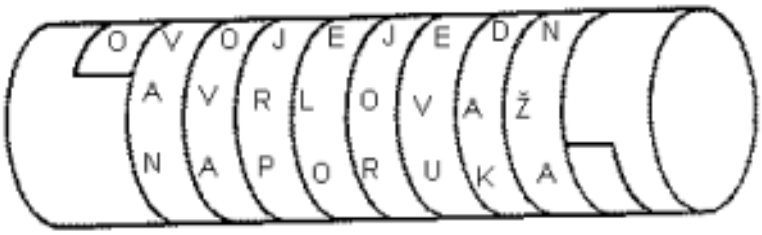
Hrvatski matematički elektronski časopis math.e

http://www.math.hr/~mathe/

Andrej Dujella: Vigenèreova šifra

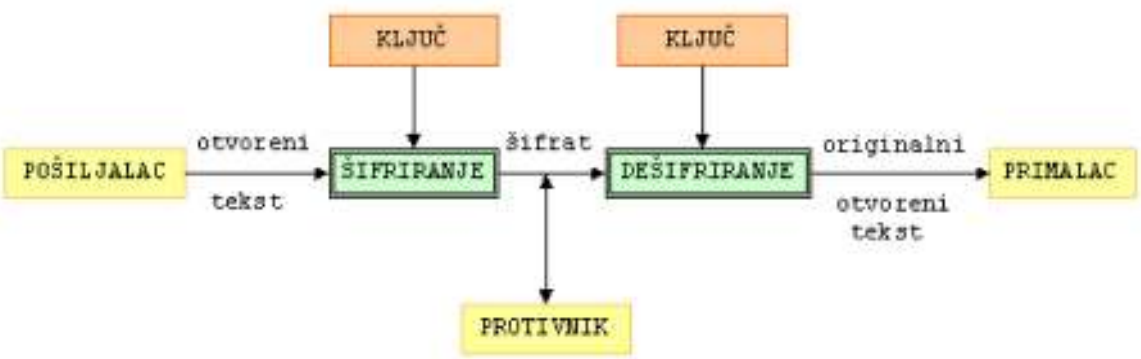
1. Uvod

Ljudi su od davnina željeli "sigurno" komunicirati, ali bili su svjesni da njihove poruke često putuju "nesigurnim komunikacijskim kanalima". Nekoć su to bile nesigurne staze na kojima su glasnike vrebale svakojake opasnosti, danas su to možda nedovoljno sigurne telefonske linije ili računalne mreže. Iako su se kroz stoljeća načini prenošenja poruka uvelike promijenili, osnovni problem zapravo je ostao isti, a to je kako onemogućiti onoga tko može nadzirati kanal kojim se prenosi poruka da dozna njezin sadržaj. Načinima rješavanja ovog problema bavi se znanstvena disciplina koja se zove *kriptografija*. Riječ *kriptografija* grčkog je podrijetla i znači *tajnopis*.



Neki elementi kriptografije naziru se već kod starih Grka. Naime, Spartanci su već u 5. stoljeću prije Krista u vojne svrhe upotrebljavali napravu za šifriranje zvanu *skital*. To je bio drveni štap oko kojega se namotavala vrpca od pergamenta na koju se uzdužno pisala poruka. Nakon upisivanja poruke vrpca bi se odmotala, a na njoj bi ostali izmiješani znakovi koje je mogao pročitati samo onaj tko je imao štap jednake debljine.

Osnovni zadatak kriptografije je omogućavanje dvjema osobama (zvat ćemo ih pošiljalac i primalac) da komuniciraju preko nesigurnog komunikacijskog kanala na način da treća osoba (njihov protivnik) ne može razumjeti njihove poruke. Poruku koju pošiljalac želi poslati primaocu zovemo *otvoreni tekst*. To može biti tekst na njihovom materinjem jeziku, numerički podatci ili bilo što drugo. Pošiljalac transformira otvoreni tekst koristeći unaprijed dogovoreni *ključ*. Taj postupak zove se *šifriranje*, a dobiveni rezultat *šifrat* ili *kriptogram*. Nakon toga pošiljalac pošalje šifrat preko nekog komunikacijskog kanala. Protivnik prisluškujući može doznati sadržaj šifrata, ali ne može odrediti otvoreni tekst. Za razliku od njega, primalac koji zna ključ kojim je šifrirana poruka može *dešifrirati* šifrat i odrediti otvoreni tekst.



Za razliku od dešifriranja, *kriptoanaliza* ili *dekriptiranje* je znanstvena disciplina koja se bavi proučavanjem postupaka za čitanje skrivenih poruka bez poznavanja ključa. *Kriptologija* je pak grana znanosti koja obuhvaća i kriptografiju i kriptoanalizu.

Kriptografski algoritam ili *šifra* je matematička funkcija koja se koristi za šifriranje i dešifriranje. Općenito, radi se o dvjema funkcijama, jednoj za šifriranje (njezini argumenti su ključ i otvoreni tekst), a drugoj za dešifriranje (njezini argumenti su ključ i šifrat). Skup svih mogućih vrijednosti ključeva zovemo *prostor ključeva*. *Kriptosustav* se sastoji od kriptografskog algoritma, te svih mogućih otvorenih tekstova, šifrata i ključeva.

Funkcije šifriranja i dešifriranja koje odgovaraju ključu K označavat ćemo s e_K, odnosno d_K. One su jedna drugoj inverzne. Kriptosustave kod kojih je iz poznavanja funkcije e_K lako izračunati funkciju d_K nazivamo *simetrični kriptosustavi*. Njihova sigurnosti leži u tajnosti ključa. Dakle, pošiljalac i primalac moraju prije same komunikacije *tajno* razmijeniti ključ. Kako im nije dostupan "sigurni komunikacijski kanal" (jer inače ne bi ni imali potrebu za šifriranjem poruka), ovo može biti veliki problem.

Postoje i asimetrični kriptosustavi ili *kriptosustavi s javnim ključem*. Kod njih se za šifriranje koriste funkcije e_K koje su "jednosmjerne" (one se računaju lako, ali njihov inverz vrlo teško). To znači da funkcija za šifriranje e_K može biti javna, dok samo funkcija za dešifriranje d_K mora biti tajna. Kako su ovakvi kriptosustavi mnogo sporiji od najboljih simetričnih kriptosustava, u praksi se kriptosustavi s javnim ključem koriste za sigurnu razmjenu ključeva koji se potom koriste u šifriranju poruke nekim simetričnim kriposustavom. U ovom članku nećemo se baviti kriptosustavima s javnim ključem. Recimo ipak da se svi oni zasnivaju na teškim matematičkim problemima. Jedan od njih je faktorizacija velikih prirodnih brojeva. Naime, mnogo je lakše pomnožiti dva broja nego njihov umnožak rastaviti na faktore. Uvjerite se u to i sami rješavajući sljedeća dva zadatka:

- pomnožite (na ruke) brojeve 1987 i 2741;
- rastavite na faktore (bez uporabe računala) broj 4505143.

Metode koje se najčešće koriste kod simetričnih kriptosustava su zamjena (*supstitucija*) i premještanje (*transpozicija*), te njihove kombinacije. Gore spomenuta naprava "skital" primjer je transpozicijske šifre. I supstitucijske šifre imaju dugu povijest, pa ćemo sada o njima nešto više reći. Vidjet ćemo kako se neke od najpoznatijih supstitucijskih šifara mogu "razbiti" korištenjem nekih statističkih svojstava jezika na kojemu je pisana poruka.

2. Supstitucijske šifre

Znameniti rimski vojskovođa i državnik Julije Cezar u komunikaciji sa svojim prijateljima koristio se sa šifrom u kojoj su se slova otvorenog teksta zamjenjivala slovima što su se u alfabetu nalazila tri mjesta dalje od njih (A $\mapsto$ D, B $\mapsto$ E, ... , Z $\mapsto$ C). Ako bismo upotrijebili današnji engleski alfabet od 26 slova, onda bi poznata izreka

VENI VIDI VICI

bila šifrirana ovako:

YHQL YLGL YLFL.

Cezarovu šifru možemo pregledno zapisati na sljedeći način:

otvoreni tekst	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
šifrat	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Najpoznatije klasične supstitucijske šifre definiraju se nad engleskim (međunarodnim) alfabetom od 26 slova. Pritom se u definiciji često koristi ova korespondencija između slova alfabeta i skupa $\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \ldots, 25\}$:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

U skladu s tim, ako budemo radili s otvorenim tekstom na hrvatskom jeziku, onda ćemo Č i Ć zamijeniti s C, a Đ, Dž, Lj, Nj, Š, Ž redom s DJ, DZ, LJ, NJ, S, Z.

Na skupu $\mathbb{Z}_{26}$ možemo definirati zbrajanje modulo 26 na sljedeći način: $a + b \bmod 26$ je ostatak pri dijeljenju broja $a + b$ s 26.

Danas se Cezarovom šifrom nazivaju i šifre istog oblika s pomakom različitim od 3. Dakle, *Cezarovu šifru* možemo definirati na sljedeći način:

> Za $x, y, K \in \mathbb{Z}_{26}$ definiramo
>
> $$e_K(x) = x + K \bmod 26, \quad d_K(y) = y - K \bmod 26.$$

Očito je $d_K(e_K(x)) = x$, kao što se i zahtjeva u definiciji kriptosustava. Za $K = 3$ dobiva se originalna Cezarova šifra.

Primjer 1: *Dekriptirajte šifrat* NXBGZYQG *dobiven Cezarovom šifrom.*

Budući da je prostor ključeva vrlo malen (ima ih 26), zadatak možemo riješiti "grubom silom", tj. tako da ispitamo sve moguće ključeve dok ne dođemo do nekog smislenog teksta. Za $d_0, d_1, \ldots$ dobivamo redom:

N	X	B	G	Z	Y	Q	G
M	W	A	F	Y	X	P	F
L	V	Z	E	X	W	O	E
K	U	Y	D	W	V	N	D
J	T	X	C	V	U	M	C
I	S	W	B	U	T	L	B
H	R	V	A	T	S	K	A

Dakle, ključ je $K = 6$, a otvoreni tekst je HRVATSKA.

Cezarova šifra je poseban slučaj *supstitucijske šifre* koja je definirana s:

> Neka su $x, y \in \mathbb{Z}_{26}$. Za svaku permutaciju π skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$ definiramo
>
> $$e_\pi(x) = \pi(x), \quad d_\pi(y) = \pi^{-1}(y),$$
>
> gdje je π^{-1} inverzna permutacija od π.

Ovdje imamo $26! \approx 4 \cdot 10^{26}$ mogućih ključeva, tako da je napad ispitivanjem svih mogućih ključeva praktički nemoguć čak i uz pomoć računala. Međutim, supstitucijsku šifru lako je moguće dekriptirati koristeći neka statistička svojstva jezika na kojemu je pisan otvoreni tekst.

Osnovna metoda je *analiza frekvencije slova*; broji se pojavljivanje svakog slova u šifratu, te se distribucija slova u šifratu uspoređuje s poznatim podatcima o distribuciji slova u jeziku otvorenog teksta. Vrlo je vjerojatno da najfrekventnija slova šifrata odgovaraju najfrekventnijim slovima jezika. Ta vjerojatnost raste s duljinom šifrata. Također mogu biti korisni i podatci o najčešćim *bigramima* (parovima slova) i *trigramima* (nizovima od tri slova) u jeziku.

Začetci analize frekvencija mogu se naći u 14. stoljeću u djelu arapskog autora Ibn ad-Duraihima, a čini se da su tu metodu u isto vrijeme poznavali i talijanski kriptografi.

Navest ćemo osnovne podatke za hrvatski jezik. Pritom smatramo da u tekstu nema interpunkcijskih znakova ni razmaka između riječi (u protivnom bi kriptoanaliza bila mnogo lakša), te da su slova Č, Ć, Đ, Dž, Lj, Nj, Š, Ž iz hrvatske abecede zamijenjena na ranije opisani način slovima iz međunarodnog alfabeta.

FREKVENCIJA SLOVA (u promilima)

A	115	K	36
I	98	V	35
O	90	L	33
E	84	M	31
N	66	P	29
S	56	C	28
R	54	Z	23
J	51	G	16
T	48	B	15
U	43	H	8
D	37	F	3

Spomenimo da su najfrekventnija slova u engleskom jeziku E, T, A, O, I, N, S, R, H, L.
U njemačkom jeziku to su E, N, I, R, S, A, T, D, H, U, a u francuskom E, A, I, S, T, N, R, U, L, O.

Najfrekventniji bigrami u hrvatskom jeziku su:

JE (2.7 %), NA (1.5 %), RA (1.5 %), ST, AN, NI, KO, OS, TI, IJ, NO, EN, PR (1.0 %).

Ovdje je korisno uočiti da je JE najfrekventniji bigram, iako J nije među najfrekventnijim slovima. Više od pola pojavljivanja slova J otpada na bigram JE. Druga zanimljivost je da su svi najfrekventniji bigrami oblika suglasnik-samoglasnik ili samoglasnik-suglasnik, osim bigrama ST i PR. Konačno, najfrekventniji *recipročni bigrami* su NA i AN (1.5 % + 1.4 %), te NI i IN (1.3 % + 0.9 %). Jedino su kod ovih dvaju parova frekvencije obaju bigrama veće od 0.9 %.

Daleko najfrekventniji trigram u hrvatskom jeziku je IJE (0.6 %). Slijede (s frekvencijama između 0.3 % i 0.4 %): STA, OST, JED, KOJ, OJE, JEN.

U engleskom jeziku najfrekventniji bigrami su

TH, HE, AN, IN, ER, RE, ON, ES, TI, AT,

a trigrami THE, ING, AND, ION, TIO.

Primjer 2: *Treba dekriptirati šifrat*

TQCWT QCKIQ RWNOQ OBCEW OQVKB UKAPK

OQOQB CQPQA JGDUQ EQORW TSJGR WEQKY

WGTWC JKRBI KZGVO GBQ

dobiven supstitucijskom šifrom, ako je poznato da je otvoreni tekst na hrvatskome jeziku.

Analizu frekvencija slova i bigrama možemo izvršiti pomoću *tablice* u kojoj pokraj svakog slova zapisujemo sve njegove sljedbenike u šifratu. Iz tablice iščitavamo da su najfrekventnija slova u šifratu:

Q (13), K (7), O (7), W (7), B, C, G, R, T, E, J,

dok su najfrekventniji bigrami:

OQ (4), QO (3), RW (3), BC, EQ, JG, QC, TQ, WT.

Logično je pretpostaviti da je *e*(A) = Q. Također uočavamo recipročne bigrame OQ i QO, što nas vodi do zaključka da je vjerojatno *e*(N) = O. Uočavamo da je većina pojavljivanja slova R vezana uz bigram RW, te da je W jedno od najfrekventnijih slova u šifratu. To nas pak vodi do pretpostavke da je *e*(J) = R i *e*(E) = W. Pokušajmo otkriti šifrat čestog bigrama ST (najčešćeg od neotkrivenih). Najozbiljniji kandidati su BC i JG. Možemo uzeti neki od njih pa vidjeti što ćemo dobiti. Krenut ćemo s BC jer frekvencije od B i C odgovaraju očekivanim frekvencijama od S i T. Dakle, uzmimo da je *e*(S) = B i *e*(T) = C. Od najfrekventnijih slova u hrvatskom jeziku još nismo odgonetnuli šifrate od I i O. Glavni kandidati su K i G, i to upravo u tom redoslijedu. Uzmimo da je *e*(I) = K i *e*(O) = G. Rezimirajmo ono što smo do sada pretpostavili:

```
otvoreni tekst   A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U W X Y Z
    šifrat       q       w       k r       o g       b c
```

Ubacimo ove pretpostavke u polazni šifrat:

```
TQCWT QCKIQ RWNOQ OBCEW OQVKB UKAPK
 ate  ati a je na nst e na is  i  i

OQOQB CQPQA JGDUQ EQORW TSJGR WEQKY
nanas ta a   o  a  anje    oj e ai

WGTWC JKRBI KZGVO GBQ
eo et  ijs  i o n osa
```

Sada već imamo dovoljno elemenata otvorenog teksta da možemo postupno odgonetavati čitave riječi (npr. prva riječ: MATEMATIKA; zadnja riječ: ODNOSA). Konačno dobivamo otvoreni tekst

```
Matematika je znanstvena disciplina nastala
proučavanjem brojeva i geometrijskih odnosa
```

Alfabet šifrata izgleda ovako:

```
q s u v w x y z k r i p t o g a f j b c d e h l m n
```

Dakle, ovo nije bilo kakva supstitucijska šifra, nego jedna vrlo specijalna šifra koja se naziva *Cezarovom šifrom s ključnom riječi*. U njoj ključ predstavlja ključna riječ (u ovom slučaju KRIPTOGRAFIJA), te broj (u ovom slučaju 8) koji označava poziciju na kojoj počinjemo pisati ključnu riječ (bez ponavljanja slova). Jasno, da smo znali da je riječ upravo o ovoj varijanti, dekriptiranje bi nam bilo još lakše, no i bez toga nismo imali mnogo problema.

Prema tome, usprkos velikom prostoru ključeva, supstitucijska šifra je vrlo laka za kriptoanalizu. To je bilo poznato već početkom 15. stoljeća, kada je u Italiji počela uporaba tzv. *homofona*, tj. šifriranje najfrekventnijih slova s više različitih simbola. To svakako povećava sigurnost šifre, ali i dalje se analizom frekvencija bigrama i trigrama može doći do rješenja.

3. Vigenèreova šifra

Kod supstitucijske šifre svakom slovu otvorenog teksta odgovara jedinstveno slovo šifrata. Takvi kriptosustavi zovu se *monoalfabetski*. Sada ćemo prikazat Vigenèreovu šifru koja pripada *polialfabetskim kriptosustavima*. Naime, kod nje se svako slovo otvorenog teksta može preslikati u jedno od m mogućih slova (gdje je m duljina ključa).

Blaise de Vigenère je 1586. godine objavio knjigu u kojoj se nalazilo sve što se u to vrijeme znalo o kriptografiji. U njoj je opisano više originalnih polialfabetskih sustava. Sustav koji se danas naziva *Vigenèreova šifra* definiran je s:

Neka je m fiksan prirodni broj. Za ključ $K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ definiramo

$$e_K(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, \dots, x_m + k_m),$$
$$d_K(y_1, y_2, \dots, y_m) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, \dots, y_m - k_m),$$

gdje su sve operacije u $\mathbb{Z}_{26}$.

Primjer 3: Neka je $m = 4$, a ključna riječ BROJ. Njezin numerički ekvivalent je ključ $K = (1, 17, 14, 9)$. Pretpostavimo da je otvoreni tekst KRIPTOLOGIJA. Šifriranje se provodi na sljedeći način:

```
        10  17   8  15      19  14  11  14      6   8   9   0
         1  17  14   9       1  17  14   9      1  17  14   9
+26  ------------------------------------------------------------
        11   8  22  24      20   5  25  23      7  25  23   9
```

Dakle, šifrat je LIWYUFZXHZXJ. Rezultat možete provjeriti i *OVDJE*:

Uočimo da se prvo slovo O preslikalo u F, a drugo u X.

Primjer 3 može se ilustrirati ovako:

ključ	B	R	O	J	B	R	O	J	B	R	O	J
otvoreni tekst	K	R	I	P	T	O	L	O	G	I	J	A
šifrat	L	I	W	Y	U	F	Z	X	H	Z	X	J

Vidimo da se ovdje ključ ponavlja u nedogled. Postoje i druge varijante Vigenèreove šifre. Jedna takva (sigurnija od originalne) je ona s *autoključem*, u kojoj otvoreni tekst generira ključ.

Primjer 4: *Sve isto kao u Primjeru 3, ali s autoključem.*

U šifriranju ćemo koristiti tzv. *Vigenèreov kvadrat*. (Ako slovo K treba šifrirati ključem B, onda pogledamo stupac koji počinje s K i redak koji počinje s B. U presjeku je šifrat L.)

ključ	B	R	O	J	K	R	I	P	T	O	L	O
otvoreni tekst	K	R	I	P	T	O	L	O	G	I	J	A
šifrat	L	I	W	Y	D	F	T	D	Z	W	U	O

Vigenèreova šifra jedan je od najpopularnijih kriptosustava u povijesti. Spomenimo da je korištena tijekom američke revolucije, krajem 18. stoljeća. Godine 1917. u uglednom časopisu "Scientific American" objavljeno je da je ovu šifru "nemoguće razbiti". To, naravno, nije bilo točno jer su kriptoanalitičari već pola stoljeća prije toga poznavali metode za napad na Vigenèreovu šifru.

Recimo sada nešto o kriptoanalizi Vigenèreove šifre.

Prvi korak je određivanje duljine ključne riječi. Prikazat ćemo dvije metode. Prva metoda zove se *Kasiskijev test* i uveo ju je Friedrich Kasiski 1863. godine. Metoda se zasniva na činjenici da će dva identična odsječka otvorenog teksta biti šifrirana na isti način ukoliko se njihove početne pozicije razlikuju za neki višekratnik od m. Obrnuto, ako uočimo dva identična odsječka u šifratu, duljine barem 3, tada je vrlo vjerojatno da oni odgovaraju identičnim odsječcima otvorenog teksta.

U Kasiskijevom testu u šifratu tražimo parove identičnih odsječaka duljine barem 3, te zabilježimo udaljenosti između njihovih početnih položaja. Ako na takav način dobijemo udaljenosti d_1, d_2, ... , onda je razumna pretpostavka da m dijeli većinu d_i-ova.

Druga metoda za određivanje duljine ključa koristi tzv. indeks koincidencije. Taj je pojam uveo 1920. godine William Friedman u knjizi "Indeks koincidencije i njegove primjene u kriptografiji", koja se smatra jednom od najvažnijih publikacija u povijesti kriptologije.

Neka je $x = x_1x_2 \dots x_n$ niz od n slova. *Indeks koincidencije* od x, u oznaci $I_c(x)$, definira se kao vjerojatnost da su dva slučajna elementa iz x jednaka.

Neka su $f_0, f_1, \dots, f_{25}$ redom (apsolutne) frekvencije od A, B, C, ... , Z u x. Dva elementa iz x možemo odabrati na $n(n\text{-}1)/2$ načina, a za svaki $i = 0, 1, \dots, 25$ postoji $f_i(f_i\text{-}1)/2$ načina odabira dvaput i-tog slova. Stoga vrijedi formula

$$I_c(x) = \sum_i f_i(f_i\text{-}1) / n(n\text{-}1).$$

Pretpostavimo sada da x predstavlja neki tekst na hrvatskome jeziku. Označimo očekivane vjerojatnosti pojavljivanja slova A, B, ... , Z redom s $p_0, p_1, \dots, p_{25}$ (vidi gore navedenu *frekvenciju slova*). Za očekivati je da je

$$I_c(x) \approx \sum_i p_i^2 \approx 0.064$$

(vjerojatnost da su oba slova A je p_0^2, da su oba B je p_1^2, itd.). Isti zaključak vrijedi i ukoliko je x šifrat dobiven iz otvorenog teksta na hrvatskom jeziku pomoću neke monoalfabetske šifre. Tu će se pojedinačne vjerojatnosti ispremiještati, ali će veličina $\sum_i p_i^2$ ostati nepromijenjena.

Pretpostavimo sada da imamo šifrat $y = y_1y_2 \dots y_n$ koji je dobiven Vigenèreovom šifrom. Rastavimo y na m podnizova $z_1, z_2, \dots, z_m$ tako da y napišemo, po stupcima, u matricu dimenzija $m \times (n/m)$. Redci ove matrice su upravo traženi podnizovi $z_1, z_2, \dots, z_m$. Ako je m jednak duljini ključne riječi, onda su elementi istog retka matrice šifrirani pomoću istog slova ključa, pa bi svi $I_c(z_i)$ trebali biti približno jednaki 0.064. S druge strane, ako m nije duljina ključne riječi, onda će z_i-ovi izgledati kao više-manje slučajni nizovi slova, budući da su dobiveni pomacima pomoću različitih slova ključa. Primijetimo da za potpuno slučajni niz imamo

$$I_c \approx 26 \cdot (1/26)^2 = 1/26 \approx 0.038.$$

Ove dvije vrijednosti $\kappa_p = 0.064$ i $\kappa_r = 0.038$ (p = plaintext = otvoreni tekst, r = random = slučajan) su dovoljno daleko jedna od druge, tako da ćemo najčešće na ovaj način moći odrediti točnu duljinu ključne riječi (ili potvrditi pretpostavku dobivenu pomoću Kasiskijeve metode). Napomenimo da je u engleskom jeziku $\kappa_p = 0.065$, u njemačkom 0.076, u francuskom 0.078, u talijanskom 0.074, u španjolskom 0.078, a u ruskom 0.053. Odavde zaključujemo da za primjenu ove metode nije nužno znati na kojem je jeziku pisan otvoreni tekst. Jedina bitna pretpostavka jest da se za jezik na kojemu je pisan otvoreni tekst veličina κ_p značajno razlikuje od 0.038.

Primjer 5: *Vigenereovom šifrom dobiven je šifrat*

```
GSIQITUKQIEAOHRVUGLTAZGHXUHLPJ
MRTTNQRBZIAVBTGQTBYMYAIVOMZTAI
XJBTEDEWVQWADVWGOOKNQNTCIPEGPY
BOKUSECNWELSBSNUVBTTASMBTOIFHE
ZAEPDQIGAYUCBQSYILYIOOFZTASHIR
ASMKEEESUENAKLQOIMHXUJXGMWOKPK
UNTSRAGMLOETTCIAMTQIBOSLPVNTHP
UNBQINIMU
```

Primijenimo najprije Kasiskijev test. Uočavamo nekoliko trigrama koji se dvaput pojavljuju u šifratu. To su HXU s početkom na pozicijama 24 i 169 (169 - 24 = 145 = 5 · 29), VBT s početkom na pozicijama 42 i 107 (107 - 42 = 65 = 5 · 13), ZTA (144 - 57 = 87 = 3 · 29), TCI (193 - 83 = 110 = 2 · 5 · 11), TAS (146 - 109 = 35 = 5 · 7) i ASM (141 - 111 = 40 = 5 · 8). Odavde se kao najvjerojatnija duljina ključne riječi nameće broj $m = 5$, koji dijeli sve osim jedne od razlika početnih pozicija ponovljenih trigrama.

Pogledajmo hoćemo li pomoću indeksa koincidencije doći do istog zaključka. Za $m = 1$ je $I_c = 0.044$; za $m = 2$ su indeksi 0.048 i 0.042; za $m = 3$ su 0.049, 0.046 i 0.039; za $m = 4$ su 0.040, 0.039, 0.047 i 0.042, dok za $m = 5$ dobivamo indekse 0.061, 0.059, 0.080, 0.053 i 0.074. Sada već s prilično velikom sigurnošću možemo zaključiti da je duljina ključne riječi jednaka 5.

Sljedeće je pitanje kako odrediti ključnu riječ ukoliko znamo njezinu duljinu. Tu nam može pomoći *međusobni indeks koincidencije dvaju nizova*.

Definicija: Neka su $x = x_1x_2 \dots x_n$ i $y = y_1y_2 \dots y_{n'}$ dva niza od n, odnosno n' slova. *Međusobni indeks koincidencije* od x i y, u oznaci $MI_c(x,y)$, definira se kao vjerojatnost da je slučajni element od x jednak slučajnom elementu od y. Ako frekvencije od A, B, C, ... , Z u x i y označimo s $f_0, f_1, \dots, f_{25}$, odnosno $f'_0, f'_1, \dots, f'_{25}$, onda je

$$MI_c = \sum_i f_i f'_i / nn'.$$

Neka je sada m duljina ključne riječi, a neka su podnizovi $z_1, z_2, \dots, z_m$ dobiveni kao prije.

Pretpostavimo da je $K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ ključna riječ i pokušajmo ocijeniti $MI_c(z_i,z_j)$. Promotrimo proizvoljno slovo u z_i i proizvoljno slovo u z_j. Vjerojatnost da su oba ova slova jednaka A je

$$p_{-k_i} p_{-k_j},$$

da su oba B je

$$p_{1-k_i} p_{1-k_j},$$

itd. (operacije u indeksima su modulo 26). Dakle, imamo ocjenu

$$MI_c(z_i, z_j) \approx \sum_{h=0}^{25} p_{h-k_i} p_{h-k_j} = \sum_{h=0}^{25} p_h p_{h+k_i-k_j}.$$

Uočimo da ova ocjena ovisi samo o razlici $k_i - k_j$ mod 26, koju ćemo zvati *relativni pomak* od z_i i z_j. Također, $\sum_h p_h p_{h+q} = \sum_h p_h p_{h-q}$, što znači da za pomak q dobivamo istu ocjenu kao i za pomak 26 - q. Stoga je dovoljno promatrati pomake između 0 i 13. To je i napravljeno u sljedećoj tablici

relativni pomak	očekivana vrijednost od MI_c
0	0.064
1	0.039
2	0.031
3	0.031

4	0.044
5	0.040
6	0.039
7	0.033
8	0.040
9	0.042
10	0.036
11	0.036
12	0.036
13	0.039

Važno je uočiti da ako je pomak jednak 0, onda je ocjena 0.064, a ako je pomak različit od 0, onda su ocjene između 0.031 i 0.044 - dakle, bitno manje. Ovo zapažanje može se iskoristiti za određivanje vrijednosti $q = k_i - k_j$.

Pretpostavimo da smo fiksirali z_i pa promotrimo efekt šifriranja z_j s A, B, C, ... Tako dobivene nizove označimo sa z_j^0, z_j^1, ... Za $g = 0,1,...,25$ izračunamo indeks $\mathrm{MI}_c(z_i, z_j^g)$ po formuli

$$\mathrm{MI}_c(x, y^g) = \sum_i f_i f'_{i-g} / nn'.$$

Za $g = q$, MI_c trebao bi biti blizu 0,064, a za $g \neq q$ trebao bi varirati između 0.031 i 0.044.

Na ovaj način možemo ustvrditi relativne pomake bilo koja dva podniza z_i i z_j. Nakon što to učinimo, ostaje nam samo 26 mogućih ključnih riječi koje onda možemo ispitati jednu po jednu.

No, malom modifikacijom ove metode, do ključne riječi možemo doći učinkovitije. Umjesto međusobnog indeksa koincidencije nizova z_i i z_j^g, računat ćemo $\mathrm{MI}_c(x, z_j^g)$, gdje je x niz koji odgovara tipičnom tekstu na hrvatskom jeziku. To znači da su njegove relativne frekvencije f_i / n približno jednake p_i, pa je

$$\mathrm{MI}_c(x, z_j^g) \approx \sum_i p_i f'_{i-g} / n'.$$

Očekujemo da je $\mathrm{MI}_c(x, z_j^g) \approx 0.064$ ako je $g = -k_j \bmod 26$, a da je inače $\mathrm{MI}_c(x, z_j^g) < 0.045$.

Prema tome, da bismo odredili j-to slovo k_j ključne riječi, postupamo na sljedeći način. Za $0 \leqslant g \leqslant 25$ izračunamo

$$M_g = \sum_i p_i f'_{i-g} / n'.$$

Odredimo h takav da je $M_h = \max \{ M_g : 0 \leqslant g \leqslant 25 \}$, te stavimo $k_j = -h \bmod 26$.

Nastavak primjera 5: Već smo zaključili da je $m = 5$. Za $j = 1,2,3,4,5$ izračunajmo vrijednosti $M_0, M_1, \ldots, M_{25}$. Te vrijednosti nalaze se u sljedećoj *tablici*.

Iz tablice iščitavamo redom:

- Za $j = 1$ imamo $h = 14$, $M_{14} = 0.0619$, pa je $k_1 = 12$;
- Za $j = 2$ imamo $h = 0$, $M_0 = 0.0666$, pa je $k_2 = 0$;
- Za $j = 3$ imamo $h = 7$, $M_7 = 0.0677$, pa je $k_3 = 19$;
- Za $j = 4$ imamo $h = 19$, $M_{19} = 0.0633$, pa je $k_4 = 7$;
- Za $j = 5$ imamo $h = 22$, $M_{22} = 0.0636$, pa je $k_5 = 4$.

Stoga je ključna riječ MATHE, a traženi otvoreni tekst glasi:

```
USPJE HURJE SAVAN JUNEP OZNAT IHSIF ARAMJ ERISE OVIMC ETIRI
MAPOK AZATE LJIMA REDOM KAKOS UOVDJ ENAVE DENIU PORNO SCUPA
ZSILJ IVIMP OSTUP CIMAA NALIZ EINTU ICIJO MISRE COMSP OSOBN
OSTDA SEZNA BAREM CITAT IJEZI KORIG INALN OGTEK STAVE OMAJE
POZEL JNAAL INIJE BITNA
```

ili, s umetnutim "kvačicama", razmacima i interpunkcijom:

Uspjeh u rješavanju nepoznatih šifara mjeri se ovim četirima pokazateljima, redom kako su ovdje navedeni: upornošću, pažljivim postupcima analize, intuicijom i srećom. Sposobnost da se zna barem čitati jezik originalnog teksta veoma je poželjna, ali nije bitna.

Tako glase prve dvije rečenice *Udžbenika za rješavanje vojnih šifara* autora Parkera Hitta, jednog od najpoznatijih američkih kriptografa iz vremena Prvog svjetskog rata. Koliko je u njima Hitt bio u pravu, možda može prosuditi i čitatelj ovog članka nakon što pokuša riješiti *nagradne zadatke*.