Separacija korijena cjelobrojnih polinoma

Andrej Dujella

PMF – MO, Zagreb
e-mail: `duje@math.hr`
URL: `http://web.math.hr/~duje/`

Pitanje: Kolika blizu jedan drugome mogu biti dva različita korijena polinoma $P(X)$ stupnja d s cjelobrojnim koeficijentima?

Uspoređivat ćemo udaljenost između dva korijena od $P(X)$ s njegovom (naivnom) visinom $H(P)$, koja se definira kao maksimum apsolutnih vrijednosti njegovih koeficijenata.

Mahler (1964): $|\alpha - \beta| \gg H(P)^{-d+1}$
za svaka dva različita korijena α i β polinoma $P(X)$ stupnja d s cjelobrojnim koeficijentima (konstanta u $\gg$ je eksplicitna konstanta koja ovisi samo o stupnju d).

Za cjelobrojni polinom $P(x)$ stupnja $d \geq 2$ s različitim korijenima $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, stavljamo da je

$$\mathrm{sep}(P) = \min_{1 \leq i < j \leq d} |\alpha_i - \alpha_j|$$

i definiramo $e(P)$ sa $\mathrm{sep}(P) = H(P)^{-e(P)}$.
Za $d \geq 2$, definiramo

$$e(d) := \limsup_{\deg(P)=d, H(P) \to +\infty} e(P),$$

$$e_{\mathrm{irr}}(d) := \limsup_{\deg(P)=d, H(P) \to +\infty} e(P),$$

gdje zadnji limsup prolazi po svim ireducibilnim cjelobrojnim polinomima $P(x)$ stupnja d.

Nadalje, na analogan način definiramo $e^*(d)$ i $e^*_{\mathrm{irr}}(d)$ tako da promatramo sve normirane, odnosno sve ireducibilne normirane cjelobrojne polinoma stupnja d.

Očito je da vrijedi

$$e(d) \geq e_{\mathsf{irr}}(d) \quad \text{and} \quad e^*(d) \geq e^*_{\mathsf{irr}}(d).$$

Mahler (1964): $e(d) \leq d-1$ za sve d

$\boxed{d=2}$
$P(X) = aX^2 + bX + c$,
$\Delta = b^2 - 4ac$, $\mathrm{sep}(P) = \sqrt{|\Delta|}/a$
$e_{\mathsf{irr}}(2) = e(2) = 1$, $e^*_{\mathsf{irr}}(2) = e^*(2) = 0$
Npr. $a = k^2 + k - 1$, $b = 2k + 1$, $c = 1$, $\Delta = 5$

$\boxed{d=3}$
Evertse (2004), Schönhage (2006):
$e_{\mathsf{irr}}(3) = e(3) = 2$

Bugeaud & Mignotte (2010):
$e^*_{\mathsf{irr}}(3) = e^*(3) \geq 3/2$
(ovdje je jednakost ekvivalentna Hallovoj slutnji)

$\boxed{d=4}$

Bugeaud & D. (2011):

$e_{\mathsf{irr}}(4) \geq 13/6$

Bugeaud & D. (2013):

$e(4) \geq 7/3$

Bugeaud & D. (2013):

$e^*_{\mathsf{irr}}(4) \geq 7/4$

Bugeaud & Mignotte (2010):

$e^*(4) \geq 2$

D. & Pejković (2011):

eksplicitna familija polinoma s eksponentom 2:

$$P_n(x) = (x^2 + x - 1)\Big(x^2 + (1 + F_{n+1})x - (F_n + 1)\Big)$$

Ne postoji takva familija s koeficijentima koji rastu polinomijalno u parametru n, ali postoji takva familija s eksponentom $\geq 2 - \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$.

$\limsup e(P) = 2$, gdje limsup prolazi po svim reducibilnim normiranim polinomima $P(x)$ stupnja 4.

Bugeaud & Mignotte (2004,2010):

$$e_{\mathsf{irr}}(d) \geq d/2, \quad \text{za svaki parni } d \geq 4,$$

$$e(d) \geq (d+1)/2, \quad \text{za svaki neparni } d \geq 5,$$

$$e_{\mathsf{irr}}(d) \geq (d+2)/4, \quad \text{za svaki neparni } d \geq 5,$$

Beresnevich, Bernik, & Götze (2010):

$$e_{\mathsf{irr}}(d) \geq (d+1)/3, \quad \text{za svaki } d \geq 2.$$

Bugeaud & Mignotte (2010):

$$e^*_{\mathsf{irr}}(d) \geq (d-1)/2, \quad \text{za svaki parni } d \geq 4,$$

$$e^*_{\mathsf{irr}}(d) \geq (d+2)/4, \quad \text{za svaki neparni } d \geq 5,$$

Beresnevich, Bernik, & Götze (2010):

$$e^*_{\mathsf{irr}}(d) \geq d/3, \quad \text{za svaki } d \geq 3.$$

Bugeaud & D. (2011):

$$e_{\mathsf{irr}}(d) \geq \frac{d}{2} + \frac{d-2}{4(d-1)} \quad \text{za svaki } d \geq 4.$$

Ovaj rezultat poboljšava sve prethodno poznate donje ograde za $e_{\mathsf{irr}}(d)$ za $d \geq 4$.

Bugeaud & D. (2011):

$$e^*_{\mathsf{irr}}(d) \geq \frac{d}{2} + \frac{d-2}{4(d-1)} - 1 \quad \text{za sve neparne } d \geq 7.$$

Bugeaud & D. (2013):

$$e(d) \geq \frac{2d}{3} - \frac{1}{3} \quad \text{za sve } d \geq 4.$$

Ovo je prvi poznati rezultat oblika $e(d) \geq C \cdot d$ za $C > \frac{1}{2}$.

Bugeaud & D. (2013):

$$e^*(d) \geq \frac{2d}{3} - 1 \quad \text{za sve parne } d \geq 6$$

$$e^*(d) \geq \frac{2d}{3} - \frac{5}{3} \quad \text{za sve neparne } d \geq 7$$

Bugeaud & D. (2013):

$$e^*_{\mathrm{irr}}(d) \geq \frac{d}{2} - \frac{1}{4} \quad \text{za sve } d \geq 4.$$

Teorem 1: $e_{\mathrm{irr}}(d) \geq \frac{d}{2} + \frac{d-2}{4(d-1)}$ za sve $d \geq 4$.

Da bi dokazali ovaj rezultat, za svaki $d \geq 4$, konstuiramo eksplicitnu jednoparametarsku familiju ireducibilnih polinoma $T_{d,a}(x)$ stupnja d.

Primjeri malog stupnja:

Za $a \geq 1$, približne su vrijednosti korijena polinoma

$$T_{4,a}(x) = (20a^4 - 2)x^4 + (16a^5 + 4a)x^3 + (16a^6 + 4a^2)x^2 + 8a^3x + 1,$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= -1/4a^{-3} - 1/32a^{-7} - 1/256a^{-13} + \dots, \\
r_2 &= -1/4a^{-3} - 1/32a^{-7} + 1/256a^{-13} + \dots, \\
r_3 &= -2/5a + 11/100a^{-3} + 69/4000a^{-7} + 4/5a\, i + \dots, \\
r_4 &= -2/5a + 11/100a^{-3} + 69/4000a^{-7} - 4/5a\, i + \dots.
\end{aligned}$$

$H(T_{4,a}) = O(a^6)$, $\mathrm{sep}(T_{4,a}) = |r_1 - r_2| = O(a^{-13})$, pa puštanjem da a teži u beskonačno, dobivamo $e_{\mathrm{irr}}(4) \geq 13/6$.

Sličan primjer za stupnja 5 je polinom

$$T_{5,a}(x) = (56a^5 - 2)x^5 + (56a^6 + 4a)x^4 + (80a^7 + 4a^2)x^3 + (100a^8 + 8a^3)x^2 + 20a^4x + 1$$

s dva bliska korijena

$$1/10a^{-4} + 1/250a^{-9} + 3/25000a^{-14} - 3/250000a^{-19} \pm\sqrt{10}/500000a^{-43/2} + \ldots,$$

te dobivamo da je $e_{\mathsf{irr}}(5) \geq 43/16$.

Konstrukcija ima smisla i za $d = 3$, te daje familiju

$$T_{3,a}(x) = (8a^3 - 2)x^3 + (4a^4 + 4a)x^2 + 4a^2x + 1$$

s bliskim korijenima $-1/2a^{-2} - 1/4a^{-5} \pm \sqrt{2}/8a^{-13/2}$, što daje $e_{\mathrm{irr}}(3) \geq 13/8$.

Ovaj zadnji rezultat je slabiji od prije poznatog rezultata $e_{\mathrm{irr}}(3) = 2$, ali u primjerima koji su korišteni u dokazu da je $e_{\mathrm{irr}}(3) = 2$, koeficijenti polinoma imali su eksponencijalni rast, dok u našem primjeru imaju polinomijalni rast, što je bitno za neke primjene.

Ove primjere smo otkrili zahtjevajući da diskriminanta polinoma bude što manja (tj. bude polinom što manjeg stupnja u parametru a). Diskriminanta $\Delta(P)$ od $P(X)$ se definira kao

$$\Delta(P) = |a_d|^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

gdje je a_d vodeći koeficijent od $P(X)$. Podsjetimo da je $\Delta(P)$ cijeli broj, te da je jednaka nuli ako i samo ako $P(X)$ ima višestrukih korijena. Ako $P(X)$ nema višestrukih korijena, onda vrijedi sljedeće profinjenje Mahlerove ocjene:

$$\mathrm{sep}(P) \gg |\Delta(P)|^{1/2} H(P)^{-d+1}.$$

Slobodni član svih polinoma $T_{d,a}(x)$ je jednak 1. To znači da je recipročni polinom od $T_{d,a}(x)$ normiran. Stoga naš rezultat daje također donju ogradu za $e^*_{\mathsf{irr}}(d)$.

Primijetimo da ako su α i β dva bliska korijena polinoma $T_{d,a}(x)$, onda vrijedi

$$|\alpha|^{-1}, |\beta|^{-1} = O(a^{d-1}) = O(H(T_{d,a})^{1/2}),$$

pa je razlika

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\alpha - \beta|}{\alpha\beta}$$

vrlo mala, a $1/\alpha$ i $1/\beta$ su korijeni recipročnog polinoma od $T_{d,a}(x)$.

Za $i \geq 0$, s c_i označimo i-ti Catalanov broj definiran sa

$$c_i = \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}.$$

Niz Catalanovih brojeva $(c_i)_{i\geq 0}$ započinje ovako:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots$$

i zadovoljava rekurziju

$$c_{i+1} = \sum_{k=0}^{i} c_k c_{i-k}, \quad \text{za } i \geq 0. \tag{1}$$

Za prirodne brojeve $d \geq 3$ i $a \geq 1$, promatramo polinom

$$\begin{aligned} T_{d,a}(x) \;=\; & (2c_0 a x^{d-1} + 2c_1 a^2 x^{d-2} + \ldots + 2c_{d-2} a^{d-1} x)^2 \\ & - (4c_1 a^2 x^{2d-2} + 4c_2 a^3 x^{2d-3} + \ldots + 4c_{d-2} a^{d-1} x^{d+1}) \\ & + (4c_1 a^2 x^{d-2} + 4c_2 a^3 x^{d-3} + \ldots + 4c_{d-2} a^{d-1} x) \\ & + 4ax^{d-1} - 2x^d + 1, \end{aligned}$$

koji poopćava prije navedene $T_{3,a}(x)$, $T_{4,a}(x)$, $T_{5,a}(x)$.

Iz rekurzije (1) slijedi da $T_{d,a}(x)$ ima stupanj točno d, a ne $2d-2$, kako se možda čini na prvi pogled. Nadalje, visina od $T_{d,a}(x)$ je koeficijent uz x^2, a to je

$$H(T_{d,a}) = 4c_{d-2}^2 a^{2d-2} + 4c_{d-3}a^{d-2}.$$

Primjenom Eisensteinovog kriterija za prost broj 2 na recipročni polinom $x^d T_{d,a}(1/x)$, zaključujemo da je polinom $T_{d,a}(x)$ ireducibilan. Zaista, svi koeficijenti od $T_{d,a}(x)$ osim konstantnog člana su parni, a vodeći koeficijent $4c_{d-1}a^d - 2$ nije djeljiv sa 4.

Uz oznaku

$$g = g(a,x) = 2c_0 a x^{d-1} + 2c_1 a^2 x^{d-2} + \ldots + 2c_{d-2} a^{d-1} x,$$

vidimo da je

$$T_{d,a}(x) = (1+g)^2 + x^d(4ax^{d-1} - 2(1+g)).$$

Jasno je da $(1+g)^2$ ima dvostruki korijen, nazovimo ga sa x_0, blizu $-1/(2c_{d-2}a^{d-1})$. Preciznije, vrijedi

$$x_0 = -a^{-d+1}/(2c_{d-2}) + O(a^{-2d+1}).$$

Konstanta u O ne ovisi o a.

Polinom $T_{d,a}(x)$ ima dva različita korijena blizu x_0, budući da je član $x^d(4ax^{d-1} - 2(1+g))$ predstavlja malu perturbaciju kada je x blizu x_0.

Neka je $\delta_0 = \frac{1}{2^{d-1/2} c_{d-2}^{d+1/2}}$. Tada za svaki dovoljno mali $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliki a, polinom $T_{d,a}(x)$ ima korijen x_1 u intervalu

$$\left(x_0 - (\delta_0 + \varepsilon) a^{-d^2+d/2+1}, x_0 - (\delta_0 - \varepsilon) a^{-d^2+d/2+1}\right)$$

i korijen x_2 u intervalu

$$\left(x_0 + (\delta_0 - \varepsilon) a^{-d^2+d/2+1}, x_0 + (\delta_0 + \varepsilon) a^{-d^2+d/2+1}\right).$$

To povlači da je

$$\mathrm{sep}(T_{d,a}) \leq \frac{1}{2^{d-3/2} c_{d-2}^{d+1/2} a^{d^2-d/2-1}}.$$

Budući da je $H(T_{d,a}) = O(a^{2d-2})$, dobivamo

$$e_{\mathrm{irr}}(d) \geq \frac{2d^2 - d - 2}{4(d-1)} = \frac{d}{2} + \frac{d-2}{4(d-1)},$$

što je i trebalo dokazati.

Teorem 2: $e(d) \geq \frac{2d}{3} - \frac{1}{3}$ za sve $d \geq 4$.

Želimo konstruirati jednoparametarsku familiju cjelobrojnih polinoma $p_{d,n}(x)$ stupnja d koji imaju korijen vrlo blizu racionalnog broja $x_n = (n+2)/(n^2+3n+1)$. Tada će polinomi

$$P_{d,n}(x) = ((n^2+3n+1)x - (n+2))p_{d-1,n}(x)$$

imati dva korijena vrlo brizu jedan drugome. Niz $p_{d,n}(x)$ definiramo rekurzivno sa

$$p_{0,n}(x) = -1, \quad p_{1,n}(x) = (n+1)x - 1,$$

$$p_{d,n}(x) = (1+x)p_{d-1,n}(x) + x^2 p_{d-2,n}(x).$$

Vrijedi

$$p_{d,n}\left(\frac{n+2}{n^2+3n+1}\right) = \frac{(-1)^{d-1}}{(n^2+3n+1)^d}.$$

Ovo svojstvo nam omogućava dokazati da za dovoljno veliki n polinom $p_{d,n}(x)$ ima korijen između x_n i

$$z_{d,n} = x_n + \frac{(-1)^d}{n(n^2+3n+1)^d}.$$

Stoga polinom $P_{d,n}(x)$ ima dva bliska korijena: x_n i $y_{d,n}$, koji je između x_n i $z_{d-1,n}$. To povlači da je

$$\text{sep}(P_{d,n}) \le |x_n - y_{d,n}| \le \frac{1}{n(n^2+3n+1)^{d-1}} \le \frac{1}{n^{2d-1}},$$

kada je n dovoljno velik. Budući da je $H(P_{d,n}) = O(n^3)$, kad pustimo da n teži u beskonačno, dobivamo da je

$$e(d) \ge \frac{2d-1}{3}.$$

Teorem 3: $e^*(d) \geq \frac{2d}{3} - 1$ za svaki parni $d \geq 6$,

$e^*(d) \geq \frac{2d}{3} - \frac{5}{3}$ za svaki neparni $d \geq 7$.

Da bi dobili familiju normiranih polinoma sa sličnim separacijskim svojstvima poput familije $P_{d,n}(x)$, zamijenit ćemo linearni nenormirani polinom $L_n(x) = (n^2 + 3n + 1)x - (n + 2)$ s kvadranim normiranim polinomom

$$K_n(x) = x^2 - (n^2 + 3n + 1)x + (n + 2).$$

Dakle, želimo konstruirati jednoparametarsku familiju cjelobrojnih polinoma $q_{d,n}(x)$ stupnja d koji imaju korijen vrlo blizu korijenu $y_n = 1/n + O(1/n^2)$ od $K_n(x)$. Tada će polinom

$$Q_{d,n}(x) = (x^2 - (n^2 + 3n + 1)x + (n + 2))q_{d-2,n}(x)$$

imati dva korijena vrlo blizu jedan drugome.

Za $d \geq 0$ paran, definiramo niz $q_{d,n}(x)$ rekurzivno sa

$$q_{0,n}(x) = 1, \quad q_{2,n}(x) = x^2 - (n+1)x + 1,$$

$$q_{d,n}(x) = (2x^2 + x + 1)q_{d-2,n}(x) - x^4 q_{d-4,n}(x).$$

Primijetimo da je $q_{d,n}(x) - q_{d-2,n}(x)q_{2,n}(x)$ djeljiv sa $K_n(x)$, što povlači da je

$$q_{d,n}(y_n) = q_{d-2,n}(y_n)q_{2,n}(y_n) = (q_{2,n}(y_n))^{d/2},$$

za paran $d \geq 2$. Iz

$$y_n = 1/n - 1/n^2 + 2/n^3 - 4/n^4 + 8/n^5 + O(1/n^6),$$

dobivamo $q_{2,n}(y_n) = 1/n^4 + O(1/n^5)$ i stoga je

$$q_{d,n}(y_n) = 1/n^{2d} + O(1/n^{2d+1}).$$

Može se pokazati da za dovoljno veliki n polinom $q_{d,n}(x)$ ima korijen između y_n i $w_{d,n} = y_n + \frac{2}{n^{2d+1}}$. Stoga polinom $Q_{d,n}(x)$ ima dva bliska korijena: y_n i $v_{d,n}$, koji je između y_n i $w_{d-2,n}$. To povlači da je

$$\mathrm{sep}(Q_{d,n}) \leq \frac{2}{n^{2d-3}},$$

kada je n dovoljno velik. Budući da je $H(Q_{d,n}) = O(n^3)$, poštajući n da teži u beskonačno, dobivamo da je

$$e^*(d) \geq \frac{2d-3}{3}.$$

Neka je sada d neparan. Definiramo

$$Q_{d,n}(x) = x(x^2 - (n^2 + 3n + 1)x + (n + 2))q_{d-3,n}(x).$$

Ovaj polinom ima dva bliska korijena: y_n i korijen koji leži između y_n i $w_{d-3,n}$. Zato je

$$\mathrm{sep}(Q_{d,n}) \leq \frac{2}{n^{2d-5}},$$

za n dovoljno velik, što povlači da je

$$e^*(d) \geq \frac{2d-5}{3}.$$

Teorem 4: $e^*_{\mathrm{irr}}(d) \geq \frac{d}{2} - \frac{1}{4}$ za svaki $d \geq 4$.

Koristimo polinome $p_{d,n}(x)$ da bi konstruirali ireducibilne normirane polinome s dva vrlo bliska korijena.

Sa F_k označimo k-ti Fibonaccijev broj. Primijetimo da se Fibonaccijevi brojevi javljaju u asimptotskom razvoju od $x_n = (n+2)/(n^2+3n+1)$. Naime,

$$x_n = 1/n - 1/n^2 + 2/n^3 - 5/n^4 + \cdots - (-1)^k F_{2k-3}/n^k + \cdots$$

Za $d \geq 0$, najprije definiramo normirane polinome $s_{d,n}(x)$, s korijenom blizu x_n, sa

$$s_{d,n}(x) = (-1)^{d-1}(F_{d-1}p_{d,n}(x) - F_d x p_{d-1,n}(x)),$$

a potom normirane polinome s dva bliska korijena sa

$$r_{2d+1,n}(x) = xs^2_{d,n}(x) + F^2_d p^2_{d,n}(x),$$

$$r_{2d,n}(x) = s^2_{d,n}(x) + F^2_{d-1} x p^2_{d-1,n}(x).$$

Tvrdimo sa su ovi polinomi normirani. Dovoljno je tvrdnju dokazati za $s_{d,n}(x)$. Budući da je vodeći koeficijent od $p_{d,n}(x)$ jednak $F_d n + F_{d-2}$, dobivamo da je vodeći koeficijent od $s_{d,n}(x)$ jednak

$$\begin{gathered}(-1)^{d-1}(F_{d-1}(F_d n + F_{d-2}) - F_d(F_{d-1}n + F_{d-3})) \\ = (-1)^{d-1}(F_{d-1}F_{d-2} - F_d F_{d-3}) = 1.\end{gathered}$$

Imamo

$$r_{d,n}(x_n) = F^2_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}/n^{2d-3} + O(1/n^{2d-2}).$$

Uočimo da je stupanj polinoma $r_{d,n}(x)$ jednak d te da je $H(r_{d,n}) = O(n^2)$.

Može se pokazati da $r_{d,n}(x)$ ima dva kompleksno konjugirana korijena $v_{d,n}$ i $\overline{v_{d,n}}$ blizu x_n, preciznije, ti korijeni su

$$1/n - 1/n^2 + 2/n^3 - 5/n^4 + 13/n^5 - \ldots +$$
$$+(-1)^d F_{2d-5}/n^{d-1} \pm i/n^{(2d-1)/2} + O(1/n^d).$$

Nije sasvim jednostavno, no može se pokazati da su za dovoljno veliki prirodan broj n polinomi $r_{d,n}(x)$ ireducibilni nad $\mathbb{Z}[x]$. Dokaz koristi ocjene za rezultantu polinoma $R_{d,n}(x)$ i $L_n(x)$, gdje $R_{d,n}(x)$ označava ireducibilni faktor od $r_{d,n}(x)$ koji ima korijene $v_{d,n}$ i $\overline{v_{d,n}}$. Te ocjene povlače da je stupanj od $R_{d,n}(x)$ jednak ili d ili $d-1$, a zadnju mogućnost se može isključiti za dovoljno velike n.

Budući da je

$$\mathrm{sep}(r_{d,n}) = O(n^{-(d-1/2)}),$$

dobivamo

$$e^*_{\mathrm{irr}}(d) \geq \frac{2d-1}{4}.$$

Hallova slutnja: Za svaki $\varepsilon > 0$, postoji konstanta $c(\varepsilon) > 0$ sa svojstvom da ako su x i y prirodni brojevi takvi da je $x^3 - y^2 \neq 0$, onda je

$$|x^3 - y^2| > c(\varepsilon)x^{1/2-\varepsilon}.$$

Poznato je da Hallova slutnja slijedi iz abc-slutnje (postoji i jača verzija Hallove slutnje koja je ekvivalentna s abc-slutnjom).

Promotrimo kubni polinom

$$P(X) = X^3 + pX + q.$$

Njegova diskriminanta je $\Delta(P) = -4p^3 - 27q^2$. Zanima nas koliko mali može biti izraz $4p^3 + 27q^2$ u usporedbi s $\max\{|p|, |q|\}$. Stavimo li $p = -3x$, $q = 2y$, u stvari naše pitanje postaje koliko mali može biti izraz $|x^3 - y^2|$. Ovo objašnjava vezu problema separacije korijena kubnih ireducibilnih normiranih polinoma s Hallovom slutnjom.

Spomenut ćemo jedan nedavni rezultat u vezi polinomijalne verzije Hallove slutnje.

Davenport (1965): Za nekonstantne kompleksne polinome x i y, takve da je $x^3 \neq y^2$, vrijedi

$$\deg(x^3 - y^2)/\deg(x) > 1/2.$$

Zannier (1995): Za svaki prirodan broj δ postoje kompleksni polinomi x i y takvi da je $\deg(x) = 2\delta$, $\deg(y) = 3\delta$ i $\deg(x^3 - y^2) = \frac{1}{2}\deg(x) + 1 = \delta + 1$.

Birch, Chowla, Hall and Schinzel (1965), Elkies (2000): Postoje polinomi x i y s cjelobrojnim koeficijentima takvi da je
$\deg(x^3 - y^2)/\deg(x) = 0.6$.

D. (2011): Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje polinomi x i y s cjelobrojnim koeficijentima takvi da je $x^3 \neq y^2$ i
$\deg(x^3 - y^2)/\deg(x) < 1/2 + \varepsilon$.

Preciznije, za svaki parni prirodni broj δ postoje polinomi x i y s cjelobrojnim koeficijentima takvi da je $\deg(x) = 2\delta$, $\deg(y) = 3\delta$ i $\deg(x^3 - y^2) = \delta + 5$.

Ovo je dio "najjednostavnijeg" eksplicitnog primjera koji poboljšava kvocijent deg$(x^3 - y^2)/$deg$(x) = 0.6$ iz spomenutih primjera koje su našli Birch, Chowla, Hall, Schinzel i Elkies, i kod kojeg je deg$(x^3 - y^2)/$deg$(x) = 31/52 = 0.5961...$:

$$
\begin{aligned}
x &= 281474976710656t^{52} + 3799912185593856t^{50} + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + 496080t^5 + 130625t^4 + 15750t^3 + 629t^2 + 150t + 4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= 4722366482869645213696t^{78} + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + 11812545t^5 + 642429t^4 + 94050t^3 + 6591t^2 + 225t + 19,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3 - y^2 &= -905969664t^{31} - 8380219392t^{29} - 35276193792t^{27} \\
&\quad - 89379569664t^{25} - 151909171200t^{23} - 182680289280t^{21} \\
&\quad - 159752355840t^{19} - 102786416640t^{17} - 48661447680t^{15} \\
&\quad - 16772918400t^{13} - 4116359520t^{11} - 692649360t^9 \\
&\quad - 75171510t^7 - 297t^6 - 4749570t^5 - 891t^4 - 144450t^3 \\
&\quad - 891t^2 - 1350t - 297.
\end{aligned}
$$

Za dani polinom $P(X)$ s cjelobrojnim koeficijentima koji ima svojstvo da je $P(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pitamo se koliko mala može biti veličina $m(P) = \min\{P(x) : x \in \mathbb{R}\}$, kao funkcija od stupnja d i visine $H(P)$.

Bugeaud & Mignotte (2010):
$m(P) \geq d^{(9-7d)/2} H(P)^{-2d+3}$

Neka je $\pi(d) = \limsup_{\deg(P)=d, H(P)\to+\infty} \dfrac{-\log m(P)}{\log H(P)}$.

Bugeaud & Mignotte (2010):
$d - 1 \leq \pi(d) \leq 2d - 3$ za sve $d \geq 2$

Bugeaud & D. (2011): $\pi(4) \geq 10/3$

$$P_n(x) = (20n^4 + 2)x^4 + (-16n^5 + 4n)x^3 + (16n^6 - 4n^2)x^2 + 8n^3x + 1$$

$$m(P_n) = 1/4096\, n^{-20} - 15/65536\, n^{-24} + \cdots$$