1t}$ y $X_{3t}$ . . . . .	16
2.3	Correlaciones cruzadas entre $X_{2t}$ y $X_{3t}$ . . . . .	17
2.4	Gráfico de las variaciones trimestrales de las series PIB, CI y DFI . . . . .	31
2.5	Especificación de un modelo VAR en EViews . . . . .	33
2.6	Criterio de estabilidad para el VAR(1) estimado . . . . .	34
2.7	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $Y_{1t}$ (PIB) . . . .	39
2.8	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $Y_{2t}$ (CI) . . . .	39
2.9	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $Y_{3t}$ (DFI) . . .	40



# Índice de tablas

1.1	Información sobre los coeficientes del Modelo 3 para la SVM . . . . .	8
1.2	Información estadística para el Modelo 3-ARCH(1) para la SVM . . . . .	9
2.1	Resumen de estadísticas y matrices de correlación cruzada para $X_{1t}$ , $X_{2t}$ y $X_{3t}$	15
2.2	Prueba DFA para $Y_{1t}$ . . . . .	31
2.3	Prueba DFA para $Y_{2t}$ . . . . .	31
2.4	Prueba DFA para $Y_{3t}$ . . . . .	32
2.5	Criterios para escoger el retardo del VAR . . . . .	32
2.6	Prueba de autocorrelación Pormanteau . . . . .	35
2.7	Prueba LM . . . . .	36
2.8	Prueba de Normalidad de los residuos . . . . .	36
2.9	Error Medio Cuadrático estimado para los modelos VAR y univariante . . . .	40





# Notaciones

- $E(.)$  : Esperanza matemática de una variable aleatoria.
- $V(.)$  : Varianza de una variable aleatoria.
- $\text{Cov}(.,.)$  : Covarianza de dos variables aleatorias.
- $N(\mu, \sigma^2)$  : Distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .
- $\hat{\cdot}$  : Denota un estimador del parámetro estadístico que se encuentra bajo el símbolo.
- $c$  : De manera general, representa a una constante numérica.
- i.i.d : Representa a la frase: independientes e idénticamente distribuidas.
- i.i.d (0,1) : Variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza matemática 0 y varianza 1.
- $\gamma(l)$  : Función de autocovarianza de orden  $l$ .
- $\rho(l)$  : Función de autocorrelación de orden  $l$ .
- $r(l)$  : Función de autocorrelación parcial de orden  $l$ .
- $1_A$  : Función indicatriz sobre el conjunto  $A$ .
- $L_c^2(\Omega)$  : Espacio de variables aleatorias de  $\Omega$  en  $C$ , de cuadrado integrable.
- $L_c^2(E)$  : Espacio de funciones medibles de  $E$  en  $C$ , de cuadrado integrable.
- $\Sigma$  : Matriz de varianzas - covarianzas
- $\Sigma_u$  : Matriz de varianzas – covarianzas residuales
- $\therefore$  : Significa: por tanto



# Capítulo 1

## Modelos de Heteroscedasticidad Condicional

### 1.1 Modelos Arch–Garch Simétricos

En esta sección, se presentará un breve resumen de la teoría desarrollada alrededor de los modelos ARCH – GARCH, los cuales determinan un patrón de comportamiento estadístico para la varianza condicional, denominados modelos Auto-Regresivos con Heteroscedasticidad Condicional.

El análisis de series temporales económicas, tradicionalmente se ha centrado en el estudio de modelos para la media condicional en los que se asume que la varianza condicional es constante; en este caso se dice que existe homoscedasticidad. Si este no fuera el caso, se estaría enfrentado un problema de no estacionariedad de la serie.

En 1982, Robert Engle revolucionó los modelos de volatilidad introduciendo el estudio de las estructuras cuadráticas, ampliando así la visión de la metodología Box–Jenkins, en la cual los modelos lineales de tipo ARIMA admiten que las innovaciones son un ruido blanco, con media cero y varianza constante.

Los modelos de volatilidad condicional son importantes por el papel que juega el riesgo y el concepto de incertidumbre en el desarrollo de las teorías modernas de modelos financieros, que relacionan de forma directa el riesgo con la volatilidad. Estos modelos permiten relacionar el valor de la varianza condicional (no constante) en función del conjunto de información disponible en periodos anteriores; están específicamente diseñados para modelar y pronosticar varianzas condicionales.

**Definición 1.1.** Un Modelo ARCH( $r$ ) se define por:

$$\begin{aligned}Z_t &= \sqrt{h_t}u_t \\h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r Z_{t-r}^2\end{aligned}$$

donde los  $(u_t)$  son independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza uno (i.i.d.  $(0,1)$ ),  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0$  para  $i > 0$ .

En la práctica se supone que  $u_t \sim N(0,1)$  o que siguen una distribución t-student. Los coeficientes  $\alpha_i$  deben satisfacer ciertas condiciones (en general no negatividad:  $\alpha_0 > 0$  y

$\alpha_i \geq 0$  para  $i > 0$  y  $\sum_{i=1}^r \alpha_i < 1$ ), dependiendo del tipo de restricciones que se coloquen sobre el proceso  $Z_t$ .

Las restricciones de signo de los coeficientes de la ecuación de varianza garantizan que la varianza condicional sea positiva en todos los períodos. Lo que se necesita es que, una vez que se haya estimado el modelo, genere una serie de varianzas positiva, lo que puede suceder aún si algunos de los coeficientes  $\alpha_i$  fueran negativos. Esto se puede considerar como un contraste de validez del modelo.

Por la propia definición, a valores grandes de  $Z_t$  les siguen otros valores grandes de la serie.

$h_t$  es la varianza condicional de  $Z_t$  dado  $Z_s$ ,  $s < t$ .

**Observación 1.1.** Se puede demostrar que un proceso  $ARCH(r)$  implica que se puede representar  $X_t^2$  como un proceso  $AR(r)$ , con residuos que no son gaussianos. Además, el coeficiente de apuntamiento (curtosis) es mayor que 3, por lo cual las colas de la distribución serán más pesadas que en la distribución normal.

**Definición 1.2.** Un modelo  $GARCH(r, s)$ , está definido por:

$$Z_t = \sqrt{h_t} u_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_t$$

donde los  $u_t$  son i.i.d.  $(0, 1)$  con  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  para  $i > 0$  y

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1$$

Como en el caso de los modelos  $ARCH$ , usualmente se supone que los  $u_t$  son normales o siguen una distribución  $t$ -student.

Las restricciones de no negatividad impuestas sobre los coeficientes en la definición son para asegurarse que la varianza no llegue a tomar un valor negativo. Además, en algunos casos se pueden encontrar condiciones menos restrictivas para estos coeficientes, que aseguren que la varianza sea positiva.

**Observación 1.2.** Se puede demostrar que un proceso  $GARCH(rs)$  implica que se puede representar  $Z_t^2$  como un proceso  $ARMA(rs)$ , con residuos que no son gaussianos (más precisamente con residuos que representan una diferencia martingala). También, en este caso, el coeficiente de apuntamiento (curtosis) es mayor que 3, por lo cual las colas de la distribución serán más pesadas que en la distribución normal.

## Modelos IGARCH

Este modelo fue descrito originalmente por Engle y Bollerslev (1986). Si el modelo polinomial AR del modelo  $GARCH$  tiene una raíz unitaria, se tiene un modelo  $IGARCH$ . Los modelos  $IGARCH$  son modelos  $GARCH$  con una raíz unitaria. Estos modelos tienen la característica que los impactos de los choques al cuadrado sobre  $Z_t^2$  son persistentes; esto se

puede expresarse por:

$$\eta_{t-i} = Z_{t-i}^2 - h_{t-i}, \quad \text{para } i > 0$$

**Definición 1.3.** Un modelo IGARCH( $r, s$ ), se define por:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s (1 - \beta_j) h_{t-j} \end{aligned}$$

tal que,

$$\sum_{j=1}^s \beta_j + \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$$

Como en el caso de los modelos ARCH, usualmente se supone que los  $u_t$  son normales o siguen una distribución  $t$ -student.

Los modelos IGARCH son un caso específico dentro de la familia de los “modelos con varianza persistente” en los que la información actual (en el instante “ $t$ ”) es importante para realizar predicciones óptimas con cualquier horizonte temporal.

## 1.2 Modelos GARCH asimétricos

Una característica de los modelos GARCH, dado que la varianza depende fundamentalmente de valores cuadráticos pasados, es que la volatilidad que generan frente a cambios positivos o negativos inesperados de la variable (piénsese en retornos de inversiones), dan una respuesta simétrica a estos. Sin embargo, se ha probado empíricamente que la reacción que tiene la volatilidad o varianza condicional de muchas variables financieras a este tipo de cambios es asimétrica; es decir, existe diferencia en la respuesta de la volatilidad de la variable, dependiendo de si el cambio es positivo o negativo.

Con el fin de modelar esta respuesta asimétrica se han desarrollado una variedad de modelos asimétricos; los más representativos son los modelos EGARCH, TARCH, PARCH.

### Modelos EGARCH

Las restricciones de no negatividad para asegurar la positividad de la varianza en los modelos GARCH en muchas ocasiones son difíciles de lograr. Nelson (1991) propuso los modelos EGARCH (*Exponential GARCH*), como solución a este problema; éstos, además, incorporan efectos asimétricos.

**Definición 1.4.** Un modelo EGARCH( $r, s$ ), se define por:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ \ln(h_t) &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^s \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{i=1}^r (\alpha_i |u_t| + \gamma_i u_t) \end{aligned}$$

Nótese que el lado izquierdo de la ecuación es el logaritmo de la varianza condicional; esto implica que su efecto es exponencial y garantiza que las predicciones de ésta serán no

negativas. Cuando  $\gamma_i \neq 0$ , el efecto asimétrico deber incorporarse al Modelo GARCH.

Obsérvese también que se puede escribir  $\frac{Z_t}{\sqrt{h_t}}$  en lugar de  $u_t$ , en las fórmulas anteriores.

Como en el caso de los modelos ARCH, usualmente se supone que los  $u_t$  son normales o siguen una distribución  $t$ -student.

## Modelos TARCh

Los modelos TARCh (*Threshold ARCH*) fueron introducidos independientemente por Zakoian (1990) y Glosten, Jaganathan y Runklen (1993), por lo que también se conocen como GJR-GARCH. Estos modelos incluyen una variable adicional  $d_t$ , que determina el carácter asimétrico del modelo.

**Definición 1.5.** Un modelo TARCh( $r, s$ ), se define por:

$$Z_t = \sqrt{h_t} u_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_{t-i}^2 + \gamma Z_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

donde los  $u_t$  son i.i.d.  $(0, 1)$  con  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  para  $i, j > 0$  y  $\gamma \neq 0$

$$d_t = \begin{cases} 1, & \text{si } Z_t < 0 \\ 0, & \text{si } Z_t \geq 0 \end{cases}$$

Si  $\gamma = 0$  se pierde el efecto asimétrico del modelo.

En este modelo, las malas noticias ( $Z_t < 0$ ) y las buenas noticias ( $Z_t \geq 0$ ) (piénsese otra vez en retornos), tienen efectos diferentes sobre la varianza condicional.

## Modelos PARCH

Los modelos PARCH (*Power ARCH*) desarrollados independientemente por Taylor (1986) y Schwert (1989), introducen la desviación estándar a los modelos ARCH; donde se modela la desviación estándar en lugar de la varianza. Este modelo fue generalizado por Ding y otros (1993).

En el modelo PARCH, el parámetro de potencia  $\delta$  de la desviación estándar puede ser estimado antes que impuesto y los parámetros opcionales  $\gamma$  se agregan para capturar la asimetría dentro de los datos.

**Definición 1.6.** Un modelo PARCH( $r, s$ ), se define por:

$$Z_t = \sqrt{h_t} u_t$$

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i (|u_{t-i}| - \gamma_i u_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}^\delta$$

donde  $\delta > 0$ , es el parámetro del término de la potencia.  $\gamma_i$  se dicen los parámetros de apalancamiento.

En series de valores simétricos  $\gamma_i = 0$  para todo  $i$ . Nótese que si  $\delta = 1$  y  $\gamma_i = 0$  para todo  $i$ , el modelo PARCH es simplemente una especificación GARCH estándar. Si los  $\gamma_i = 0$  se pierde el efecto asimétrico del modelo.

Los modelos GARCH asimétricos, se estiman por el método de máxima verosimilitud condicional, por lo cual se requiere de ciertos supuestos acerca del comportamiento de los errores. Por lo general, se suponen i.i.d con distribución normal o incluso con una distribución  $t$ -student.

## 1.3 Metodología de la Modelación

El objetivo es encontrar un modelo que represente adecuadamente a los datos históricos de una determinada variable, combinando especificaciones tanto para la media como para la varianza condicional. Los tipos de modelos que se considerarán serán los ARIMA – GARCH, de tal manera que la media condicional de la serie sea descrita por un modelo del tipo ARIMA y su varianza condicional por uno de la familia de modelos ARCH – GARCH o de sus extensiones asimétricas PARCH, TARCH y EGARCH. La modelación se realizará utilizando el paquete EViews.

El primer paso es, por tanto, modelar la serie de datos por un modelo del tipo ARIMA o incluso SARIMA, con lo que se obtiene un modelo para la media condicional de la serie.

Luego de haberse eliminado toda correlación lineal en la serie, se debe indagar si existe heteroscedasticidad condicional residual, para lo cual deben analizarse los residuos estandarizados estimados al cuadrado; el correleograma correspondiente, permite llevar a cabo un análisis gráfico de identificación, para ver si algún valor es estadísticamente diferente de cero, y por tanto, existe autocorrelación en su forma residual cuadrática.

Si se verifica la existencia de heteroscedasticidad condicional en los residuos, se rechaza el supuesto de la varianza constante; se intentará entonces obtener una especificación para la varianza condicional, a través de la modelación de los residuos estimados obtenidos por el modelo ARIMA, mediante un modelo del tipo ARCH – GARCH o sus extensiones asimétricas.

Inicialmente se mantiene la estructura para la media condicional, obtenida por el modelo ARIMA, pero esta puede modificarse con la nueva especificación. Los residuos estimados deben analizarse, tanto en su forma simple como en la cuadrática, para eliminar toda evidencia de autocorrelación lineal (deben aceptarse como un ruido blanco).

La estimación y verificación permiten encontrar uno o varios modelos que cumplan las condiciones que se impusieron en la modelación ARIMA; es decir, todos los coeficientes deben ser significativos; las raíces de los polinomios característicos, tanto de la parte autorregresiva como de la media móvil, deben estar fuera del círculo unidad, para así asegurar la estacionariedad e invertibilidad del proceso. Además, los coeficientes de la ecuación de la varianza condicional deben satisfacer las restricciones de no negatividad para la varianza (modelos ARCH – GARCH).

Para la verificación de la presencia de una estructura ARIMA en los residuos (simples o cuadráticos) pueden utilizarse la FAC y la FACP; además, también se debe realizar la prueba global (estadístico  $Q$ ) de Box – Pierce – Ljung.

Una vez que un modelo ha sido estimado y ha superado las diversas verificaciones, se convierte en un instrumento útil para las predicciones de valores futuros. Como en la modelación ARIMA, si varios modelos son plausibles, se elige entre estos al mejor, mediante

los criterios ya citados previamente.

## 1.4 Ejemplos con Heteroscedasticidad Condicional

Aunque los datos de las ventas que se vienen utilizando no corresponden al ámbito financiero, sirven muy bien para ilustrar la modelación para la varianza condicional. En esta ocasión se adoptará el Modelo 3 con el cual se modeló la media condicional (SARIMA). La Figura 4.2 no permite aceptar la hipótesis de que la serie tenga una varianza constante.

Una posibilidad para amortiguar los efectos de varianza no constante es utilizar la transformación logaritmo o, en general, la transformación de Box y Cox; sin embargo, en esta ocasión se tratará de modelar directamente la varianza a través de los Modelos ARCH-GARCH o sus extensiones asimétricas.

En la Tabla 4.1 y en las figuras 4.1 y 4.2 se presentan la información estadística y residual para el Modelo 3 de la SVM:

**Tabla 1.1:** Información sobre los coeficientes del Modelo 3 para la SVM

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	156.1661	34.82541	4.484257	0.0000
AR(1)	0.325909	0.107494	3.031876	0.0033
AR(12)	-0.335945	0.114892	-2.924008	0.0045
MA(13)	0.480540	0.111556	4.307611	0.0000

**Figura 1.1:** FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3 para la SVM

**Figura 1.2:** FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3 para la SVM

Se observan fuertes correlaciones entre los residuos cuadráticos estandarizados estimados, por lo cual se hace necesaria la modelación de la varianza condicional del Modelo 3.

En general, es difícil establecer el orden para los modelos ARCH-GARCH. Lo usual es probar los modelos con parámetros (1,0), (1,1), (1,2) o (2,2). Para este caso se empezó probando con el modelo  $ARCH(1)$ ; los resultados aparecen en la Tabla 4.2 y en las Figuras 4.3 y 4.4.



**Tabla 1.2:** Información estadística para el Modelo 3-ARCH(1) para la SVM

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	115.3958	36.57140	3.155355	0.0016
AR(1)	0.483776	0.103019	4.695993	0.0000
AR(12)	-0.449722	0.078830	-5.704935	0.0000
MA(13)	0.798959	0.041313	19.33915	0.0000
Variance Equation				
C	16129.50	3530.889	4.568113	0.0000
RESID(-1) <sup>2</sup>	0.610436	0.249248	2.449115	0.0143
R-squared	0.335639	Mean dependent var	157.1548	
Adjusted R-squared	0.310726	S.D. dependent var	258.2531	
S.E. of regression	214.4082	Akaike info criterion	13.23093	
Sum squared resid	3677671.	Schwarz criterion	13.40456	
Log likelihood	-549.6992	Hannan-Quinn criter.	13.30073	
Durbin-Watson stat	2.201103			
Inverted AR Roots	,96 - ,24i	,96 + ,24i	,71 + ,65i	,71 - ,65i
	,28 - ,89i	,28 + ,89i	-,21 + ,90i	-,21 - ,90i
	-,63 - ,66i	-,63 + ,66i	-,87 + ,24i	-,87 - ,24i
Inverted MA Roots	.95-.24i	.95+.24i	.74-.65i	.74+.65i
	,35 + ,92i	,35 - ,92i	-,12 - ,98i	-,12 + ,98i
	-,56 - ,81i	-,56 + ,81i	-,87 + ,46i	-,87 - ,46i
	,98			

**Figura 1.3:** FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM**Figura 1.4:** FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 3-ARCH(1) para la SVM

Las Figuras 4.3 y 4.4 evidencian que existen problemas ya no solo en los residuos cuadráticos, sino también en los residuos simples. En la figura 4.4, la FACP en el orden 13 es significativo (y cercano a la estacionalidad 12); por lo cual, se decidió incluir un término AR(13) en el Modelo 3; esto tampoco solucionó totalmente la falta de independencia de los residuos cuadráticos. Luego, de algunas pruebas se encontró como modelo final aquel que contiene términos c, SAR(12), MA(12) y AR(13) para la media (se lo llamará Modelo 4) y ARCH(1) para la varianza. Los resultados se muestran en la Tabla 4.3 y en las Figuras 4.5 y 4.6.



## Capítulo 2

# Modelos Multivariantes de Series Temporales

Una serie temporal multivariante es un proceso estocástico  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , con  $X_t$  un vector donde cada componente se define como una serie temporal univariante. En este documento se utilizará la notación de vectores como columnas. Así se denota:

$$X_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})' \text{ el vector de } k \text{ series univariantes en el instante } t$$

Lo importante de tratar series multivariantes es que, a más de considerar simultáneamente observaciones de dos o más series univariantes, también se puede analizar las correlaciones existentes entre ellas; esto evidentemente enriquece el análisis, aunque los procesos operativos serán más complejos que en el caso univariante.

### 2.1 Procesos Estacionarios

Para poder estimar las características de los procesos se necesita suponer que son estables a lo largo del tiempo; esto implica, que son estacionarios.

#### 2.1.1 Proceso estrictamente estacionario

Un proceso estocástico multivariado  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , con  $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})'$ , es estrictamente estacionario (o fuertemente estacionario) si las distribuciones conjuntas de cualquier conjunto finito de variables se mantienen por saltos.

Es decir, si:

$$F_{t_1+l, \dots, t_k+l}(x_{t_1+l}, \dots, x_{t_k+l}) = F_{t_1, \dots, t_k}(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$  y para todo  $t_1, \dots, t_k, l \in \mathbb{Z}$

Donde,  $F_{t_1, \dots, t_k}$  denota la distribución conjunta de  $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$ .

#### 2.1.2 Proceso débilmente estacionario

Un proceso estocástico multivariado  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , con  $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})'$ , se dice que es *débilmente estacionario* si sus momentos de primer y segundo orden son invariantes en el tiempo

(no dependen de  $t$ ); es decir:

1.  $E(X_t) = \mu \quad \forall t$  (el vector media es constante).
2.  $Cov(X_t, X_{t-l}) = E[(X_t - \mu)(X_{t-l} - \mu)'] = \Gamma_l \quad \forall t$ ; es decir, la matriz de *covarianzas cruzadas* entre  $X_t$  y  $X_{t-l}$  es independiente de  $t$  (solo depende del salto  $l$ ).

La media  $\mu$  es un vector  $k$ -dimensional compuesto por las esperanzas de las componentes de  $X_t$ . La matriz de covarianzas cruzadas es de orden  $k * k$ .

El  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\Gamma_0$  es la varianza de  $X_{it}$ ; mientras que, el elemento  $(i, j)$  de  $\Gamma_0$  es la covarianza entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$ . El elemento  $(i, j)$  de  $\Gamma_l$  es la covarianza entre  $X_{it}$  y  $X_{j,t-l}$ .

**Observación 2.1.** Se puede demostrar que si un proceso  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es débilmente estacionario entonces también lo será cada una de sus componentes.

## 2.2 Matrices de Correlación Cruzada (Cross-Correlation)

En lo que sigue se considera que  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es estacionaria.

Sea  $D$  una matriz diagonal de orden  $k * k$  compuesta por las desviaciones estándar de  $X_{it}$  para  $i = 1, \dots, k$ , que se denota por:  $D = \text{diag} \{ \sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)} \}$ . La matriz de correlaciones cruzadas de  $X_t$  se define como:

$$\rho_0 \equiv [\rho_{ij}(0)] = D^{-1} \Gamma_0 D^{-1}$$

De manera particular, el elemento  $(i, j)$  de  $\rho_0$  es:

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(X_{it}, X_{jt})}{de(X_{it})de(X_{jt})},$$

donde,  $de(\cdot)$  es la desviación estándar.

$\rho_{ij}(0)$  es el coeficiente de correlación lineal entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$ . En el análisis de series de tiempo, dicho coeficiente se conoce como de *concurrentia* (en el mismo instante). Es fácil ver que:

- i)  $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$
- ii)  $-1 \leq \rho_{ij}(0) \leq 1$
- iii)  $\rho_{ii}(0) = 1$

Así,  $\rho(0)$  es una matriz simétrica con 1 en la diagonal.

Hay que mencionar que las matrices  $\Gamma_l$  contienen las **relaciones en retardo** entre las componentes de las series. Por lo tanto, las matrices de correlación cruzada se utilizan para medir la fuerza de la dependencia lineal entre las series de tiempo.

La matriz de correlación cruzada de  $X_t$  con  $X_{t-l}$  se define como:

$$\rho_l \equiv [\rho_{ij}(l)] = D^{-1} \Gamma_l D^{-1}$$

donde,  $D$  es la matriz diagonal de las desviaciones estándar de las series individuales. De la definición se tiene:

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0) \Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\text{Cov}(X_{it}, X_{jt-l})}{\text{de}(X_{it}) \text{de}(X_{jt})} = \frac{\text{Cov}(X_{it}, X_{jt-l})}{\text{de}(X_{it}) \text{de}(X_{jt-l})}$$

que es el coeficiente de correlación lineal entre  $X_{it}$  y  $X_{jt-l}$ . Cuando  $l > 0$ , este coeficiente de correlación mide la dependencia lineal de  $X_{it}$  con respecto  $X_{jt-l}$  ( $X_{t-l}$  ocurre con anterioridad al instante  $t$ ). Consecuentemente, si  $\rho_{ij}(l) \neq 0$  y  $l > 0$ , se dice que la serie  $X_{jt}$  **conduce** a la serie  $X_{it}$  con retardo  $l$ .

Similarmente,  $\rho_{ji}(l)$  mide la dependencia lineal de  $X_{jt}$  con respecto a  $X_{it-l}$  y se puede decir que la serie  $X_{it}$  **conduce** a la serie  $X_{jt}$ , con retardo  $l$ , si  $\rho_{ij}(l) \neq 0$  y  $l > 0$ .

Se pueden mencionar las siguientes propiedades cuando  $l > 0$ :

1. En general,  $\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l)$  para  $i \neq j$ , porque los dos coeficientes de correlación miden diferentes relaciones lineales entre las series. Por lo tanto,  $\Gamma_l$  y  $\rho_l$  son, generalmente, no simétricas.
2. Utilizando  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  y suponiendo que las series son estacionarias, se tiene:

$$\text{Cov}(X_{it}, X_{jt-l}) = \text{Cov}(X_{jt-l}, X_{it}) = \text{Cov}(X_{jt}, X_{it+l}) = \text{Cov}(X_{jt}, X_{it-(-l)})$$

Así que  $\Gamma_{ij}(l) = \Gamma_{ji}(-l)$ , donde  $\Gamma_{ji}(-l)$  es el elemento  $(j, i)$  de  $\Gamma_{-l}$ ; la igualdad se cumple para  $1 \leq i, j \leq k$ . Es decir,  $\Gamma_l = \Gamma'_{-l}$ .

### 2.2.1 Dependencia Lineal

Considérense las matrices de correlación cruzada  $\{\rho(l) | l = 0, 1, 2, \dots\}$  de una serie temporal vectorial estacionaria; éstas contienen la siguiente información:

1. Los elementos de la diagonal de la matriz de correlación cruzada  $\rho_{ii}(l)$  son las funciones de autocorrelación de  $X_{it}$ .
2. El elemento fuera de la diagonal  $\rho_{ij}(0)$  mide la relación lineal de concurrencia entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$ .
3. Para  $l > 0$ , el elemento fuera de la diagonal  $\rho_{ij}(l)$  mide la dependencia lineal de  $X_{it}$  con respecto a  $X_{jt-l}$ .

Por lo tanto, si  $\rho_{ij}(l) = 0$  para todo  $l > 0$ ,  $X_{it}$  no depende linealmente de ningún valor del pasado  $X_{jt-l}$ .

### Resumen e interpretación.

En general, la relación lineal entre dos series de tiempo  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  puede resumirse en la siguiente forma:

1.  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  no tienen relación lineal si  $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0$ ,  $\forall l \geq 0$ .
2.  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  están al mismo tiempo correlacionadas si  $\rho_{ij}(0) \neq 0$ .
3.  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  no tienen relación de avance-retardo si  $\rho_{ij}(l) = 0$  y  $\rho_{ji}(l) = 0$ ,  $\forall l > 0$ . En este caso, se dice que las series son desacopladas.
4. Existe una *relación unidireccional* desde  $X_{it}$  hacia  $X_{jt}$  si  $\rho_{ij}(l) = 0$ ,  $\forall l > 0$ , pero  $\rho_{ji}(v) \neq 0$  para algún  $v > 0$ . En este caso,  $X_{it}$  no depende de ningún valor del pasado de  $X_{jt}$ , pero  $X_{jt}$  depende de algún valor del pasado de  $X_{it}$ .
5. Existe una *relación de retroalimentación* entre  $X_{it}$  y  $X_{jt}$  si  $\rho_{ij}(l) \neq 0$  para algún  $l > 0$  y  $\rho_{ji}(v) \neq 0$  para algún  $v > 0$ .

Las formulaciones anteriores son suficientes para analizar la dependencia lineal entre series temporales. Un enfoque más informativo para estudiar las relaciones entre las series temporales es construir un modelo multivariante para las series, porque un modelo correctamente especificado considera simultáneamente el número de series y las correlaciones cruzadas de las mismas.

En la práctica se utilizan los estimadores de las matrices antes mencionadas; en particular para  $\Gamma(l)$ :

$$\hat{\Gamma}(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-l} - \bar{X})', \quad l \geq 0$$

donde,

T: número de observaciones

$$\bar{X} = \frac{\left( \sum_{t=1}^T X_t \right)}{T} : \text{vector de medias muestrales}$$

y para  $\rho(l)$  :

$$\hat{\rho}(l) = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_X(l) \hat{D}^{-1}, \quad l \geq 0$$

donde,

$\hat{D}$  : Es la matriz diagonal de orden  $(k * k)$  que contiene las desviaciones estándar muestrales del vector  $X_t$  en la diagonal.

**Ejemplo 2.1.** Se consideran tres series de datos económicos de un país sudamericano: el producto interno bruto (PIB), denotada por  $(X_{1t})$ ; el consumo interno (CI), denotada por  $(X_{2t})$  y la demanda final interna (DFI), denotada por  $(X_{3t})$ . Se dispone de 56 datos trimestrales, desde noviembre de 2010 hasta junio de 2015 (Ver Anexo D.1). Para efectos de comparaciones se trabajará únicamente con los primeros 50 datos y se guardarán los 6 restantes para comparar con predicciones posteriores (enero 2015 - junio de 2015). Se desea estimar las matrices de correlaciones cruzadas de las series.

Resolución.

Las matrices de correlación cruzada se las construyen de manera manual, considerando cada escenario de posibles combinaciones entre las variables; así, en este caso, se obtiene:

a) Estadísticos descriptivos de  $x_{1t}$ ,  $X_{2t}$  y  $X_{3t}$ .

	Media	Mediana	Máximo	Mínimo	Desv. Est.	Asimetría	Curtosis
$X_{1t}$	96,52	89,79	165,31	49,79	34,15	0,35	1,92
$X_{2t}$	78,10	73,72	126,01	43,05	24,89	0,31	1,84
$X_{3t}$	98,71	92,34	166,66	50,51	34,48	0,30	1,87

b) Matrices de correlación cruzada

	retardo 1			retardo 2			retardo 3		
$X_{1t}$	0,94	0,94	0,94	0,87	0,88	0,87	0,81	0,82	0,81
$X_{2t}$	0,93	0,94	0,94	0,87	0,88	0,87	0,80	0,81	0,81
$X_{3t}$	0,93	0,94	0,94	0,87	0,88	0,87	0,80	0,81	0,81

c) Representación simplificada

+	+	+
+	+	+
+	+	+

+	+	+
+	+	+
+	+	+

+	+	+
+	+	+
+	+	+

Tabla 2.1: Resumen de estadísticas y matrices de correlación cruzada para  $X_{1t}$ ,  $X_{2t}$  y  $X_{3t}$

Para representar a las matrices de correlación cruzada, se utiliza la forma gráfica simplificada , que utiliza el hecho que  $2/\sqrt{T}$  (0,28 en este caso) es el valor crítico de la correlación muestral con nivel de significación del 5 %, bajo la suposición que  $X_t$  es un ruido blanco:

- “+” representa a los coeficientes de correlación que son mayores o iguales a  $2/\sqrt{T}$ .
- “-” representa a los coeficientes de correlación que son menores o iguales que  $-2/\sqrt{T}$ .
- “.” Representa a los coeficientes que se encuentran entre a  $-2/\sqrt{T}$  y  $2/\sqrt{T}$ .

Es fácil ver que las correlaciones cruzadas son significativas en los primeros tres retardos. En algunos paquetes estadísticos se puede encontrar el cálculo de las matrices de correlación cruzada. En Eviews, por ejemplo, se presenta la siguiente salida:

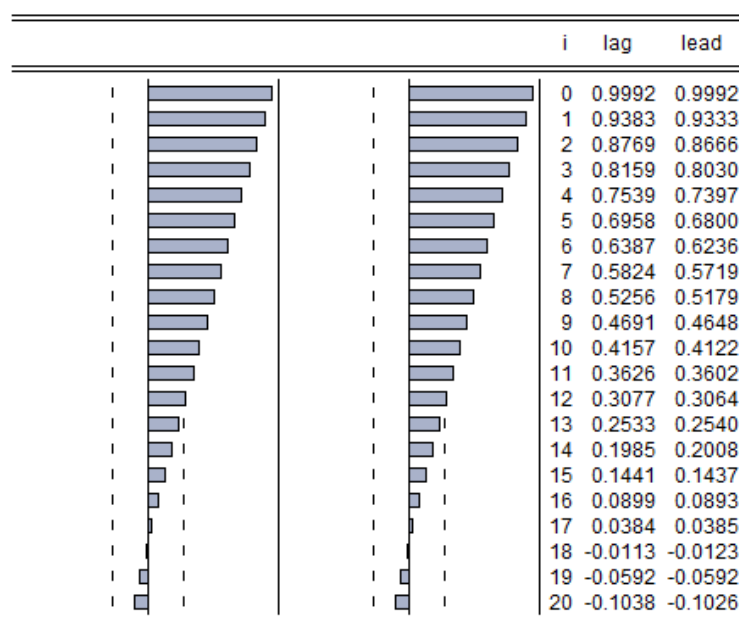


Figura 2.1: Correlaciones cruzadas entre  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$

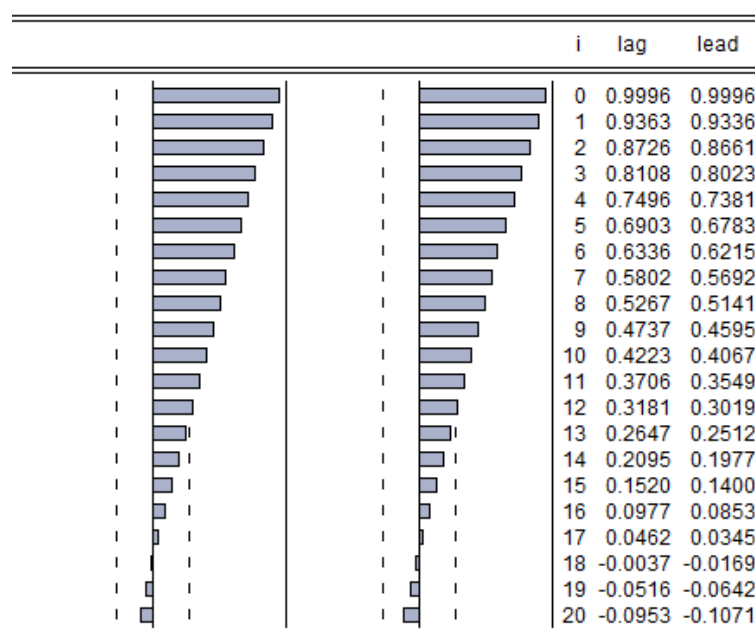


Figura 2.2: Correlaciones cruzadas entre  $X_{1t}$  y  $X_{3t}$



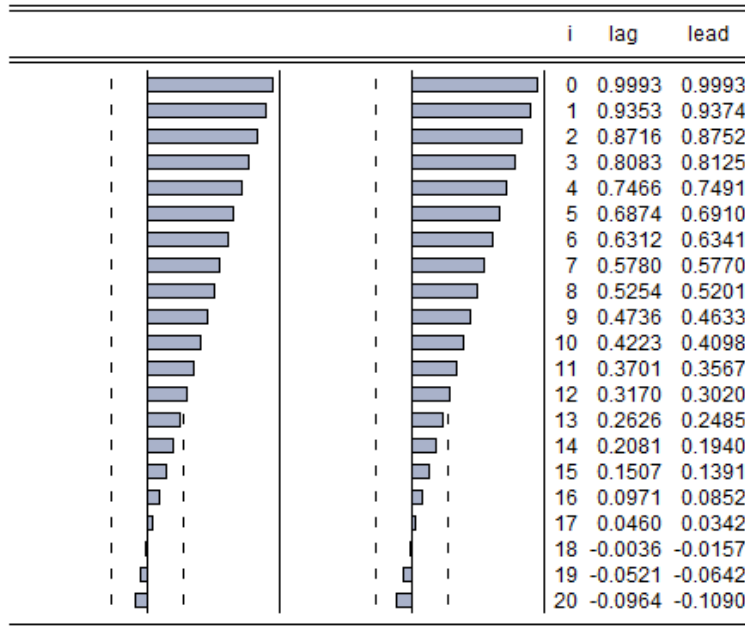


Figura 2.3: Correlaciones cruzadas entre  $X_{2t}$  y  $X_{3t}$

Como se puede observar, los valores calculados por el paquete son aquellos que están en la diagonal secundaria de las matrices calculadas manualmente. Para poder completar la matriz, se puede, ver a partir de la fórmula de cálculo que las  $\hat{\rho}_{ii}(l)$  corresponden a las autocorrelaciones simples de orden  $l$  de cada serie univariante dentro de  $X_t$ .

## 2.3 Modelos de Vectores Autoregresivos (VAR)

Este tipo de modelos no pertenecen a los modelos estocásticos desarrollados por Box y Jenkins; sin embargo, la representación VAR se puede considerar como la generalización de los modelos autoregresivos al caso multivariante.

### 2.3.1 El caso bivariante

Una representación VAR bivariante es aquella que consideran dos variables  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$ . Cada una de ellas se expresa en función de sus propios valores del pasado y de los del presente y del pasado de la otra variable. Por ejemplo, se va a representar el modelo VAR bivariante de orden  $p = 3$  [VAR (3)]; se escribe:

$$X_{1t} = v_1 + \sum_{i=1}^3 b_{1i}X_{1t-i} + \sum_{i=1}^3 c_{1i}X_{2t-i} - d_1X_{2t} + u_{1t}$$

$$X_{2t} = v_2 + \sum_{i=1}^3 b_{2i}X_{1t-i} + \sum_{i=1}^3 c_{2i}X_{2t-i} - d_2X_{1t} + u_{2t}$$

Las variables  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$  son estacionarias; las perturbaciones  $u_{1t}$  y  $u_{2t}$  son ruidos blancos de varianzas constantes y no correlacionados. Se puede ver inmediatamente la gran can-

tividad de parámetros a estimar (aquí 16 coeficientes), con los problemas típicos de pérdida de grados de libertad. Hay que tomar en cuenta que  $X_{1t}$  tiene un efecto inmediato en  $X_{2t}$  y recíprocamente. Este sistema inicial se denomina *forma estructural* de la representación VAR. Su *forma matricial*, se expresa como:

$$BX_t = v + \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_i X_{t-i} + u_t$$

con:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ d_2 & 1 \end{bmatrix} \quad X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} & c_{1i} \\ b_{2i} & c_{2i} \end{bmatrix} \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

Para obtener la *forma estándar* de un modelo VAR, se multiplica la ecuación anterior por  $B^{-1}$  (que se supone existe); es decir, se expresa por:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= v_1^0 + \sum_{i=1}^3 a_{1i}^1 X_{1t-i} + \sum_{i=1}^3 a_{1i}^2 X_{2t-i} + \vartheta_{1t} \\ X_{2t} &= v_2^0 + \sum_{i=1}^3 a_{2i}^1 X_{1t-i} + \sum_{i=1}^3 a_{2i}^2 X_{2t-i} + \vartheta_{2t} \end{aligned}$$

En esta especificación, los errores  $\vartheta_{1t}$  y  $\vartheta_{2t}$  son funciones de las innovaciones  $u_{1t}$  y  $u_{2t}$ ; en efecto, de  $\vartheta = B^{-1}u$ , se obtiene:

$$\vartheta_{1t} = \frac{(u_{1t} - d_1 u_{2t})}{(1 - d_1 d_2)} \text{ y } \vartheta_{2t} = \frac{(u_{2t} - d_2 u_{1t})}{(1 - d_1 d_2)}$$

Se puede ver que:

$$E(\vartheta_{1t}) = 0; \quad E(\vartheta_{2t}) = 0; \quad E(\vartheta_{1t} \vartheta_{1t-i}) = 0; \quad E(\vartheta_{2t} \vartheta_{2t-i}) = 0$$

Por lo tanto, los elementos de cada familia de errores tienen esperanza nula y son no correlacionados. Además:

$$E(\vartheta_{1t}^2) = \frac{(\sigma_{u_1}^2 + d_1^2 \sigma_{u_2}^2)}{(1 - d_1 d_2)^2}; \quad E(\vartheta_{2t}^2) = \frac{(\sigma_{u_2}^2 + d_2^2 \sigma_{u_1}^2)}{(1 - d_1 d_2)^2}$$

Donde  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  son las varianzas de  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente. Así, la varianza de los errores es constante (independiente del tiempo). Además:

$$E(\vartheta_{1t} \vartheta_{2t}) = -\frac{(d_2 \sigma_{u_1}^2 + d_1 \sigma_{u_2}^2)}{(1 - d_1 d_2)^2}$$

Si  $d_1 = d_2 = 0$ , las variables  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$  no tienen ninguna influencia sincrónica entre sí, pues los errores  $\vartheta_{1t}$  y  $\vartheta_{2t}$  serían no correlacionados. En caso contrario, los errores  $\vartheta_{1t}$  y  $\vartheta_{2t}$  estarían correlacionados y por tanto, una variación de uno de estos errores en un instante dado tiene impacto en el otro.

**Proposición 2.1.** *El modelo VAR no permite distinguir entre variables endógenas (variables propias del fenómeno estudiado) y exógenas (variables externas que ayudan a explicar las*

variables endógenas).

### 2.3.2 Representación general de un VAR

**Notación.** Un modelo VAR a  $k$  variables con  $p$  retardos se denota  $VAR(p)$ .

La generalización de la representación VAR a  $k$  variables con  $p$  retardos se escribe en su forma estándar como:

$$X_t = v_0 + A_1 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + \dots + A_p X_{t-p} + u_t$$

donde,

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ \vdots \\ X_{k,t} \end{bmatrix}; \quad v_0 = \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_k^0 \end{bmatrix}; \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{1i}^1 & \dots & a_{1i}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ki}^1 & \dots & a_{ki}^k \end{bmatrix}; \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ u_{kt} \end{bmatrix}$$

$u_t$  es el vector compuesto por los ruidos blancos de cada una de las  $k$  ecuaciones del modelo.

Se denota por:  $\Sigma_u = E(u_t u_t')$ , la matriz desconocida, de dimensión  $k$ , de varianzas-covarianzas de los errores.

Esta representación puede escribirse mediante el operador de retardo  $B$ , como:

$$(I - A_1 B - A_2 B^2 - \dots - A_p B^p) X_t = v_0 + u_t, \quad \text{o también:} \quad A(B) X_t = v_0 + u_t$$

donde, el operador de retardo  $B$  se define de la siguiente manera:

$$B^i X_t = X_{t-i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$B^0 X_t = X_t$$

#### 2.3.2.1 Estabilidad de un VAR

Considérese un modelo  $VAR(1)$ :

$$X_t = v_0 + A_1 X_{t-1} + u_t$$

Se dice que un  $VAR(1)$  es estable si todos los valores propios de  $A_1$  son de valor absoluto menor que 1; lo que se puede expresar también por:

$$\det(I_k - A_1 z) \neq 0, \quad \text{para} \quad |z| \leq 1$$

Esto implica que todas las raíces del polinomio característico están fuera del círculo unidad.

### 2.3.2.2 Representación de un proceso VAR(p) en la forma de VAR(1)

Un proceso  $VAR(p)$  se puede escribir como un proceso  $VAR(1)$  si se plantea en la siguiente forma:

$$X_t = A_0 + AX_{t-1} + U_t$$

donde,

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix}_{kp*1} \quad X_t = \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix}_{k*1} \quad A_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0_{k*1} \\ \vdots \\ 0_{k*1} \end{pmatrix}_{kp*1} \quad U_t = \begin{pmatrix} (u_t)_{k*1} \\ 0_{k*1} \\ \vdots \\ 0_{k*1} \end{pmatrix}_{kp*1}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k & 0 \end{pmatrix}_{kp*kp}$$

Lo importante de esta representación es que para obtener las propiedades de los procesos VAR, es suficiente con probarlas para una  $VAR(1)$

### 2.3.2.3 Procesos VAR(p) estables

Se dice que un  $VAR(p)$  es estable si:

$$\det(I_{kp} - Az) \neq 0, \text{ para } |z| \leq 1$$

Además, se puede demostrar que:

$$\det(I_{kp} - Az) = \det(I - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p)$$

**Observación 2.2.** Se puede demostrar que si un proceso  $VAR(1)$  es estable, entonces es estacionario.

En general, se puede demostrar que un proceso  $VAR(p)$  es estacionario si el polinomio definido a partir de la expresión:  $\det(I - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p)$  tiene sus raíces fuera del círculo unidad del plano complejo; es decir:

$$\det(I - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p) \neq 0 \forall z \text{ tal que } |z| \leq 1$$

**Ejemplo 2.2.** Determine si el siguiente modelo es estacionario.

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t-1} \\ X_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

**Resolución.**

Se tiene que:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix} z \right) = 1 - 1,5z - 0,07z^2, \quad \text{entonces} \quad \begin{matrix} z_1 = -16,17 \\ z_2 = -15,97 \end{matrix}$$

Las dos raíces son superiores a 1 en valor absoluto; por lo tanto, el proceso es estable; lo que implica que es estacionario.

## 2.4 Representación VARMA de una Serie Multivariante

### 2.4.1 La representación VMA

Un modelo media móvil vectorial de orden  $q$  ( $VMA(q)$  por sus siglas en inglés), tiene la siguiente forma:

$$X_t = m_0 + u_t - M_1 u_{t-1} - \dots - M_q u_{t-q} \quad \text{o} \quad X_t = m_0 + M(B)u_t$$

donde,

$m_0$  : Es un vector de dimensión  $k$  constante.

$M_i$  : Son matrices de dimensión  $k * k$ .

$M(B) = I - M_1 B - \dots - M_q B^q$  es el polinomio matriz MA en términos del operador de retardo  $B$ .

$\{u_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  : Es un ruido blanco multidimensional.

De manera similar al caso univariante, los procesos  $VMA(q)$  son débilmente estacionarios, siempre que la matriz de covarianzas ( $\Sigma_u$ ) de  $u_t$  exista. Si se toma la esperanza de  $X_t$ , se tiene:

$$\mu = E(X_t) = m_0$$

Así, el vector constante  $m_0$  es el vector media de  $X_t$  para un modelo VMA.

Se define  $\tilde{X}_t = X_t - m_0$  como el proceso corregido en media  $VAR(q)$ . Cuando se tiene un proceso  $VMA(q)$  y considerando el hecho de que los  $\{u_t\}$  no están correlacionados, se obtiene:

1.  $Cov(\tilde{X}_t, u_t) = \Sigma_u$
2.  $\Gamma_0 = \Sigma_u + M_1 \Sigma_u M_1' + \dots + M_q \Sigma_u M_q'$
3.  $\Gamma_l = 0$  si  $l > q$
4.  $\Gamma_l = \sum_{j=l}^q M_j \Sigma_u M_{j-l}'$  si  $1 \leq l \leq q$ , donde  $M_0 = -I$

Dado que  $\Gamma_l = 0$  para  $l > q$ , las matrices de correlación cruzada de un proceso  $VMA(q)$  satisfacen:

$$\rho_l = 0, \quad l > q$$

### 2.4.2 Representación lineal de un VAR(p)

Cuando se analizaron las series temporales univariantes, se mostró que bajo ciertas condiciones un proceso  $AR(1)$  se puede representar como un proceso lineal. De la misma manera,

para las series multivariantes se puede representar, en particular, un VAR(1) como un proceso lineal (se dice que es la representación lineal del proceso). Un modelo con esta forma permite medir el impacto en los valores presentes de una variación de innovaciones (o choques).

Sea  $X_t$  un VAR(1) estable:

$$X_t = v_0 + A_1 X_{t-1} + u_t$$

Si se realizan sustituciones repetidas en el proceso hasta el  $i$ -ésimo paso, se obtiene:

$$\begin{aligned} X_t &= v_0 + A_1 (v_0 + A_1 X_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = (I + A_1) v_0 + A_1^2 X_{t-2} + (A_1 u_{t-1} + u_t) \\ X_t &= v_0 + A_1 \left( (I + A_1) v_0 + A_1^2 X_{t-3} + A_1 u_{t-2} + u_{t-1} \right) + u_t \\ &= (I + A_1 + A_1^2) v_0 + A_1^3 X_{t-3} + (A_1^2 u_{t-2} + A_1 u_{t-1} + u_t) \\ &\vdots \\ X_t &= (I + A_1 + \dots + A_1^i) v_0 + A_1^{i+1} X_{t-i} + \sum_{j=0}^i A_1^j u_{t-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Por definición,  $A^0 = I$ .

Como el VAR es estable, se cumple que:

$$(I + A_1 + \dots + A_1^i) v_0 \rightarrow (I - A_1)^{-1} v_0 \quad \text{si } i \rightarrow \infty$$

Además,  $A_1^{i+1} \rightarrow 0$  rápidamente; así, se lo puede ignorar. Por lo tanto, se obtiene la siguiente representación:

$$X_t = (I - A_1)^{-1} v_0 + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i u_{t-i}$$

La generalización a un proceso VAR( $p$ ) se la realiza aplicando la representación de un VAR( $p$ ) como un VAR(1). Así, se obtiene:

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i u_{t-i}$$

donde,

$$\begin{aligned} \mu &= (I - A_1 - A_2 - \dots - A_p)^{-1} v_0 \\ M_i &= \sum_{j=1}^{\min(p,i)} A_j M_{i-j} \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{y} \quad M_0 = I \end{aligned}$$

Las matrices  $M_i$  aparecen como un “*factor de impacto*”, a través de las cuales se analiza el efecto de un choque a lo largo de todo el proceso.

### Observación 2.3.

1. Así, se obtiene que si un proceso VAR( $p$ ) es estable, tiene una representación lineal estacionaria.
2. No se profundiza sobre la modelación VMA( $q$ ) porque no está implementada en los

programas comerciales usuales.

**Ejemplo 2.3.** Considérese el proceso VMA (1):

$$X_t = \mu + u_t - M_1 u_{t-1} = \mu + u_t - M u_{t-1}$$

donde, por simplicidad, se ha quitado el subíndice de  $M_1$ . Este modelo puede escribirse explícitamente como:

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

Se dice que la serie de retardos ( $X_t$ ) solo depende del presente y del pasado de  $\{u_t\}$ . Por lo tanto, el modelo es de memoria finita.

El parámetro  $m_{12}$  denota la dependencia lineal de  $X_{1t}$  con  $u_{2,t-1}$  en la presencia de  $u_{1,t-1}$ . Si  $m_{12} = 0$ ,  $X_{1t}$  no depende de los retardos de  $u_{2t}$  y, entonces tampoco, de los retardos de  $X_{2t}$ . De manera similar, si  $m_{21} = 0$ ,  $X_{2t}$  no depende de los valores pasados de  $X_{1t}$ . Los elementos fuera de la diagonal de  $M$  muestran la dependencia entre las componentes de las series.

Para este ejemplo, se pueden clasificar las relaciones entre  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$  así:

1. Son series desacopladas si  $m_{12} = m_{21} = 0$ .
2. Hay una relación dinámica unidireccional de  $X_{1t}$  sobre  $X_{2t}$  si  $m_{12} = 0$ , pero  $m_{21} \neq 0$  y viceversa.
3. Hay una relación de retroalimentación entre  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$  si  $m_{12} \neq 0$  y  $m_{21} \neq 0$ .

Finalmente, la correlación actual entre los  $m_{ij}$  (coeficientes estimados para el modelo VMA) es la misma que entre los  $u_{it}$ . La descripción previa se puede generalizar para un modelo  $VMA(q)$ .

### 2.4.3 La representación VARMA

La representación VAR puede generalizarse (es una aplicación multivariante del teorema de descomposición de Wold (1954)), por analogía con los procesos  $ARMA(pq)$ .

$$X_t = A_0 + A_1 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + \dots + A_p X_{t-p} + u_t + M_1 u_{t-1} + M_2 u_{t-2} + \dots + M_q u_{t-q}$$

Se trata de un proceso ARMA multivariante que se denota: VARMA.

Las condiciones de estacionariedad son análogas a las de un proceso ARMA univariante:

- Un proceso VAR es siempre invertible; es lineal (por ende estacionario) cuando es estable.
- Un proceso VMA es siempre estacionario. Es invertible si las raíces del polinomio característico asociado a  $M(z)$  están fuera del círculo unitario complejo.

- Las condiciones de estacionariedad e invertibilidad de un VARMA están dadas, respectivamente, por la parte VAR y la parte VMA del VARMA.

La generalización de los modelos ARMA encuentra nuevos temas que no ocurren en el desarrollo de los modelos VAR y VMA. Uno de ellos es el *problema de identificación*. A diferencia de los modelos ARMA, los modelos VARMA pueden no estar definidos de manera única.

**Ejemplo 2.4.** Considere un modelo bivalente VMA(1):

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

Es *idéntico* al modelo bivalente VAR(1):

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

La equivalencia de los modelos se puede examinar fácilmente componente a componente. Es decir, para el modelo VMA(1) se tiene:

$$X_{1t} = u_{1t} - 2u_{2,t-1} \quad y \quad X_{2t} = u_{2t}$$

Por otro lado, para el modelo VAR(1) se tiene:

$$X_{1t} + 2X_{2,t-1} = u_{1t} \quad y \quad X_{2t} = u_{2t}$$

De los modelos se puede ver que:

$$X_{2,t-1} = u_{2,t-1}$$

Luego, los modelos para  $X_{1t}$  son idénticos. Este tipo de problema de identificación es inofensivo porque cualquiera de los modelos puede ser utilizado en una aplicación real. Sin embargo, existen casos en los que esta situación si se convierte en un problema y hay que tener en cuenta muchas restricciones para poder estimar un modelo VARMA.

## 2.5 Formulación de un modelo VAR

Los parámetros de un proceso VAR pueden estimarse solamente en las series temporales estacionarias. Se conoce que muchas series pueden volverse estacionarias a través de un proceso de diferenciación (en el caso de una tendencia determinista o una estacionalidad) o a través de una transformación de las variables (por ejemplo, una transformación logarítmica) en ciertos casos con heteroscedasticidad.

### 2.5.1 Estimación

En el caso de un proceso VAR, las ecuaciones pueden estimarse por MCO independientemente una de la otra (o por un método de máxima verosimilitud).



Sea el modelo  $VAR(p)$  estimado:

$$X_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 X_{t-1} + \hat{A}_2 X_{t-2} + \dots + \hat{A}_p X_{t-p} + \hat{u}_t$$

siendo,  $\hat{u}_t$  el vector de dimensión  $(k, 1)$  de componentes  $\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{kt}$ .

Se denotará por  $\hat{\Sigma}_{u,p}$  la matriz de varianzas covarianzas estimada de los residuos del modelo. Para cualquier orden  $p$ , se define por:

$$\hat{\Sigma}_{u,p} = \frac{1}{T - kp - 1} \sum_{t=p+1}^T \hat{u}_t (\hat{u}_t)', \quad p \geq 0$$

### 2.5.2 Determinación del número de retardos

El mayor problema que debe enfrentarse a la hora de estimar los modelos VAR es el de la determinación del número de retardos a incluir en la estimación; suele realizarse en forma cuantitativa, analizando los resultados de la estimación y comparando los resultados obtenidos entre distintos modelos alternativos, ya que no es frecuente encontrar evidencias teóricas al respecto.

Los criterios comúnmente utilizados para la selección entre modelos alternativos son el criterio informativo de Akaike (AIC), el criterio de información bayesiano (BIC), que también se conoce como el criterio de Schwarz (SC) o el criterio de Hanan-Quinn (HQ).

Para el caso de la representación VAR, estos criterios se pueden utilizar para determinar el orden  $p$  del modelo. EL proceso de selección del orden de la representación consiste en estimar todos los modelos VAR para retardos de 0 a  $p_0$  ( $p_0$  es el máximo retardo admisible por la teoría económica o por los datos disponibles y se fija de antemano). Los estadísticos AIC(p), SC(p) y HQ(p) para el caso multivariante tienen las siguientes expresiones:

$$AIC(p) = \ln \left[ \left| \sum_u \right| \right] + \frac{2k^2 p}{T}$$

$$SC(p) = \ln \left[ \left| \sum_u \right| \right] + \frac{k^2 p \ln(T)}{T}$$

$$HQ(p) = \ln \left[ \left| \sum_u \right| \right] + \frac{2k^2 p \ln(\ln(T))}{T}$$

donde,

$k$ = número de variables del sistema.

$T$ = número de observaciones.

$p$ = número de retardos.

$\sum_u$  = matriz de varianzas covarianzas de residuos del modelo con retardo  $p$  (fijo).

Otro criterio utilizado para determinar el retardo del modelo, es la razón de máxima verosimilitud. Para utilizar este criterio, es necesario que el vector de las innovaciones ten-

ga una distribución normal; el logaritmo de la función de verosimilitud tiene la siguiente expresión:

$$l = -\frac{Tp}{2} (1 + \ln(2\pi)) - \frac{T}{2} \ln \left[ \left| \hat{\Sigma}_u \right| \right]$$

**Observación 2.4.** El retardo  $p$  que minimice la mayor cantidad de los criterios de AIC, HQ, BIC; o, maximice el logaritmo de la función de verosimilitud, se retiene. En la práctica se aconseja que  $p \leq 5$ , debido a que valores superiores implican incorporar una gran cantidad de parámetros.

También se puede utilizar el estadístico  $M(p)$  para probar la hipótesis nula  $H_0$  : El modelo es un VAR ( contra la alternativa,  $H_1$  : El modelo es un VAR( $p-1$ ).

Este estadístico se define por:

$$M(p) = - \left( T - k - p - \frac{3}{2} \right) \ln \left[ \frac{\left| \hat{\Sigma}_{u,p} \right|}{\left| \hat{\Sigma}_{u,p-1} \right|} \right]$$

donde,

$\hat{\Sigma}_{u,j}$  =matriz de varianzas covarianzas del modelo con retardo  $j$ .

$M(p)$  sigue asintóticamente una distribución Ji-cuadrado con  $k^2$  grados de libertad.

### 2.5.3 Diagnóstico y validación del modelo

Un buen punto de partida para la verificación de que el modelo estimado es el adecuado, es la significación de los parámetros estimados, para no tener parámetros no deseados o parámetros que no aportan al modelo. Por otro lado, esto puede ser engañoso, porque los parámetros estimados de un modelo pobre pueden ser también significativos. Por lo tanto, no se debe depender exclusivamente de la significación de los parámetros para evaluar el modelo.

Como en la mayoría de situaciones de modelación, la forma de evaluación se realiza a través del comportamiento de los residuos. Si el modelo es una representación adecuada de un proceso generado por las series de tiempo, los residuos no deben tener ninguna tendencia significativa ni patrón.

Una forma de observar esto es considerar los elementos individuales de la matriz de autocorrelación de los vectores de residuos. Otra forma es el uso del estadístico *Portmanteau*, que se analizará posteriormente.

#### 2.5.3.1 Matrices de autocorrelación multivariante

Sea  $\{u_t\}$  un ruido blanco  $k$ -dimensional con matriz de covarianza  $\Sigma_u$  y su correspondiente matriz de correlación  $R_u$  . La matriz de autocovarianza y la matriz de autocorrelación muestral de  $\{u_t\}$  con respecto al retardo  $i$  están dadas por:

$$\hat{C}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{u}_i \hat{u}_{t-i}' \quad i = 0, 1, \dots; i < T$$

$$\hat{R}_i = V_u^{-\frac{1}{2}} \hat{C}_i V_u^{-\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, \dots; i < T$$

donde,  $T$  es el número de observaciones de las series de tiempo y  $V_u^{-\frac{1}{2}}$  es una matriz diagonal ( $k * k$ ) con el inverso de la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de  $C_0$  en su diagonal.

$$\text{Sea } R_l^* = (R_1, \dots, R_l)'$$

### 2.5.3.2 La prueba "Portmanteau"

La prueba de bondad de ajuste para los residuos de Box-Pierce (1970), la prueba *Portmanteau*, fue extendida a modelos VAR multivariante por Hosking (1980) y Li-McLeod (1981). Esta prueba determina si las autocorrelaciones residuales, sobre un retardo específico, son estadísticamente nulos.

La hipótesis que se prueba es:

$$H_0 : R_l^* = (R_1, \dots, R_l)' = 0 \quad \text{contra} \quad H_a : R_l^* = (R_1, \dots, R_l)' \neq 0$$

Si no se rechaza la hipótesis nula, se puede asumir que los residuos se comportan como un ruido blanco y, por lo tanto, es adecuado el modelo ajustado.

La prueba multivariante *Portmanteau* propuesta por Hosking (1980) considera el estadístico:

$$Q(l) = T \sum_{i=1}^l \text{tr} \left( \hat{C}_i' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1} \right)$$

Este estadístico tiene aproximadamente una distribución Ji-Cuadrada con  $k^2(l - p)$  grados de libertad bajo la hipótesis nula, donde  $p$  es el orden estimado del modelo VAR ( $p$ ) y  $l$  es el número de retardos incluidos en la prueba para la significación total. Ljung-Box (1978) propusieron una modificación que conduce a propiedades mejores en el caso univariante; Hosking considera una modificación similar para el caso multivariante. El estadístico modificado de la prueba *Portmanteau* está dado por:

$$Q'(l) = T^2 \sum_{i=1}^l (T - i)^{-1} \text{tr} \left( \hat{C}_i' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1} \right)$$

### 2.5.3.3 Prueba de Breusch - Godfrey o Prueba del Multiplicador de Lagrange (LM)

Se utiliza para detectar autocorrelación de cualquier orden, especialmente en aquellos modelos con o sin variables dependientes retardadas. Permite determinar si existe correlación en los residuos hasta un determinado orden.

Se realiza la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0 : \rho_l = 0, \quad \text{contra} \quad H_a : \rho_l \neq 0,$$

donde,  $l$  es el orden del modelo VAR ajustado.

El estadístico utilizado para la prueba es:

$$LM = TR^2$$

donde,  $T$  el número de observaciones y  $R^2$  corresponde a la bondad de ajuste de la regresión auxiliar entre las variables y los residuos.

Este estadístico, bajo  $H_0$ , sigue asintóticamente una distribución Ji-cuadrado con  $l$  grados de libertad,  $\chi_l^2$ .

#### 2.5.3.4 Prueba de Jarque-Bera

Es una prueba asintótica de normalidad para grandes muestras. La prueba de Jarque-Bera (JB) considera la relación entre los coeficientes de asimetría y apuntamiento de los residuos de la ecuación estimada y los correspondientes de una distribución normal, de forma tal que si estas relaciones son suficientemente diferentes se rechazará la hipótesis nula de normalidad.

Se realiza la siguiente prueba de hipótesis:

$H_0$  : los residuos siguen una distribución normal multivariante

$H_1$  : los residuos no siguen una distribución normal multivariante

Este estadístico se basa en las medidas de apuntamiento (*curtosis*) y la asimetría a través de la transformación de Mahalanobis.

La  $i$ -ésima componente del vector de asimetría estimado, se calcula de la siguiente manera:

$$as_i = \frac{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \hat{\vartheta}_{ij}^3}{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (\hat{\vartheta}_{ij}^2)^{3/2}} = \frac{\sum_{j=1}^T \hat{\vartheta}_{ij}^3}{\sum_{j=1}^T (\hat{\vartheta}_{ij}^2)^{3/2}}$$

La  $i$ -ésima componente del vector de apuntamiento estimado se calcula de la siguiente manera:

$$k_i = \frac{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \hat{\vartheta}_{ij}^4}{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (\hat{\vartheta}_{ij}^2)^2} = \frac{\sum_{j=1}^T \hat{\vartheta}_{ij}^4}{\sum_{j=1}^T (\hat{\vartheta}_{ij}^2)^2}$$

$\hat{\vartheta}_{ij}$  son los elementos de la matriz  $\hat{V}$ , que se define de la siguiente manera:

$$\hat{V} = \hat{U} S_{\hat{U}}^{-1}$$

donde,  $\hat{U}$  es la matriz de los residuos obtenidos a través de la estimación de las variables utilizando el método de mínimos cuadrados; mientras que  $S_{\hat{U}}$  es una matriz triangular superior tal que:

$$\hat{U}' \hat{U} = S_{\hat{U}}' S_{\hat{U}} \quad \text{y} \quad (\hat{U}' \hat{U})^{-1} = S_{\hat{U}}^{-1} (S_{\hat{U}}^{-1})'$$

En este caso,  $\hat{V}$  es la matriz ortogonalizada de los residuos estimados; es decir,  $as_i$  y  $k_i$  corresponden a la asimetría y el apuntamiento individual estimados, respectivamente.

Entonces, se define a la asimetría y al apuntamiento estimados de la distribución de la serie multivariante como:

$$AS = (as_1, \dots, as_T)' (as_1, \dots, as_T)$$

$$K = (k_1 - 3, \dots, k_T - 3)' (k_1 - 3, \dots, k_T - 3)$$

El estadístico utilizado para la prueba es:

$$JB = T \left[ \frac{AS}{6} + \frac{K}{24} \right]$$

Este estadístico se compara con una distribución Ji-Cuadrada con  $2T$  grados de libertad.

## 2.6 Predicción

Con los coeficientes estimados del modelo, se puede calcular la predicción para un horizonte  $h$ , dada la información hasta el período  $T$ ; por ejemplo, para un VAR (1) se tiene:

$$\hat{X}_T(1) = \hat{v}_0 + \hat{A}_1 X_T$$

Al horizonte de 2 períodos, la predicción es:

$$\hat{X}_T(2) = \hat{v}_0 + \hat{A}_1 \hat{X}_T(1) = \hat{v}_0 + \hat{A}_1 \hat{v}_0 + \hat{A}_1^2 X_T$$

Al horizonte de 3 períodos, la predicción se escribe:

$$\hat{X}_T(3) = \hat{v}_0 + \hat{A}_1 \hat{X}_T(2) = \left( I + \hat{A}_1 + \hat{A}_1^2 \right) \hat{v}_0 + \hat{A}_1^3 X_T$$

$$\hat{X}_T(h) = \hat{v}_0 + \hat{A}_1 \hat{X}_T(h-1) = \left( I + \hat{A}_1 + \dots + \hat{A}_1^{h-1} \right) \hat{v}_0 + \hat{A}_1^h X_T, \quad h \geq 0$$

Cuando  $h \rightarrow \infty$ , la previsión tiende a un valor constante (estado estacionario) puesto que  $\hat{A}_1^i \rightarrow 0$  si  $i \rightarrow \infty$  y existe el límite de  $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_1^j$ , que es igual a  $(I - \hat{A}_1)^{-1}$ . Por tanto:

$$\hat{X}_T(h) \rightarrow (I - \hat{A}_1)^{-1} \hat{v}_0 \quad \text{cuando } h \rightarrow \infty$$

El error de predicción al horizonte  $h$  viene dado por:

$$e_T(h) = X_{T+h} - \hat{X}_T(h)$$

En particular, para  $h=1$  y  $h=2$ , se tiene:

$$e_T(1) = u_{T+1}$$

$$e_T(2) = u_{T+2} + A_1 u_{T+1}$$

En general, para el horizonte  $h$ , se tiene:

$$e_T(h) = \sum_{i=0}^{h-1} A_1^i u_{T+h-i}$$

La esperanza del error de predicción es nula. La matriz de varianza-covarianza del error de predicción es:

$$\sum_u(h) = E \left[ \left( \sum_{i=0}^{h-1} A_1^i u_{T+h-i} \right) \left( \sum_{i=0}^{h-1} A_1^i u_{T+h-i} \right)' \right]$$

La varianza-covarianza estimada viene dada por:

$$\hat{\sum}_u(h) = E \left[ \left( \sum_{i=0}^{h-1} \hat{A}_1^i \hat{u}_{T+h-i} \right) \left( \sum_{i=0}^{h-1} \hat{A}_1^i \hat{u}_{T+h-i} \right)' \right]$$

Luego,

$$\hat{\sum}_T(h) = M_0 \hat{\sum}_u M_0' + M_1 \hat{\sum}_u M_1' + \dots + M_{h-1} \hat{\sum}_u M_{h-1}'$$

donde  $M_i$  son las matrices de la representación VMA.

Por lo tanto, se tiene:

$$M_1 = \hat{A}_1; \quad M_2 = \hat{A}_1 M_1 + \hat{A}_2 M_0 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2;$$

$$M_3 = \hat{A}_1 M_2 + \hat{A}_2 M_1 + \hat{A}_3 M_0 = \hat{A}_1^3 + \hat{A}_1 \hat{A}_2 + \hat{A}_2 \hat{A}_1 + \hat{A}_3$$

La varianza del error de predicción para cada una de las predicciones de las  $k$  variables ( $\hat{\sigma}_i^2(h)$ ) se lee sobre la primera diagonal de la matriz  $\hat{\sum}_u(h)$ . El intervalo de predicción al nivel  $(1 - \alpha)$  está dado por:  $\hat{X}_{iT}(h) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_i(h)$  donde  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  es el cuantil de orden  $(1-\alpha/2)$  de la ley normal.

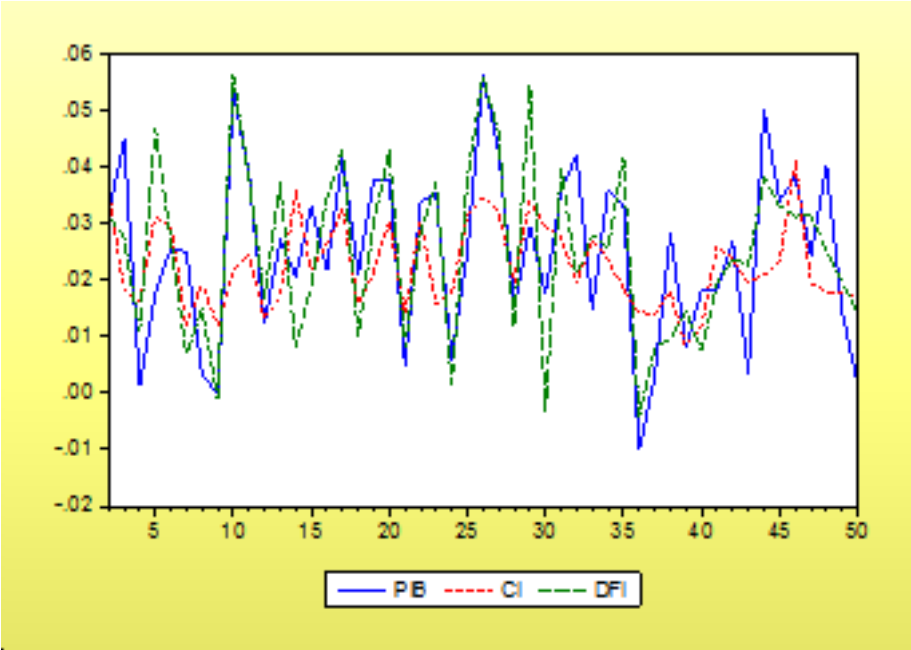
**Ejemplo 2.5.** Considerando las series del ejemplo 5.1, se busca modelar en su forma VAR. Sin embargo, las series en el ejemplo 5.1 están en niveles y como se pudo observar no son estacionarias; por esta razón, se trabajará con las variaciones trimestrales de las series. Así, se tendrá: la variación trimestral del PIB ( $Y_{1t}$ ), del CI ( $Y_{2t}$ ) y de la DFI ( $Y_{3t}$ ) de un país sudamericano. Nótese que se ha denotado a las variaciones de las series con  $Y$ ; para las variables originales se dejará la notación con  $X$ . Se trabajará con 49 datos, dado que al calcular las variaciones, se pierde el primer dato. La serie  $Y$  iniciará en la observación 2 hasta la observación 50. (Ver Anexo D.1).

Determinar:

- El orden del modelo VAR.
- Los parámetros del modelo.
- La predicción para las 6 siguientes observaciones y dar el intervalo de confianza al 95 %.

**Resolución.**

Se inicia presentando el gráfico de las series:



**Figura 2.4:** Gráfico de las variaciones trimestrales de las series PIB, CI y DFI

Antes de realizar los procedimientos para estimar los modelos, se debe verificar si las series a ser analizadas son estacionarias; para ello se realiza la prueba de raíces unitarias para cada serie utilizando el programa EViews:

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-6,689257	0,0000
Test critical values:	1 % level	-4,161144	
	5 % level	-3,506374	
	10 % level	-3,183002	

**Tabla 2.2:** Prueba DFA para  $Y_{1t}$

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-6,231136	0,0000
Test critical values:	1 % level	-4,161144	
	5 % level	-3,506374	
	10 % level	-3,183002	

**Tabla 2.3:** Prueba DFA para  $Y_{2t}$

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-7,729086	0,0000
Test critical values:	1 % level	-4,161144	
	5 % level	-3,506374	
	10 % level	-3,183002	

**Tabla 2.4:** Prueba DFA para  $Y_{3t}$

Como se puede ver en las tablas 2.2, 2.3 y 2.4, las tres series son estacionarias.

- a) Se utilizarán los criterios de Akaike, Schwarz y el logaritmo de máxima verosimilitud para determinar el retardo  $p$  entre 1 y 4. Se deben estimar cuatro modelos diferentes y retener aquel que satisfaga la mayor cantidad de criterios óptimos.

Inicialmente, se tiene un modelo de la forma, para  $p=1$ :

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ a_3^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{11}^2 & a_{11}^3 \\ a_{21}^1 & a_{21}^2 & a_{21}^3 \\ a_{31}^1 & a_{31}^2 & a_{31}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix}$$

Algunos paquetes econométricos utilizan la estimación de MCO ecuación por ecuación ya que sólo los valores rezagados de las variables endógenas aparecen en el lado derecho de la ecuación, lo que hace que los estimadores sean eficientes.

Se obtiene lo siguiente:

$$\hat{Y}_{1t} = -0,1168Y_{1t-1} + 0,7168Y_{2t-1} - 0,0198Y_{3t-1} + 0,0115$$

$$\hat{Y}_{2t} = -0,0575Y_{1t-1} + 0,0674Y_{2t-1} + 0,0900Y_{3t-1} + 0,0197$$

$$\hat{Y}_{3t} = 0,1972Y_{1t-1} + 0,4192Y_{2t-1} - 0,3462Y_{3t-1} + 0,0185$$

Con la ayuda del paquete EViews 7, se realiza la estimación de los 4 modelos. Así, se obtuvieron los siguientes resultados:

Criterio / Retardo	1	2	3	4
Log likelihood	484,96	479,76	476,41	477,71
Akaike	-18,92	-18,72	-18,60	-18,67
Schwarz	-18,46	-17,91	-17,43	-17,13

**Tabla 2.5:** Criterios para escoger el retardo del VAR

Como se puede observar en la tabla 5.5, es en el retardo 1 ( $p = 1$ ) donde los criterios de Akaike y Schwarz se minimizan y el valor del *log de verosimilitud* es el máximo. Por lo tanto se realiza la estimación del VAR(1).

En el caso del programa EViews, para calcular el VAR se debe ingresar el número de retardos como un rango; por ejemplo, para un VAR(1) se debe especificar como "1 1", para



un VAR(4) se lo especifica como “1 4”, “2 4”, “3 4” o “4 4”, dependiendo del rango de retardos que se requiera en el modelo.

**Figura 2.5:** Especificación de un modelo VAR en EViews

b) El modelo VAR estimado se escribe:

$$Y_{1t} = -0,1168Y_{1t-1} + 0,7168Y_{2t-1} - 0,0198Y_{3t-1} + 0,0115 + \hat{u}_{1t}$$

(-0,55)
(2,05)
(-0,09)
(-1,66)

$R^2 = 0,09$ ;  $n = 50$ ;  $(.)$  = estadístico correspondiente a la distribución t de Student.

$$Y_{2t} = -0,0575Y_{1t-1} + 0,0674Y_{2t-1} + 0,0900Y_{3t-1} + 0,0197 + \hat{u}_{2t}$$

(-0,56)
(0,40)
(0,83)
(5,85)

$R^2 = 0,03$ ;  $n = 50$ ;  $(.)$  = estadístico correspondiente a la distribución t de Student.

$$Y_{3t} = 0,1972Y_{1t-1} + 0,4192Y_{2t-1} - 0,3462Y_{3t-1} + 0,0185 + \hat{u}_{3t}$$

(0,92)
(1,18)
(-1,52)
(2,61)

$R^2 = 0,06$ ;  $n = 50$ ;  $(.)$  = estadístico correspondiente a la distribución t de Student.

Antes de realizar las predicciones, se debe verificar si el modelo cumple con el criterio de estabilidad (las raíces del polinomio característico están fuera del círculo unidad). Con

ayuda del programa EViews se pueden calcular las inversas de las raíces del polinomio característico autoregresivo, las que se espera que se encuentren dentro del círculo unidad. Así se obtiene:

Root	Modulus
-0,246672 - 0,062904i	0,254566
-0,246672 + 0,062904i	0,254566
0,097725	0,097725

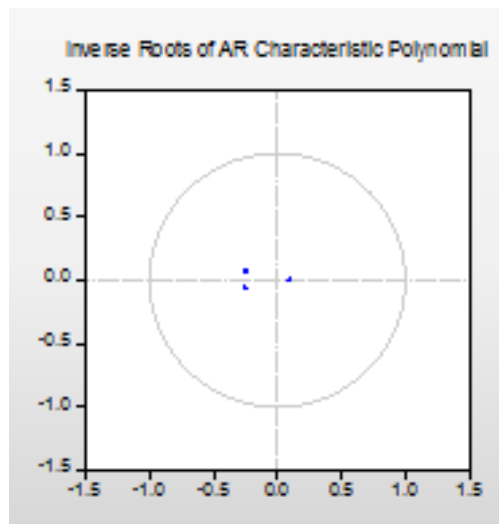


Figura 2.6: Criterio de estabilidad para el VAR(1) estimado

Analítica y gráficamente, se concluye que las inversas de las raíces del polinomio característico se encuentran dentro del círculo unidad; por lo tanto, se concluye que el modelo es estable y, por tanto, es estacionario.

- c) Ahora, se necesita verificar que los residuos del modelo sean ruidos blancos; en general, se prueba la independencia. Para ello, se utilizará el paquete EViews para obtener las pruebas sobre los residuos que se describieron anteriormente. Así se obtiene:

### Prueba Portmanteau

Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	0,628382	NA*	0,641751	NA*	NA*
2	9,516110	0,3911	9,915902	0,3573	9
3	16,74629	0,5406	17,62809	0,4804	18
4	25,33301	0,5558	26,99543	0,4640	27
5	35,85563	0,4754	38,74160	0,3470	36
6	41,19646	0,6338	44,84542	0,4784	45
7	51,95004	0,5539	57,43497	0,3491	54
8	62,57741	0,4913	70,18781	0,2494	63
9	72,52842	0,4604	82,43521	0,1879	72
10	80,22987	0,5033	92,16336	0,1863	81
11	88,06759	0,5380	102,3312	0,1763	90
12	89,89910	0,7324	104,7732	0,3264	99
13	94,98418	0,8100	111,7471	0,3831	108
14	99,40624	0,8789	117,9900	0,4570	117
15	103,7800	0,9263	124,3517	0,5248	126
16	115,1927	0,8904	141,4708	0,3343	135
17	118,4536	0,9412	146,5199	0,4259	144
18	127,4406	0,9348	160,8991	0,3149	153
19	130,5767	0,9668	166,0899	0,3965	162
20	136,6630	0,9751	176,5237	0,3701	171

**Tabla 2.6:** Prueba de autocorrelación Pormanteau

En la tabla 5.6 se observa que los p-valores (Prob.) para los retardos 2 al 10 son no significativos; de esto se concluye que los residuos no están autocorrelacionados.

## Prueba LM

Lags	LM-Stat	Prob
1	6,309247	0,7086
2	8,996282	0,4376
3	7,384406	0,5972
4	8,563089	0,4785
5	11,86241	0,2212
6	5,615736	0,7777
7	13,14360	0,1562
8	12,15696	0,2046
9	13,95395	0,1240
10	9,385154	0,4025
11	9,988141	0,3514
12	2,713061	0,9746
13	5,772031	0,7625
14	6,030074	0,7369
15	6,067111	0,7332
16	16,42881	0,0584
17	5,150654	0,8210
18	13,63067	0,1361
19	4,863835	0,8460
20	7,838041	0,5505

Tabla 2.7: Prueba LM

Por los valores en la columna Prob. (ver tabla 5.7), se puede concluir que no existe correlación serial. Esto confirma que no hay que reformular el modelo planteado.

### Pruebas de Normalidad

Component	Jarque-Bera	df	Prob.
1	1,142571	2	0,5648
2	2,337811	2	0,3107
3	0,393216	2	0,8215
Joint	3,873599	6	0,6938

Tabla 2.8: Prueba de Normalidad de los residuos

De la prueba de Jarque-Bera se concluye que la distribución de los residuos es una distribución normal multivariante.

**Observación 2.5.** De los resultados obtenidos en los literales b y c se concluye que el modelo VAR(1) es adecuado para los datos.

d) La predicción calculada por el modelo, de manera recurrente es:

$$\hat{Y}_{1t} = -0,1168Y_{1t-1} + 0,7168Y_{2t-1} - 0,0198Y_{3t-1} + 0,0115$$

$$\hat{Y}_{1:51} = -0,1168 * 0,0015 + 0,7168 * 0,0167 - 0,0198 * 0,0142 + 0,0115$$

$$\hat{Y}_{1:51} = 0,023$$

$$\hat{Y}_{2t} = -0,0575Y_{1t-1} + 0,0674Y_{2t-1} + 0,0900Y_{3t-1} + 0,0197$$

$$\hat{Y}_{2:51} = -0,0575 * 0,0015 + 0,0674 * 0,0167 + 0,0900 * 0,0142 + 0,0197$$

$$\hat{Y}_{2:51} = 0,022$$

$$\hat{Y}_{3t} = 0,1972Y_{1t-1} + 0,4192Y_{2t-1} - 0,3462Y_{3t-1} + 0,0185$$

$$\hat{Y}_{3:51} = 0,1972 * 0,0015 + 0,4192 * 0,0167 - 0,3462 * 0,0142 + 0,0185$$

$$\hat{Y}_{3:51} = 0,021$$

donde,  $\hat{Y}_{i:j}$  significa, la previsión de la variable  $Y_i$  para el período  $j$ .

**Observación 2.6.** A pesar que se trabaja con 49 datos, la última observación es la número 50, por los motivos explicados en el enunciado del ejemplo; es por esto, que la primera observación a predecir es la de orden 51 aunque en realidad correspondería al dato 50 de una serie temporal que inicie en el instante  $t=1$ .

De la misma manera se obtiene:

$$\hat{Y}_{1:52} = 0,024$$

$$\hat{Y}_{2:52} = 0,022$$

$$\hat{Y}_{3:52} = 0,025$$

$$\hat{Y}_{1:53} = 0,023$$

$$\hat{Y}_{2:53} = 0,022$$

$$\hat{Y}_{3:53} = 0,023$$

⋮

Para calcular la varianza del error de predicción, si fuera un VAR (1) se tiene:

$$M_1 = \hat{A}_1; \quad M_2 = \hat{A}_1 M_1 = \hat{A}_1^2; \quad etc \dots$$

Para el caso del ejemplo, se obtiene:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -0,1170 & 0,7168 & -0,0198 \\ -0,0575 & 0,0674 & 0,0900 \\ 0,1972 & 0,04192 & -0,3462 \end{bmatrix}$$

La matriz de varianza covarianza estimada de la predicción, para el horizonte  $h=1$ , es:

$$\hat{\Sigma}_T(1) = \hat{\Sigma}_u = \begin{bmatrix} 0,0002 & 0,0001 & 0,0002 \\ 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0002 \end{bmatrix}$$

Así, la varianza del error de predicción para  $\hat{Y}_{1:51}$  es igual a 0,0002, la varianza del error de predicción para  $\hat{Y}_{2:51}$  es igual a 0,0001 y la varianza del error de predicción para  $\hat{Y}_{3:51}$  es

igual a 0,0002.

Los intervalos de confianza para  $Y_{1:51}$ ,  $Y_{2:51}$  y  $Y_{3:51}$  vienen dados, respectivamente, por:

$$0,024 \pm 1,96 * \sqrt{0,0002} = [-0,007; 0,053]$$

$$0,022 \pm 1,96 * \sqrt{0,0001} = [0,007; 0,037]$$

$$0,025 \pm 1,96 * \sqrt{0,0002} = [-0,009; 0,051]$$

Para los horizontes  $h = 2$ ,  $h = 3$  se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\hat{\Sigma}_T(2) = \hat{\Sigma}_u + \hat{A}_1 \hat{\Sigma}_u \hat{A}_1' = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0,0001 & 0,0002 \\ 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0003 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_T(3) = \hat{\Sigma}_u + \hat{A}_1 \hat{\Sigma}_u \hat{A}_1' + \hat{A}_1^2 \hat{\Sigma}_u \hat{A}_1^{2'} = \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & 0,0004 \\ 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0005 \end{bmatrix}$$

Entonces los intervalos de confianza son:

$$IC(Y_{1:52}) = 0,024 \pm 1,96 * 0,016 = [-0,007; 0,056]$$

$$IC(Y_{2:52}) = 0,022 \pm 1,96 * 0,008 = [0,007; 0,037]$$

$$IC(Y_{3:52}) = 0,025 \pm 1,96 * 0,016 = [-0,006; 0,056]$$

$$IC(Y_{1:52}) = 0,024 \pm 1,96 * 0,023 = [-0,020; 0,068]$$

$$IC(Y_{1:52}) = 0,022 \pm 1,96 * 0,011 = [0,001; 0,043]$$

$$IC(Y_{1:52}) = 0,024 \pm 1,96 * 0,023 = [-0,020; 0,068]$$

⋮

### Comparación con modelos univariantes

La teoría VAR sugiere que las predicciones logradas son de mejor calidad que si se realiza la modelación de las series de manera univariante. Para comprobar esto, se realizó un modelo univariante para cada una de las series analizadas en este documento. Así, para las variaciones PIB se encontró el modelo  $Y_{1t} = 0,94Y_{1t-5} + \hat{u}_t - 0,87\hat{u}_{1t-5}$ ; para la variación del CI se estimó el modelo  $Y_{2t} = 0,97Y_{2t-7} + \hat{u}_t - 0,88\hat{u}_{2t-7}$  y para la variación de la DFI se obtuvo el modelo  $Y_{3t} = 0,36Y_{3t-2} + 0,53Y_{3t-6} + \hat{u}_t$ .

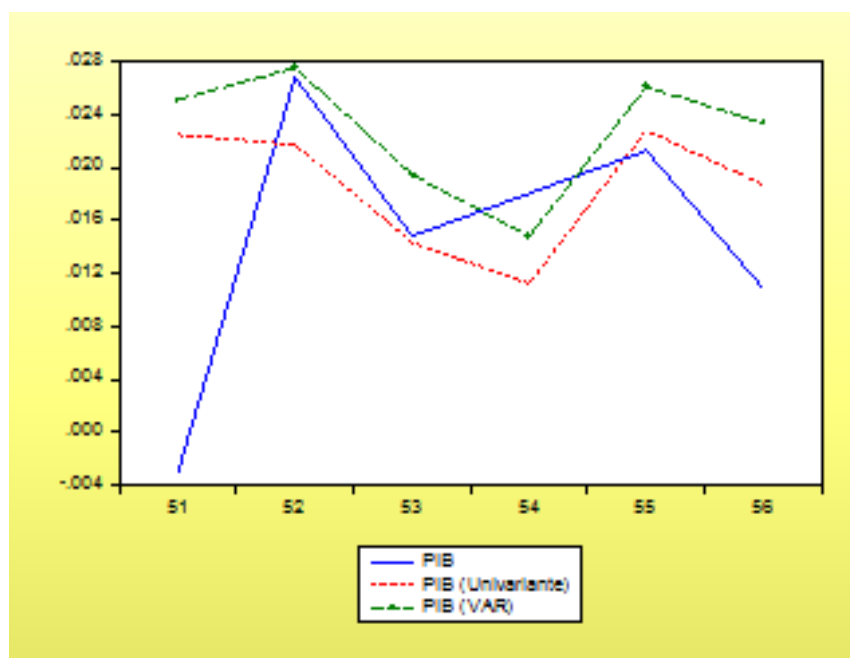


Figura 2.7: Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para  $Y_{1t}$  (PIB)

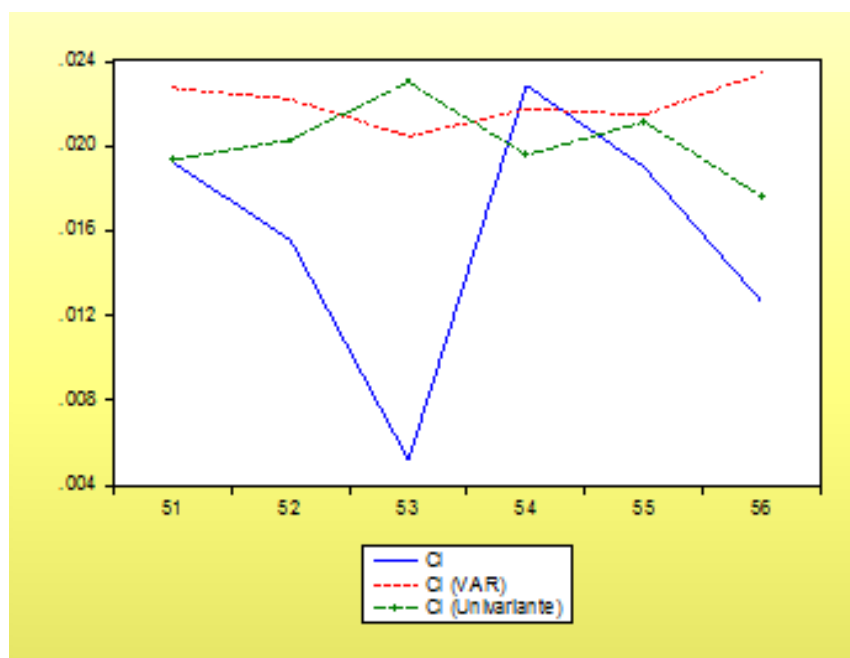


Figura 2.8: Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para  $Y_{2t}$  (CI)

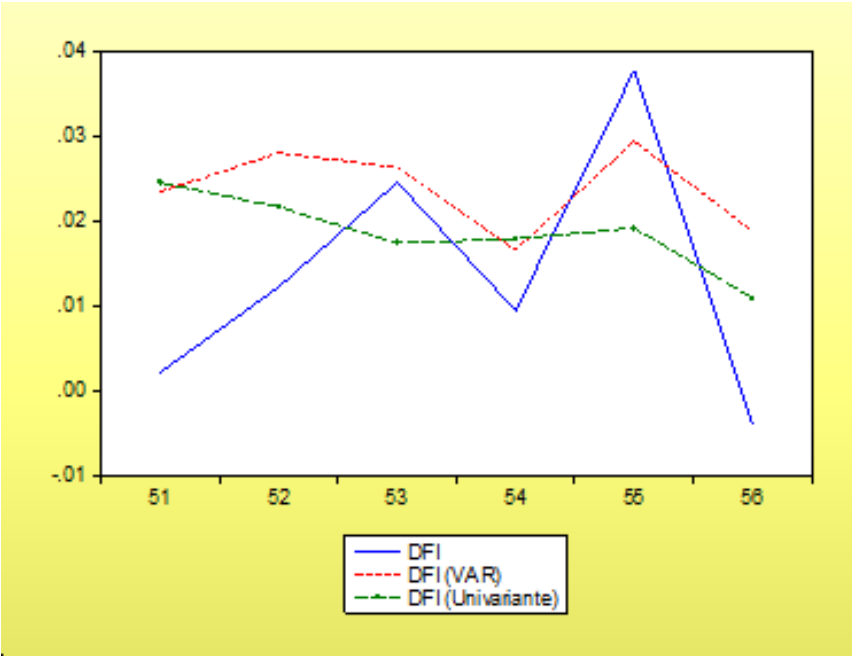


Figura 2.9: Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para  $Y_{3t}$  (DFI)

Se puede observar que el ajuste que tienen las predicciones del modelo VAR; pero, para comparar analíticamente se calcula del error cuadrático medio estimado, para determinar el mejor ajuste. Así se tiene:

	PIB	CI	DFI
VAR	0,0005	0,0005	0,0006
UNIVARIANTE	0,0004	0,0004	0,0004

Tabla 2.9: Error Medio Cuadrático estimado para los modelos VAR y univariante

Como se puede observar, los errores son muy pequeños para ambos casos; la diferencia existente es estadísticamente no significativa entre los dos tipos de predicciones. Esto se explica porque las correlaciones cruzadas entre las series son muy poco significativas; sin embargo, el objetivo de esta presentación, es más bien, didáctico; posteriormente se mostrará un ejemplo más completo.

## 2.7 La Causalidad

En la teoría, la demostración de relaciones causales entre las variables de análisis proporciona los elementos de reflexión propicios para una mejor comprensión de los fenómenos, sobre todo los económicos. De manera práctica, *“the causal knowledge”* (“el conocimiento de la causalidad”) es necesario en la formulación correcta de la política económica. En efecto, saber la dirección de la causalidad es también importante en cuanto a poner un enlace entre las variables económicas.



### 2.7.1 La causalidad según Granger

Granger (1969) propuso los conceptos de causalidad y de exogeneidad: en el sentido de series de tiempo, se diría que la variable  $X_{2t}$  es la causa de  $X_{1t}$ , si la predicción de  $X_{1t}$  mejora si la información relativa a  $X_{2t}$  se incorpora al análisis (*el término predicción parece preferible en el marco de la causalidad; en efecto, decir que  $Y_t$  causa  $X_t$ , solo significa que es preferible para predecir  $X_t$  conocer  $Y_t$ , que no conocerla*).

Sea el modelo  $VAR(p)$  para el cual las variables  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$  son estacionarias:

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1^1 & b_1^1 \\ a_2^1 & b_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t-1} \\ X_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2^1 & b_2^1 \\ a_2^2 & b_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t-2} \\ X_{2t-2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} a_p^1 & b_p^1 \\ a_p^2 & b_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t-p} \\ X_{2t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

El bloque de variables  $(X_{2t-1}, X_{2t-2}, \dots, X_{2t-p})$  se considera como exógeno en comparación del bloque de variables  $(X_{1t-1}, X_{1t-2}, \dots, X_{1t-p})$  si el hecho de añadir el bloque  $X_{2t}$  no mejora significativamente la determinación de las variables  $X_{1t}$ . Se trata de efectuar una prueba de restricciones sobre los coeficientes de las variables  $X_{2t}$  de la representación VAR (Se denotará por RVAR al modelo VAR restringido). La determinación del retardo  $p$  se efectúa por los criterios de Akaike, Shwarz o Hanan-Quinn.

- $X_{2t}$  no causa  $X_{1t}$ , si se acepta la siguiente hipótesis:

$$H_0 : b_1^1 = b_2^1 = \dots = b_p^1 = 0$$

- $X_{1t}$  no causa  $X_{2t}$ , si se acepta la siguiente hipótesis:

$$H_0 : a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_p^2 = 0$$



# Índice alfabético

- ARCH
  - Definición, 3
  - Restricciones, 4
- Causalidad, 40
  - Granger, 41
- Dependencia lineal multivariante, 13
- EGARCH
  - Definición, 5
- Factor de impacto, 22
- GARCH
  - Definición, 4
- IGARCH
  - Definición, 4
- Matriz
  - Correlaciones cruzadas, 12
  - De correlación residual, 26
  - De covarianza residual, 26
- Modelos VAR, 17
  - Bivariante, 17
  - Diagnóstico y validación, 26
  - Estabilidad, 19
  - Estimación de los coeficientes, 24
  - Forma estándar, 18
  - Forma estructural, 18
  - Forma matricial, 18
  - Predicción, 29
  - Representación de VAR(1), 20
  - Representación general, 19
  - Representación lineal, 21
- Modelos VARMA, 23
- Modelos VMA
  - Orden  $q$ , 21
- PARCH
  - Definición, 6
- Predicción
  - Modelos VAR, 29
- Prueba
  - Jarque-Bera multivariante, 28
  - Multiplicador de Lagrange multivariante, 27
  - Portmanteau multivariante, 27
- Relaciones en retardo, 12
- TARCH
  - Definición, 6