1 多元函数微分法及应用

1.1 多元函数的基本概念

例 1.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\left(\sqrt{2-e^{xy}}+1\right)}{1-e^{xy}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\left(\sqrt{2-e^{xy}}+1\right) \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

利用 $e^x-1\sim x(x\to 0)$.

例 2. 证明极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

$$
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1,
$$

分子分母变量的阶数不同, 故不能使用 $y=kx$ 等方式.

但是

$$
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4+4x^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = 0.
$$

两种方式求得的极限值不同, 故所求极限不存在.

例 3. 证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

$$
\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.
$$

不等式 $2xy\le x^2+y^2$.

要使 $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon$ 成立, 只需取 $\delta=2\varepsilon$, 故原式成立.

例 4. 设 $F(x,y)=f(x)$, 证明 $F(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数.

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

根据 $|x-x_0|\le\rho(P,P_0)$ 和 $\left|f(x)-f(x_0)\right| = \left|F(P)-F(P_0)\right|$:

$$
\begin{aligned}
\sin x \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} &\iff \forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(|x-x_0|<\delta \implies \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon\right) \\
&\implies \forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(\rho(P,P_0)<\delta \implies \left|F(P)-F(P_0)\right|<\varepsilon\right) \\
&\iff f(x,y) \text{ 在 } P_0 \text{ 处连续}.
\end{aligned}
$$

由 P_0 的任意性知, $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

1.2 全微分

定理 (必要条件)**.** 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分, 那么该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$
\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.
$$

定理 (充分条件)**.** 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 在点 (x,y) 连续, 那么函数在该点可微分.

1.3 多元函数的求导法则

例 5. 设 $z(x,y)=f\big(\varphi(x,y),x,y\big)$, 令 $u=\varphi(x,y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意. $z(x,y)=f\big(\varphi(x,y),x,y\big)$ 的参数是 x 和 y; $f(u,x,y)$ 的参数是 u, x 和 y. 所以 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的意义是不同的.

例 6. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续, 将 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 转换为极坐标系中的形式.

由直角坐标系与极坐标系间的关系, 可将函数 $u=f(x,y)$ 转换成 ρ 与 θ 的函数:

$$u=f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=F(\rho,\theta).$$

再由 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=F_\rho\frac{x}{\rho}-F_\theta\frac{y}{\rho^2}=F_\rho\cos\theta-F_\theta\frac{\sin\theta}{\rho},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=F_\rho\frac{x}{\rho}-F_\theta\frac{y}{\rho^2}=F_\rho\sin\theta+F_\theta\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

两式平方后相加, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=F_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}F_\theta^2.$$

1.4 隐函数的求导公式

隐函数存在定理 1. 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $y=f(x)$, 它满足条件 $y_0=f(x_0)$ 并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

设想一座山的表面, 一个平面横切它一刀, 得到的截线就是 $F(x,y)=0$. 此时 $F_y(x_0,y_0)$ 不能为零, 否则在点 P 附近得到的就不是截线, 而是一个面了.

隐函数存在定理 2. 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

隐函数存在定理 3. 设 $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数, 又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, 且偏导数所组成的函数行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零, 则方程组 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 并有

这里使用了克莱姆法则.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

1.5 多元函数微分学的几何应用

参数方程确定的空间曲线

曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 在 t_0 处的切向量为 $\big(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)\big)$.

方程组确定的空间曲线

曲线 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 在点 M 处的切向量为 $\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M\right)$.

空间平面

曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的法向量为 $\big(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\big)$;
曲面 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 向下的法向量为 $\big(F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0),-1\big)$.

1.6 方向导数与梯度

定理. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分, 那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在, 且有

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta \\ &= \nabla f(x_0,y_0)\cdot \vec{e}_l. \end{aligned}$$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ 称为 (二维) <u>向量微分算子</u>, 向量 $\nabla f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j}$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度.

注意. 若 $P_0(x_0,y_0)$ 是某个二元函数 $f(x,y)$ 一条等值线 $f(x,y)=c$ 上的一点, 则等值线在点 P_0 处的单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}.$$

类似地, 一个三元函数 $f(x,y,z)$ 的某个等值面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x_0,y_0,z_0)}{|\nabla f(x_0,y_0,z_0)|}.$$

1.7 多元函数的极值及其求法

定理 (极值充分条件)**.** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$, 令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f_{yy}(x_0,y_0)=C$, 则:

(1) $AC-B^2>0$ 时有极值, 且当 $A<0$ 时有极大值, $A>0$ 时有极小值;

(2) $AC-B^2<0$ 时无极值;

(3) $AC-B^2=0$ 时不能确定有没有极值.

使用<u>拉格朗日乘数法</u>求条件极值的一般步骤:

1. 创建拉格朗日函数 $L=F+\lambda\varphi+\mu\psi+\cdots$, 其中 λ, μ 等为系数, F 为要求极值的函数, φ, ψ 等为恒等于零的约束条件;

2. 分别作方程 $L=0$ 对 L 各参数的偏导数, 并与各约束条件联立方程组;

3. 用 L 各参数表示 λ 和 μ 等系数.

注意. 不论使用何种方法, 最后都需要将得到的点代回原方程 (组), 判断其是否确实为极值点.

例 7. 形状为椭球 $4x^2+y^2+4z^2\le 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 一小时后在探测器的点 (x,y,z) 处的温度 $T=8x^2+4yz-16z+600$, 求探测器表面最热的点.

作拉格朗日函数

$$L=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16).$$

令

$$\begin{cases} L_x=16x+8\lambda x=0, \\ L_y=4z+2\lambda y=0, \\ L_z=4y-16+8\lambda z=0. \end{cases}$$

由 L_x 得, $\lambda=-2$ 或 $x=0$. $\lambda=-2$ 的情况可得出可能的极值点 $M_1(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ 和 $M_2(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$; $x=0$ 的情况可解出 $\lambda=-\sqrt{3}$, $\lambda=\sqrt{3}$ 和 $\lambda=0$ 三种情况, 分别得出可能的极值点 $M_3(0,-2,-\sqrt{3})$, $M_4(0,-2,\sqrt{3})$ 和 $M_5(0,4,0)$.

经比较得, 最热的点为 M_1 和 M_2.

2 重积分

2.1 二重积分的概念和性质

定理 (二重积分的中值定理)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ,η), 使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma.$$

2.2 二重积分的计算法

例 8. 计算 $\iint_D x\cos(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

$$\begin{aligned} &\iint_D x\cos(x+y)\,\mathrm{d}\sigma \\ &=\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x\int_0^x \cos(x+y)\,\mathrm{d}y \\ &=\int_0^\pi x(\sin 2x-\sin x)\,\mathrm{d}y \\ &=\int_0^\pi x\,\mathrm{d}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right) && \text{分部积分法.} \\ &=\left(x\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right)_0^\pi-\int_0^\pi \cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &=-\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

例 9. 积分区域 D 为 $\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$. 将 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分.

根据两坐标系之间的关系, $x+y=1$ 可直接转换为 $\rho=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$, 从而所求表达式为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(x,y)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

例 10. 将 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分, 并计算.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sec\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^3}{6}\big(\sec\theta\,\tan\theta + \ln(\sec\theta+\tan\theta)\big)_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{a^3}{6}\Big(\sqrt{2}+\ln\big(\sqrt{2}+1\big)\Big).
\end{aligned}
$$

此不定积分的求解步骤可参考附录 A.

2.3 三重积分

例 11. 利用球面坐标计算 $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$, $x^2+y^2 \le z^2$ 所确定.

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3\cos\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\varphi\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{7\pi}{6}a^4.
\end{aligned}
$$

2.4 重积分的应用

曲面 $z=f(x,y)$ 的面积元素为 $\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$.

3 曲线积分与曲面积分

3.1 对弧长的曲线积分

定理. 参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le \beta)$ 的曲线 L 的曲线积分为

$$
\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.
$$

例 12. 计算半径为 R, 中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (线密度 $\mu=1$).

首先将 L 用参数方程表示 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases}$ $(-\alpha \le \theta \le \alpha)$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_L y^2\,\mathrm{d}s \int_{-\alpha}^{\alpha} (R\sin\theta)^2 \mu R\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2R^3\int_0^\alpha \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = R^3\int_0^\alpha 1-\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= R^3\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)_0^\alpha = R^3(\alpha-\sin\alpha\,\cos\alpha).
\end{aligned}
$$

二倍角公式.

3.2 对坐标的曲线积分

定理. 参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 的曲线 L 的曲线积分为

$$
\begin{aligned}
&\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\alpha^\beta P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

两类曲线积分之间的关系

平面曲线弧 L 上的两类曲线积分之间有如下联系:

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

或

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s.$$

其中 $\vec{A}=(P,Q,R)$, $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量, $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{\tau}\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$, 称为<u>有向曲线元</u>.

3.3 格林公式及其应用

定理 (格林公式)**.** 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

注意. 设有闭区域 D. 取 $P=-y$, $Q=x$, 即得

$$2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

上式左端是闭区域 D 面积的两倍, 因此闭区域 D 的面积为

$$\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

例 13. 利用曲线积分, 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围成图形的面积.

令面积为 S, 星形线为 L, 则

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi} 1-\cos 4t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8}a^2. \end{aligned}$$

二元函数的全微分求积

例 14. 确定常数 λ, 使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\vec{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\vec{i} - x^2(x^4+y^2)^\lambda\vec{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度, 并求 $u(x,y)$.

令 $P=2xy(x^4+y^2)^\lambda$, $Q=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$, 利用 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 得出 $\lambda=-1$, 过程略.

取 $(x_0,y_0)=(1,0)$, 得

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 + \int_0^y \frac{-x^2}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\arctan\frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

3.4 对坐标的曲面积分

例 15. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ 的部分.

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}(\rho^2) \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{15}. && \text{令 } u=1-\rho^2. \end{aligned}$$

例 16. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是旋转曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

设 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为平面 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量, 则

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\, S = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

之后便可将原式转为形如 $\iint_{D_{xy}}(\ldots)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的重积分, 具体过程略.

注意. 使用高斯公式时需确保曲面 Σ 为封闭曲面. 如不是, 可添加部分曲面使其封闭, 之后减去其积分值.

两类曲面积分之间的关系

设 $\vec{A}=(P,Q,R)$, $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量, 则两类曲面积分之间的关系可表示为

$$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S.$$

其中 $\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}S=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\mathrm{d}z)$ 称为<u>有向曲面元</u>.

3.5 高斯公式

定理. 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 若函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Ω 上有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

或

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \oiint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

附录

A. 有关三角函数的不定积分

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C. \tag{1}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \mathrm{d}x &= \int \sec x \ \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sec x \, \mathrm{d}(\tan x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x \,(\sec x \tan x)\, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \,(\sec^2 x - 1)\, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x + \int \sec x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

移项后可得出上述结果.

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}. \tag{2}$$