JEDAN DIOFANTOV PROBLEM I FIBONACCIJEVI BROJEVI

Andrej Dujella, Zagreb

Grčki matematičar Diofant iz Aleksandrije (3. st.) pronašao je četveročlani skup $\{ {}^1/_{16}, {}^{33}/_{16}, {}^{68}/_{16}, {}^{105}/_{16} \}$ koji ima svojstvo da je produkt bilo koja dva njegova člana uvećan za 1 jednak kvadratu racionalnog broja. S tim u vezi, reći ćemo da skup prirodnih brojeva $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ima **Diofantovo svojstvo**, ako za sve $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, vrijedi: $a_i \cdot a_j + 1 = b_{ij}^2$, gdje je $b_{ij} \in \mathbf{N}$. U ovom radu prikazat ćemo postupak za nalaženje četveročlanih skupova s Diofantskim svojstvom. Inače, prvi takav skup pronašao je francuski matematičar Pierre de Fermat (1601–1665). Taj skup je $\{1, 3, 8, 120\}$. Naime,

$$\begin{array}{cc} 1 \cdot 3 + 1 = 2^2 & 3 \cdot 8 + 1 = 5^2 \\ 1 \cdot 8 + 1 = 3^2 & 3 \cdot 120 + 1 = 19^2 \\ 1 \cdot 120 + 1 = 11^2 & 8 \cdot 120 + 1 = 31^2 \end{array}$$

Devenport i Baker su 1969. godine dokazali da ne postoji prirodan broj r takav da skup $\{1, 3, 8, 120, r\}$ ima Diofantovo svojstvo. Može se pokazati da racionalan broj $r = 777\,480/8\,288\,641$ ima traženo svojstvo (vidi [1]).

Pokazat ćemo sada kako se svaki dvočlani skup s Diofantovim svojstvom može nadopuniti do četveročlanog skupa s istim svojstvom.

Neka su dani prirodni brojevi a i b takvi da vrijedi: $a \cdot b + 1 = k^2$, $k \in \mathbf{N}$, te neka je $a < b$. Neka je x prirodan broj takav da skup $\{a, b, x\}$ ima Diofantovo svojstvo. To znači da je

$$\begin{aligned} a \cdot x + 1 &= y^2, \\ b \cdot x + 1 &= z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Odavde slijedi:

$$by^2 - az^2 = b - a. \tag{2}$$

Očito je jedno rješenje ove diofantske jednadžbe $y = 1$, $z = 1$. Pokazat ćemo da $y = k \pm a$, $z = k \pm b$ također zadovoljavaju jednadžbu (2). Zaista,

$$\begin{aligned} b(k \pm a)^2 - a(k \pm b)^2 &= bk^2 \pm 2abk + a^2k - ak^2 \mp 2abk - ab^2 \\ &= (b-a)(k^2 - ab) = b - a. \end{aligned}$$

Formirajmo sljedeće nizove:

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= 2k \cdot y_{n+1} - y_n, & y_0 &= 1, & y_1 &= k + a, \\ z_{n+2} &= 2k \cdot z_{n+1} - y_n, & z_0 &= 1, & z_1 &= k + b, \\ y'_{n+2} &= 2k \cdot y'_{n+1} - y'_n, & y'_0 &= 1, & y'_1 &= k - a, \\ z'_{n+2} &= 2k \cdot z'_{n+1} - z'_n, & z'_0 &= 1, & z'_1 &= k - b. \end{aligned}$$

Budući da je $k + a = 2k \cdot 1 - (k - a)$ i $k + b = 2k \cdot 1 - (k - b)$, to ako dopustimo da indeksi nizova y_n, z_n poprimaju i negativne vrijednosti, imamo: $y'_n = y_{-n}$, $z'_n = z_{-n}$.

Teorem 1. *Za svaki cijeli broj n vrijedi*

$$by_n^2 - az_n^2 = b - a, \tag{3}$$
$$by_n y_{n-1} - az_n z_{n-1} = k(b - a). \tag{4}$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Neka je najprije $n \geq 0$. Relacija (3) za $n = 0$ i $n = 1$ je već dokazana. U relaciji (4) za $n = 0$ imamo:

$$by_0 y_{-1} - az_0 z_{-1} = b(k - a) - a(k - b) = k(b - a),$$

dok za $n = 1$ imamo:

$$by_1 y_0 - az_1 z_0 = b(k + a) - a(k + b) = k(b - a).$$

Pretpostavimo da je tvrdnja teorema točna za sve cijele brojeve n, $0 \leq n < m$, $m \geq 2$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} by_m y_{m-1} - az_m z_{m-1} &= by_{m-1}(2ky_{m-1} - y_{m-2}) - az_{m-1}(2kz_{m-1} - z_{m-2}) \\ &= 2k(by_{m-1}^2 - az_{m-1}^2) \\ &\qquad - (by_{m-1}y_{m-2} - az_{m-1}z_{m-2}) = \text{po pretpostavci} \\ &= 2k(b - a) - k(b - a) = k(b - a). \end{aligned}$$

Također je:

$$\begin{aligned} by_m^2 - az_m^2 &= b(2ky_{m-1} - y_{m-2})^2 - a(2kz_{m-1} - z_{m-2})^2 \\ &= 4k^2(by_{m-1}^2 - az_{m-1}^2) + (by_{m-2}^2 - az_{m-2}^2) \\ &\qquad - 4k(by_{m-1}y_{m-2} - az_{m-1}z_{m-2}) = \text{po pretpostavci} \\ &= 4k^2(b - a) + (b - a) - 4k \cdot k(b - a) = b - a. \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$by^2 - az^2 = b - a. \tag{2}$$

Očito je jedno rješenje ove diofantske jednadžbe $y = 1$, $z = 1$. Pokazat ćemo da $y = k \pm a$, $z = k \pm b$ također zadovoljavaju jednadžbu (2). Zaista,

$$\begin{aligned} b(k \pm a)^2 - a(k \pm b)^2 &= bk^2 \pm 2abk + a^2k - ak^2 \mp 2abk - ab^2 \\ &= (b-a)(k^2 - ab) = b - a. \end{aligned}$$

Formirajmo sljedeće nizove:

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= 2k \cdot y_{n+1} - y_n, & y_0 &= 1, & y_1 &= k + a, \\ z_{n+2} &= 2k \cdot z_{n+1} - y_n, & z_0 &= 1, & z_1 &= k + b, \\ y'_{n+2} &= 2k \cdot y'_{n+1} - y'_n, & y'_0 &= 1, & y'_1 &= k - a, \\ z'_{n+2} &= 2k \cdot z'_{n+1} - z'_n, & z'_0 &= 1, & z'_1 &= k - b. \end{aligned}$$

Budući da je $k + a = 2k \cdot 1 - (k - a)$ i $k + b = 2k \cdot 1 - (k - b)$, to ako dopustimo da indeksi nizova y_n, z_n poprimaju i negativne vrijednosti, imamo: $y'_n = y_{-n}$, $z'_n = z_{-n}$.

Teorem 1. *Za svaki cijeli broj n vrijedi*

$$by_n^2 - az_n^2 = b - a, \tag{3}$$

$$by_n y_{n-1} - az_n z_{n-1} = k(b - a). \tag{4}$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Neka je najprije $n \geq 0$. Relacija (3) za $n = 0$ i $n = 1$ je već dokazana. U relaciji (4) za $n = 0$ imamo:

$$by_0 y_{-1} - az_0 z_{-1} = b(k - a) - a(k - b) = k(b - a),$$

dok za $n = 1$ imamo:

$$by_1 y_0 - az_1 z_0 = b(k + a) - a(k + b) = k(b - a).$$

Pretpostavimo da je tvrdnja teorema točna za sve cijele brojeve n, $0 \leq n < m$, $m \geq 2$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} by_m y_{m-1} - az_m z_{m-1} &= by_{m-1}(2ky_{m-1} - y_{m-2}) - az_{m-1}(2kz_{m-1} - z_{m-2}) \\ &= 2k(by_{m-1}^2 - az_{m-1}^2) \\ &\qquad - (by_{m-1}y_{m-2} - az_{m-1}z_{m-2}) = \text{po pretpostavci} \\ &= 2k(b - a) - k(b - a) = k(b - a). \end{aligned}$$

Također je:

$$\begin{aligned} by_m^2 - az_m^2 &= b(2ky_{m-1} - y_{m-2})^2 - a(2kz_{m-1} - z_{m-2})^2 \\ &= 4k^2(by_{m-1}^2 - az_{m-1}^2) + (by_{m-2}^2 - az_{m-2}^2) \\ &\qquad - 4k(by_{m-1}y_{m-2} - az_{m-1}z_{m-2}) = \text{po pretpostavci} \\ &= 4k^2(b - a) + (b - a) - 4k \cdot k(b - a) = b - a. \end{aligned}$$

Ovim je tvrdnja teorema dokazana za $n \geq 0$. Za $n \leq 0$ tvrdnja teorema dokazuje se analogno (pomoću nizova y'_n i z'_n).

Na osnovu teorema 1 dobivamo niz x_n rješenja sustava (1):

$$x_n = \frac{y_n^2 - 1}{a}, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Postavlja se pitanje da li je x_n niz cijelih brojeva. Odgovor je potvrdan. Naime, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-3} &= \frac{y_n^2 - 1}{a} - \frac{y_{n-3}^2 - 1}{a} \\
&= \frac{1}{a}(y_n + y_{n-3})(y_n - y_{n-3}) \\
&= \frac{1}{a}(2ky_{m-1} - y_{n-2} + 2ky_{n-2} \\
&\qquad - y_{n-1})(2ky_{n-1} - y_{n-2} - 2ky_{n-2} + y_{n-1}) \\
&= \frac{1}{a}(2k-1)(y_{m-1} + y_{n-2})(2k+1)(y_{n-1} - y_{n-2}) \\
&= (4k^2 - 1)\left(\frac{y_{n-1}^2 - 1}{a} - \frac{y_{n-2}^2 - 1}{a}\right) \\
&= (4k^2 - 1)(x_{n-1} - x_{n-2}).
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$x_n = (4k^2 - 1)(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-3},$$

a kako je $x_0 = 0 \in \mathbf{Z}$, $x_1 = (k^2 + 2ak + a^2 - 1)/a = b + a + 2k \in \mathbf{Z}$, $x_{-1} = b + a - 2k \in \mathbf{Z}$, to zaključujemo da je $x_n \in \mathbf{Z}$, za sve $n \in \mathbf{Z}$. Sada iz $x_n = (y_n^2 - 1)/a$ slijedi da je $x_n \in \mathbf{N}$ ako i samo ako je $y_n^2 \neq 1$. Lako se vidi da je $y_n > 1$, osim za $y_0 = 1$ i eventualno $y_{-1} = k - a$. Prema tome je $x_n \in \mathbf{N}$ za $n \neq 0, -1$. Na taj način smo dobili beskonačan niz rješenja sustava (1) u prirodnim brojevima. Postavlja se pitanje da li u tom nizu postoje brojevi c i d takvi da je $c \cdot d + 1 = u^2$. Ako takvi brojevi postoje, onda skup $\{a, b, c, d\}$ ima Diofantovo svojstvo. Odgovor na postavljeno pitanje glasi: traženi parovi brojeva postoje i ima ih beskonačno mnogo. Naime, vrijedi:

Teorem 2. $x_n \cdot x_{n+1} + 1 = \left(\dfrac{y_n y_{n+1} - k}{a}\right)^2$, *za sve* $n \in \mathbf{Z}$.

Dokaz. Budući je $y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} - (y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}) = y_{n+1}(y_{n+1} + y_{n-1}) - y_n(y_{n+2} + y_n) = 2ky_{n+1}y_n - 2ky_n y_{n+1} = 0$, to je $y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$. Odavde induktivno dobivamo:

$$y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = y_0^2 - y_{-1}y_1 = 1 + a^2 - k^2,$$

za sve $n \in \mathbf{Z}$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
x_n \cdot x_{n+1} + 1 &= \frac{y_n^2 - 1}{a} \cdot \frac{y_{n+1}^2 - 1}{a} + 1 \\
&= (y_{n+1}^2 y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_n^2 + 1 + a^2)/a^2 \\
&= (y_{n+1}^2 y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_n^2 + y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} + k^2)/a^2 \\
&= (y_{n+1}^2 y_n^2 - y_n(y_n + y_{n+2}) + k^2)/a^2 \\
&= (y_{n+1}^2 y_n^2 - 2k y_{n+1} y_n + k^2)/a^2 \\
&= \left(\frac{y_n y_{n+1} - k}{a}\right)^2,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Na osnovu dokazanog teorema zaključujemo da skup $\{a, b, x_n, x_{n+1}\}$ ima Diofantovo svojstvo za sve $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0, -1, -2\}$.

PRIMJER 1. Vrijedi: $1 \cdot 3 + 1 = 2^2$.
Sada je $a = 1$, $b = 3$, $k = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 8$, $x_{-1} = 0$, te

$$x_n = 15(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-3}.$$

Odavde dobivamo:

$$x_2 = 120, \quad x_3 = 1680, \quad x_4 = 23\,408, \ldots$$
$$x_{-2} = 8, \quad x_{-3} = 120, \quad x_{-4} = 1680, \ldots.$$

Prema tome, skupovi $\{1,3,8,120\}$, $\{1,3,120,1680\}$, $\{1,3,1680,23408\}$ imaju Diofantovo svojstvo, što se može i direktno provjeriti. Npr. $1680 \cdot 23408 + 1 = 6271^2$.

Davenport i Baker su dokazali da ako je d prirodan broj i skup $\{1,3,8,d\}$ ima Diofantovo svojstvo, onda je nužno $d = 120$. Gornji primjer pokazuje da broj d nije uvijek jedinstven. Tako npr. skup $\{1,3,120,d\}$ ima Diofantovo svojstvo i za $d = 8$ i za $d = 1680$.

Primjetimo da, iako smo našli postupak za nalaženje beskonačno mnogo rješenja Diofantovog problema, ipak se na ovaj način ne dobivaju sva rješenja. To pokazuje sljedeći primjer.

PRIMJER 2. Vrijedi: $3 \cdot 120 + 1 = 19^2$.
Sada je $a = 3$, $b = 120$, $k = 19$, $x_0 = 0$, $x_1 = 161$, $x_{-1} = 85$, te gore navedenim postupkom dobivamo sljedeći niz rješenja:

$$\ldots, \{3, 120, 122\,816, 85\}, \quad \{3,120,85,0\},$$
$$\{3,120,0,161\}, \quad \{3,120,161,232408\}, \ldots$$

Međutim, ako formiramo niz x'_n koji zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i x_n, te za kojeg je $x'_0 = 1$, $x'_1 = 1680$, $x'_{-1} = 8$, onda dobivamo sljedeći niz rješenja:

$$\ldots, \{3,120,11781,8\}, \quad \{3,120,8,1\},$$
$$\{3,120,1,1680\}, \quad \{3,120,1680,2422805\}, \ldots$$

Skup $\{3, 120, 1680, 2422805\}$ ima Diofantovo svojstvo, a ne može se dobiti ranije opisanom konstrukcijom ni za koje vrijednosti od a i b.

Mi smo u razmatranju krenuli uzevši brojeve a, b, takve da je $a \cdot b + 1 = k^2$. Sada ćemo ispitati što naš postupak daje ako krenemo od identiteta kojima je zadovoljena gornja relacija. Cilj nam je dobiti što jednostavnije gotove formule za neka rješenja Diofantovog problema (četveročlane skupove s Diofantovim svojstvom).

Prirodno je krenuti od identiteta

$$(k-1) \cdot (k+1) + 1 = k^2.$$

Sada je $a = k - 1$, $b = k + 1$; $x_0 = 0$, $x_{-1} = 0$, $x_1 = 4k$, te je $x_2 = (4k^2 - 1) \cdot 4k = 16k^3 - 4k$. Prema tome, skup svaki $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$. Specijalno, za $k = 2$ dobivamo Fermatovo rješenje $\{1, 3, 8, 120\}$. Jasno je da se na sličan način mogu dobiti i druge formule za rješenje Diofantovog problema u kojima su traženi brojevi dani u obliku polinoma jedne varijable. Npr.:

$$\{k-1,\ k+1,\ 16k^3-4k,\ 64k^5-48k^3+8k\},$$

$$\{k+1,\ 4k+8,\ 9k+15,\ 144k^3+1036k+528\}, \text{ itd.}$$

Nas će u daljnjem zanimati one formule za rješenja Diofantovog problema u kojima će traženi brojevi biti izraženi pomoću Fibonaccijevih brojeva. **Fibonaccijevi brojevi** su brojevi definirani rekurzivnom relacijom

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$$

Prvih nekoliko članova ovog niza su $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Brojevi 1, 3, 8 su Fibonaccijevi brojevi, a ujedno su i dio prvog poznatog rješenja Diofantovog problema. Vidjet ćemo da to nije slučajno.

Lema 1. $F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, *za sve* $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Provodimo ga metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ imamo: $F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 2 - 1 = (-1)^{1+1}$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi: $F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Tada je

$$\begin{aligned} F_{n+1} \cdot F_{n+3} - F_{n+2}^2 &= F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) - (F_{n+1} + F_n) \cdot F_{n+2} \\ &= F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1) \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^n + 2. \end{aligned}$$

Prema tome, uvijek je $F_{2n} \cdot F_{2n+2} + 1 = F_{2n+1}^2$, pa možemo primjeniti ranije opisani postupak. Imamo

$$\begin{aligned} &a = F_{2n}, \quad b = F_{2n+2}, \quad k = F_{2n+1}; \\ &x_0 = 0, \\ &x_{-1} = F_{2n} + F_{2n+2} - 2F_{2n+1} = (F_{2n+2} - F_{2n+1}) - (F_{2n+1} - F_{2n}) \\ &\quad = F_{2n} - F_{2n-1} = F_{2n-2} \\ &x_1 = F_{2n} + F_{2n+2} + 2F_{2n+1} = (F_{2n} + F_{2n+1}) + (F_{2n+1} + F_{2n+2}) \\ &\quad = F_{2n+2} + F_{2n+3} = F_{2n+4}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $F_{2n+4} - F_{2n-2} = x_1 - x_{-1} = 4F_{2n+1}$. Sada je

$$\begin{aligned}x_2 &= (4F_{2n+1}^2-1)F_{2n+4}+F_{2n-2}=4F_{2n+1}^2(F_{2n+2}+F_{2n+3})-(F_{2n+4}-F_{2n-2})\\ &= 4F_{2n+1}(F_{2n+1}F_{2n+2}+F_{2n+1}F_{2n+3}-1) = 4F_{2n+1}(F_{2n+1}F_{2n+2}+F_{2n+2}^2)\\ &= 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}.\end{aligned}$$

Na taj način smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 3. *Skup* $\{F_{2n}, F_{2n+2}, F_{2n+4}, 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}\}$ *ima Diofantovo svojstvo za svaki prirodni broj* n.

Tvrdnja teoema 3 može se i direktno provjeriti. Naime, koristeći elementarna svojstva Fibonaccijevih brojeva (vidi [3], [5]) lako se provjeri sljedeće:

$$\begin{aligned}&F_{2n} \cdot F_{2n+2} + 1 = F_{2n+1}^2,\\ &F_{2n} \cdot F_{2n+4} + 1 = F_{2n+2}^2,\\ &F_{2n+2} \cdot F_{2n+4} + 1 = F_{2n+3}^2,\\ &F_{2n} \cdot 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+1}F_{2n+2} - 1)^2,\\ &F_{2n+2} \cdot 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+2} + 1)^2,\\ &F_{2n+4} \cdot 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+2}F_{2n+3} + 1)^2.\end{aligned}$$

Mi ćemo ovdje dokazati samo relaciju

$$F_{2n} \cdot F_{2n+4} + 1 = F_{2n+2}^2, \tag{5}$$

jer će nam ona poslužiti kao osnova za dobivanje nove klase rješenja Diofantovog problema.

Dokaz relacije (5):

$$\begin{aligned}F_{2n} \cdot F_{2n+4} + 1 &= (F_{2n+2} - F_{2n+1})(F_{2n+2} + F_{2n+3}) + 1\\ &= F_{2n+2}^2 + F_{2n+2}(F_{2n+3} - F_{2n+1}) - F_{2n+1}F_{2n+3} + 1\\ &= F_{2n+2}^2 + (F_{2n+2}^2 - F_{2n+1}F_{2n+3} + 1) = F_{2n+2}^2,\end{aligned}$$

zbog leme 1.

Definirajmo sada niz tzv. **Lucasovih brojeva** na sljedeći način:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \qquad L_1 = 1, \quad L_2 = 3.$$

Prvih nekoliko Lucasovih brojeva su: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... Među brojevima F_n i L_n postoji sljedeća veza:

$$F_n + F_{n+2} = L_{n+1}. \tag{6}$$

Za $n = 1$ i $n = 2$ to je očito točno. Pretpostavimo da relacija (6) vrijedi za sve prirodne brojeve $m \le n$. Tada imamo:

$$F_{n+1} + F_{n+3} = F_{n-1} + F_n + F_{n+1} + F_{n+2} = L_n + L_{n+1} = L_{n+2}.$$

Analogon leme 1 za Lucasove brojeve glasi:

Lema 2. $L_n \cdot L_{n+2} - 5F_{n+1}^2 = (-1)^n$, *za sve* $n \in \mathbf{N}$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
L_n \cdot L_{n+2} - 5F_{n+1}^2 &= (F_{n-1} + F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+3}) - 5F_{n+1}^2 \\
&= (2F_{n+1} - F_n)(2F_{n+1} + F_{n+2}) - 5F_{n+1}^2 \\
&= 4F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}(F_{n+2} - F_n) - F_nF_{n+2} - 5F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n,
\end{aligned}$$

prema lemi 1.

Vratimo se sada na relaciju (5). Slično kao ranije, imamo:

$$\begin{aligned}
&a = F_{2n}, \quad b = F_{2n+4}, \quad k = F_{2n+2}; \\
&x_0 = 0, \\
&x_{-1} = F_{2n}+F_{2n+4}-2F_{2n+2}=(F_{2n+4}-F_{2n+2}) - (F_{2n+2}-F_{2n}) \\
&\quad = F_{2n+3} - F_{2n+1} = F_{2n+2}, \\
&x_1 = F_{2n}+F_{2n+4}+2F_{2n+2}=(F_{2n+2}-F_{2n+1})+(F_{2n+2}+F_{2n+3})+2F_{2n+2} \\
&\quad = 4F_{2n+2} + F_{2n+3} - F_{2n+1} = 5F_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Sada zbog leme 2 imamo:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 5(4F_{2n+2}^2 - 1)F_{2n+2} + F_{2n+2} = 20F_{2n+2}^3 - 5F_{2n+2} + F_{2n+2} \\
&= 4F_{2n+2}(5F_{2n+2}^2 - 1) = 4L_{2n+1}F_{2n+2}L_{2n+3}.
\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 4. *Skup* $\{F_{2n}, F_{2n+4}, 5F_{2n+2}, 4L_{2n+1}F_{2n+2}L_{2n+3}\}$ *posjeduje Diofantovo svojstvo za svaki prirodan broj* n.

Direktan dokaz ovog teorema temelji se na sljedećim identitetima:

$$\begin{aligned}
&F_{2n} \cdot F_{2n+4} + 1 = F_{2n+2}^2, \\
&F_{2n} \cdot 5F_{2n+2} + 1 = L_{2n+1}^2, \\
&5F_{2n+2} \cdot F_{2n+4} + 1 = L_{2n+3}^2, \\
&F_{2n} \cdot 4L_{2n+1}F_{2n+2}L_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+1}L_{2n+2} - 5)^2, \\
&4L_{2n+1}F_{2n+2}L_{2n+3} \cdot F_{2n+4} + 1 = (2F_{2n+3}L_{2n+2} - 5)^2, \\
&4L_{2n+1}F_{2n+2}L_{2n+3} \cdot 5F_{2n+2} + 1 = (10F_{2n+2}^2 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Ove identitete nije teško dokazati koristeći gore navedena svojstva Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva, te relaciju $L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n$, koja se lako dokazuje primjenom leme 1 i relacije (6).

LITERATURA

[1] J.Arkin, G.E.Bergum, *More on the Problem of Diophantus,* Applications of Fibonacci Numbers, p. 177–181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.

[2] H.Davenport, A.Baker, *Quarterly Journal of MATH,* 20 (1969), 129–137.

[3] A.Dujella, *O djeljivosti Fibonaccijevih brojeva,* Matematika 3–4 (1985), 61–67.

[4] C.Long, G.E.Bergum, *On a Problem of Diophantus,* Applications of Fibonacci Numbers, p. 183–191, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.

[5] S.Vajda, *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications,* Ellis Horwood Limited, Chichester 1989.