

1 多元函数微分法及应用

1.1 多元函数的基本概念

例 1.

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(\sqrt{2-e^{xy}}+1)}{1-e^{xy}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -(\sqrt{2-e^{xy}}+1) \\ &= -2. \end{aligned}$$

利用 $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$.

例 2. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ 不存在.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

分子分母变量的阶数不同, 故不能使用 $y = kx$ 等方式.

但是

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4 + 4x^2} = \frac{x^2}{x^2 + 4} = 0.$$

两种方式求得的极限值不同, 故所求极限不存在.

例 3. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}.$$

不等式 $2xy \leq x^2 + y^2$.

要使 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立, 只需取 $\delta = 2\varepsilon$, 故原式成立.

例 4. 设 $F(x, y) = f(x)$, 证明 $F(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的连续函数.

设 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

根据 $|x - x_0| \leq \rho(P, P_0)$ 和 $|f(x) - f(x_0)| = |F(P) - F(P_0)|$:

$$\begin{aligned} \sin x \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\rho(P, P_0) < \delta \implies |F(P) - F(P_0)| < \varepsilon) \\ &\iff f(x, y) \text{ 在 } P_0 \text{ 处连续.} \end{aligned}$$

由 P_0 的任意性知, $F(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续.

1.2 全微分

定理 (必要条件). 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, 那么该函数在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

定理 (充分条件). 如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 那么函数在该点可微分.

1.3 多元函数的求导法则

例 5. 设 $z(x, y) = f(\varphi(x, y), x, y)$, 令 $u = \varphi(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

注意. $z(x, y) = f(\varphi(x, y), x, y)$ 的参数是 x 和 y ; $f(u, x, y)$ 的参数是 u, x 和 y . 所以 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的意义是不同的.

例 6. 设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续, 将 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$ 转换为极坐标系中的形式.

由直角坐标系与极坐标系间的关系, 可将函数 $u = f(x, y)$ 转换成 ρ 与 θ 的函数:

$$u = f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F(\rho, \theta).$$

再由 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = F_\rho \frac{x}{\rho} - F_\theta \frac{y}{\rho^2} = F_\rho \cos \theta - F_\theta \frac{\sin \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = F_\rho \frac{y}{\rho} + F_\theta \frac{x}{\rho^2} = F_\rho \sin \theta + F_\theta \frac{\cos \theta}{\rho}.\end{aligned}$$

两式平方后相加, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = F_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} F_\theta^2.$$

1.4 隐函数的求导公式

隐函数存在定理 1. 设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $y = f(x)$, 它满足条件 $y_0 = f(x_0)$ 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

隐函数存在定理 2. 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

隐函数存在定理 3. 设 $F(x, y, u, v)$ 与 $G(x, y, u, v)$ 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数, 又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, 且偏导数组成的函数行列式

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 不等于零, 则方程组 $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 它们满足条件 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 并有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.\end{aligned}$$

设想一座山的表面, 一个平面横切它一刀, 得到的截线就是 $F(x, y) = 0$. 此时 $F_y(x_0, y_0)$ 不能为零, 否则在点 P 附近得到的就不是截线, 而是一个面了.

这里使用了克莱姆法则.

1.5 多元函数微分学的几何应用

参数方程确定的空间曲线

$$\text{曲线} \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad \text{在 } t_0 \text{ 处的切向量为 } (\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)).$$

方程组确定的空间曲线

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad \text{在点 } M \text{ 处的切向量为 } \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M \right).$$

空间平面

曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的法向量为 $(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$;

曲面 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 向下的法向量为 $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0), -1)$.

1.6 方向导数与梯度

定理. 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微分, 那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在, 且有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} &= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}_l. \end{aligned}$$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$ 称为 (二维) 向量微分算子, 向量 $\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j}$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的梯度.

注意. 若 $P_0(x_0, y_0)$ 是某个二元函数 $f(x, y)$ 一条等值线 $f(x, y) = c$ 上的一点, 则等值线在点 P_0 处的单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}.$$

类似地, 一个三元函数 $f(x, y, z)$ 的某个等值面在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x_0, y_0, z_0)}{|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|}.$$

1.7 多元函数的极值及其求法

定理 (极值充分条件). 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则:

- (1) $AC - B^2 > 0$ 时有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, $A > 0$ 时有极小值;
- (2) $AC - B^2 < 0$ 时无极值;
- (3) $AC - B^2 = 0$ 时不能确定有没有极值.

使用拉格朗日乘数法求条件极值的一般步骤:

1. 创建拉格朗日函数 $L = F + \lambda\varphi + \mu\psi + \cdots$, 其中 λ, μ 等为系数, F 为要求极值的函数, φ, ψ 等为恒等于零的约束条件;
2. 分别作方程 $L = 0$ 对 L 各参数的偏导数, 并与各约束条件联立方程组;
3. 用 L 各参数表示 λ 和 μ 等系数.

注意. 不论使用何种方法, 最后都需要将得到的点代回原方程 (组), 判断其是否确实为极值点.

例 7. 形状为椭球 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 一小时后在探测器的点 (x, y, z) 处的温度 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.

作拉格朗日函数

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0, \\ L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0. \end{cases}$$

由 L_x 得, $\lambda = -2$ 或 $x = 0$. $\lambda = -2$ 的情况可得出可能的极值点 $M_1(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ 和 $M_2(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$; $x = 0$ 的情况可解出 $\lambda = -\sqrt{3}$, $\lambda = \sqrt{3}$ 和 $\lambda = 0$ 三种情况, 分别得出可能的极值点 $M_3(0, -2, -\sqrt{3})$, $M_4(0, -2, \sqrt{3})$ 和 $M_5(0, 4, 0)$.

经比较得, 最热的点为 M_1 和 M_2 .

2 重积分

2.1 二重积分的概念和性质

定理 (二重积分的中值定理). 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma.$$

2.2 二重积分的计算法

例 8. 计算 $\iint_D x \cos(x+y) d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ 和 (π, π) 的三角形闭区域.

$$\begin{aligned} & \iint_D x \cos(x+y) d\sigma \\ &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x+y) dy \\ &= \int_0^\pi x(\sin 2x - \sin x) dx \\ &= \int_0^\pi x d\left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) && \text{分部积分法.} \\ &= \left(x\left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x\right)\right)_0^\pi - \int_0^\pi \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x dx \\ &= -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

例 9. 积分区域 D 为 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$. 将 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示为极坐标形式的二次积分.

根据两坐标系之间的关系, $x+y=1$ 可直接转换为 $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 从而所求表达式为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}} f(x, y) \rho d\rho.$$

例 10. 将 $\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 并计算.

$$\begin{aligned} & \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{a^3}{6} (\sec \theta \tan \theta + \ln(\sec \theta + \tan \theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{a^3}{6} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)). \end{aligned}$$

此不定积分的求解步骤可参考附录 A.

2.3 三重积分

例 11. 利用球面坐标计算 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 \cos \varphi dr \\ &= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{7\pi}{6} a^4. \end{aligned}$$

2.4 重积分的应用

曲面 $z = f(x, y)$ 的面积元素为 $\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$.

3 曲线积分与曲面积分

3.1 对弧长的曲线积分

定理. 参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq \beta)$ 的曲线 L 的曲线积分为

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

例 12. 计算半径为 R , 中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (线密度 $\mu = 1$).

首先将 L 用参数方程表示 $\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha).$

$$\begin{aligned} I &= \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} (R \sin \theta)^2 \mu R d\theta \\ &= 2R^3 \int_0^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = R^3 \int_0^{\alpha} 1 - \cos 2\theta d\theta \\ &= R^3 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\alpha} = R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha). \end{aligned}$$

二倍角公式.

3.2 对坐标的曲线积分

定理. 参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 的曲线 L 的曲线积分为

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \end{aligned}$$

两类曲线积分之间的关系

平面曲线弧 L 上的两类曲线积分之间有如下联系:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

或

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{\tau} ds.$$

其中 $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x, y, z) 处的单位切向量, $d\vec{r} = \vec{\tau} ds = (dx, dy, dz)$, 称为有向曲线元.

3.3 格林公式及其应用

定理 (格林公式). 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 若函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dv = \oint_L Pdx + Qdy.$$

注意. 设有闭区域 D . 取 $P = -y$, $Q = x$, 即得

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L xdy - ydx.$$

上式左端是闭区域 D 面积的两倍, 因此闭区域 D 的面积为

$$\frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx.$$

例 13. 利用曲线积分, 求星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 所围成图形的面积.

令面积为 S , 星形线为 L , 则

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} 1 - \cos 4t dt = \frac{3\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

二元函数的全微分求积

例 14. 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $\vec{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \vec{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \vec{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

令 $P = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda$, $Q = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$, 利用 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 得出 $\lambda = -1$, 过程略.

取 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, 得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 + \int_0^y \frac{-x^2}{x^4 + y^2} dy \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

3.4 对坐标的曲面积分

例 15. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的部分.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2} \sin 2\theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \frac{1}{4} \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} d(\rho^2) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - u) \sqrt{u} du = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

令 $u = 1 - \rho^2$.

例 16. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy$, 其中 Σ 是旋转曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间的部分的下侧.

设 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为平面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量, 则

$$dydz = \cos \alpha S = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy.$$

之后便可将原式转为形如 $\iint_{D_{xy}} (\dots) dxdy$ 的重积分, 具体过程略.

注意. 使用高斯公式时需确保曲面 Σ 为封闭曲面. 如不是, 可添加部分曲面使其封闭, 之后减去其积分值.

两类曲面积分之间的关系

设 $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量, 则两类曲面积分之间的关系可表示为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS.$$

其中 $d\vec{S} = \vec{n}dS = (dydz, dzdx, dxdy)$ 称为有向曲面元.

3.5 高斯公式

定理. 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 若函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 Ω 上有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy,$$

或

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

附录

A. 有关三角函数的不定积分

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C. \quad (1)$$

证明.

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \sec^2 x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \\ &= \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx. \end{aligned}$$

移项后可得出上述结果.

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}. \quad (2)$$