RAD HRVATSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
MATEMATIČKE ZNANOSTI

C. Moeglin and D. Renard

Séries discrétes des espaces symétriques et paquets d'Arthur

Manuscript accepted for publication

This is a preliminary PDF of the author-produced manuscript that has been peer-reviewed and accepted for publication. It has not been copy-edited, proofread, or finalized by Rad HAZU Production staff.

SÉRIES DISCRÈTES DES ESPACES SYMÉTRIQUES ET PAQUETS D'ARTHUR

Colette Moeglin and David Renard

Pour Marko, avec toute notre amitié

Résumé. On vérifie certaines conjectures de Sakellaridis et Venkatesh donnant une description du spectre discret d'une variété sphérique $\mathscr{X} = G/H$ dans le formalisme d'Arthur-Langlands lorsque G est un groupe classique réel et $\mathscr{X}$ est un espace symétrique. On détermine ensuite explicitement les membres des paquets d'Arthur concernés contribuant au spectre discret, ce qui fait apparaître des résultats de multiplicité un.

Abstract. We check Sakellaridis-Venkatesh conjectures giving a description of the discrete spectrum of a spherical variety $\mathscr{X} = G/H$ in the Langlands-Arthur formalism when G is a classical real group and $\mathscr{X}$ is a symmetric space. Then, we compute explicitly the representations in the relevant Arthur paquets which appear in the discrete spectrum, and we establish some multiplicity one results.

1. Introduction

Le but de cet article est de vérifier certaines conjectures de Sakellaridis et Venkatesh énoncées dans [SV17]. Ces conjectures proposent une description du spectre discret d'une variété sphérique $\mathscr{X}$ définie sur un corps local en termes de paramètres d'Arthur-Langlands. En particulier, ils introduisent la notion de L-groupe ${}^LG_{\mathscr{X}}$ associé à $\mathscr{X}$, dont la construction est poursuivie dans [KS17].

Le cadre de notre étude est beaucoup plus restreint que celui de *op. cit.* : les variétés sphériques que nous considérons sont des espaces symétriques $\mathscr{X} = G/H$, où G est le groupe des points réels d'un groupe algébrique connexe réductif $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{R}$, où $\mathbf{H} = \mathbf{G}^\sigma$ est le groupe des points fixes d'une involution σ de $\mathbf{G}$ définie sur $\mathbb{R}$, et H est un sous-groupe de $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ contenant la composante neutre de celui-ci au sens des groupes de Lie, $\mathbf{H}(\mathbb{R})_e$. En général, nous prendrons $H = \mathbf{H}(\mathbb{R})$, mais à ce sujet, remarquons que si les conjectures sont valides pour un $\mathscr{X} = G/H$ avec H soumis à $\mathbf{H}(\mathbb{R})_e \subset H \subset \mathbf{H}(\mathbb{R})$, elles seront valides pour $\mathscr{X} = G/H'$ avec $H \subset H' \subset \mathbf{H}(\mathbb{R})$, et dans certains cas, nous démontrons les conjectures pour un groupe H strictement plus petit que $\mathbf{H}(\mathbb{R})$. Remarquons aussi que les conjectures doivent être reformulées pour des groupes H trop petits. Ce phénomène est à mettre en relation avec une extension possible de l'énoncé des conjectures à une situation tordue par un caractère unitaire χ de H/H_e sur laquelle nous reviendrons ci-dessous. De plus, nous supposons que G est un groupe général linéaire, un groupe unitaire, un groupe symplectique ou bien un groupe spécial orthogonal (nous dirons simplement que G est un groupe classique).

On note $L^2_d(\mathscr{X})$ la somme des sous-représentations (au sens des $(\mathfrak{g}, K)$-modules) irréductibles de $L^2(\mathscr{X})$ et une telle sous-représentation est appelée dans la suite *série discrète de* $\mathscr{X}$. On suppose donc que ce spectre discret est non trivial, et l'on veut caractériser les séries discrètes de $\mathscr{X}$ du point de vue des L-groupes et des paramètres d'Arthur. On adopte les notations habituelles pour les L-groupes de Langlands : $W_{\mathbb{R}}$ est le groupe de Weil de $\mathbb{R}$, $G^\vee$ est le groupe complexe dual de $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ et ${}^LG$ est un certain produit semi-direct $G^\vee \ltimes W_{\mathbb{R}}$. Il s'agit tout d'abord d'attacher à l'espace symétrique $\mathscr{X}$ un L-groupe ${}^LG_{\mathscr{X}}$ et un morphisme

$$\varphi_{\mathscr{X}} : {}^LG_{\mathscr{X}} \times \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG. \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 22E50, 11F67.
Key words and phrases. Discrete spectrum, symmetric spaces, Arthur parameters.

La conjecture affirme que si π est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors il existe un paramètre de Langlands discret $\phi_\pi : W_\mathbb{R} \longrightarrow {}^LG_\mathscr{X}$, tel que π appartienne au paquet d'Arthur de paramètre $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \tilde{\phi}_\pi : W_\mathbb{R} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$, où ϕ_π a été étendu en un morphisme

$$\tilde{\phi}_\pi : W_\mathbb{R} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \to {}^LG_\mathscr{X} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$$

par l'identité sur le facteur $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Résumons ceci par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} W_\mathbb{R} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\tilde{\phi}_\pi"] \arrow[dr, "\psi_\pi"'] & {}^LG_\mathscr{X} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[d, "\varphi_\mathscr{X}"] \\ & {}^LG \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

On vérifie donc que cet énoncé est vrai dans le cadre indiqué (espaces symétriques des groupes classiques réels). Une bonne partie de la construction du L-groupe ${}^LG_\mathscr{X}$ et du morphisme $\varphi_\mathscr{X}$ est déjà effectuée dans [SV17] et [KS17]. En ce qui concerne ${}^LG_\mathscr{X}$, Knop et Schalke déterminent sa composante neutre, et dans tous les cas, sauf un sur lequel on reviendra ci-dessous, nous trouvons que ${}^LG_\mathscr{X}$ est bien un L-groupe ayant cette composante neutre. Il est alors déterminé par le fait supplémentaire que c'est le L-groupe d'un groupe quasi-déployé ayant de la série discrète (ou ce qui revient au même, sur les réels, d'un groupe compact). Dans le cas restant (le cas 3 avec n impair dans la liste des cas donnés étudiés dans l'article, voir Table 1), on peut soit garder la composante neutre de Knop et Schalke (un groupe symplectique), mais il faut alors prendre pour ${}^LG_\mathscr{X}$ un produit semi-direct avec $W_\mathbb{R}$ qui n'est pas un L-groupe (mais pas loin, c'est un « E-group » au sens de [ABV92]), soit changer de L-groupe et prendre à la place celui d'un groupe orthogonal pair. Concernant le morphisme $\varphi_\mathscr{X}$, ce qui est déjà prévu par Knop et Schalke est sa restriction $\eta_\mathscr{X}$ à $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Nous donnons dans l'article la forme explicite de $\varphi_\mathscr{X}$ dans chaque cas.

Nous avons mentionné ci-dessus la possibilité d'étendre l'énoncé des conjectures de Sakellaridis et Venkatesh à un contexte « tordu » par un caractère unitaire χ du groupe H trivial sur H_e, où l'on remplace $L^2_d(\mathscr{X})$ par $L^2_d(\mathscr{X})_\chi$, l'espace des sections de carré intégrable du fibré en droite défini par χ sur $\mathscr{X}$. Il s'agit alors d'introduire un L-groupe associé ${}^LG_{\mathscr{X},\chi}$, le reste des conjectures s'énonçant de la même façon, résumée dans le diagramme ci-dessus. Nous ne démontrons rien dans le cas où χ est non trivial, nous espérons y revenir ultérieurement, mais nous faisons ça et là quelques remarques sur ce que nous pensons être vrai. Cela éclaire parfois les résultats obtenus dans le cas où χ est trivial, en les rendant plus naturels lorsqu'on considère ce contexte généralisé.

Donnons maintenant un aperçu du contenu de l'article. Dans la section 2, nous rappelons les résultats de Oshima-Matsuki, Flensted-Jensen, Schlichtkrull et Vogan concernant les séries discrètes d'un espace symétrique réel $\mathscr{X} = G/H$. En particulier le théorème 2.2 donne un critère sur le rang pour que $\mathscr{X}$ admette un spectre discret non trivial. A l'aide des tables [Wik] et [KS17], Table 3, nous établissons alors la liste des espaces symétriques $\mathscr{X} = G/H$ avec G classique ayant un spectre discret. Cette liste, qui comporte treize cas, est la suivante :

1. $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R})$, $2p \leq n$,
2. $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$,
3. $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{U}(r,s) \times \mathbf{U}(r',s')$, $r + r' = p$, $s + s' = q$, $r \leq r'$, $s \leq s'$,
4. $\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$,
5. $\mathbf{U}(2p,2q)/\mathbf{Sp}(p,q)$,
6. $\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$,
7. $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$, $p + q = 2n+1$, $r + r' = p$, $s + s' = q$, $r \leq r'$, $s \leq s'$,
8. $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$, $p + q = 2n$, $r + r' = p$, $s + s' = q$, $r \leq r'$, $s \leq s'$,
9. $\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$, $(p-1)(q-1) \neq 0 \mod 2$.
10. $\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$,
11. $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{R}) \times \mathbf{Sp}(2(n-p),\mathbb{R})$, $2p \leq n$,
12. $\mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$,
13. $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

Notre point de départ est une caractérisation précise des séries discrètes π de $\mathscr{X}$. Dans la littérature disponible, les résultats sont énoncés avec comme hypothèses G semi-simple et connexe, H connexe, et sont rappelés dans le théorème 2.7. D'après [Vog88], les séries discrètes de $\mathscr{X}$ se réalisent comme modules de Vogan-Zuckerman $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$, cohomologiquement induits à partir d'un triplet $(\mathfrak{q}, L, \pi_L)$, où L est le centralisateur dans G d'un sous-espace de Cartan compact $\mathfrak{t}_0$ de l'espace symétrique $\mathscr{X}$ (c'est un c-Levi de G, dans la terminologie de Shelstad), $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre parabolique θ-stable de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$, et π_L est un caractère unitaire de L dans le fair range relativement à $\mathfrak{q}$. D'autre part, K étant un sous-groupe compact maximal de G donné par une involution de Cartan θ commutant avec σ, le K-type minimal de π contient génériquement des invariants non triviaux sous le groupe $K \cap H$. En général on obtient les π restants par les foncteurs de translation de Zuckerman, c'est-à-dire par continuation cohérente. On traduit la condition sur le K-type minimal en la condition uniforme (*iiib*) de la proposition 2.6 portant sur π_L. On étend ensuite ces énoncés aux espaces symétriques de notre liste, pour lesquels G n'est pas forcément semi-simple et connexe et H n'est pas forcément connexe. Pour cela, on emploie certaines techniques usuelles et générales, mais pour que l'article reste d'une longueur raisonnable, on utilise aussi des arguments au cas par cas. Par exemple, les groupes G de notre liste peuvent être non connexes, mais d'une non connexité raisonnable, ce qui rend les arguments plus faciles.

Cette réalisation des séries discrètes de $\mathscr{X}$ en termes d'induction cohomologique permet, en utilisant nos travaux antérieurs (*cf.* [MR20], [MR19]) sur les paquets d'Arthur des groupes classiques réels, de fournir pour chaque série discrète π de $\mathscr{X}$ un paramètre d'Arthur explicite ψ_π tel que π soit dans le paquet d'Arthur correspondant $\Pi(G, \psi_\pi)$. On rappelle dans la section 3.2 la forme explicite des paramètres d'Arthur pour les groupes classiques réels ([MR20]), puis dans la section 3.3, on donne pour chaque espace de la liste, le paramètre ψ_π contenant la série discrète π. Pour pouvoir faire ceci, on a besoin de déterminer le groupe L, centralisateur dans G du sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}_0$. Ce calcul un peu laborieux est relégué à la fin de l'article (section 9), les résultats étant reportés dans la Table 2. Notons que les calculs explicites en rang un sont cruciaux, car on s'y ramène par un argument général.

Par définition, le groupe $\mathbf{L}$, centralisateur dans $\mathbf{G}$ du sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}_0$, est conjugué à un sous-groupe de Levi appelé $\mathbf{L}(\mathscr{X})$ dans [SV17]. Le groupe dual de ce groupe est un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}}$ de $G^\vee$, qui est déterminé dans [KS17], voir Table 1. Un argument général nous dit que la restriction de ψ_π à $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ est le morphisme de Jabcobson-Morosov associé à l'orbite unipotente principale du sous-groupe de Levi $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}}$ de $G^\vee$. Ainsi on peut associer à l'espace symétrique $\mathscr{X}$ un morphisme $\eta_{\mathscr{X}} : \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \to {}^L G$ (ou plutôt une classe de conjugaison de tel morphismes, ou encore de manière équivalente une orbite unipotente) de sorte que nos paramètres ψ_π aient tous ce morphisme pour restriction à $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ (à conjugaison près). Cette construction coïncide avec celle prévue par Sakellaridis et Venkatesh et explicitée dans [KS17], c'est-à-dire que la restriction à $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ du morphisme conjectural $\varphi_{\mathscr{X}}$ est bien $\eta_{\mathscr{X}}$. Ainsi, pour ce qui est de la restriction à $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ des morphismes ψ_π et $\varphi_{\mathscr{X}}$, la conjecture est établie. Les détails sont donnés dans la section 4.

Une conséquence directe de ceci est que la restriction des paramètres ψ_π à $W_{\mathbb{R}}$ se factorise par le commutant dans ${}^L G$ de l'image de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, que nous notons $\mathcal{G}$, en un morphisme tempéré. Reprenons le diagramme (1.2) et simplifions-le en tenant compte de la partie démontrée sur le facteur $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$. Si l'on note $\bar{\psi}_\pi$ et $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ les restrictions respectives de ψ_π et $\varphi_{\mathscr{X}}$ à $W_{\mathbb{R}}$ et ${}^L G_{\mathscr{X}}$, on obtient le diagramme commutatif (qu'il s'agit d'établir) :

$$
\begin{tikzcd}
W_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\phi_\pi"] \arrow[dr, "\bar{\psi}_\pi"'] & {}^L G_{\mathscr{X}} \arrow[d, "\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}"] & \\
& \mathcal{G} \arrow[r, hook] & {}^L G
\end{tikzcd}
\tag{1.3}
$$

L'étape suivante est alors de calculer explicitement $\mathcal{G}$. Ceci est l'objet de la section 6. Dans les cas 2, 5, 6, 11, 12, 13 et 9, 10 avec n pair, qui sont les plus simples, ce commutant $\mathcal{G}$ est isomorphe au L-groupe d'un autre groupe réductif ayant (nécessairement) de la série discrète. Il nous reste alors seulement à vérifier que c'est bien le L-groupe de [KS17]. Dans les cas 7, 8 et 9, 10 avec n impair, le commutant $\mathcal{G}$ est un produit direct d'un L-groupe d'un groupe réductif quasi-déployé ayant de la série discrète par un groupe $\mathcal{C}$ fini ou isomorphe à $\mathbf{SO}(2, \mathbb{C})$. On vérifie alors que le L-groupe est bien celui de [KS17], et il reste à montrer que la projection des paramètres d'Arthur sur $\mathcal{C}$ est triviale. C'est là un point délicat, qui peut être faux pour H trop petit, nous y avons fait allusion au début de cette introduction. Il faut pour cela utiliser la propriété clé que (génériquement) le K-type minimal de π a des invariants sous $K \cap H$ ou la reformulation (*iiib*) de cette propriété. Dans une version plus générale des conjectures, où l'on introduit un caractère χ de H trivial sur H_e, on aurait une propriété du même type avec un morphisme de $W_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{C}$ éventuellement non trivial, mais ne dépendant que de $\mathscr{X}$ et de χ. Dans les trois cas restants, 1, 3 et 4, les racines sphériques de $\mathscr{X}$ ne sont pas toutes des racines de $\mathbf{G}$. Ceci a pour effet que le commutant $\mathcal{G}$ est beaucoup plus gros que le groupe ${}^L G_{\mathscr{X}}$ cherché.

La section 5 donne des constructions de L-morphismes utilisés pour construire certains des morphismes $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$. La fin de la vérification des conjectures fait l'objet de la section 7.

Dans la section 8 nous considérons les paramètres d'Arthur ψ déterminés dans la section 3.3, mais ici nous ne partons pas d'une série discrète π, ni même de la forme réelle G. Au contraire on cherche à savoir quelles sont les représentations π du paquet $\Pi(\psi)$ qui sont des séries discrètes pour $\mathscr{X}$, pour un certain $\mathscr{X}$. L'idée est évidemment que tout paquet associé à un morphisme d'Arthur qui se factorise par ${}^L G_{\mathscr{X}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ devrait contenir au moins une série discrète pour au moins une forme réelle $\mathscr{X}$ pertinente. On vérifie essentiellement cette propriété, on renvoie à la section 8 pour une discussion précise au cas par cas. Rappelons que la théorie d'Arthur attache à toute représentation π de G dans un paquet $\Pi(G,\psi)$ de paramètre ψ un certain invariant $\epsilon(\pi)$, qui est dans les cas qui nous occupent ici un caractère du groupe $A(\psi)$ des composantes connexes du centralisateur de ψ dans $G^\vee$ (les $A(\psi)$ sont ici des 2-groupes finis). Les résultats de [MR20], [MR19] déterminent (un choix de donnée de Whittaker pour une forme intérieure pure quasi-déployée de G étant fixée) ces caractères $\epsilon(\pi)$. Il s'avère que l'on peut lire sur le caractère $\epsilon(\pi)$ attaché à π si cette représentation est une série discrète de $\mathscr{X}$. En particulier, si deux représentations dans $\Pi(G,\psi)$ donnent le même caractère de $A(\psi)$ et que l'une est une série discrète pour $\mathscr{X}$, alors l'autre l'est aussi. Les résultats sont plutôt jolis et essentiellement indépendant des choix, même si nous n'avons pas trouvé une façon uniforme de le formuler. Ces calculs nous permettent de constater la chose suivante : certains paramètres ψ de G sont obtenus comme ci-dessus pour deux espaces symétriques $\mathscr{X} = G/H$ et $\mathscr{X}' = G/H'$, mais une représentation π du paquet ne contribue au plus qu'à un seul des deux espaces symétriques.

Nous remercions très chaleureusement Y. Sakellaridis qui nous a corrigé une erreur dans une première version et nous a expliqué l'introduction du produit semi-direct de $\mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ dans le cas 3. Nous remercions aussi le referee anonyme pour sa lecture attentive de l'article qui a permis de corriger de nombreuses coquilles.

2. Séries discrètes des espaces symétriques

2.1. *Notations pour les espaces symétriques.* Si M est un groupe de Lie, on note M_e la composante connexe de l'identité dans M. Si $\mathbf{M}$ un groupe algébrique réductif, on note $\mathbf{M}^0$ sa composante neutre au sens des groupes algébriques.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$ et soit $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ le groupe de ses points réels. Soit σ une involution de $\mathbf{G}$, définie sur $\mathbb{R}$. Posons $\mathbf{H} = \mathbf{G}^\sigma$ et soit H un sous-groupe de G avec $\mathbf{H}(\mathbb{R})_e \subset H \subset \mathbf{H}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathscr{X}$ l'espace symétrique G/H. Les sous-représentations irréductibles de G dans $L^2(\mathscr{X})$ forment un sous-espace noté $L^2_d(\mathscr{X})$ et sont appelées séries discrètes de $\mathscr{X}$. Elles ont été décrites grâce aux travaux de nombreux mathématiciens ([FJ80], [OM84], [Sch83], [Vog88]) ; en particulier, Vogan donne une description en termes d'induction cohomologique que nous allons rappeler ci-dessous, après avoir introduit les notations nécessaires.

Remarque 2.1. Dans ces références, on suppose souvent G connexe et/ou semi-simple et parfois aussi H connexe. Il nous faudra donc étendre ces résultats en les adaptant à nos groupes classiques, dont certains ne sont pas semi-simples connexes.

Rappelons d'abord un critère dû à Oshima et Matsuki pour que $\mathscr{X}$ admette des séries discrètes. Fixons une involution de Cartan θ de G qui commute à σ, et soit $K = G^\theta$ le sous-groupe compact maximal de G associé à θ. On note $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{k}_0$ les algèbres de Lie de G, H, K respectivement, et plus généralement, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est notée par la lettre gothique correspondante avec un indice 0. Lorsqu'on enlève

	G/H		$\check{\mathfrak{g}}_X$	$\check{\mathfrak{l}}_X$	${}^L G_{\mathscr{X}}$
1	$\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(p,\mathbb{R})\times\mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R})$	$2p\le n$	$\mathfrak{sp}(2p)$	$(\mathfrak{gl}_1)^{2p}\times\mathfrak{gl}_{n-2p}$	$\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$
2	$\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$		$\mathfrak{gl}(p+q)$	$(\mathfrak{gl}_1)^{p+q}$	$\mathbf{GL}(p+q,\mathbb{C})\ltimes W_{\mathbb{R}}$
3	$\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{U}(r,s)\times\mathbf{U}(r',s')$	$r\le r',\ s\le s'$	$\mathfrak{sp}(2(r+s))$	$(\mathfrak{gl}_1)^{2(r+s)}\times\mathfrak{gl}_{r'+s'-(r+s)}$	$\begin{cases} n \text{ pair } \mathbf{Sp}(2(r+s),\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}} \\ n \text{ impair } \mathbf{Sp}(2(r+s)\ltimes W_{\mathbb{R}}\end{cases}$
4	$\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$		$\mathfrak{sp}(2n)$	$(\mathfrak{gl}_1)^{2n}$	$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$
5	$\mathbf{U}(2p,2q)/\mathbf{Sp}(p,q)$		$\mathfrak{gl}(p+q)$	$(\mathfrak{gl}_2)^{p+q}$	$\mathbf{GL}(p+q,\mathbb{C})\ltimes W_{\mathbb{R}}$
6	$\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$		$\mathfrak{gl}(n)$	$(\mathfrak{gl}_2)^{n}$	$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})\ltimes W_{\mathbb{R}}$
7	$\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s)\times\mathbf{SO}(r',s')$	$p+q=2n+1$ $r\le r',\ s\le s'$	$\mathfrak{sp}(2(r+s))$	$\mathfrak{sp}(2(n-(r+s))\times(\mathfrak{gl}_1)^{r+s}$	$\mathbf{Sp}(2(r+s),\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$
8	$\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s)\times\mathbf{SO}(r',s')$	$p+q=2n$ $r\le r',\ s\le s'$	$\mathfrak{so}(2(r+s)+1)$	$\mathfrak{so}(2(n-(r+s))\times(\mathfrak{gl}_1)^{r+s}$	$\mathbf{SO}(2(r+s)+1,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$
9	$\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$	$p+q=n$ $(p-1)(q-1)\neq 0\ [2]$	$\mathfrak{sp}(2(p+q))$	$(\mathfrak{gl}_2)^{\lfloor n/2\rfloor}$ $(+\mathfrak{so}(2)$ si n est impair)	$\begin{cases} n \text{ pair } \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}} \\ n \text{ impair } \mathbf{Sp}(n-1,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}\end{cases}$
10	$\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$		$\mathfrak{sp}(2n)$	$(\mathfrak{gl}_2)^{\lfloor n/2\rfloor}$ $(+\mathfrak{so}(2)$ si n est impair)	$\begin{cases} n \text{ pair } \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}} \\ n \text{ impair } \mathbf{Sp}(n-1,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}\end{cases}$
11	$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{R})\times\mathbf{Sp}(2(n-p),\mathbb{R})$	$2p\le n$	$\mathfrak{sp}(2p)$	$(\mathfrak{gl}_2)^{p}\times\mathfrak{so}(2(n-2p)+1)$	$\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$
12	$\mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$		$\mathfrak{sp}(2n)$	$(\mathfrak{gl}_2)^{n}$	$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$
13	$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$		$\mathfrak{so}(2n+1)$	$(\mathfrak{gl}_1)^{n}$	$\mathbf{SO}(2n+1)\times W_{\mathbb{R}}$

TABLE 1. Espaces symétriques classiques avec séries discrètes

	G/H	L	$L \cap H$
1	$\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R})$	$(\mathbb{C}^\times)^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$	$(\mathbb{R}^\times)^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$
2	$\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$	$\mathbf{U}(1)^n$	$\{\pm 1\}^n$
3	$\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{U}(r,s) \times \mathbf{U}(r',s')$	$(\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1))^{r+s} \times \mathbf{U}(r'-r,s'-s)$	$\mathbf{U}(1)^{r+s} \times \mathbf{U}(r'-r,s'-s)$
4	$\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$	$(\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1))^n$	$\mathbf{U}(1)^n$
5	$\mathbf{U}(2p,2q)/\mathbf{Sp}(p,q)$	$\mathbf{U}(2,0)^p \times \mathbf{U}(0,2)^q$	$\mathbf{SU}(2,0)^p \times \mathbf{SU}(0,2)^q$
6	$\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathbf{U}(1,1)^n$	$\mathbf{SU}(1,1)^n$
7	$\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$	$\mathbf{U}(1,0)^r \times \mathbf{U}(0,1)^s \times \mathbf{SO}(p-2r,q-2s)$	$\mathbf{SO}(p-2r,q-2s)$
8	$\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$	$\mathbf{U}(1,0)^r \times \mathbf{U}(0,1)^s \times \mathbf{SO}(p-2r,q-2s)$	$\mathbf{SO}(p-2r,q-2s)$
9a	$\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$, p,q pair	$\mathbf{U}(2,0)^{p/2} \times \mathbf{U}(0,2)^{q/2}$	$\mathbf{SU}(2,0)^{p/2} \times \mathbf{SU}(0,2)^{q/2}$
9b	$\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$, p pair, q impair	$\mathbf{U}(2,0)^{p/2} \times \mathbf{U}(0,2)^{q-1/2} \times \mathbf{SO}(0,2)$	$\mathbf{SU}(2,0)^{p/2} \times \mathbf{SU}(0,2)^{q-1/2} \times \mathbf{SO}(0,2)$
10a	$\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, n pair	$\mathbf{U}(1,1)^{n/2}$	$\mathbf{SU}(1,1)^{n/2}$
10b	$\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, n impair	$\mathbf{U}(1,1)^{n-1/2} \times \mathbf{SO}(1,1)$	$\mathbf{SU}(1,1)^{n-1/2} \times \mathbf{SO}(1,1)$
11	$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{R}) \times \mathbf{Sp}(2(n-p),\mathbb{R})$	$\mathbf{U}(1,1)^p \times \mathbf{Sp}(2(n-2p),\mathbb{R})$	$\mathbf{SU}(1,1)^p \times \mathbf{Sp}(2(n-2p),\mathbb{R})$
12	$\mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$\mathbf{U}(2)^n$	$\mathbf{SU}(2)^n$
13	$\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$	$\mathbf{U}(1)^n$	$\{\pm 1\}^n$

TABLE 2. L et $L \cap H$

l'indice 0, ceci désigne alors l'algèbre de Lie complexifiée. De plus, les involutions θ et σ donnent lieu à des décompositions :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{s}_0, \quad \mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}_0) \oplus (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{s}_0) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{h}_0) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{s}_0).$$

Rappelons qu'un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ pour $\mathscr{X}$ est une sous-algèbre abélienne, composée d'éléments semisimples, contenue dans $\mathfrak{s}_0$ et maximale pour l'inclusion avec ces propriétés. Le rang de l'espace symétrique $\mathscr{X}$ est égal à la dimension d'un sous-espace de Cartan. Notons $\mathscr{X}_K = K/K \cap H$: c'est un espace symétrique compact.

Théorème 2.2 (Oshima-Matsuki). *L'espace symétrique $\mathscr{X}$ admet des séries discrètes si et seulement si le rang de $\mathscr{X}$ est égal au rang de $\mathscr{X}_K$, c'est-à-dire qu'un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{k}_0$ pour $\mathscr{X}_K$ est aussi un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ pour $\mathscr{X}$.*

Un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ pour $\mathscr{X}$ comme dans le théorème sera appelé sous-espace de Cartan compact.

Remarque 2.3. Comme expliqué dans la remarque 2.1, le théorème ci-dessus est démontré dans la littérature pour un espace symétrique G/H avec G connexe et semi-simple. Le cas plus général envisagé ici se réduit au cas connexe et semi-simple de manière routinière.

2.2. *Listes des espaces symétriques classiques avec séries discrètes.* Nous nous plaçons maintenant dans le cas où le groupe $\mathbf{G}$ est un groupe classique, c'est-à-dire que G est un groupe général linéaire $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, ou bien un groupe unitaire $\mathbf{U}(p,q)$, ou bien un groupe symplectique $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$, ou bien un groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}(p,q)$. Pour déterminer la liste des espaces symétriques $\mathscr{X} = G/H$ avec G comme ci-dessus, et vérifiant de plus la condition du théorème 2.2 d'existence de séries discrètes, on utilise la classification de Wikipedia [Wik] pour avoir tous les $\mathscr{X}$ possibles, et la condition de rang se vérifie en utilisant la table 3 de [KS17] : le rang de $\mathscr{X}$ est égal au rang de son algèbre de Lie duale $\breve{g}_{\mathscr{X}}$. On peut alors comparer au rang de l'espace symétrique compact $\mathscr{X}_K = K/K \cap H$. On obtient la liste de 13 cas donnée dans l'introduction.

2.3. *Notations pour l'induction cohomologique.* Dans ce paragraphe, on garde les mêmes notations que précédemment concernant le groupe G, mais on oublie l'espace symétrique.

Soit $\mathfrak{t}_0$ une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{k}_0$. Posons $L = \mathrm{Cent}_G(\mathfrak{t}_0)$. C'est un facteur de Levi θ-stable de G (un c-Levi dans la terminologie de Shelstad). Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ une sous-algèbre parabolique θ-stable de $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{R}^i_{\mathfrak{q},L,G}$ le foncteur d'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman (*cf.* [Vog81], §6.3.1) en degré i, de la catégorie des $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-modules vers la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules. Nous renvoyons à [KV95], Def. 0.49 et 0.52 pour les définitions du good range et du fair range. Dans cet article, nous allons toujours considérer des inductions cohomologiques à partir de caractères unitaires dans le fair range. Dans ce contexte, le degré qui nous intéresse particulièrement, et même exclusivement, est $S = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$, et nous posons pour tout caractère unitaire π_L de L,

$$A_{\mathfrak{q}}(\pi_L) = \mathcal{R}^S_{\mathfrak{q},L,G}(\pi_L).$$

2.4. *Séries discrètes de $\mathscr{X}$ comme $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$.* Reprenons les notations du paragraphe 2.1. Supposons que $\mathscr{X}$ vérifie la condition du théorème 2.2 et admet donc des séries discrètes. Fixons un sous-espace de Cartan compact de $\mathfrak{t}_0$ pour $\mathscr{X}$ (tous les choix possibles pour $\mathfrak{t}_0$ sont conjugués sous $K \cap H$). Comme dans le paragraphe 2.3, posons $L = \mathrm{Cent}_G(\mathfrak{t}_0)$. On a dans ce cas $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{t}$, c'est la décomposition en sous-espaces propres pour σ. On dit que L et $\mathfrak{l}$ sont associés à l'espace symétrique $\mathscr{X}$. Notons $\mathscr{Q}(\mathfrak{l})$ l'ensemble des sous-algèbres paraboliques θ-stables $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ de facteur de Levi $\mathfrak{l}$.

Nous allons maintenant donner une description des séries discrètes pour les espaces symétriques de notre liste comme modules $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$. Dans la littérature ([FJ80], [OM84],[Sch83], [Vog88]) cette description est disponible sous les hypothèses G et H connexes et G semi-simple. Nous allons donc partir de là et adapter les résultats aux espaces de notre liste. On fait donc (provisoirement) ces hypothèses dans ce qui suit.

Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \in \mathscr{Q}(\mathfrak{l})$. On introduit d'abord un ensemble de paramètres relatif à $\mathfrak{q}$ qui va paramétrer la plus grande partie des séries discrètes.

Définition 2.4. Soit $\mathcal{P}'(\mathfrak{q})$ l'ensemble des $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-modules irréductibles π_L vérifiant les conditions $(i)'$, $(ii)'$ et $(iii)'$ suivantes.

$(i)'$ π_L est un caractère unitaire de L, de différentielle nulle sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{l}_0$.

$(ii)'$ π_L est dans le good range pour $\mathfrak{q}$.

Le bottom-layer (*cf.* [KV95], § V. 6) de $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est alors est constitué du K-type V_μ de plus haut poids $\mu = \pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. Ce K-type V_μ est le K-type minimal de $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$.

$(iii)'$ Le K-type V_μ de plus haut poids $\mu = \pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ a des invariants non triviaux sous $H \cap K$.

Ici, ce que nous entendons par « plus haut poids » d'une représentation irréductible V de K est la représentation de $L \cap K$ dans $H^0(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}, V)$ qui caractérise V ([Kos61]).

Pour obtenir toutes les séries discrètes, il faut autoriser π_L à décrire tout le fair range. Le problème dans ce cas est que le bottom-layer de $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ peut être vide, et la condition $(iii)'$ n'a plus de sens. Pour compléter la définition, Vogan remarque que les séries discrètes de $\mathscr{X}$ forment des familles cohérentes (voir [Vog88] pour une définition précise de ces familles). On introduit donc un ensemble de paramètres plus grand.

Définition 2.5. Soit $\mathcal{P}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-modules irréductibles π_L vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) suivantes.

(i) π_L est un caractère unitaire de L, de différentielle nulle sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{l}_0$.

(ii) π_L est dans le fair range pour $\mathfrak{q}$.

(iii) Le module $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est dans une famille cohérente de modules $A_{\mathfrak{q}}(\pi'_L)$ dont génériquement les paramètres π'_L vérifient les conditions $(ii)'$ et $(iii)'$ de la définition précédente.

Dans le fair range, il se peut que $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ soit nul. S'il ne l'est pas, Vogan a démontré ([Vog88]) qu'il est irréductible.

Proposition 2.6. *La condition $(iii)'$ de la définition 2.4 est équivalente (sous les conditions $(i)'$ et $(ii)'$) à la suivante :*

$(iiib)$ le caractère $\pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ de $L \cap K$ est trivial sur $L \cap H \cap K$.

La condition (iii) de la définition 2.5 est équivalente à $(iiib)$ (sous les conditions (i) et (ii)).

Démonstration. La première assertion est démontrée en utilisant la dualité de Flensted-Jensen et le théorème de Cartan-Helgason, ceci se trouve dans [FJ80], [Sch83],[OM84]. Cette condition étant stable pour les familles cohérentes, on obtient la seconde assertion. □

Théorème 2.7 (Oshima-Matsuki-Schlichtkrull-Vogan). *Soit $\mathscr{X} = G/H$ un espace symétrique avec G et H connexes et G semi-simple. On a une décomposition*

$$L^2_d(\mathscr{X}) = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathscr{Q}(\mathfrak{l}), \pi_L \in \mathcal{P}(\mathfrak{q})} A_{\mathfrak{q}}(\pi_L).$$

D'autre part les $A(\pi_L)$, sont irréductibles ou nuls.

La première assertion est due à Oshima-Matsuki [OM84], à la suite du travail fondamental de Flensted-Jensen [FJ80], avec une description différente des $A(\pi_L)$. Le lien avec la description en termes de modules cohomologiquement induits est due à Schlichtkrull [Sch83] et Vogan [Vog88], et l'irréductibilité est due à à Vogan [Vog88]. Pour faire le lien avec la littérature, la remarque suivante peut s'avérer utile.

Remarque 2.8. L'action de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ sur $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ est triviale. On étend le sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}_0$ en une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{t}'_0$ de $\mathfrak{k}_0$ avec $\mathfrak{t}'_0$ dans $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$. Le sous-espace $\mathfrak{t}'_0$ est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{d}_0 := \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{l}_0$. Comme $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ est une représentation de dimension 1, l'action de $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}]$ sur $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ est triviale. Il reste donc à voir que l'action de $\mathfrak{t}'$ est triviale. L'argument est donné dans [Sch83], en bas de la page 140.

Voyons comment le théorème 2.7 peut s'étendre à des espaces symétriques plus généraux.

Première étape. Elle consiste à obtenir une description analogue pour $\mathscr{X} = G/H$ avec les mêmes hypothèses sur G, mais sans hypothèse sur H autre que $(G^\sigma)_e = H_e \subset H \subset G^\sigma$.

Remarquons que l'on a une action par translation à droite de H sur $L^2(G/H_e)$ commutant avec l'action par translation à gauche de G. En effet, si $f \in L^2(G/H_e)$, on a quels que soient $g \in G$, $h' \in H$ et $h \in H_e$,

$$(r(h').f)(gh) = f(ghh') = f(gh'(h'^{-1}hh') = f(gh') = (r(h').f)(g).$$

Cette action est triviale sur H_e. On a donc une action de H/H_e sur $L^2(G/H_e)$ commutant avec l'action par translation à gauche de G. Fixons une série discrète $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ (suffisamment régulière, disons $\pi_L \in \mathcal{P}'(\mathfrak{q})$ de $L^2(G/H_e)$ et considérons l'espace

$$\mathscr{A} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi, L^2(G/H_e)).$$

On sait que π a multiplicité un dans $L^2(G/H_e)$, donc $\mathscr{A}$ est de dimension 1. L'action de H/H_e sur $\mathscr{A}$ héritée de l'action sur $L^2(G/H_e)$ est donc un caractère de ce groupe, et l'on en conclut qu'il existe un caractère χ de H/H_e tel que pour tout $\phi \in \mathscr{A}$,

$$[h \cdot \phi :\, v \mapsto r(h) \cdot \phi(v)] = [(\chi(h)\phi) :\, v \mapsto \chi(h)\phi(v)]$$

et donc $\phi(v)$ est dans l'espace noté précédemment $L^2(G/H)_\chi$. Par réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathscr{A} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi, L^2(G/H_e)) \simeq \mathscr{B} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h},K\cap H_e}(\pi, \chi).$$

et l'action de H/H_e sur $\mathscr{A}$ se transporte en une action sur $\mathscr{B}$ (par ce même caractère χ). On a un morphisme de restriction non nul au K-type minimal V_μ de π :

$$\mathscr{B} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h},K\cap H_e}(\pi, \chi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K\cap H_e}(V_\mu, \chi).$$

On en conclut que V_μ possède des vecteurs se transformant par χ sous l'action de H. On a donc obtenu la première partie du résultat suivant :

Proposition 2.9. *Soit $\mathscr{X} = G/H$ un espace symétrique avec G semi-simple connexe, admettant des séries discrètes tordues par un caractère χ de H/H_e. Alors*

$$L^2(\mathscr{X})_\chi = \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathscr{Q}(\mathfrak{l}),\pi_L\in\mathcal{P}(\mathfrak{q})_\chi} A_{\mathfrak{q}}(\pi_L).$$

où l'espace des paramètres $\mathcal{P}(\mathfrak{q})_\chi$ est défini comme dans les définitions 2.4 et 2.5 en remplaçant les conditions $(iii)'$ et (iii) respectivement par

$(iii)'1$. *Le K-type V_μ de plus haut poids $\mu = \pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})$ a des vecteurs non nuls se transformant selon le caractère χ pour l'action de $H \cap K$.*

$(iiib)1$. *Le caractère $\pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})$ de $L\cap K$ coïncide avec le caractère χ sur $L \cap H \cap K$.*

Démonstration. Il nous faut maintenant reformuler la condition $(iiib)$ et il faut revenir à la démonstration de l'équivalence entre (iii)' et $(iiib)$ dans le cas connexe. On utilise la dualité de Flensted-Jensen entre (G, H_e, K) et un triplet similaire (G^d, K^d, H^d) de groupes ayant pour complexification respective $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{H}^0$ ($\mathbf{H}^0$ est la composante neutre du groupe réductif $\mathbf{H} = \mathbf{G}^\sigma$). De plus H^d est un sous-groupe compact maximal de G^d. On voit alors V_μ comme une représentation algébrique de $\mathbf{K}$ ayant des invariants sous $\mathbf{H}^0\cap\mathbf{K}$ et par restriction, comme une représentation de dimension finie de K^d ayant des invariants sous $H^d\cap K^d$. Or $K^d\cap H^d$ est un sous-groupe compact maximal de K^d. On remarque que $\mathbf{L}\cap\mathbf{K}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{K}$. Le théorème de Cartan-Helgason nous dit alors que le plus haut poids μ est invariant sous $\mathbf{L}\cap\mathbf{K}\cap\mathbf{H}^0$.

Ceci constitue la démonstration de l'équivalence entre $(iii)'$ et $(iiib)$ et il s'agit de l'étendre avec $\mathbf{H}$ à la place de $\mathbf{H}^0$. Pour cela on fait agir $\mathbf{H}\cap\mathbf{K}$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}^0\cap\mathbf{K}}(V_\mu, 1)$ ce qui par restriction donne une action de $(\mathbf{H}\cap\mathbf{K})(\mathbb{C})/(\mathbf{H}^0\cap\mathbf{K})(\mathbb{C})$ sur l'espace $\mathrm{Hom}_{(\mathbf{L}\cap\mathbf{K}^0\cap\mathbf{H})(\mathbb{C})}(\mu, 1)$. La conclusion est alors évidente. ∎

Deuxième étape. L'étape suivante de la généralisation consiste à autoriser G à être réductif, mais toujours connexe. On écrit alors $G = Z(G)_e G_1$ où G_1 est semi-simple connexe et $Z(G)$ est le centre de G. Les groupes G_1 et $Z(G)_e$ sont stables par l'involution σ. On fait tout d'abord l'hypothèse suivante, vérifiée dans certains cas de notre liste où G est non réductif.

Hypothèse 1 : $Z(G)_e \subset H_e$.

Posons $H_1 = G_1 \cap H$. On a alors un difféomorphisme, induit par l'inclusion de G_1 dans G :

$$G_1/H_1 \longrightarrow G/H.$$

L'injectivité est immédiate puisque l'on a quotienté par $G_1 \cap H$ et la surjectivité est conséquence de l'hypothèse. Pour tout caractère χ de $H_1/H_{1,e}$, on a donc une description de $L^2_d(\mathscr{X})_\chi$ comme représentation de G_1 donné par la proposition 2.9. D'autre part, grâce à l'hypothèse 1, $Z(G)_e$ agit trivialement sur $L^2_d(\mathscr{X})_\chi$. Enfin

$$H_1/H_{1,e} = G_1\cap H/(G_1\cap H)_e \twoheadrightarrow G_1\cap H/G_1\cap H_e \simeq H/H_e.$$

On peut donc identifier les caractères de H/H_e avec des caractères de $H_1/H_{1,e}$. Les modules entrant dans la décomposition de $L^2_d(\mathscr{X})_\chi$ comme représentation de G sont donc les $A_\mathfrak{q}(\pi_L)$ de la décomposition comme représentation de G_1, étendu par l'action triviale du centre $Z(G)_e$.

Exemple 2.10. Pour étudier le premier exemple de notre liste, on considère donc déjà l'espace symétrique

$$G/H = \mathbf{GL}^+(n,\mathbb{R})/(\mathbf{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R}))^+,$$

où le $+$ indique que l'on prend le sous-groupe (connexe) des matrices de déterminant strictement positif. Le groupe $Z(G)_e$ est alors le sous-groupe des matrices scalaires λI_n avec $\lambda > 0$, G_1 est le groupe $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$, $H_1 = (\mathbf{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R})) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ et l'hypothèse 1 est clairement vérifiée. On a de plus ici $H_1/H_{1,e} \simeq H/H_e \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les cas 3 et 4 de la liste sont aussi des exemples où l'hypothèse 1 est vérifiée, et de plus dans ces cas, les groupes sont tous connexes.

Remarquons que la condition sur l'action du centre est déjà dans la condition (i) de la définition de l'espace des paramètres, sous l'hypotèse ci-dessus $Z(G)_e \subset H_e$

Traitons maintenant les cas restants de notre liste où G n'est pas semi-simple. Commençons par la variante du cas 2 avec H connexe, $G/H = \mathbf{U}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q)$. On a alors $G_1 = \mathbf{SU}(p,q)$, $Z(G) = Z(G)_e = \mathbf{U}(1)$. Ce qui va servir ici est la compacité de ce centre. Posons $\mathscr{X}_1 = G_1/\mathbf{SO}(p,q)$. Considérons l'application naturelle, surjective

$$\mathbf{U}(1) \times \mathscr{X}_1 = \mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q) \longrightarrow \mathbf{U}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q) = \mathscr{X}.$$

C'est un fibré principal de fibre $\boldsymbol{\mu}_n$, le groupe des racines n-ième de l'unité. Le théorème 2.7 donne une description du spectre discret de $\mathscr{X}_1$. On en déduit facilement une description du spectre discret de $\mathbf{U}(1) \times \mathscr{X}_1$ comme représentation de $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(p,q)$, puis du spectre discret de $\mathscr{X}$ comme représentation de $\mathbf{U}(1) \times_{\boldsymbol{\mu}_n} \mathbf{SU}(p,q) = \mathbf{U}(p,q)$. On passe de $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q)$ à $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$ comme dans la première étape ci-dessus.

La conclusion pour ce cas est donc que la description de $L^2_d(\mathscr{X})$ du théorème 2.7 est valide sans aucun changement de la définition de l'espace des paramètres. La réduction ci-dessus s'applique aussi de la même façon aux cas 5 et 6.

Remarque 2.11. Le cas général pour un groupe G réductif connexe peut sans doute être obtenu par une combinaison des cas considérés ci-dessus, c'est-à-dire $Z(G)_e \subset H$ ou $Z(G)_e$ compact. En effet la condition sur le rang de $\mathscr{X}$ du théorème 2.2 implique que la partie de $Z(G)_e$ qui n'est pas dans H est compacte.

Troisième étape. Il s'agit maintenant d'étendre les résultats aux groupes G non connexes. Remarquons que pour les cas de notre liste, la non-connexité est limitée puisque $|G/G_e| \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cas 1, 7, 8, 9,10). Il est clair que $L^2_d(G/H_e)$ est l'induite de $L^2_d(G_e/H_e)$ de G_e à G. On a donc une description de $L^2_d(G/H_e)$ comme somme directe de modules $\mathrm{Ind}_{G_e}^G(A_\mathfrak{q}(\pi_{L_e}))$. D'autre part, on a aussi $|L/L_e| \leq 2$, et si π_{L_e} est un caractère unitaire de L_e, alors $\mathrm{Ind}_{L_e}^L(\pi_{L_e})$ est somme de caractères π_L de L. Par [KV95], on a $\mathrm{Ind}_{G_e}^G(A_\mathfrak{q}(\pi_{L_e})) = \bigoplus A_\mathfrak{q}(\pi_L)$ où la somme est sur les caractères π_L apparaissant dans $\mathrm{Ind}_{L_e}^L(\pi_{L_e})$. La description du K-type minimal des $A_\mathfrak{q}(\pi_L)$ de plus haut poids $\pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ est similaire. On en déduit que la description du spectre discret $L^2_d(G/H_e)$ similaire à celle de $L^2_d(G/H_e)$, avec la même définition de l'espace des paramètres.

Quatrième étape. On passe maintenant de G/H_e avec G dans notre liste et non connexe à G/H avec H simplement soumis à $G_0^\sigma \subset H \subset G^\sigma$. La réduction se fait comme dans la première étape.

3. Paramètres d'Arthur des séries discrètes de $\mathscr{X}$

Dans cette section, on donne la forme générale des paramètres d'Arthur (de bonne parité) des groupes classiques, puis pour chaque série discrète π d'un espace symétrique $\mathscr{X}$ de la liste, nous donnons un paramètre d'Arthur explicite ψ_π tel que le paquet d'Arthur attaché à ce paramètre contienne π. On note $R[a]$ la représentation irréductible algébrique de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ de dimension a.

3.1. *Le groupe de Weil.* Le groupe de Weil $W_{\mathbb{R}}$ est engendré par son sous-groupe $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ et un élément j, avec les relations

$$jzj^{-1} = \bar{z},\ (z \in \mathbb{C}^\times), \quad j^2 = -1. \tag{3.1}$$

On note $\mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}}$ le caractère trivial de $W_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$ la caractère quadratique, trivial sur $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ et valant -1 en l'élément j.

3.2. *Paramètres d'Arthur de bonne parité.* Ce qui suit est tiré de [MR20] auquel nous renvoyons le lecteur pour plus de détails.

3.2.1. $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Dans ce paragraphe, $G = \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, dont le L-groupe est $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$. Un paramètre d'Arthur $\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ peut se voir comme une représentation de dimension n de $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ et cette représentation est semi-simple. On peut donc la décomposer en somme directe de représentations irréductibles ψ_i, chaque ψ_i étant un produit tensoriel extérieur d'une représentation irréductible de $W_{\mathbb{R}}$, disons ϕ_i, et d'une représentation $R[a_i]$ de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{R}}$ sont de dimension 1 où 2, et rappelons que la restriction d'un paramètre d'Arthur à $W_{\mathbb{R}}$ est un paramètre de Langlands tempéré, ce doit donc être le cas de ces irréductibles. Celles de dimension 2 sont notées $\delta(s_1,s_2)$. Elles sont paramétrées par $s_1,\ s_2 \in \mathbb{C}$, avec $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $s_1 + s_2 \in i\mathbb{R}$. Par la correspondance de Langlands, on associe à $\delta(s_1,s_2)$ une série discrète de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ que l'on note aussi $\delta(s_1,s_2)$ et dont le caractère infinitésimal, identifié de la manière usuelle à un ensemble de deux nombres complexes, est $\{s_1,s_2\}$. Les représentations irréductibles de dimension 1 de $W_{\mathbb{R}}$ sont notées $\eta(\epsilon,s)$, avec $\epsilon \in \{0,1\}$ et $s \in i\mathbb{R}$. Elles sont associées par la correspondance de Langlands aux caractères unitaires $x \mapsto \mathbf{sgn}(x)^\epsilon |x|^s$ de $\mathbf{GL}(1,\mathbb{R})$. Ainsi, on décompose un paramètre d'Arthur ψ en une somme directe

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{m} \left(\delta(s_{i,1},s_{i,2}) \boxtimes R[a_i]\right) \oplus \bigoplus_{j=1}^{u} \left(\eta(\epsilon_j,s_j) \boxtimes R[a'_j]\right).$$

avec

$$2\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{u} a'_j = n. \tag{3.2}$$

Le paquet d'Arthur associé à ψ est un singleton, consistant en une représentation unitaire irréductible notée $\pi^{\mathbf{GL}}(\psi)$ de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Cette représentation peut se décrire de la manière suivante. La donnée de la série discrète $\delta(s_{i,1},s_{i,2})$ et de l'entier a_i détermine une représentation $\mathbf{Speh}(\delta(s_{i,1},s_{i,2}),a_i)$ de $\mathbf{GL}(2a_i,\mathbb{R})$ et le caractère $\eta(\epsilon_j,s_j)$ de $\mathbb{R}^\times$ donne par composition avec le déterminant un caractère, encore noté $\eta(\epsilon_j,s_j)$, de $\mathbf{GL}(a'_j,\mathbb{R})$. Soit $P = P_{2a_1,\ldots,2a_m,a'_1,\ldots,a'_u}$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ associé à la partition (3.2) de n. Son facteur de Levi standard est $M = \left(\prod_{i=1}^m \mathbf{GL}(2a_i,\mathbb{R})\right) \times \left(\prod_{j=1}^u \mathbf{GL}(a'_j,\mathbb{R})\right)$. La représentation $\pi^{\mathbf{GL}}(\psi)$ est alors l'induite parabolique (irréductible) de P à G de la représentation

$$\left(\boxtimes_{i=1}^m \mathbf{Speh}(\delta(s_{i,1},s_{i,2}),a_i)\right) \boxtimes \left(\boxtimes_{j=1}^u \eta(\epsilon_j,s_j)\right).$$

Le paramètre de Langlands de $\pi^{\mathbf{GL}}(\psi)$ est ϕ_ψ, où ϕ_ψ est le paramètre de Langlands attaché au paramètre d'Arthur ψ (*cf.* [Art84], p. 10).

3.2.2. *Groupes unitaires.* Dans ce paragraphe, G est un groupe unitaire de rang n. Son L-groupe est donc $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$. Considérons un paramètre d'Arthur pour G :

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$$

que l'on suppose de bonne parité (*cf.* [MR19], Déf. 2.1). Cela signifie que la restriction de ψ à $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ (encore notée ψ) est de la forme

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{R} (\chi_{m_i} \boxtimes R[a_i]) \tag{3.3}$$

où $\sum_{i=1}^R a_i = n$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\chi_{m_i}(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{m_i}{2}}$, avec la condition de parité $m_i + a_i \equiv n \mod 2$. On suppose, ce qui est loisible, que les m_i sont rangés dans l'ordre décroissant : $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_R$. Notons qu'il n'existe, à conjugaison par $G^\vee = \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ près, qu'une seule manière d'étendre (3.3) à $W_{\mathbb{R}}$.

3.2.3. *Groupes symplectiques et orthogonaux.* Si $G = \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R})$, ${}^LG = \mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$. Si $G = \mathbf{SO}(p, q)$, $p + q = 2n + 1$, ${}^LG = \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$. Notons

$$\mathbf{Std}_G : {}^LG \longrightarrow \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$$

la représentation standard de ${}^LG$, avec respectivement $N = 2n + 1$ et $N = 2n$. Si $G = \mathbf{SO}(p, q)$ avec $p + q = 2n$, on a alors ${}^LG = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$, l'action de $W_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ étant triviale si $n - p \equiv 0 \mod 2$ et si $n - p \equiv 1 \mod 2$, cette action se factorise par $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, l'élément non trivial agissant par un automorphisme extérieur, réalisé par l'action adjointe d'un élément de $\mathbf{O}(2n, \mathbb{C}) \setminus \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$, en préservant un épinglage. On a donc dans les deux cas un morphisme

$$\zeta_{SO} : {}^LG = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{O}(2n, \mathbb{C}), \tag{3.4}$$

et l'on définit la représentation standard de ${}^LG$ en composant ce morphisme ζ_{SO} avec une réalisation de $\mathbf{O}(2n, \mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}(2n, \mathbb{C})$: $\mathbf{Std}_G : {}^LG \longrightarrow \mathbf{GL}(2n, \mathbb{C})$. On pose dans ce cas $N = 2n$.

Soit G l'un de ces groupes classiques. Composons un paramètre d'Arthur pour G,

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$$

avec la représentation standard de ${}^LG$, $\mathbf{Std}_G : {}^LG \longrightarrow \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$. Notons encore ψ cette composition. On dit que ψ est de bonne parité si ψ se décompose sous la forme :

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{R} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[a_i] \right) \oplus \bigoplus_{j=1}^{S} \left(\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}^{b_j} \boxtimes R[c_j] \right), \tag{3.5}$$

où $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $2\sum_{i=1}^{R} a_i + \sum_{j=1}^{S} c_j = N$, avec selon le type de groupe, les conditions de parité suivantes :

- $G = \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R}) : m_i + a_i \equiv 1 \mod 2\,(i = 1, \dots, R)$, $c_j \equiv 1 \mod 2$, $(j = 1, \dots, S)$,

$\sum_{j=1}^{s} b_j \equiv f \mod 2$, où f est le nombre de a_i impairs.

- $G = \mathbf{SO}(p, q)$, $p + q = 2n + 1 : m_i + a_i \equiv 0 \mod 2\,(i = 1, \dots, R)$, $c_j \equiv 0 \mod 2$, $(j = 1, \dots, S)$.
- $G = \mathbf{SO}(p, q)$, $p + q = 2n : m_i + a_i \equiv 1 \mod 2\,(i = 1, \dots, R)$, $c_j \equiv 1 \mod 2$, $(j = 1, \dots, S)$.

$\sum_{j=1}^{s} b_j \equiv f + n - p \mod 2$, où f est le nombre de a_i impairs.

3.3. *Séries discrètes de $\mathscr{X}$ et leur paramètre.* Reprenons les notations des sections 2.1 et 2.4 relatives à un espace symétrique $\mathscr{X}$ admettant des séries discrètes. On a donc un sous-espace de Cartan compact $\mathfrak{t}_0$ et un c-Levi $L = N_G(\mathfrak{t}_0)$ dont le complexifié est $\mathbf{L} = N_{\mathbf{G}}(\mathfrak{t}_0)$. Les séries discrètes de $\mathscr{X}$ sont des modules $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ où $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre parabolique θ-stable de $\mathfrak{g}$ et π_L une représentation de L vérifiant les hypothèses de la définition 2.5. Lorsque G est un groupe classique (c'est-à-dire dans cet article, un groupe général linéaire, un groupe unitaire, un groupe symplectique ou un groupe spécial orthogonal), les résultats de [MR20] et [MR19] montrent que l'on a le résultat suivant, déjà bien connu dans le cas des groupes linéaires généraux.

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{L}$ le sous-groupe de Levi dual de $\mathbf{L}$ dans $G^\vee$. Soit π une série discrète de $\mathscr{X}$. Alors π est contenue dans un paquet d'Arthur de paramètre*

$$\psi_\pi : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$$

tel que la restriction de ψ_π à $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ soit à conjugaison près le morphisme de Jacobson-Morozov associé à l'orbite unipotente régulière de $\mathcal{L}$.

Dans chaque cas de la liste, les sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ et $\mathcal{L}$ sont donnés dans la section 4. La forme réelle explicite L de $\mathbf{L}$ est plus délicate à déterminer. Les calculs, un peu fastidieux, sont données dans la section 9 et les résultats sont résumés dans la table 2. La restriction de ψ_π à $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ est donc déterminée (à conjugaison près). On procède alors cas par cas.

3.4. *Le cas 1 :* $\mathscr{X} = \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R})$, $2p \leq n$. Nous allons montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2. *Soit π une série discrète de $\mathscr{X}$. Alors il existe des séries discrètes $(\delta_i)_{i=1,\dots,p}$ de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ de caractère central trivial et toutes distinctes, telles que la représentation π soit obtenue par l'induction parabolique à partir de la représentation $(\bigotimes_{i=1}^p \delta_i) \otimes \mathbf{Triv}_{\mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})}$ d'un sous-groupe de Levi standard $M = \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$ de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.*

Avant de démontrer cette proposition, on en tire le corollaire suivant, conséquence du fait que pour $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, le paramètre d'Arthur est facilement obtenu à partir du paramètre de Langlands (voir section 3.2.1).

COROLLAIRE 3.3. *Le paramètre d'Arthur d'une série discrète π de $\mathscr{X}$ réalisée par induction parabolique comme dans la proposition est*

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{p} (\delta_i \boxtimes R[1]) \oplus (\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[n-2p]),$$

où les δ_i, $i = 1,\dots,p$ sont ici les représentations de dimension deux de $W_\mathbb{R}$ qui paramètrent les séries discrètes de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ notées de la même façon. De plus, ces séries discrètes sont de caractère central trivial et les δ_i sont donc à valeurs dans $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$ c'est-à-dire (avec les notations de 3.2.1), $\delta_i = \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$, avec les m_i entiers impairs.

<u>*Démonstration de la proposition*</u>. On sait par la proposition 3.1 ci-dessus, et le fait que $\mathcal{L} \simeq \mathbf{GL}(1,\mathbb{C})^{2p} \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{C})$ que le paramètre d'Arthur ψ_π ci-dessus a pour restriction à $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ le morphisme de Jacobson-Morozov correspondant à l'élément unipotent régulier de $\mathcal{L}$. Ainsi ψ_π est nécessairement de la forme :

$$\psi_\pi = (\phi_d \boxtimes R[1]) \oplus (\eta(\epsilon,s) \boxtimes R[n-2p]),$$

où $\epsilon \in \{0,1\}$ et où ϕ_d est un morphisme tempéré de $W_\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbf{GL}(2p,\mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$. On commence par montrer que ce morphisme tempéré est en fait une somme de séries discrètes.

Ici, exceptionnellement on utilise l'induction cohomologique comme Vogan l'a normalisée dans [Vog86]. L'avantage majeur est que cette induction cohomologique commute à l'induction parabolique ([Vog86], Theorem 17.6). On sait a priori que $\pi = \widetilde{A}_\mathfrak{q}(\tilde{\pi}_L)$, les ˜ étant mis ici pour distinguer cette induction cohomologique normalisée de celle utilisée précédemment. Ici $L \simeq (\mathbb{C}^\times)^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$ (voir section 9). Via cet isomorphisme, le caractère unitaire $\tilde{\pi}_L$ de L est donné par des caractères unitaires χ_i, $i = 1,\dots,p$ de $\mathbb{C}^\times$ et d'un caractère unitaire η de $\mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$. La condition (i) de la définition 2.5 implique que η est le caractère trivial ou le signe du déterminant et que chaque caractère χ_i est de la forme $\chi_i(z) = (z/\overline{z})^{m_i/2}$ où les m_i sont entiers.

La condition de fair range sur l'induite cohomologique $\pi = \widetilde{A}_\mathfrak{q}(\tilde{\pi}_L)$ s'exprime (pour un bon choix de $\mathfrak{q}$, mais pour $G = \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ tous les choix sont conjugués sous K, et ce choix n'a donc aucune conséquence) par $m_1 > \cdots > m_p > 0$. En notant $\delta_i = \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ (notations de 3.2.1), la commutation de l'induction cohomologique et de l'induction parabolique dit que π est obtenu par induction parabolique à partir de la représentation $(\bigotimes_{i=1}^p \delta_i) \otimes (\mathbf{sgn}(\det))^\epsilon$ du sous-groupe de Levi standard $M = \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$ de G. Ici $\epsilon \in \{0,1\}$. On veut maintenant montrer pour terminer la démonstration que les m_i sont tous impairs et que $\epsilon = 0$. Le caractère infinitésimal est dans un système de coordonnées bien choisi

$$\left(\frac{m_1}{2},\dots,\frac{m_p}{2},\frac{n-2p-1}{2},\dots,-\frac{n-2p-1}{2},-\frac{m_p}{2}\dots,-\frac{m_1}{2}\right).$$

Le K-type minimal de π est donné par Vogan en [Vog86], 6.5 (a) et (6.12) et l'on voit que ce K-type minimal est la représentation de $K = \mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ de plus haut poids

$$(2m_1+1,\cdots,2m_p+1,\underbrace{0,\cdots,0}_{[n/2]-p})_z,$$

où z est relié à ϵ de la façon suivante : si n est impair z se calcule avec le caractère central de π et si n est pair $z = 0$ si et seulement si $\epsilon = 0$. On renvoie à [Vog86] pour les notations ci-dessus concernant les représentations des groupes orthogonaux.

On exploite maintenant le fait que π est une série discrète de $\mathscr{X}$ et donc que son K-type minimal a des invariants sous $K \cap H$ (condition (iii) de la définition 2.5) c'est-à-dire sous $\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(n-p)$. On utilise d'abord la condition (i) de [Sch83] page 138, qui donne que les m_i sont tous de même parité. Le vecteur de plus haut poids doit être invariant sous $\mathbf{O}(1)^p \times \mathbf{O}(n-2p)$ ce qui force d'abord les m_i+1 à être pairs. Ensuite si n est pair et $n > 2p$, par définition de z, l'invariance sous $\mathbf{O}(n-2p)$ force $z=0$. Si n est impair, le caractère central est précisément z et doit être trivial, d'où encore $z=0$. Ainsi on a bien montré que les m_i sont des entiers impairs et les δ_i sont des séries discrètes de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ de caractère central trivial. On a aussi montré que $\epsilon = 0$ si n est pair et si n est impair cela est forcé par le calcul du caractère central. $\square$

Remarque 3.4. Il est aussi possible de donner la fin de la démonstration sans recourir à l'induction cohomologique subtilement normalisée de [Vog86]. On écrit comme dans les autres cas $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ avec l'induction cohomologique usuelle, et on traduit la condition $(iiib)$ de la proposition 2.6 en une condition sur π_L en calculant explicitement le caractère $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})$ de $L \cap K \cap H$. Ceci fait apparaître un facteur $\mathbf{sgn}(\det)^p$ sur le facteur $\mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$ qui disparait lorqu'on prend en compte la non commutativité de l'induction parabolique et de l'induction cohomologique pour calculer le paramètre de Langlands de π.

Ecrivons de manière explicite le paramètre ψ_π obtenu :

$$\psi_\pi = \bigoplus \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[n-2p]\right). \tag{3.6}$$

avec les m_i entiers impairs distincts.

Remarque 3.5. Il est vraisemblable que les paramètres similaires mais avec des m_i pairs ou bien une partie unipotente $\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[n-2p]$ pourraient apparaître dans le cas des conjectures généralisées avec un caractère χ de H/H_e non trivial.

3.5. *Le cas 2 :* $\mathscr{X} = \mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$, $n = p+q$. Dans ce cas, le groupe L est un tore compact, et les séries discrètes de $\mathscr{X}$ sont des séries discrètes de $G = \mathbf{U}(p,q)$. La restriction des paramètres ψ_π à $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ est donc triviale et avec les notations de (3.3),

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{n} (\chi_{m_i} \boxtimes R[1]) \tag{3.7}$$

où $m_i \in \mathbb{Z}$, $\chi_{m_i}(z) = \left(\frac{z}{\bar z}\right)^{\frac{m_i}{2}}$, avec la condition de parité $m_i \equiv n-1 \mod 2$.

3.6. *Le cas 3 :* $\mathscr{X} = \mathbf{U}(p,q)/\mathbf{U}(r,s) \times \mathbf{U}(r',s')$, $r \leq r'$, $s \leq s'$. On a ici

$$L = \mathbf{U}(1)^{2(r+s)} \times \mathbf{U}(r'-r, s'-s).$$

Si $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{2(r+s)} (\chi_{m_i} \boxtimes R[1]) \oplus (\chi_{m_0} \boxtimes R[n-2(r+s)])$$

où les χ_i sont comme dans (3.3), pour certains entiers m_i non nuls.

Voyons maintenant ce que donne la condition (i) de la définition 2.5. Comme $L \cap K$ est ici un produit de groupes unitaires, donc connexes, Le caractère π_L doit être trivial sur $L \cap H$.

Le groupe $L \cap H$ contient le facteur $\mathbf{U}(p-2r, q-2s)$. La restriction de π_L à ce facteur doit donc être triviale, ce qui implique d'après [MR19] que $m_0 = 0$. La forme des caractères unitaires de L triviaux sur $L \cap H$ (voir section 9, le calcul en rang un du cas 3) montre alors que les m_i se regroupent par paires m_i, $-m_i$ et ils sont entiers, de la parité de $n-1$. Pour conclure, le paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{r+s} ((\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}) \boxtimes R[1]) \oplus (\chi_0 \boxtimes R[n-2(r+s)]) \tag{3.8}$$

où les m_i sont entiers, de la parité de $n-1$.

3.7. *Le cas 4 :* $\mathscr{X} = \mathbf{U}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. On a ici $L = (\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1))^n$. C'est donc un tore compact. Si $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{2n} (\chi_{m_i} \boxtimes R[1])$$

où les χ_i sont comme dans (3.3), pour certains entiers m_i non nuls. Le groupe $L \cap H$ est isomorphe à $\mathbf{U}(1)^n$ ou chaque facteur $\mathbf{U}(1)$ se plonge dans le facteur $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$ comme expliqué dans la section 9. Comme dans le cas précédent , la condition (i) nous dit alors que les m_i se regroupent par paires m_i, $-m_i$ et ils sont entiers, de la parité de $n-1$. On a donc finalement

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{n} ((\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}) \boxtimes R[1]) \tag{3.9}$$

avec les m_i entiers impairs.

3.8. *Le cas 5 :* $\mathbf{U}(2p,2q)/\mathbf{Sp}(p,q)$. On a ici $L = \mathbf{U}(2,0)^p \times \mathbf{U}(0,2)^q$. Si $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{n} (\chi_{m_i} \boxtimes R[2]) \tag{3.10}$$

et les m_i sont ici pairs car $n = 2p + 2q$ est pair.

3.9. *Le cas 6 :* $\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$. On a ici $L = \mathbf{U}(1,1)^n$. Si $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{n} (\chi_{m_i} \boxtimes R[2]) \tag{3.11}$$

et les m_i sont ici pairs car $2n$ est pair.

3.10. *Le cas 7 :* $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$, $p+q = 2n+1$, $r+r' = p$, $s+s' = q$, $r \leq r'$, $s \leq s'$. On a ici $L = \mathbf{U}(1,0)^r \times \mathbf{U}(0,1)^s \times \mathbf{SO}(p-2r, q-2s)$. Si $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right) \oplus \left(\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}^{\epsilon} \boxtimes R[2(n-r-s)]\right).$$

où les m_i sont impairs et $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Montrons que de plus $\epsilon = 0$.

Notons $L_0 = \mathbf{SO}(p-2r, q-2s)$ le facteur spécial orthogonal de L. Notons η_{SO} le caractère non trivial d'un groupe orthogonal $\mathbf{SO}(k,\ell)$ non connexe, c'est-à-dire avec $k\ell \neq 0$ (si $k\ell = 0$, $\mathbf{SO}(k,\ell)$ est connexe et η_{SO} est alors par convention le caractère trivial). Utilisons maintenant la condition (iii) (ou de manière équivalente $(iiib)$) de la définition 2.5. On peut conclure de deux manières. Il découle de [MR20] que l'élément $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est de restriction η_{SO}^{ϵ} au facteur L_0. La condition $(iiib)$ nous dit que l'on veut que $\pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ soit trivial sur $L \cap H \cap K$. Or un calcul explicite de $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ (qui nécessite d'introduire beaucoup de notations, en particulier des systèmes de racines explicites, et qui de fait est le calcul fait dans l'appendice de [MR20] pour prouver l'assertion précédente) montre que $L \cap K \cap H$ agit trivialement sur cet espace. Ainsi la restriction de π_L à $L \cap H \cap K$ doit être triviale, et ceci impose $\epsilon = 0$. L'autre manière consiste à utiliser [SV80], Thm. 4.23, qui donne le lien entre paramètre de Langlands et le K-type minimal de plus haut poids $\pi_L \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ du module π. La forme de ce paramètre de Langlands imposé par la condition (iii) montre alors directement que l'on doit avoir $\epsilon = 0$ dans le paramètre d'Arthur ψ_π ci-dessus. Finalement, on a obtenu :

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}} \boxtimes R[2(n-r-s)]\right). \tag{3.12}$$

3.11. *Le cas 8 :* $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s)\times\mathbf{SO}(r',s')$, $p+q=2n$, $r+r'=p$, $s+s'=q$, $r\le r'$, $s\le s'$. On a ici $L=\mathbf{U}(1,0)^r\times\mathbf{U}(0,1)^s\times\mathbf{SO}(p-2r,q-2s)$. Si $\pi=A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ est de la forme

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{r+s}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[1]\right)\oplus(\eta_1\boxtimes R[2(n-r-s)-1])\oplus(\eta_2\boxtimes R[1]) \tag{3.13}$$

où les m_i sont pairs. Le même argument utilisant la condition (iii) ou $(iiib)$ de la définition 2.5 donne ici $\eta_1,\eta_2\in\{\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}},\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}\}$ avec $\eta_1\eta_2=\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}$ si p et q sont de la parité de n, $\eta_1\eta_2=\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}$ si p et q sont de la parité de $n-1$.

3.12. *Le cas 9 :* $\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$. On a ici $L=\mathbf{U}(2,0)^{p/2}\times\mathbf{U}(0,2)^{q/2}$ si p et q sont pairs et $\mathbf{U}(2,0)^{p/2}\times\mathbf{U}(0,2)^{q-1/2}\times\mathbf{SO}(0,2)$ si p est pair et q impair. Si $\pi=A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right) \tag{3.14}$$

si $n=p+q$ est pair et

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus\left(\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]) \tag{3.15}$$

si $n=p+q$ est impair. Dans les deux cas, les m_i sont impairs.

3.13. *Le cas 10 :* $\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. On a ici $L=\mathbf{U}(1,1)^{n/2}$ si n est pair et $L=\mathbf{U}(1,1)^{(n-1)/2}\times\mathbf{SO}(1,1)$ si n est impair. Si $\pi=A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right) \tag{3.16}$$

si n est pair et

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus\left(\mathbf{sgn}^\epsilon_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]\right)\oplus\left(\mathbf{sgn}^\epsilon_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]\right)$$

si n est impair, avec $\epsilon\in\{0,1\}$. Dans les deux cas les m_i sont impairs. Le même argument utilisant la condition $(iiib)$ de la définition 2.5 que dans le cas 7 donne ici $\epsilon=0$. D'où finalement :

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1])\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]) \tag{3.17}$$

3.14. *Le cas 11 :* $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{R})\times\mathbf{Sp}(2(n-p),\mathbb{R})$, $2p\le n$. Soit $\pi=A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ une série discrète de $\mathscr{X}$. Comme ici $L=\mathbf{U}(1,1)^p\times\mathbf{Sp}(2(n-2p),\mathbb{R})$, le paramètre ψ_π est de la forme :

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{p}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[2n-4p+1]), \tag{3.18}$$

où les m_i sont impairs.

3.15. *Le cas 12 :* $\mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$. Soit $\pi=A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ une série discrète de $\mathscr{X}$. Comme on a ici $L=\mathbf{U}(2)^n$, le paramètre ψ_π est de la forme :

$$\psi_\pi=\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]) \tag{3.19}$$

où les m_i sont impairs.

3.16. *Le cas 13 :* $\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Dans ce cas, le groupe L est un tore compact, et les séries discrètes de $\mathscr{X}$ sont des séries discrètes de $G = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Si $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est une série discrète de $\mathscr{X}$, alors son paramètre ψ_π est de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right) \oplus (\mathbf{sgn}^n_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[1]) \tag{3.20}$$

où les m_i sont pairs.

4. Conjectures de Sakellaridis et Venkatesh : première réduction

Soient G, H, $\mathscr{X}$, etc. comme dans la section 2.1. Comme expliqué dans l'introduction Sakellaridis et Venkatesh introduisent dans [SV17] un formalisme du L-groupe associé à l'espace symétrique $\mathscr{X}$. Ces constructions sont précisées par Knop et Schalke dans [KS17]. Donnons des précisions sur leurs constructions. Ils associent d'abord à $\mathscr{X}$ un sous-groupe parabolique noté $\mathbf{P}(\mathscr{X})$ de $\mathbf{G}$ et un facteur de Levi $\mathbf{L}(\mathscr{X})$ de celui-ci. Le sous-groupe $\mathbf{P}(\mathscr{X})$ est un sous-groupe parabolique σ-déployé minimal de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L}(\mathscr{X}) = \mathbf{P}(\mathscr{X}) \cap \sigma(\mathbf{P}(\mathscr{X}))$. Soit $\mathbf{A}$ un tore maximal de $\mathbf{L}(\mathscr{X})$ et posons $\mathbf{A}_\mathscr{X} = \mathbf{L}(\mathscr{X})/\mathbf{L}(\mathscr{X}) \cap \mathbf{H} = \mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathbf{H}$. C'est un tore d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_\mathscr{X}$. Il résulte aussi des constructions que les algèbres de Lie $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}_\mathscr{X}$ sont isomorphes. Ainsi le rang de $\mathscr{X}$ est égal à la dimension de $\mathbf{A}_\mathscr{X}$.

Notons $G^\vee$ le groupe dual de $\mathbf{G}$. On fixe une réalisation ${}^LG = G^\vee \ltimes W_\mathbb{R}$ du L-groupe de $\mathbf{G}$, l'action de $W_\mathbb{R}$ sur $G^\vee$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ et préserve un épinglage $(B^\vee, T^\vee, \{\mathcal{X}_\alpha\}_\alpha)$ de $G^\vee$. On fixe aussi un épinglage de $\mathbf{G}$, ce qui nous permet d'identifier racines simples de $\mathbf{G}$ et coracines de $G^\vee$. Le sous-groupe de Levi $\mathbf{L}(\mathscr{X})$ de $\mathbf{G}$ du paragraphe précédent détermine donc via la dualité et le choix des épinglages, un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ de $G^\vee$. On note

$$\eta_\mathscr{X} : \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} \subset G^\vee \tag{4.1}$$

un morphisme de Jacobson-Morosov associé à l'orbite unipotente principale de $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$.

Supposons que $\mathscr{X}$ vérifie le critère d'existence de séries discrètes du théorème 2.2

Proposition 4.1. *Les groupes* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{L}(\mathscr{X})$ *(identifiés à leur groupes de points complexes) sont conjugués sous* $\mathbf{G}$. *Dualement, les groupes* $\mathcal{L}$ *et* $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ *sont donc conjugués dans* $G^\vee$.

Ceci résulte de la remarque 2.1.1 de [SV17].

Une des conditions portant sur ${}^LG_\mathscr{X}$ est que le rang de $G^\vee_\mathscr{X}$ est égal à celui de l'espace symétrique $\mathscr{X}$. D'autre part, si $G^\vee_\mathscr{X}$ est déterminé, alors ${}^LG_\mathscr{X}$ l'est aussi par le fait que nous voulons l'existence de paramètres de Langlands *discrets* $\phi_d : W_\mathbb{R} \to {}^LG_\mathscr{X}$. En effet ${}^LG_\mathscr{X}$ est alors aussi le L-groupe d'un groupe quasi-déployé admettant des séries discrètes. Or pour un groupe réductif complexe connexe, il n'y a qu'une seule classe de forme réelle quasi-déployée ayant des séries discrètes, celle qui est une forme intérieure de la forme compacte. La structure de produit semi-direct de ${}^LG_\mathscr{X}$ est alors fixée par cette condition. Or $G^\vee_\mathscr{X}$ a été déterminé par Knop et Schalke. Ceci fixe donc a priori ${}^LG_\mathscr{X}$. Comme conséquence de la proposition 3.1 et de la proposition ci-dessus, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *Soit* π *une série discrète de* $\mathscr{X}$. *Alors* π *est contenue dans un paquet d'Arthur de paramètre* ψ_π *tels que la restriction de* ψ *à* $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ *soit à conjugaison près le morphisme de Jacobson-Morozov* $\eta_\mathscr{X}$ *associé à l'orbite unipotente régulière de* $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$.

Ce corollaire constitue une étape importante dans la vérification de la conjecture, puisqu'il dit que la restriction de ψ_π à $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ est bien obtenue via le morphisme (4.1).

Dans la table 1, on donne dans chacun des 13 cas de la liste donnée dans l'introduction :
— en troisième colonne, les conditions sur les variables définissant $\mathscr{X}$,
— en quatrième colonne, l'algèbre de Lie $\check{\mathfrak{g}}_X$ du groupe $G^\vee_\mathscr{X}$,
— en cinquième colonne, l'algèbre de Lie $\check{\mathfrak{l}}_X$ du groupe $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$.
— en sixième colonne le groupe ${}^LG_\mathscr{X}$ (sauf dans le cas 3, n impair, qui fera l'objet d'une discussion spéciale).

Les colonnes 4 et 5 sont issues de la table 3 de [KS17], le L-groupe ${}^L G_{\mathscr{X}}$ est déterminé par les considérations ci-dessus.

Remarque 4.3. L'algèbre de Lie $\check{\mathfrak{l}}_X$ détermine le groupe des points complexes $\mathbf{L}$ du c-Levi L de G introduit dans la section 2.4. En effet, le groupe $\mathbf{L}_{\mathscr{X}}^{\vee}$ est dual du groupe $\mathbf{L}(\mathscr{X})$, ce dernier étant conjugué dans $\mathbf{G}$ à $\mathbf{L}$ (remarque 4.1). L'inspection de la liste montre que $\check{\mathfrak{l}}_X$ est toujours un produit de $\mathfrak{gl}$ de rang un ou deux et d'une algèbre de Lie classique de même type que $\check{\mathfrak{g}}$.

5. Plongements de L-groupes

Dans cette section, nous construisons des L-morphismes qui nous seront utiles dans la suite de cet article, ou éventuellement dans un article ultérieur portant sur la généralisation des conjectures de Sakellaridis et Venkatesh lorsque l'on considère un caractère χ de H/H_e non trivial.

5.1. *Plongements* $\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L\mathbf{U}_n$ *et* $\mathbf{SO}(2p,\mathbb{C})\ltimes_p W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L\mathbf{U}_n$. On note ${}^L\mathbf{U}_n = \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})\ltimes W_{\mathbb{R}}$ le L-groupe d'un groupe unitaire de rang n. Donnons une réalisation explicite de ce L-groupe. Il s'agit de définir l'action de $W_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Cette action se factorise par la projection de $W_{\mathbb{R}}$ sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ et l'on choisit l'action de l'élément non trivial de ce groupe de Galois préservant l'épinglage usuel, à savoir $g\mapsto w_n({}^tg^{-1})w_n^{-1}$, où $w_n = \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots & 1 \\ \cdots & & -1 & \\ & \iddots & & \\ & \cdots & & \\ (-1)^{n-1} & \cdots & & \end{pmatrix}$. Remarquons que ${}^tw_n = w_n^{-1} = w_n$ si n est impair et ${}^tw_n = w_n^{-1} = -w_n$ si n est pair.

De même, donnons une réalisation explicite du L-groupe d'un groupe spécial orthogonal pair ayant une série discrète, c'est-à-dire un $\mathbf{SO}(p,q)$, $p+q=2n$, p et q pairs. Notons $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C})\ltimes_n W_{\mathbb{R}}$ ce L-groupe. Cette action se factorise par la projection de $W_{\mathbb{R}}$ sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, l'action de l'élément non trivial de ce groupe de Galois étant $g\mapsto TgT^{-1}$, où $T=T_{2n}$ est la matrice diagonale ayant des coefficients 1 et -1 qui alternent. Cette conjugaison est un automorphisme intérieur si n est pair, et extérieur si n est impair. Remarquons que cette construction donne naturellement un morphisme

$$\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C})\ltimes_n W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{O}(2n,\mathbb{C}). \tag{5.1}$$

Pour tout entier m, et tout nombre complexe z, on a posé $\chi_m(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{m}{2}} = z^m(z\bar{z})^{-\frac{m}{2}}$.

Proposition 5.1. *Fixons des entiers n, p, a, a' et b tels que $n\geq 2p$, $b\equiv 0 \mod 2$, $a\equiv n \mod 2$ et $a'\equiv n-1 \mod 2$.*

(i) Il existe une inclusion de L-groupes ξ_{Sp} : $\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L\mathbf{U}_n$ dont la restriction à $W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^\times$ est donnée à conjugaison près par : $z\mapsto (\underbrace{\chi_a(z),\cdots,\chi_a(z)}_{2p},\underbrace{\chi_b(z),\cdots,\chi_b(z)}_{n-2p})$.

(ii) Il existe une inclusion de L-groupes ξ_{SO} : $\mathbf{SO}(2p,\mathbb{C})\ltimes_p W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L\mathbf{U}_n$ dont la restriction à $W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^\times$ est donnée à conjugaison près par : $z\mapsto (\underbrace{\chi_{a'}(z),\cdots,\chi_{a'}(z)}_{2p},\underbrace{\chi_b(z),\cdots,\chi_b(z)}_{n-2p})$.

Démonstration. Le (i) est classique, on remarque que la matrice w_{2p} qui définit la réalisation de ${}^L\mathbf{U}_{2p}$ donnée ci-dessus est antisymétrique. L'automorphisme $g\mapsto w_{2p}{}^tg^{-1}w_{2p}^{-1}$ de $\mathbf{GL}(2p,\mathbb{C})$ a donc pour groupe des points fixes un groupe symplectique, que nous choisissons ici comme réalisation du groupe $\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})$. On prolonge cette inclusion de $\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}(2p,\mathbb{C})$ par l'identité sur le facteur $W_{\mathbb{R}}$ pour obtenir une injection $\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C})\hookrightarrow {}^L\mathbf{U}_{2p}$. Ensuite, on envoie ${}^L\mathbf{U}_{2p}$ dans ${}^L(\mathbf{U}_{2p}\times\mathbf{U}_{n-2p})$ naturellement sur le premier facteur puis ${}^L(\mathbf{U}_{2p}\times\mathbf{U}_{n-2p})$ dans ${}^L\mathbf{U}_n$ en utilisant les entiers a et b (*cf.* [Wal10]).

Pour (ii), commençons par le cas où n est impair. On réalise $\mathbf{O}(2p,\mathbb{C})$ comme un sous-groupe de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ de la manière suivante : considérons la matrice $J_{n,p} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & w_p \\ \hline 0 & I_{n-2p} & 0 \\ \hline {}^tw_p & 0 & 0 \end{array}\right)$ qui est symétrique dans $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$

et réalisons $\mathbf{O}(2p,\mathbb{C})$ comme le sous-groupe des matrices g de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ de la forme $g = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & B \\ \hline 0 & I_{n-2p} & 0 \\ \hline C & 0 & D \end{array}\right)$ telles que $g = J_{n,p}{}^t g^{-1} J_{n,p}^{-1}$. Comme $w_n = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & w_p \\ \hline 0 & (-1)^p w_{n-2p} & 0 \\ \hline {}^t w_p & 0 & 0 \end{array}\right)$, il est clair que $\mathbf{O}(2p,\mathbb{C})$ ainsi réalisé est inclu dans le groupe des points fixes de l'automorphisme $g \mapsto w_n{}^t g^{-1} w_n^{-1}$ de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. En particulier $\mathbf{O}(2p,\mathbb{C})$ commute à ${}^L\mathbf{U}_{n-2p} = \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ réalisé dans le bloc central, et l'on a donc une inclusion

$$\iota : \mathbf{O}(2p,\mathbb{C}) \times {}^L\mathbf{U}_{n-2p} \hookrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}.$$

L'entier $b-a'$ est pair et définit un isomorphisme $\xi_{b-a'} : {}^L\mathbf{U}_{n-2p} \to {}^L\mathbf{U}_{n-2p}$ et de même pour a' et ${}^L\mathbf{U}_n$ qui donne un isomorphisme $\xi_{a'} : {}^L\mathbf{U}_n \to {}^L\mathbf{U}_n$ (par torsion respectivement par le caractère de $W_{\mathbb{R}}$ qui paramètre le caractère $\det^{\frac{b-a'}{2}}$ de $\mathbf{U}_{n-2p}$ et $\det^{\frac{a'}{2}}$ de ${}^L\mathbf{U}_n$, voir [Wal10]). On étend ainsi l'inclusion $\mathbf{O}(2p,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ en tordant ι à la source et au but :

$$\mathbf{O}(2p,\mathbb{C}) \times {}^L\mathbf{U}_{n-2p} \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\xi_{b-a'}} \mathbf{O}(2p,\mathbb{C}) \times {}^L\mathbf{U}_{n-2p} \longrightarrow {}^L\mathbf{U}_n \xrightarrow{\xi_{a'}} {}^L\mathbf{U}_n,$$

On compose ensuite avec (5.1) pour obtenir le morphisme ξ_{SO} de (ii).

Si n est pair, la construction précédente doit être légèrement modifiée. A la place de $J_{n,p}$ on prend la matrice $J'_{n,p}$ qui est antidiagonale avec tous les coefficients égaux à 1. On réalise alors $\mathbf{O}(2p,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ avec la même recette, $J'_{n,p}$ remplaçant $J_{n,p}$. Posons $T'_{2p} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & w_p \\ \hline 0 & I_{n-2p} & 0 \\ \hline -{}^t w_p & 0 & 0 \end{array}\right)$. Définissons ξ_{SO} sur le facteur $\mathbb{C}^\times$ de $W_{\mathbb{R}}$ par

$$z \mapsto ((\underbrace{\chi_{a'}(z),\cdots,\chi_{a'}(z)}_{p}, \underbrace{\chi_b(z),\cdots,\chi_b(z)}_{n-2p}, \underbrace{\chi_{a'}(z),\cdots,\chi_{a'}(z)}_{p}), z) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}},$$

et sur l'élément j de $W_{\mathbb{R}}$ par $\xi_{SO}(j) = (T'_{2p} w_n, j)$. On vérifie que $\xi_{SO}(j)^2 = (1,-1)$, et pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$, $\xi_{SO}(j)\xi_{SO}(z)\xi_{SO}(j)^{-1} = \xi_{SO}(\bar{z})$. Ainsi on a bien un morphisme de $W_{\mathbb{R}}$ dans ${}^L\mathbf{U}_n$. Il reste à vérifier que l'inclusion, notons-là ι, donnée ci-dessus de $\mathbf{SO}(2p,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ et le morphisme ξ_{SO} défini sur $W_{\mathbb{R}}$ sont compatibles aux relations dans $\mathbf{SO}(2p,\mathbb{C}) \ltimes_p W_{\mathbb{R}}$ et ${}^L\mathbf{U}_n$. D'une part, $\xi_{SO}(\mathbb{C}^\times)$ et $\iota(g)$ commutent. D'autre part, on a dans $\mathbf{SO}(2p,\mathbb{C}) \ltimes_p W_{\mathbb{R}}$,

$$(1,j)(g,1)(1,j)^{-1} = (T_{2p} g T_{2p}^{-1}, 1),$$

et ceci s'envoie donc sur $(\iota(T_{2p} g T_{2p}^{-1}), 1)$. De plus,

$$\begin{aligned}\xi_{SO}(j)(\iota(g),1)\xi_{SO}(j)^{-1} &= (T'_{2p} w_n, j)(\iota(g),1)(T'_{2p} w_n, j)^{-1} = (T'_{2p} w_n w_n{}^t\iota(g)^{-1} w_n^{-1}(T'_{2p} w_n)^{-1}, 1)\\ &=(T'_{2p}{}^t\iota(g)^{-1}(T'_{2p})^{-1}, 1) = (T'_{2p}(J'_{n,p})^{-1}\iota(g)J'_{n,p}(T'_{2p})^{-1}, 1).\end{aligned}$$

En effet ${}^t\iota(g)^{-1} = (J'_{n,p})^{-1}\iota(g)J'_{n,p}$, c'est la réalisation choisie de $\mathbf{SO}(2p,\mathbb{C})$. Il s'agit donc de vérifier que $\iota(T_{2p} g T_{2p}^{-1}) = T'_{2p}(J'_{n,p})^{-1}\iota(g)J'_{n,p}(T'_{2p})^{-1}$. Or $T'_{2p}(J'_{n,p})^{-1}$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont $(\underbrace{1,-1,\ldots,(-1)^{p-1}}_{p}, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-2p}, \underbrace{(-1)^{p-1},(-1)^{p-2},\ldots,-1,-1}_{p})$ et ι entrelace bien l'action par conjugaison de T_{2p} et de cette matrice. ∎

5.2. *Commutant de $R[2]\oplus\ldots\oplus R[2]$ dans ${}^L\mathbf{U}_{2n}$.* Plongeons $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}(2n,\mathbb{C})$ en prenant le produit tensoriel des représentations naturelles de ces deux groupes, soit

$$\iota : \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(2n,\mathbb{C}), \qquad \left(g, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} ag & bg \\ \hline cg & dg \end{array}\right).$$

Calculons le commutant $\mathcal{G}$ de $\iota(\mathbf{SL}(2,\mathbb{C}))$ dans ${}^L\mathbf{U}_{2n}$. Le commutant dans $\mathbf{GL}(2n,\mathbb{C})$ est exactement $\iota(\mathbf{GL}(2n,\mathbb{C}))$. On a

$$w_{2n}{}^t\iota\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^{-1} w_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix} aI_n & (-1)^{n-1}bI_n \\ (-1)^{n-1}cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$

et ainsi si n est impair, $\mathcal{G} = \{(\iota(g), w) \in {}^L\mathbf{U}_{2n},\ g \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}),\ w \in W_\mathbb{R}\}$. Ce groupe est le produit semi-direct de $\iota(\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}))$ et de $W_\mathbb{R}$, où $W_\mathbb{C} = \mathbb{C}^\times \subset W_\mathbb{R}$ agit trivialement sur $\iota(\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}))$ et $W_\mathbb{R} \setminus W_\mathbb{C}$ agit par l'automorphisme $\iota(g) \mapsto w_{2n}{}^t\iota(g)^{-1}w_{2n}^{-1}$. On a un isomorphisme

$$(n \text{ impair}) \quad \xi_+ : {}^L\mathbf{U}_n \longrightarrow \mathcal{G} \subset {}^L\mathbf{U}_{2n}, \quad (g, w) \mapsto \left(\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right), w\right). \tag{5.2}$$

Ceci est bien défini car pour tout $g \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, $w_{2n}{}^t\iota(g)^{-1}w_{2n}^{-1} = \iota(w_n{}^tg^{-1}w_n^{-1})$. En effet, comme $\iota({}^tg^{-1}) = {}^t\iota(g)^{-1}$ pour tout $g \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, il reste à vérifier que $\mathrm{Ad}(w_{2n}^{-1}\iota(w_n))$ agit trivialement sur l'image de ι, ce qui est le cas, car $w_{2n}^{-1}\iota(w_n) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-1)^nI_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$.

Si n est pair $\mathcal{G} = \left\{(\iota(g)\begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, w) \in {}^L\mathbf{U}_{2n},\ g \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}),\ w \in W_\mathbb{R}\right\}$. On a encore un isomorphisme entre ${}^L\mathbf{U}_n$ et $\mathcal{G}$:

$$(n \text{ pair}) \quad \xi_- : {}^L\mathbf{U}_n \longrightarrow \mathcal{G} \subset {}^L\mathbf{U}_{2n}, \quad (g, w) \mapsto (\iota(g)c(w), w), \tag{5.3}$$

où $c : W_\mathbb{R} \to \mathbf{GL}(2n,\mathbb{C})$ est défini par $c(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}} I_{2n},\ (z \in \mathbb{C})$, $c(j) = \left(\begin{array}{c|c} -I_n & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$, $c(zj) = c(z)c(j)$.

6. Le commutant du $\mathbf{SL}(2)$ et le plongement $\varphi_\mathscr{X} : {}^LG_\mathscr{X} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \to {}^LG$.

Reprenons les résultats obtenus dans la section 4. Soit π une série discrète d'un espace $\mathscr{X}$ de la liste, et soit ψ_π le paramètre d'Arthur que nous lui associons. D'après le corollaire 4.2, la restriction de ψ_π à $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ est (à conjugaison près) le morphisme de Jacobson-Morosov $\eta_\mathscr{X}$ associé à l'orbite unipotente régulière du sous-groupe de Levi $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ de $G^\vee$. Ce groupe (ou plutôt son algèbre de Lie $\check{\mathfrak{l}}_\mathscr{X}$, ce qui le détermine) est donné dans la table 1. Nous allons calculer le commutant $\mathcal{G}$ de cette image de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$. Ceci nous permet de vérifier que le groupe de Langlands dual ${}^LG_\mathscr{X}$ prévu par [SV17] et [KS17] est bien le bon, et à terme, de déterminer le morphisme $\varphi_\mathscr{X}$ de (1.1) (ou de manière équivalente, puisque la restriction au facteur $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ est déjà donnée, le morphisme $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ de (1.3)). En effet l'image par ce morphisme de ${}^LG_\mathscr{X}$ doit être contenue dans $\mathcal{G}$.

Nous commençons par les cas les plus simples, ceux où le commutant $\mathcal{G}$ est isomorphe au groupe de Langlands dual ${}^LG_\mathscr{X}$ prévu par [SV17] et [KS17].

Proposition 6.1. *Dans les cas 2, 5, 6, 9 avec $n = p + q$ pair, 10 avec n pair, 11, 12 et 13 de la table 1, le commutant $\mathcal{G}$ est isomorphe à ${}^LG_\mathscr{X}$. Ceci fixe le morphisme $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ de (1.3).*

<u>*Démonstration*</u>. **Cas 2** : $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$, $n = p + q$. On a ${}^LG = \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$ et $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(1,\mathbb{C})^n$ qui est un tore donc de $\mathbf{SL}(2)$ principal trivial. Le L-groupe ${}^LG_\mathscr{X}$ est égal à ${}^LG$ et le morphisme (1.1) égal à l'identité des deux L-groupes.

Cas 5 : $\mathbf{U}(2p,2q)/\mathbf{Sp}(p,q)$. Posons $n = p + q$. On a ${}^LG = \mathbf{GL}(2n,\mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$ et $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^n$. Le commutant $\mathcal{G}$ est isomorphe à ${}^L\mathbf{U}_n = \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$. Les calculs sont donnés dans la section 5.2 où nous définissons un isomorphisme entre ${}^L\mathbf{U}_n$ et $\mathcal{G}$. La forme de cet isomorphisme dépend de la parité de n, il est noté ξ_- si n est pair, et ξ_+ si n est impair. Ainsi ${}^LG_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R} = {}^L\mathbf{U}_n$, et le morphisme $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ de (1.3) est donné par ξ_- ou ξ_+ selon la parité de n.

Cas 6 : $\mathbf{U}(n,n)/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Ce cas est identique au précédent

Cas 9 : $\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$ avec $n = p + q$ pair. L'espace symétrique $\mathscr{X}$ admet des séries discrètes sauf dans le cas où p et q sont tous les deux impairs, donc si $n = p + q$ est pair, p et q sont pairs. Le groupe G est une forme intérieure de $\mathbf{SO}(n,n)$. On a alors ${}^LG = \mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$ et $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^{\frac{n}{2}}$. Le commutant du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ dans $\mathbf{GL}(2n,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C})$ est $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ ([CM93], Thm. 6.1.3).

Ceci fixe ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$. Le commutant $\mathcal{G}$ est donc isomorphe à ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et ceci fixe le morphisme $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ de (1.3).

Cas 10 : $\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ avec $n = p+q$ pair. Ce cas est similaire au cas précédent. Ici ${}^LG = \mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$, et $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}} = \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^{\frac{n}{2}}$. Le commutant $\mathcal{G}$ du $\mathbf{SL}(2)$-principal de $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}}$ est $\mathcal{G} = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$. Ainsi ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et ceci fixe le morphisme $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ de (1.3).

Cas 11 : $\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{R}) \times \mathbf{Sp}(2(n-p),\mathbb{R})$, $2p \leq n$. On a ici

$$ {}^LG = \mathbf{SO}(2n+1,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}, \quad \mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}} = \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^p \times \mathbf{SO}(2n-4p+1,\mathbb{C}). $$

Le commutant dans $\mathbf{SO}(2n+1,\mathbb{C})$ du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}}$ est $\mathcal{G} = \mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C}) \times \{I_{2n-4p+1}\}$ (*cf.* [CM93] Thm. 6.1.3). Ainsi ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2p,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et ceci fixe le morphisme $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ de (1.3).

Cas 12 : $\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$. Ce cas est analogue au précédent, en remplaçant $2n$ par $4n$ et p par n.

Cas 13 : $\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. On a ${}^LG = \mathbf{SO}(2n+1,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}} = \mathbf{GL}(1,\mathbb{C})^n$ qui est un tore, donc de $\mathbf{SL}(2)$ principal trivial. Le morphisme $\varphi_{\mathscr{X}}$ de (1.1) est l'identité des L-groupes : ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{SO}(2n+1,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} = {}^LG$. ◻

Proposition 6.2. *Dans les cas 7 et 8, le commutant $\mathcal{G}$ de l'image de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ est isomorphe à ${}^LG_{\mathscr{X}} \times \{\pm 1\}$. Le morphisme $\varphi_{\mathscr{X}}$ de (1.1) est alors fixé à une torsion près dans $\{\pm 1\}$.*

Démonstration. **Cas 7** : $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$, $p+q = 2n+1$. On pose $m = r+s$. On a ici ${}^LG = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}} = \mathbf{GL}(1,\mathbb{C})^m \times \mathbf{Sp}(2(n-m),\mathbb{C})$. Le commutant du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}}$ dans $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ est $\mathbf{Sp}(2m,\mathbb{C}) \times \{\pm I_{2n-2m}\}$ ([CM93], Thm. 6.3.1). On a donc ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2m,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{G}$ est isomorphe à ${}^LG_{\mathscr{X}} \times \{\pm 1\}$.

Ceci donne de manière évidente un morphisme :

$$ \bar{\varphi}_{\mathscr{X}} : \ {}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2m,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^LG = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \tag{6.1} $$

dont la restriction à $W_{\mathbb{R}}$ est l'identité de ce facteur.

On a aussi la possibilité de tordre ce morphisme par $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$ à valeurs dans le facteur $\{\pm 1\}$ de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que l'on définit un morphisme

$$ \bar{\varphi}'_{\mathscr{X}} : \ {}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2m,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^LG = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \tag{6.2} $$

avec même restriction à $\mathbf{Sp}(2m,\mathbb{C})$ que $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$, la restriction de $\bar{\varphi}'_{\mathscr{X}}$ à $W_{\mathbb{R}}$ étant

$$ w \mapsto (\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}(w), w) \in \{\pm I_{2n-2m}\} \times W_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{G} \times W_{\mathbb{R}}. $$

Cas 8 : $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s) \times \mathbf{SO}(r',s')$, $p+q = 2n$. On pose $m = r+s$. Comme $p+q = 2n$, p et q sont de même parité et le L-groupe de $\mathbf{SO}(p,q)$ est $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ si cette parité est aussi celle de n, et $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ si cette parité est celle de $n+1$, l'action de $W_{\mathbb{R}}$ étant induite par l'automorphisme extérieur de $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C})$ en fixant un épinglage. On a ici $\mathbf{L}^\vee_{\mathscr{X}} = \mathbf{GL}(1,\mathbb{C})^m \times \mathbf{SO}(2(n-m),\mathbb{C})$.

Rappelons que l'orbite unipotente principale de $\mathbf{SO}(2(n-m),\mathbb{C})$ est associée à la partition $(1, 2(n-m)-1)$ de $2(n-m)$, et son commutant dans $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C})$ est $\mathbf{S}(\mathbf{O}(2m+1,\mathbb{C}) \times \{\pm I_{2n-2m-1}\})$ (*cf.* [CM93],Thm. 6.3.1). On a donc ${}^LG_{\mathscr{X}} = \mathbf{SO}(2m+1,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$.

Si ${}^LG = \mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$, on voit immédiatement que $\mathcal{G}$ est isomorphe à ${}^LG_{\mathscr{X}} \times \{\pm 1\}$, et si ${}^LG = \mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$, comme l'image de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ est dans le groupe des points fixes de $\mathbf{SO}(2n,\mathbb{C})$ sous l'action de $W_{\mathbb{R}}$, on a la même conclusion. Comme en (6.1) et (6.2), on définit

$$ \bar{\varphi}_{\mathscr{X}}, \bar{\varphi}'_{\mathscr{X}} : \ {}^LG_X = \mathbf{Sp}(2m,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^LG = \mathbf{SO}(2n,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}. \tag{6.3} $$

où $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ est donnée par les inclusions évidentes et $\bar{\varphi}'_{\mathscr{X}}$ est obtenu en tordant $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ par le caractère $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$ à valeurs dans le facteur $\{\pm 1\}$ de $\mathcal{G}$. ◻

Proposition 6.3. *Dans les cas 9 et 10 avec n impair, le commutant $\mathcal{G}$ de l'image de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ est isomorphe à ${}^LG_{\mathscr{X}} \times \mathbf{SO}(2,\mathbb{C})$. Dans le cas 9 avec n impair, ceci fixe le morphisme $\varphi_{\mathscr{X}}$ de (1.1). Dans le cas 10 avec n impair, le morphisme $\varphi_{\mathscr{X}}$ de (1.1) est fixé à une torsion près dans $\{\pm 1\}$.*

Démonstration. **Cas 9** avec $n = p + q$ impair. Dans ce cas p et q sont de parité différente, le groupe G est forme intérieure de $\mathbf{SO}(n+1, n-1)$. On a alors ${}^LG = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$ et $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})^{\frac{n-1}{2}} \times \mathbf{SO}(2, \mathbb{C})$. Le commutant $\mathcal{G}$ du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ dans $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ est $\mathbf{Sp}(n-1, \mathbb{C}) \times \mathbf{SO}(2, \mathbb{C})$ ([CM93], Thm. 6.1.3). On remarque que ce $\mathbf{SL}(2)$ principal est dans les points fixes de l'automorphisme extérieur par lequel agit $W_\mathbb{R}$ sur $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$. On a alors $\mathcal{G} = (\mathbf{Sp}(n-1, \mathbb{C}) \times \mathbf{SO}(2, \mathbb{C})) \ltimes W_\mathbb{R}$ et ${}^LG_\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(n-1, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$.

Remarque 6.4. Le seul L-morphisme de $W_\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbf{SO}(2, \mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$ trivial sur $\mathbb{R}^\times_+$ est le morphisme trivial. Le morphisme $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ est donc fixé, il n'y a pas possibilité de le tordre par un morphisme à valeurs dans le facteur $\mathbf{SO}(2, \mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$ de $\mathcal{G}$.

Cas 10 avec n impair : $\mathbf{SO}(n, n)/\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Ici ${}^LG = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$, et $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})^{\frac{n-1}{2}} \times \mathbf{SO}(2, \mathbb{C})$ et $\mathcal{G} = (\mathbf{Sp}(n-1, \mathbb{C}) \times \mathbf{SO}(2, \mathbb{C})) \times W_\mathbb{R}$. Ainsi ${}^LG_\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(n-1, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$. Les L-morphismes de $W_\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbf{SO}(2, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$ triviaux sur $\mathbb{R}^\times_+$ sont $\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}$ et $\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}$. On a donc un morphisme $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ défini par les inclusions évidentes, et de manière similaire à (6.1) et (6.2), on a possibilité de tordre le morphisme $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ par le caractère signe de $W_\mathbb{R}$ à valeurs dans le facteur $\mathbf{SO}(2, \mathbb{C})$ du commutant pour obtenir un morphisme $\bar{\varphi}'_\mathscr{X}$. ∎

Les cas restants sont ceux où les racines sphériques de $\mathscr{X}$ ne sont pas toutes des racines. On les traite maintenant.

Cas 1 : $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{GL}(p, \mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p, \mathbb{R})$, $2p \leq n$. On a ici :

$$ {}^LG = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}, \qquad \mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(1, \mathbb{C})^{2p} \times \mathbf{GL}(n-2p, \mathbb{C}). $$

Le commutant du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ est $\mathbf{GL}(2p) \times Z(\mathbf{GL}(n-2p, \mathbb{C}))$ et son commutant dans ${}^LG$ est donc $\mathcal{G} = (\mathbf{GL}(2p, \mathbb{C}) \times Z(\mathbf{GL}(n-2p, \mathbb{C}))) \times W_\mathbb{R}$.

Cas 3 : $\mathbf{U}(p, q)/\mathbf{U}(r, s) \times \mathbf{U}(r', s')$. Posons $p + q = n$ et $m = r + s$. On a ici : ${}^LG = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$, $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(1, \mathbb{C})^{2m} \times \mathbf{GL}(n-2m, \mathbb{C})$. Le commutant du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ est $\mathbf{GL}(2m) \times Z(\mathbf{GL}(n-2m, \mathbb{C}))$. A conjugaison près, on s'arrange pour que l'image du $\mathbf{SL}(2)$ principal de $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ soit stable par l'automorphisme $g \mapsto w_n {}^tg^{-1} w_n$ qui définit le L-groupe de $\mathbf{U}(n)$ (voir section 5). Le commutant $\mathcal{G}$ est alors $\mathcal{G} = (\mathbf{GL}(2m) \times Z(\mathbf{GL}(n-2m, \mathbb{C}))) \ltimes W_\mathbb{R}$.

Cas 4 : $\mathbf{U}(n, n)/\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. On a ici ${}^LG = \mathbf{GL}(2n, \mathbb{C}) \ltimes W_\mathbb{R}$, $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X} = \mathbf{GL}(1, \mathbb{C})^{2n}$. Ainsi $\mathbf{L}^\vee_\mathscr{X}$ est un tore et son $\mathbf{SL}(2)$ principal est trivial. Son commutant est donc ${}^LG$.

7. Fin de la démonstration de la conjecture

Dans cette section, nous finissons la démonstration de la conjecture de Sakellaridis et Venkatesh commencée dans les sections 4 et 6. Dans les cas couverts par la proposition 6.1, le commutant $\mathcal{G}$ est isomorphe à ${}^LG_\mathscr{X}$, ce qui fixe le morphisme $\varphi_\mathscr{X}$ et la conjecture est essentiellement tautologique, puisque le paramètre d'Arthur ψ_π se factorise nécessairement par $\varphi_\mathscr{X}$. Il reste à vérifier que le morphisme ϕ_π, a priori tempéré, est en fait discret. On détaille les cas particuliers pour montrer les torsions éventuelles quand l'isomorphisme entre ${}^LG_\mathscr{X}$ et le commutant n'est pas l'identité sur $W_\mathbb{R}$.

Cas 2 et 13 : dans ces cas L est un tore compact. Les représentations $A_\mathfrak{q}(\pi_L)$ sont alors des séries discrètes de G. Comme on a identité des L-groupes ${}^LG_\mathscr{X} = {}^LG$, les paramètres ψ_π (resp. (3.7) et (3.20)) sont des paramètres de Langlands discrets et il n'y a rien de plus à démontrer.

Cas 5 et 6 : les paramètres sont de la forme $\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^n (\chi_{m_i} \boxtimes R[2])$ (*cf.*(3.10) et (3.11)). Le paramètre $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^n \chi_{m_i}$ est un paramètre de Langlands discret de $\mathbf{U}_n$ si n est impair et $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^n \chi_{m_i - 1}$ est un paramètre de Langlands discret de $\mathbf{U}_n$ si n est pair.

On a vu dans la section 6 que ${}^LG_\mathscr{X}$ est isomorphe à ${}^L\mathbf{U}_n$. On envoie alors ${}^LG_\mathscr{X} = {}^L\mathbf{U}_n$ dans ${}^LG$ par le morphisme ξ_+ (si n est impair) et ξ_- (si n est pair), définis respectivement en (5.2) et (5.3), ce qui définit le morphisme $\varphi_\mathscr{X}$ de (1.1). On a alors la propriété de factorisation $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \phi_d$. Remarquons que la torsion sur $W_\mathbb{R}$ utilisée dans la définition du morphisme ξ_- a bien l'effet voulu sur le caractère infinitésimal, en le translatant de $1/2$, ou autrement dit, les $\chi_{m_i - 1}$ deviennent bien χ_{m_i} après composition par φ_χ.

Cas 11 et 12 : les paramètres ψ_π sont respectivement de la forme (3.10) et (3.11). Le paramètre discret $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^p \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[2]\right)$, avec les m_i impairs, est à valeurs dans $\mathbf{Sp}(2p, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R} = {}^LG_\mathscr{X}$ et on a la factorisation $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \phi_d$ (dans le cas 12, remplacer p par n).

Cas 9 et 10 avec n pair : les paramètres ψ_π sont de la forme $\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[2]\right)$ avec les m_i impairs. (*cf.*(3.14) et (3.16)). Le paramètre $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}} \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ est de bonne parité pour un groupe orthogonal impair de rang $\frac{n}{2}$, dont le L-groupe est $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R} = {}^L G_\mathscr{X}$. Avec le morphisme $\varphi_\mathscr{X}$ défini dans ce cas dans la section 6, on a bien la propriété de factorisation $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \phi_d$.

On passe maintenant au cas couverts par la proposition 6.3.

Cas 9 et 10 avec n impair : les paramètres ψ_π sont respectivement de la forme

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[2]\right) \oplus \left(\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[1]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[1]\right)$$

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[2]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[1]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[1]\right)$$

avec les m_i impairs. (*cf.* (3.15) et (3.17)). On pose donc $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$. C'est un paramètre de bonne parité pour un groupe orthogonal impair de rang $\frac{n-1}{2}$, dont le L-groupe est $\mathbf{Sp}(\frac{n-1}{2}, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R} = {}^L G_\mathscr{X}$. Avec les morphismes $\varphi_\mathscr{X}$ défini dans ce cas dans la section 6 (dans le cas 9, le morphisme $\varphi_\mathscr{X}$ ést déjà fixé, *cf.* remarque 6.4, dans le cas 10, on prend le morphisme évident $\varphi_\mathscr{X}$ sans la torsion sur le facteur $W_\mathbb{R}$). On a bien la propriété de factorisation $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \phi_d$.

On continue par les cas couverts par la proposition 6.2.

Cas 7 : les paramètres ψ_π sont de la forme (3.12), c'est-à-dire

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[2]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[2(n-r-s)]\right)$$

où m_i sont des entiers impairs et $\epsilon \in \{0, 1\}$. Le paramètre $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ est un paramètre discret pour $\mathbf{SO}(2(r+s)+1)$, dont le L-groupe est $\mathbf{Sp}(2(r+s), \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R} = {}^L G_\mathscr{X}$. Le paramètre ψ_π se factorise donc en $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \phi_d$, où pour $\varphi_\mathscr{X}$ nous prenons le morphisme défini en (6.1).

Cas 8 : les paramètres ψ_π sont de la forme (3.13), c'est-à-dire

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[2]\right) \oplus \left(\eta_1 \boxtimes R[2(n-r-s)-1]\right) \oplus \left(\eta_2 \boxtimes R[1]\right),$$

où m_i sont des entiers pairs et $\eta_1, \eta_2 \in \{\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}, \mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\}$ avec $\eta_1\eta_2 = \mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}$ si p et q sont de la parité de n et $\eta_1\eta_2 = \mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}$ si p et q sont de la parité de $n-1$.

Le paramètre $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ est un paramètre discret pour un groupe symplectique de rang $r+s$, dont le L-groupe est $\mathbf{SO}(2(r+s)+1, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R} = {}^L G_\mathscr{X}$. Le paramètre ψ_π se factorise donc en $\psi_\pi = \varphi_\mathscr{X} \circ \phi_d$, où pour $\varphi_\mathscr{X}$ est le morphisme défini dans la section 6 sans torsion par $\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}$ (*cf.* (6.3)).

Remarque 7.1. Nous conjecturons que les paramètres (3.12), (3.13) et (3.17) avec des parties unipotentes non triviales et les morphismes $\varphi_\mathscr{X}$ de la section 6 tordus par $\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}$ apparaissent dans le cadre des conjectures généralisées avec le caractère χ de H non trivial. Nous espérons revenir sur ces questions dans un article ultérieur.

Nous traitons maintenant les cas restants.

Cas 1 : les paramètres ψ_π sont de la forme (3.6), c'est-dire

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{p} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right) \oplus \left(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}} \boxtimes R[n-2p]\right).$$

avec les m_i entiers impairs distincts. On note $\bar{\varphi}_\mathscr{X}$ l'inclusion naturelle

$$\bar{\varphi}_\mathscr{X} : \mathbf{Sp}(2p, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R} \longrightarrow (\mathbf{GL}(2p, \mathbb{C}) \times \mathbf{GL}(n-2p, \mathbb{C})) \times W_\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \times W_\mathbb{R}$$

qui résulte de la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en la somme de $\mathbb{C}^{2p}\oplus\mathbb{C}^{n-2p}$. On pose alors $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^p \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right)$. Comme les m_i sont impairs, ceci est bien un paramètre à valeurs dans ${}^L G_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2p, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ et l'on a la propriété de factorisation $\psi_\pi = \varphi_{\mathscr{X}} \circ \phi_d$.

Cas 3 : les paramètres ψ_π sont de la forme (3.8), c'est-dire

$$\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^{r+s}((\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}) \boxtimes R[1]) \oplus (\chi_0 \boxtimes R[n-2(r+s)])$$

La représentation $\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}$ de $\mathbb{C}^\times$ s'étend de manière unique en la représentation $\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ de $W_{\mathbb{R}}$ cette représentation étant à valeurs dans $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ si m_i est impair (c'est-à-dire n pair) et à valeurs dans $\mathbf{O}(2, \mathbb{C})$ si m_i est pair (c'est-à-dire n impair). Posons

$$\phi_d = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{Sp}(2(r+s), \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \text{ si } n \text{ pair} \\ \mathbf{O}(2(r+s), \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Si n est pair, on pose ${}^L G_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2(r+s), \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ comme prévu par [KS17], et le morphisme $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ de (1.3) est le morphisme $\xi_{\mathbf{Sp}}$ de la proposition 5.1, avec $a = b = 0$. On a la propriété de factorisation voulue $\psi_\pi = \varphi_{\mathscr{X}} \circ \phi_d$.

Dans le cas où n est impair, une première façon d'obtenir un énoncé valide est de prendre ${}^L G_{\mathscr{X}} = \mathbf{SO}(2(r+s)\mathbb{C}) \ltimes_{r+s} W_{\mathbb{R}}$ (voir section 5 où l'on a donné la réalisation du L-groupe $\mathbf{SO}(2(r+s)\mathbb{C}) \ltimes_{r+s} W_{\mathbb{R}}$ d'un groupe orthogonal pair de rang $r+s$ admettant des séries discrètes). On a la propriété de factorisation voulue $\psi_\pi = \varphi_{\mathscr{X}} \circ \phi_d$, mais ${}^L G_{\mathscr{X}}$ n'est pas le groupe prévu dans [SV17] et [KS17], car celui-ci a pour composante neutre $\mathbf{Sp}(2(r+s), \mathbb{C})$.

La seconde façon d'obtenir un énoncé valide dans le cas 3, n impair, nous a été suggérée par Sakellaridis. Posons $k = r+s$ pour alléger les écritures. On garde la composante neutre $G^\vee_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2k, \mathbb{C})$ de ${}^L G_{\mathscr{X}}$ déterminée par Knop et Schalke, et l'on prend pour ${}^L G_{\mathscr{X}}$ un produit semi-direct $\mathbf{Sp}(2k, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$, qui n'est pas un L-groupe au sens de Langlands [Lan89] (le scindage $W_{\mathbb{R}} \to {}^L G_{\mathscr{X}}$ n'est pas « distingué »). Une telle extension de la notion de L-groupe a été introduite dans [ABV92] sous la terminologie « E-group ». Les auteurs montrent que les paramètres de Langlands construits avec ces L-groupes paramètrent certaines représentations projectives (*loc. cite*, Thm. 10.4). On forme le produit semi-direct $\mathbf{Sp}(2k, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ où $W_{\mathbb{C}}$ agit trivialement et où $j \in W_{\mathbb{R}}$ agit par conjugaison par un élément de $\mathbf{GSp}(2k, \mathbb{C})$ de norme symplectique -1.

Lemme 7.2. *Ce produit semi-direct est naturellement isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{G}$, le commutant de l'image de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Le commutant $\mathcal{G}$ a été calculé à la fin de la section 6. On part d'une décomposition $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{n-2k} \oplus \mathbb{C}^k$, de sorte que l'image de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(n-2k, \mathbb{C})$. On a ainsi $\mathbf{GL}(2k, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{G}$. Ici le produit semi-direct est défini par $(\forall z \in \mathbb{C}^\times, \forall g \in \mathbf{GL}(2k, \mathbb{C}))$, $z \cdot g = g$ et $(\forall g \in \mathbf{GL}(2k, \mathbb{C}))$, $j \cdot g = t w_{2k} {}^t g^{-1} w_{2k}^{-1} t$, où w_{2k} est la matrice antisymétrique ayant des 1 et -1 alternant sur l'antidiagonale (*cf.* notations de la section 5.1) et t est l'élément de $\mathbf{GL}(2k, \mathbb{C})$ qui agit par -1 sur le premier $\mathbb{C}^k$ et par 1 sur le dernier $\mathbb{C}^k$. Ainsi pour tout $g \in \mathbf{GL}(2k, \mathbb{C})$, $j \cdot g = tgt$. Evidemment t est un élément de $\mathbf{GSp}(2k, \mathbb{C})$ de rapport de similitude -1. Ainsi $W_{\mathbb{R}}$ laisse invariant $\mathbf{Sp}(2k, \mathbb{C})$ dans son action par conjugaison et j agit via la conjugaison par t. Cela démontre le lemme. □

Proposition 7.3. *Soit ψ_π le paramètre d'Arthur d'une série discrète de $\mathscr{X}$ (on est dans le cas 3, n impair). La restriction de ψ_π à $W_{\mathbb{R}}$ se factorise, à conjugaison près, par le produit semi-direct $\mathbf{Sp}(2k, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$, et donc en particulier satisfait la conjecture de Sakellaridis et Venkatesh avec ${}^L G_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2k, \mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Soit ψ_π un tel paramètre. On a vu ci-dessus que la restriction de ψ_π à $W_{\mathbb{R}}$ est orthogonale de dimension $2k$, plus précisément est la somme de k représentations orthogonales $\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ de dimension deux de $W_{\mathbb{R}}$ toutes distinctes (les m_i sont pairs, ont les suppose rangés dans l'ordre décroissant). A l'aide de ces paramètres, on construit un morphisme ϕ' de $W_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbf{GL}(2k,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$, en posant pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$

$$\phi'(z) = \left(\left((z/\overline{z})^{m_1}, \cdots, (z/\overline{z})^{m_k}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-2k}, (z/\overline{z})^{-m_k}, \cdots, (z/\overline{z})^{-m_1}\right), z\right),$$

et $\phi'(j) = (tJ_{2k}, j)$. Pour vérifier que l'on a bien construit un morphisme, il faut remarquer que les m_i étant des entiers pairs $\phi'(-1) = 1$ et que $(tw_{2k})^2 = 1$ ce qui donne $\phi'(j)^2 = \phi'(j^2) = \phi'(-1)$.

Il est clair que $\phi'(z) \in \mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{C}}$ et que $\phi'(j) \in (\mathbf{GSp}(2k,\mathbb{C}), j)$. Le sous-groupe de $\mathbf{GL}(2k,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ engendré par $\mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C})$ et $\phi'(j)$ est indépendant des paramètres m_i et est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ par l'application qui est l'identité sur $\mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C})$ et envoie $(t,j) \in (\mathbf{GSp}(2k,\mathbb{C}), j)$ sur $(1,j) \in \mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$. On note ϕ le composé de ϕ' avec cet isomorphisme suivi de l'inclusion de $\mathbf{Sp}(2k,\mathbb{C}) \ltimes W_{\mathbb{R}}$ dans le commutant dans ${}^L\mathbf{U}_n$ de l'image de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. On obtient donc un morphisme ψ de $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dans ${}^L\mathbf{U}_n$. Ce morphisme est un paramètre d'Arthur discret. Le paquet d'Arthur qu'il détermine est uniquement déterminé par la restriction de ψ_π à $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Il est clair que cette restriction est bien conjuguée de la restriction à ce même groupe du paramètre d'Arthur ψ_π dont on est parti. □

Remarque 7.4. Il est vraisemblable que les plongements plus généraux obtenus dans la proposition 5.1 et la possibilité d'avoir le facteur $\chi_{m_0} \boxtimes R[n-2(r+s)]$ avec $m_0 \neq 0$ dans le paramètre ψ_π servent à étendre les conjectures au cas où le caractère χ de H/H_e n'est pas trivial.

Cas 4 : les paramètres ψ_π sont de la forme (3.9), c'est-dire $\psi_\pi = \bigoplus_{i=1}^n ((\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}) \boxtimes R[1]$, où les m_i sont des entiers impairs. La représentation $\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}$ de $\mathbb{C}^\times$ s'étend de manière unique en la représentation $\delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right)$ de $W_{\mathbb{R}}$ cette représentation étant à valeurs dans $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ si m_i est impair. Posons $\phi_d = \bigoplus_{i=1}^n \delta\left(\frac{m_i}{2}, -\frac{m_i}{2}\right) : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$. On pose ${}^L G_{\mathscr{X}} = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ comme prévu par [KS17], et le morphisme $\bar{\varphi}_{\mathscr{X}}$ de (1.3) est le morphisme $\xi_{\mathbf{Sp}}$ de la proposition 5.1, avec $a = b = 0$ (avec $2n$ à la place de n). On a la propriété de factorisation $\psi_\pi = \varphi_{\mathscr{X}} \circ \phi_d$. □

8. Les paquets d'Arthur attachés aux séries discrètes des espaces symétriques

Dans ce qui précède, nous avons attaché à chaque série discrète π d'un des espaces symétriques $\mathscr{X}$ que nous considérons un paramètre d'Arthur ψ_π tel que π est dans le paquet d'Arthur $\Pi(G,\psi_\pi)$ et nous avons vérifié que ce paramètre se factorise bien de la façon prédite par les conjectures de Sakellaridis et Venkatesh.

Dans cette section, nous prenons une perspective légèrement différente : étant donné un tel paquet $\Pi(G,\psi)$, quels sont les éléments de ce paquet qui sont des séries discrètes d'un des espaces symétriques $\mathscr{X}$? Un résultat intéressant est que si l'on fixe un G et un tel paramètre ψ, un élément du paquet ne contribue qu'à un seul espace symétrique parmi ceux possibles.

Les caractères $\epsilon(\pi)$ de $A(\psi)$. Soit $\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \to {}^L G$ un paramètre d'Arthur. Posons $S_\psi = \mathrm{Centr}_{G^\vee}(\psi)$ et $A(\psi) = S_\psi/(S_\psi)^0$. Lorsque les $A(\psi)$ sont abéliens, ce qui est le cas des groupes considérés ici, la théorie d'Arthur attache à toute représentation π du paquet d'Arthur $\Pi(\psi)$ une représentation de dimension finie $\epsilon(\pi)$ de $A(\psi)$. Pour les groupes unitaires, spéciaux orthogonaux ou symplectiques (et pour $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ où les $A(\psi)$ sont triviaux) on sait d'après [MR19], [MR20] que les $\epsilon(\pi)$ sont de dimension 1, c'est-à-dire, pour tout $\pi \in \Pi(\psi)$, $\epsilon(\pi) \in \widehat{A(\psi)}$. Ces $\epsilon(\pi)$ ont de plus été déterminés de manière explicite, dépendant de certains choix (celui d'une forme intérieure pure quasi-déployée de référence, et d'une donnée de Whittaker pour celle-ci). Soit ψ un paramètre de bonne parité pour un groupe G comme dans la section 3.2, donc comme en (3.3) ou (3.5). Alors $A(\psi) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^R$. Un caractère de ce groupe sera donc donné par une suite $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_R)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On calcule ci-dessous ces invariants $\epsilon(\pi)$ pour les séries discrètes π des espaces symétriques et le paramètre d'Arthur qui leur est attaché et l'on en tire quelques conséquences.

Cas 1 : $\mathscr{X} = \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n-p,\mathbb{R})$, $2p \leq n$. Les paquets d'Arthur sont des singletons, et les groupes $A(\psi)$ sont triviaux. Un paramètre d'Arthur ψ détermine donc une unique représentation $\pi(\psi)$. Les paramètres considérés sont de la forme

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{p} \left(\delta\left(\frac{m_i}{2}, \frac{m_i}{2}\right) \boxtimes R[1]\right) \oplus (\mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}} \boxtimes R[n-2p])$$

les m_i étant des entiers impairs distincts. La représentation unitaire irréductible $\pi(\psi)$ de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ attachée à un tel paramètre ne contribue donc qu'à un seul des espaces symétriques ci-dessus (lorsque p varie).

Cas 2 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$, $n = p+q$. Nous avons vu que les séries discrètes de $\mathscr{X}$ sont des séries discrètes de G. Ce qui les distingue parmi celles-ci est que leur K-type minimal a des invariants non triviaux sous $K \cap H = \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$. Un paquet de Langlands de séries discrètes de $\mathbf{U}(p,q)$ est déterminé par un caractère infinitésimal entier régulier, c'est-à-dire dans un système de coordonnées usuelles, un n-uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i forment une suite strictement décroissante constitués d'entiers si n est impair, et de demi-entiers non entiers si n est pair. Notons $\Pi(\lambda)$ ce paquet de Langlands. Remarquons que $\rho = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, -\frac{n-1}{2}\right)$ de sorte que $\lambda - \rho$ est toujours un n-uplet d'entiers.

Les représentations à l'intérieur d'un paquet de Langlands $\Pi(\lambda)$ de séries discrètes de paramètre de Langlands ψ sont paramétrées par le caractère de $A(\psi)$ qui leur est attaché. Pour la normalisation de cette paramétrisation, on suppose que la forme intérieure pure de $\mathbf{U}(n)$ qui contient la représentation correspondant au caractère trivial de $A(\psi)$ est $\mathbf{U}(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$ si n est impair et $\mathbf{U}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ si n est pair.

Proposition 8.1. *Si $n = p + q$ est pair, et si $\lambda - \rho$ est un n-uplet d'entiers tous de même parité ω, les séries discrètes de $\mathbf{U}(p,q)$ dans le paquet $\Pi(\lambda)$ sont toujours des séries discrètes pour $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q)$, et elles le sont pour $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$ si p a la parité ω.*

Si n est impair, alors quel que soit λ, il existe exactement une forme intérieure $\mathbf{U}(p,q)$ (à permutation près de p et q, et $p + q = n$) et une série discrète π de caractère infinitésimal λ pour cette forme intérieure qui est une série discrète pour $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q)$. Cette série discrète π est celle qui correspond au caractère $\epsilon(\pi)$ de $A(\psi)$ donné par $\epsilon(\pi)_i = (-1)^{\lambda_i + \frac{n-1}{2}}$ avec p le nombre d'entiers i tel que $\lambda_i + \frac{n+1}{2} - i$ est pair.

Remarquons aussi que la série discrète π^- de $\mathbf{U}(q,p)$ de caractère infinitésimal λ apparaissant dans l'espace symétrique $\mathbf{U}(q,p)/\mathbf{SO}(q,p)$ (qui s'identifie à π si l'on identifie $\mathbf{U}(p,q)$ et $\mathbf{U}(q,p)$) correspond pour ce choix de paramétrisation, au caractère opposé du $A(\psi)$, c'est-à-dire $\epsilon(\pi^-)_i = (-1)^{\lambda_i + \frac{n+1}{2}}$.

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on explicite le K-type minimal d'une série discrète π d'un paquet $\Pi(\lambda)$ en fonction de $\epsilon(\pi)$. Ce calcul est un peu technique. Pour que π soit une série discrète de $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{SO}(p,q)$, le plus haut poids de ce K-type doit être formé d'entiers ayant tous même parité et pour être une série discrète de $\mathbf{U}(p,q)/\mathbf{O}(p,q)$ ces entiers doivent être tous pairs. On fixe π dans $\Pi(\lambda)$ avec $\epsilon(\pi) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$. On pose

$$p := |\{i; \epsilon_i = (-1)^{i-1}\}|.$$

On note L le tore compact dont le i-ème facteur $\mathbf{U}(1)$ est dans $\mathbf{U}(p)$ si et seulement si $\epsilon_i = (-1)^{i-1}$. Avec cela on détermine la sous-algèbre parabolique θ-stable $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ permettant de réaliser π comme $A_{\mathfrak{q}}(\lambda - \rho)$. Le plus haut poids du $\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q)$-type minimal est alors $\lambda - \rho + 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$.

Pour tout $i \in [1,n]$, on pose $\tilde{\mu}_i := \lambda_i + (n+1)/2 - i = (\lambda - \rho)_i$ et

$$\begin{aligned}\mu_i := \tilde{\mu}_i &+ |\{j \in [1,n]; \epsilon_i(-1)^{i-1} \neq \epsilon_j(-1)^{j-1} \text{ et } \lambda_j < \lambda_i\}| \\ &- |\{j \in [1,n]; \epsilon_i(-1)^{i-1} \neq \epsilon_j(-1)^{j-1} \text{ et } \lambda_j > \lambda_i\}|.\end{aligned}$$

Le plus haut poids du K-type minimal de π est alors $\left(\mu_i; \epsilon_i = (-1)^{i-1}\right); \left(\mu_i; \epsilon_i \neq (-1)^{i-1}\right)$.

Distinguons les cas : si n est pair, pour que les μ_i aient tous même parité, il faut et il suffit que les $\tilde{\mu}_i$ aient tous même parité. Cela permet de conclure facilement dans ce cas.

Si n est impair, pour que les μ_i aient tous même parité, il faut et il suffit que que les $\tilde{\mu}_i$ pour i tel que $\epsilon_i = (-1)^{i-1}$ aient tous même parité et soient de parité opposé aux $\tilde{\mu}_i$ tel que $\epsilon_i \neq (-1)^{i-1}$. Il faut donc nécessairement que $(p, n-p)$ soit à l'ordre près

$$(|\{i; \tilde{\mu}_i \equiv 0[2]\}|, |\{i; \tilde{\mu}_i \equiv 1[2]\}|),$$

et si l'on prend $p = |\{i; \tilde{\mu}_i \equiv 0[2]\}|$, il faut aussi que $\epsilon_i = (-1)^{i-1}$ si et seulement si $(-1)^{\lambda_i + (n+1)/2 - i} = 1$, c'est-à-dire que pour tout i on doit avoir $\epsilon_i = (-1)^{\lambda_i + (n-1)/2}$. Par contre si l'on prend $p = |\{i; \tilde{\mu}_i \equiv 1[2]\}|$ alors $\epsilon_i = (-1)^{i-1}$ si et seulement si $(-1)^{\lambda_i + (n+1)/2 - i} = -1$, c'est-à-dire que pour tout i on doit avoir $\epsilon_i = (-1)^{\lambda_i + (n+1)/2}$. $\square$

Cas 3 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(p,q)/\mathbf{U}(r,s) \times \mathbf{U}(r',s')$. Notons cet espace symétrique de manière plus précise par $\mathscr{X}_{r,s}$, ce qui nous permet de faire varier ces deux entiers. On a vu en (3.8) que les paramètres ψ sont de la forme $\psi = \bigoplus_{i=1}^{r+s}((\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}) \boxtimes R[1]) \oplus (\chi_0 \boxtimes R[n-2(r+s)])$. Le résultat suivant découle des calculs des $\epsilon(\pi) \in \widehat{A(\psi)}$ dans [MR19] pour $\pi \in \Pi(\psi)$. On écrit $\epsilon(\pi) = (\epsilon_1(\pi), \dots, \epsilon_{2(r+s)}(\pi), \epsilon_0(\pi))$, où le ϵ_0 vient du facteur $\chi_0 \boxtimes R[n-2(r+s)]$ du paramètre et est donc absent si $n = 2(r+s)$.

PROPOSITION 8.2. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi \in \Pi(\mathbf{U}(p,q),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}_{r,s}$ si et seulement si $\epsilon(\pi) = (\epsilon_1(\pi), \dots, \epsilon_{2(r+s)}(\pi), \epsilon_0(\pi))$ vérifie*

$$\# \left\{ i \in [\![1, 2(r+s)]\!] \,|\, \epsilon_i(\pi) = (-1)^{i-1} \right\} = 2r,$$
$$\# \left\{ i \in [\![1, 2(r+s)]\!] \,|\, \epsilon_i(\pi) = (-1)^{i} \right\} = 2s,$$

(rappelons que ceci dépend du choix d'une donnée forme intérieure pure quasi-déployée, un autre choix pourrait inverser les deux conditions) et

$$\epsilon_{2i-1}(\pi)\epsilon_{2i}(\pi) = (-1)^{p+q-1}, \ (i = 1, \dots, r+s),$$

condition qui ne dépend pas du choix de la forme intérieure pure quasi-déployée.

<u>*Démonstration*</u>. On suppose d'abord que le caractère infinitésimal du paramètre ψ est très régulier, c'est-à-dire que les m_i sont des entiers strictement positifs assez distincts, que l'on a mis dans l'ordre décroissant. Soit $\pi \in \Pi(\mathbf{U}(p,q),\psi)$. Alors π est induit cohomologiquement à partir d'une paire $(\mathfrak{q}, L)$, où L est le c-Levi fixé par l'espace symétrique, si et seulement si les conditions

$$\# \left\{ i \in [\![1, 2(r+s)]\!] \,|\, \epsilon_i(\pi) = (-1)^{i-1} \right\} = 2r, \quad \# \left\{ i \in [\![1, 2(r+s)]\!] \,|\, \epsilon_i(\pi) = (-1)^{i} \right\} = 2s,$$

sont vérifiées.

Posons $t_i = \frac{m_i}{2} - \frac{n-2i+1}{2}$ (c'est la i-ième coordonnée de $\lambda - \rho$ où λ est le caractère infinitésimal, dans un bon système de coordonnées). Les m_i sont entiers, de la parité de $n-1$, et donc les t_i sont entiers. Comme on a supposé les m_i grands et suffisamment distincts, les t_i forment encore une suite strictement décroissante. Considérons le caractère $\pi_L = \pi_L(t_1, -t_1, \dots, t_{r+s}, -t_{r+s}, 0)$ de $L = \mathbf{U}(1)^{2(r+s)} \times \mathbf{U}(r'-r, s'-s)$ trivial sur le facteur $\mathbf{U}(r'-r, s'-s)$ et donné par des entiers $\pm t_i$ sur les facteurs $\mathbf{U}(1)$. Il existe une unique sous-algèbre parabolique θ-stable $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}_1$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\pi_L(t_1, -t_1, \dots, t_{r+s}, -t_{r+s}, 0)$ soit dans le good range pour $\mathfrak{q}_1$. Il est clair que $\pi_L \in \mathcal{P}(\mathfrak{q}_1)$. La représentation $\pi = A_{\mathfrak{q}_1}(\pi_L)$ est alors dans le spectre discret de $\mathscr{X}$, et dans $\Pi(\mathbf{U}(p,q),\psi)$. De plus $\epsilon(\pi)$ vérifie les conditions voulues d'après [MR19].

Considérons maintenant un caractère $\pi_L = \pi_L(t_1, -t_1, \dots t_{r+s}, -t_{r+s}, 0)$ pour certains entiers $t_1, \dots, t_{r+s}$ que l'on suppose seulement suffisamment distincts les uns des autres et de leurs opposés. A conjugaison près dans $K = \mathbf{U}(p,0) \times \mathbf{U}(0,q)$ on peut supposer les t_i positifs avec $t_1 > t_2 \dots > t_r$ et $t_{r+1} > t_{r+2} \dots > t_{r+s}$. Ceci détermine une sous algèbre parabolique θ-stable $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\pi_L(t_1, -t_1, \dots t_{r+s}, -t_{r+s}, 0)$ soit dans le good range pour $\mathfrak{q}_1$. Si on pose $t'_i = \frac{m_i}{2} - \frac{n-2i+1}{2}$ où la suite $(t'_i)_{i=1,\dots r+s}$ est obtenue à partir des t_i en les mettant dans l'ordre décroissant, alors $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\pi_L)$ est dans le paquet $\Pi(\mathbf{U}(p,q),\psi)$ et elle contribue au spectre discret de $\mathscr{X}$ (on fait ici agir un élément de $N_K(\mathfrak{t}_0)\backslash N_{\mathbf{G}}(\mathfrak{t}_0) \simeq \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s \backslash \mathfrak{S}_n$ pour ce ramener au calcul précédent) et de même que ci-dessus, $\epsilon(\pi)$ vérifie la proposition voulue. On peut conclure par un argument de comptage pour montrer que les conditions de la proposition sont suffisantes : le nombre d'éléments du paquet $\Pi(\mathbf{U}(p,q),\psi)$ vérifiant ces conditions est le cardinal de $N_K(\mathfrak{t}_0)\backslash N_{\mathbf{G}}(\mathfrak{t}_0) \simeq \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s \backslash \mathfrak{S}_n$. $\square$

REMARQUE 8.3. Les résultats de multiplicité un [MR19] impliquent donc ici que le spectre discret de $\mathscr{X}_{r,s}$ à la propriété de multiplicité un.

REMARQUE 8.4. Un élément du paquet d'Arthur $\Pi(\mathbf{U}(p,q),\psi)$ ne contribue au spectre discret que d'au plus l'un des $\mathscr{X}_{r,s}$ lorsque l'on fait varier r et s .

Cas 4 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Les paramètres s'écrivent $\psi = \bigoplus_{i=1}^{n}((\chi_{m_i} \oplus \chi_{-m_i}) \boxtimes R[1])$.

PROPOSITION 8.5. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi \in \Pi(\mathbf{U}(n,n),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon(\pi) = (\epsilon_1(\pi), \dots, \epsilon_{2n}(\pi))$ vérifie*

$$\# \left\{ i \in [\![1, 2n]\!] \,|\, \epsilon_i(\pi) = (-1)^{i-1} \right\} = n \ \textit{et} \ \epsilon_{2i-1}(\pi)\epsilon_{2i}(\pi) = 1, \ (i = 1, \dots, n).$$

La démonstration est similaire à celle de la proposition 8.2. Il en est de même des propositions analogues des cas qui suivent.

REMARQUE 8.6. Pour $\mathscr{X}' = \mathbf{U}(2r,2s)/\mathbf{U}(r,s)\times\mathbf{U}(r,s)$, les paramètres d'Arthur sont les mêmes que pour $\mathscr{X} = \mathbf{U}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ avec $n = r+s$, mais une représentation π d'un tel paquet ne contribue au plus qu'à un seul des deux spectres : celui de $\mathscr{X}$ si $\epsilon(\pi)$ est comme dans la proposition 8.2, et celui de $\mathscr{X}'$ si $\epsilon(\pi)$ est comme dans la proposition 8.5, les deux cas étant mutuellement exclusifs.

On a aussi, comme dans la remarque 8.3, la propriété de multiplicité un du spectre discret.

Cas 5 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(2p,2q)/\mathbf{Sp}(p,q)$. Les paramètres sont de la forme $\psi = \bigoplus_{i=1}^{p+q}(\chi_{m_i}\boxtimes R[2])$.

PROPOSITION 8.7. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{U}(2p,2q),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon_i(\pi) = -1$, $(i = 1,\dots,p+q)$.*

Cas 6 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(n,n)/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Les paramètres sont de la forme $\psi = \bigoplus_{i=1}^{n}(\chi_{m_i}\boxtimes R[2])$.

PROPOSITION 8.8. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{U}(n,n),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon(\pi)$ est le caractère trivial.*

REMARQUE 8.9. Pour $\mathscr{X}' = \mathbf{U}(2n,2n)/\mathbf{Sp}(n,n)$, les paramètres d'Arthur sont les mêmes que ci-dessus, mais une représentation d'un tel paquet ne contribue au plus qu'à un seul des deux spectres, celui de $\mathscr{X}$ si $\epsilon_i(\pi) = -1$, (i=1,..., n) , et celui de $\mathscr{X}'$ si $\epsilon(\pi)$ est trivial.

Cas 7 et 8 : $\mathbf{SO}(p,q)/\mathbf{SO}(r,s)\times\mathbf{SO}(r',s')$. Les paramètres sont de la forme

$$\psi = \left(\bigoplus_{i=1}^{r+s}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[1]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[2(n-r-s)]),$$

si $p+q = 2n+1$, et

$$\psi = \left(\bigoplus_{i=1}^{r+s}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[1]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[2(n-r-s)-1])\oplus(\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}^{p-n}\boxtimes R[1]),$$

si $p+q = 2n$.

PROPOSITION 8.10. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{SO}(p,q),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon(\pi) = (\epsilon_1(\pi),\dots,\epsilon_{(r+s)}(\pi))$ vérifie*

$$\#\left\{i\in[\![1,(r+s)]\!]\,|\,\epsilon_i(\pi) = (-1)^{i-1}\right\} = r,\quad \#\left\{i\in[\![1,(r+s)]\!]\,|\,\epsilon_i(\pi) = (-1)^{i}\right\} = s$$

(rappelons que ceci dépend du choix d'une donnée de Whittaker ou d'une forme intérieure pure quasi-déployée, un autre choix pourrait inverser les deux conditions).

REMARQUE 8.11. En notant $\mathscr{X}_{r,s}$ l'espace symétrique ci-dessus, on peut faire varier r et s, et on a alors le même résultat que dans la remarque 8.4.

Cas 9 : $\mathbf{SO}(2p,2q)/\mathbf{U}(p,q)$. Les paramètres sont de la forme $\psi = \bigoplus_{i=1}^{n/2}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]$, si $n = p+q$ est pair et $\psi = \left(\bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1])\oplus\left(\mathbf{sgn}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1]\right)$, si $n = p+q$ est impair.

PROPOSITION 8.12. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{SO}(2p,2q),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon_i(\pi) = -1$, pour tout $i = 1,\dots n$.*

Cas 10 : $\mathbf{SO}(n,n)/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Les paramètres sont de la forme $\psi = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]$, si n est pair et $\psi = \left(\bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1])\oplus(\mathbf{Triv}_{W_\mathbb{R}}\boxtimes R[1])$, si n est impair.

PROPOSITION 8.13. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{SO}(n,n),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon(\pi)$ est trivial.*

REMARQUE 8.14. Pour $\mathscr{X}' = \mathbf{SO}(2n,2n)/\mathbf{U}(n,n)$, les paramètres d'Arthur sont les mêmes que ci-dessus, mais une représentation d'un tel paquet ne contribue au plus qu'à un seul des deux spectres, celui de $\mathfrak{X}$ si $\epsilon_i(\pi) = -1$, pour tout $i = 1,\dots n$, et celui de $\mathscr{X}'$ si $\epsilon(\pi)$ est trivial.

Cas 11 : $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2p,\mathbb{R})\times\mathbf{Sp}(2(n-p),\mathbb{R})$. Les paramètres sont de la forme

$$\psi=\left(\bigoplus_{i=1}^{p}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}}\boxtimes R[2(n-2p))+1])$$

avec les m_i impairs.

Proposition 8.15. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R}),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon(\pi)$ est trivial.*

Cas 12 : $\mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$. Les paramètres sont de la forme

$$\psi=\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\delta\left(\frac{m_i}{2},-\frac{m_i}{2}\right)\boxtimes R[2]\right)\oplus(\mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}}\boxtimes R[1])$$

avec les m_i impairs.

Proposition 8.16. *Soit ψ comme ci-dessus et $\pi\in\Pi(\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R}),\psi)$. Alors π est dans le spectre discret de $\mathscr{X}$ si et seulement si $\epsilon_i(\pi)=-1$, pour tout $i=1,\dots,n$.*

Remarques 8.17. Remarquons que le fair range est ici dans le weakly good range. On en déduit que le spectre discret de $\mathscr{X}$ à la propriété de multiplicité un.

— Pour $\mathscr{X}'=\mathbf{Sp}(4n,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})\times\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$, les paramètres d'Arthur sont les mêmes que ci-dessus, mais une représentation π d'un tel paquet ne contribue au plus qu'à un seul des deux spectres, celui de $\mathscr{X}$ si $\epsilon_i(\pi)=-1$, pour tout $i=1,\dots n$, et celui de $\mathscr{X}'$ si $\epsilon(\pi)$ est trivial.

Cas 13 : $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Comme dans le cas 2, les séries discrètes de $\mathscr{X}$ sont les séries discrètes de G distinguées par le fait que leur K-type minimal a des invariants non triviaux sous $K\cap H=\mathbf{O}(n)$. Un paquet de Langlands de séries discrètes de $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$ est déterminé par un caractère infinitésimal entier régulier, c'est-à-dire dans un système de coordonnées usuel, un n-uplet $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où les λ_i forment une suite strictement décroissante constitués d'entiers. Notons $\Pi(\lambda)$ ce paquet de Langlands.

Proposition 8.18. *Soit $\Pi(\lambda)$ comme ci-dessus un paquet de Langlands de séries discrètes de $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Alors soit tous les éléments de ce paquet sont des séries discrètes de $\mathscr{X}$, soit aucun ne l'est, et la première éventualité se produit exactement quand les entiers λ_i ont une parité qui alterne en commençant par un nombre impair, c'est-à-dire pour tout $i\in[1,n]$, $\lambda_i\equiv i[2]$.*

Remarque 8.19. Si les λ_i ont bien une parité qui alterne mais en commençant par un nombre pair, on trouverait des séries discrètes pour $L^2_d(\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))_\chi$ où χ est le caractère $\mathbf{sgn}\circ\det$ de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Remarquons que $\rho=(n,n-1,\dots,1)$ de sorte que $\lambda-\rho$ est toujours un n-uplet d'entiers. Notons $\pi_L(t_1,\dots,t_n)$ le caractère de $L=\mathbf{U}(1)^n$ donné par le n-uplet d'entiers $(t_1,\dots,t_n)$. La série discrète $A_{\mathfrak{q}}(\pi_L(t_1,\dots,t_n))$, où $\mathfrak{q}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{u}$ est la sous-algèbre de Borel telle que $\pi_L(t_1,\dots,t_n)$ soit dans le good range pour $\mathfrak{q}$ admet un K-type minimal ayant des invariants non triviaux sous $K\cap H=\mathbf{O}(n)$ si et seulement si $\pi_L\otimes\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})$ a une restriction triviale à $L\cap K\cap H=\{\pm1\}^n$. Or on calcule facilement le caractère $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})$ de $L\cap H\cap K$: dans le système de coordonnées usuel où les racines (toutes imaginaires) sont les $\pm e_i\pm e_j$, $1\le i<j\le n$, $\pm2e_i$, $1\le i\le n$, les racines compactes étant les $\pm(e_i-e_j)$. Les racines non compactes longues positives ($\pm2e_i$, selon le signe de t_i) ont une restriction triviale à $L\cap K\cap H$ et la contribution des racines non compactes courtes positives ($\pm(e_i+e_j)$, selon le signe de t_i+t_j) donne le caractère $\mathbf{sgn}^{n-1}$ sur chaque facteur $\{\pm1\}$ de $L\cap K\cap H$. Ainsi la condition cherchée est que les t_i sont tous pairs si n est impair, et tous impairs si n est pair. On en déduit le résultat. □

9. Le sous-groupe L

Dans cette section, nous déterminons le sous-groupe $L=\mathrm{Cent}_G(\mathfrak{t}_0)$ (*cf.* section 2.4) par un argument de réduction au rang un, et nous commençons par là. On utilise aussi le fait que l'on connait la forme générale des c-Levi des groupes classiques :

$G=\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $L\simeq(\prod_{i=1}^m\mathbf{GL}(a_i,\mathbb{C}))\times\left(\prod_{j=1}^s\mathbf{GL}(a'_j,\mathbb{R})\right)$, avec $2\sum_{i=1}^m a_i+\sum_{j=1}^s a'_j=n$,

$G = \mathbf{U}(p,q)$, $L \simeq \prod_{i=1}^s \mathbf{U}(p_i,q_i)$, avec $\sum_{i=1}^s (p_i,q_i) = (p,q)$,
$G = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $L \simeq (\prod_{i=1}^s \mathbf{U}(p_i,q_i)) \times \mathbf{Sp}(2a,\mathbb{R})$, avec $2\,(\sum_{i=1}^s p_i + q_i) + a = n$,
$G = \mathbf{SO}(p,q)$, $L \simeq (\prod_{i=1}^s \mathbf{U}(p_i,q_i)) \times \mathbf{SO}(r,s)$, avec $\sum_{i=1}^s (2p_i, 2q_i) + (r,s) = (p,q)$.

9.1. *Le rang un.* Nous calculons L au cas par cas.

Cas 1 : $\mathscr{X} = \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(1,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(1,\mathbb{R})$. Le sous-groupe H est le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$. Un sous-espace de Cartan compact pour $\mathscr{X}$ est l'espace $\mathfrak{t}_0$ des matrices antisymétriques et son centralisateur L dans G est $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0 \right\}$. Ce groupe L est isomorphe à $\mathbb{C}^\times$, et $L \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^\times \right\} \simeq \mathbb{R}^\times$.

Cas 2 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(1)/\mathbf{O}(1)$. Ce cas est trivial. On a $L = \mathbf{U}(1)$ et $L \cap H = H = \mathbf{O}(1)$.

Cas 3 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{U}(2)/\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$. On réalise G comme l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients complexes M telles que ${}^t\bar{M}M = I_2$, et H est le sous-groupe diagonal. L'involution σ est la conjugaison par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace propre $\mathfrak{s}$ de σ dans $\mathfrak{g}$ pour la valeur propre -1 est l'ensemble des matrices antihermitiennes. Un sous-espace de Cartan est donc donné par $\mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. On a respectivement

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} z\cos\theta & z\sin\theta \\ -z\sin\theta & z\cos\theta \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \theta \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbf{U}(1) \end{matrix} \right\} \simeq \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1),\ L \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},\ z \in \mathbf{U}(1) \right\} \simeq \mathbf{U}(1).$$

Cas 4 : $\mathscr{X} = \mathbf{U}(1,1)/\mathbf{GL}(1,\mathbb{C})$. On réalise $\mathbf{U}(1,1)$ comme le sous-groupe de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ préservant la forme hermitienne $q : (x,y) \mapsto \bar{x}y + x\bar{y}$. Le sous groupe $H = \mathbf{GL}(1,\mathbb{C})$ est alors réalisé comme l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^{-1} \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. L'involution σ est la conjugaison par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre de σ pour la valeur propre -1 dans $\mathfrak{g}_0$ et un sous-espace de Cartan sont donnés respectivement par

$$\mathfrak{s}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix},\ b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le centralisateur L dans G de $\mathfrak{t}_0$ est

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\ a\bar{a} + b\bar{b} = 1,\ a\bar{b} + \bar{a}b = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{z_1+z_2}{2} & \frac{z_1-z_2}{2} \\ \frac{z_1-z_2}{2} & \frac{z_1+z_2}{2} \end{pmatrix}, z_1, z_2 \in \mathbf{U}(1) \right\} \simeq \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1).$$

et $L \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},\ z \in \mathbf{U}(1) \right\} \simeq \mathbf{U}(1)$.

Cas 5 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{U}(2,0)/\mathbf{Sp}(1,0) = \mathbf{U}(2)/\mathbf{SU}(2)$. Ici le sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}_0$ est central et donc $L = G = \mathbf{U}(2)$.

Cas 6 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{U}(1,1)/\mathbf{Sp}(2,\mathbb{R}) = \mathbf{U}(1,1)/\mathbf{SU}(1,1)$. Ici le sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}_0$ est central, et donc $L = G = \mathbf{U}(1,1)$.

Cas 7 et 8 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{SO}(2)/\mathbf{SO}(1) \times \mathbf{SO}(1)$. Ce cas est trivial

Cas 9 : $\mathbf{SO}(4)/\mathbf{U}(2)$. On réalise $\mathbf{SO}(4)$ de la façon suivante : soit $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \, a, b \in \mathbb{C} \right\}$, que l'on peut voir soit comme un espace vectoriel réel de dimension 4, muni de la forme quadratique euclidienne donnée par le déterminant, soit comme un espace complexe de dimension 2, muni de la forme hermitienne, elle aussi donnée par le déterminant. On note $\mathcal{M}^\times$ les éléments inversibles de $\mathcal{M}$, et l'on pose $G = \{(h, h') \in \mathcal{M}^\times \times \mathcal{M}^\times, \ \det(h) = \det(h')\} / \sim$, la relation d'équivalence $\sim$ étant définie par $(h, h') \sim (\lambda h, \lambda h')$, $h, h' \in \mathcal{M}^\times$, $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. L'action de $(h, h') \in \mathcal{M}^\times \times \mathcal{M}^\times$ sur $m \in \mathcal{M}$ est donnée par : $(h, h') \cdot m = hm(h')^{-1}$. Elle passe au quotient et définit une action de G sur $\mathcal{M}$ qui identifie G et $\mathbf{SO}(\mathcal{M}) = \mathbf{SO}(4)$.

Soit H le sous-groupe de G des éléments qui commutent à l'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathcal{M}$ donnée par la multiplication à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, h' \right), \, a \in \mathbb{C}^\times, \, h' \in \mathcal{M}^\times, \, \det(h') = a\bar{a} \right\} / \sim .$$

Son action sur $\mathcal{M}$ l'identifie à $\mathbf{U}(\mathcal{M}) = \mathbf{U}(2)$. Notons $\operatorname{Det} \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, h' \right) = \frac{a}{\bar{a}}$. C'est le déterminant usuel via cette identification. L'involution σ de G dont H est le sous-groupe des points fixes est donnée par la conjugaison sur le premier facteur de $\mathcal{M}^\times \times \mathcal{M}^\times$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ de G et H sont respectivement :

$$\mathfrak{g} = \{(X, X') \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \ \operatorname{Tr}(X) = \operatorname{Tr}(X')\} / \sim,$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, X' \right), \, \alpha \in \mathbb{C}, \, X' \in \mathcal{M}, \, \operatorname{Tr}(X) = \alpha + \bar{\alpha} \right\} / \sim .$$

L'espace propre $\mathfrak{s}$ pour la valeur propre -1 de σ dans $\mathfrak{g}$ et le sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{s}$ sont donnés par

$$\mathfrak{s} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \, \beta \in \mathbb{C} \right\} / \sim, \quad \mathfrak{t} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \, \beta \in \mathbb{R} \right\} / \sim .$$

On trouve alors

$$L = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, h' \right), \, a, b \in \mathbb{R}, \, h' \in \mathcal{M}^\times, \, \det(h') = a^2 + b^2 \right\} / \sim \simeq \mathbf{U}(2),$$

et

$$L \cap H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, h' \right), \, a \in \mathbb{R}^\times, \, h' \in \mathcal{M}^\times, \, \det(h') = a^2 \right\} / \sim \simeq \mathbf{SU}(2).$$

Cas 10 : $\mathbf{SO}(2,2)/\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit de la forme quadratique donnée par le déterminant, dont la signature est ici $(2,2)$. On définit alors G et son action sur $\mathcal{M}$ comme dans le cas précédent. Notons que $\mathcal{M}^\times = \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$. Ceci identifie G avec $\mathbf{SO}(2,2)$. Soit H le sous-groupe de G défini par

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, h' \right), \, a, b \in \mathbb{R}^\times, \, h' \in \mathcal{M}^\times, \, \det(h') = ab \right\} / \sim .$$

Ce groupe s'identifie de manière évidente à $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ et $\operatorname{Det} : H \longrightarrow \mathbb{R}^\times$, $\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, h' \right) \mapsto \frac{b}{a}$ s'identifie au déterminant usuel. L'involution σ de G dont H est le sous-groupe des points fixes est donnée par la conjugaison sur le premier facteur de $\mathcal{M}^\times \times \mathcal{M}^\times$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ de G et H sont respectivement :

$$\mathfrak{g} = \{(X, X') \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \ \operatorname{Tr}(X) = \operatorname{Tr}(X')\} / \sim,$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, X' \right), \, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \, X' \in \mathcal{M}, \, \operatorname{Tr}(X) = \alpha + \beta \right\} / \sim$$

L'espace propre $\mathfrak{s}$ pour la valeur propre -1 de σ dans $\mathfrak{g}$ et le sous-espace de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{s}$ sont donnés par

$$\mathfrak{s} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, 0 \right),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} / \sim, \quad \mathfrak{t} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, 0 \right),\ \beta \in \mathbb{R} \right\} / \sim .$$

Son centralisateur dans G est le sous-groupe

$$L = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, h' \right),\ a, b \in \mathbb{R},\ h' \in \mathcal{M}^\times,\ \det(h') = a^2 + b^2 \right\} / \sim \simeq \mathbf{U}(1,1),$$

et

$$L \cap H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, h' \right),\ a \in \mathbb{R}^\times,\ h' \in \mathcal{M}^\times,\ \det(h') = a^2 \right\} / \sim \simeq \mathbf{SU}(1,1).$$

Cas 11 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2,\mathbb{R}) \times \mathbf{Sp}(2,\mathbb{R})$. On réalise $\mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})$ comme l'ensemble des matrices M dans $\mathbf{GL}(4,\mathbb{R})$ telle que ${}^tMJM = J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'involution σ est la conjugaison par la matrice $\begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}$. Un sous-espace de Cartan est

$$\mathfrak{t}_0 = \left\{ \tau(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

et son centralisateur L dans G est l'ensemble des éléments commutant avec la matrice $\tau = \tau(1)$. On remarque que ${}^t\tau = \tau^{-1} = -\tau$. Les éléments M de $\mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})$ commutant avec τ vérifient alors ${}^tM(-\tau)JM = (-\tau)J$, et préservent donc la forme bilinéaire symétrique définie par la matrice symétrique $-\tau J$. La forme symplectique définie par J et la forme bilinéaire symétrique définie par $-\tau J$ sont respectivement

$$((x,y,z,t),(x',y',z',t')) \mapsto xy' - yx' - zt' + tz', \quad ((x,y,z,t),(x',y',z',t')) \mapsto xt' + yz' + zy' + tx'$$

Identifions $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{C}^2$ via $(x,y,z,t) \mapsto (x+iz, t+iy)$. Les éléments de L préservent alors la forme hermitienne $\langle (x+iz, t+iy), (x'+iz', t'+iy') \rangle = \overline{(x+iz)}(t'+iy') + \overline{(t+iy)}(x'+iz')$ de signature $(1,1)$. On peut remonter les calculs et voir que les éléments de $\mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})$ qui préservent cette forme hermitienne sont exactement ceux de L. Ainsi $L \simeq \mathbf{U}(1,1)$ et l'on vérifie que $L \cap H = \mathbf{SU}(1,1)$ dans cette identification.

Cas 12 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})/\mathbf{Sp}(2,\mathbb{C})$. On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ à

$$\mathcal{E} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, x_1, x_2, \in \mathbb{R} \right\}$$

et $H = \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ à l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{E}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est le groupe de symétrie de la forme symplectique sur $\mathcal{E}^2$ définie par

$$\omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right) = XY' - YX' = \begin{pmatrix} x_1y_1' - x_2y_2' - y_1x_1' + y_2x_2' & x_2y_1' + x_1y_2' - y_2x_1' - y_1x_2' \\ -x_2y_1' - x_1y_2' + y_2x_1' + y_1x_2' & x_1y_1' - x_2y_2' - y_1x_1' + y_2x_2'. \end{pmatrix}$$

Introduisons les deux formes symplectiques réelles sur $\mathbb{R}^4$ données par les parties réelles et imaginaires de ω :

$$\omega_1\left({}^t(x_1,x_2,y_1,y_2), {}^t(x_1',x_2',y_1',y_2')\right) = x_1y_1' - x_2y_2' - y_1x_1' + y_2x_2',$$
$$\omega_2\left({}^t(x_1,x_2,y_1,y_2), {}^t(x_1',x_2',y_1',y_2')\right) = x_2y_1' + x_1y_2' - y_2x_1' - y_1x_2',$$

et les matrices correspondantes

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$(9.1)\qquad {}^tJ_1 = J_1^{-1} = -J_1, \quad {}^tJ_2 = J_2^{-1} = -J_2, \quad J_1J_2 = -J_2J_1.$$

Soient σ_1 et σ_2 les involutions de $\mathbf{GL}(4,\mathbb{R})$ définies par :

$$\sigma_1(g) = J_1({}^tg^{-1})J_1^{-1}, \quad \sigma_2(g) = J_2({}^tg^{-1})J_2^{-1}.$$

Soit G la réalisation de $\mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})$ donnée par la première de ces formes, c'est-à-dire

$$G = \left\{ g \in \mathbf{GL}(4,\mathbb{R}) \,|\, {}^tgJ_1g = J_1 \right\}.$$

C'est le groupe des points fixes de σ_1. Les relations (9.1) impliquent que les involutions σ_1, σ_2, et θ (l'involution de Cartan $g \mapsto {}^tg^{-1}$) commutent, et G est donc stable par θ et σ_2. Soit H le sous-groupe des points fixes de σ_2 dans G. Il s'identifie comme ci-dessus avec $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Sur les algèbres de Lie, on obtient les décompositions

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \overset{\theta}{\oplus} \mathfrak{p}_0, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \overset{\sigma_2}{\oplus} \mathfrak{s}_0, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{s}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{s}_0.$$

Ici

$$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, b \in \mathbb{R}, \right\}$$

est un sous-espace de Cartan. Son centralisateur dans G est le c-Levi $L = \{g \in G \,|\, gJ_1 = J_1g\}$, car J_1 est un élément générique de $\mathfrak{t}_0$, et finalement, on trouve

$$L = \{g \in G \,|\, {}^tg^{-1} = g\} = K.$$

Ainsi L est le compact maximal de $\mathbf{Sp}(4,\mathbb{R})$, donc isomorphe à $\mathbf{U}(2)$, et par cet isomorphisme $L \cap H$ devient $\mathbf{SU}(2)$.

Cas 13 : $\mathscr{X} = G/H = \mathbf{Sp}(2,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(1,\mathbb{R})$. Un sous-espace de Cartan est $\mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \, a \in \mathbb{R} \right\}$ et $L = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \, \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbf{U}(1), \quad L \cap H = \{\pm I_2\}.$

9.2. *Le cas général.* Le calcul de L en rang quelconque se ramène au rang un par un argument général que nous détaillons seulement dans le cas 1. L'involution σ est la conjugaison par la matrice diagonale dont les coefficients sont

$$(\underbrace{1,-1,1,-1\ldots,1,-1}_{2p},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2p}).$$

On introduit le sous-groupe $G' = \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$, stable par l'involution σ, et l'involution de Cartan θ, de sorte que $H' = G' \cap H = (\mathbf{GL}(1,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(1,\mathbb{R}))^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$. L'espace symétrique $\mathscr{X}' = G'/H'$ est alors isomorphe à $(\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})/\mathbf{GL}(1,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(1,\mathbb{R}))^p$, c'est-à-dire un produit d'espaces de rang un étudiés dans la section précédente. Soit $\mathfrak{t}_0$ un sous-espace de Cartan compact de $\mathfrak{g}_0'$ pour l'espace symétrique $\mathscr{X}'$, et soit L' son centralisateur dans G'. D'après les calculs de la section 9.1, L' est isomorphe à un produit $(\mathbb{C}^\times)^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$. Par égalité des rangs de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$ (tous deux égaux à p), $\mathfrak{t}_0$ est encore un sous-espace de Cartan compact de $\mathfrak{g}$ pour l'espace symétrique $\mathscr{X}$, et son centralisateur L dans G contient bien sur L'. Or les considérations de la remarque 4.3 nous donnent l'isomorphie des complexifiés de L' et L et le fait que L est produit de groupes généraux linéaires complexes et réels. Ceci implique alors l'égalité de L et L', et de plus $L \cap H = L' \cap H = L' \cap H'$. Pour résumer, on a donc

$$L = \left(\mathbb{C}^\times\right)^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R}), \quad L \cap H = (\mathbb{R}^\times)^p \times \mathbf{GL}(n-2p,\mathbb{R})$$

Dans les autres cas, le résultat des calculs est indiqué dans la Table 2.

Remarque 9.1. Dans le cas 3 et 4, pour l'inclusion des facteurs $\mathbf{U}(1)$ de $L \cap H$ dans le facteur $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$, voir le cas de rang 1.

Références

[ABV92] J. Adams, D. Barbasch & D. A. Vogan, Jr. – *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics, vol. 104, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[Art84] J. Arthur – « On some problems suggested by the trace formula », in *Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983)*, Lecture Notes in Math., vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, p. 1–49.

[CM93] D. H. Collingwood & W. M. McGovern – *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[FJ80] M. Flensted-Jensen – « Discrete series for semisimple symmetric spaces », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 253–311.

[Kos61] B. Kostant – « Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem », *Ann. Math. (2)* **74** (1961), p. 329–387 (English).

[KS17] F. Knop & B. Schalke – « The dual group of a spherical variety », *Trans. Moscow Math. Soc.* **78** (2017), p. 187–216.

[KV95] A. W. Knapp & D. A. Vogan, Jr. – *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Lan89] R. P. Langlands – « On the classification of irreducible representations of real algebraic groups », in *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Math. Surveys Monogr., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 101–170.

[MR19] C. Mœglin & D. Renard – « Sur les paquets d'Arthur des groupes unitaires et quelques conséquences pour les groupes classiques », *Pacific J. Math.* **299** (2019), no. 1, p. 53–88.

[MR20] ———, « Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques réels », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **22** (2020), no. 6, p. 1827–1892.

[OM84] T. Ōshima & T. Matsuki – « A description of discrete series for semisimple symmetric spaces », in *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 331–390.

[Sch83] H. Schlichtkrull – « The Langlands parameters of Flensted-Jensen's discrete series for semisimple symmetric spaces », *J. Funct. Anal.* **50** (1983), no. 2, p. 133–150.

[SV80] B. Speh & D. A. Vogan, Jr. – « Reducibility of generalized principal series representations », *Acta Math.* **145** (1980), no. 3-4, p. 227–299.

[SV17] Y. Sakellaridis & A. Venkatesh – « Periods and harmonic analysis on spherical varieties », *Astérisque* (2017), no. 396, p. viii+360.

[Vog81] D. A. Vogan, Jr. – *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Mathematics, vol. 15, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

[Vog86] ———, « The unitary dual of GL(n) over an Archimedean field », *Invent. Math.* **83** (1986), no. 3, p. 449–505.

[Vog88] ———, « Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces », in *Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima, 1986*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 14, Academic Press, Boston, MA, 1988, p. 191–221.

[Wal10] J.-L. Waldspurger – « Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire », *Manuscripta Math.* **133** (2010), no. 1-2, p. 41–82.

[Wik] Wikipedia – « Symmetric spaces », `https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_space#Classification_results`.

Diskretne serije simetričnih prostora i Arthurovi paketi

Colette Moeglin i David Renard

Sažetak. U ovom radu provjeravamo Sakellaridis-Venkatesh slutnju dajući opis diskretnog sprektra sferičke mnogostrukosti $\mathscr{X} = G/H$ u terminima Langlands-Arthurovog formalizma kada je G klasična realna grupa i $\mathscr{X}$ simetrični prostor. Nadalje, eksplicitno određujemo reprezentacije u relevantnim Arthurovim paketima koji se pojavljuju u diskretnom spektru i dobijamo određene rezultate multipliciteta jedan.