

1	2	3	4	5	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

1. kolokvij, 23.4.2025.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno pet zadataka. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

- (12 bodova) Odredite $(723, 612)$ i prirodne brojeve x, y za koje je $723x + 612y = 39$.
- (12 bodova) Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv -1 \pmod{13},$$

$$x \equiv 10 \pmod{17},$$

$$x \equiv 8 \pmod{19}.$$

- (12 bodova) Odredite zadnje dvije znamenke broja 6^{6666} .

Napomena: $x^{x^x} = x^{(x^x)}$.

- (12 bodova) Riješite kongruenciju

$$x^3 + 2x^2 - 21 \equiv 0 \pmod{7^3}.$$

- (6 bodova) Je li 340 kvadratni ostatak mod 857?
 - (6 bodova) Dokažite da ne postoji prirodan broj n za koji vrijedi $89 \mid 5^n + 3$.

Rješenja:

1. $(723, 612) = 3$, $x = -143$, $y = 169$

2. $x \equiv 350 \pmod{13 \cdot 17 \cdot 19}$

3. $\varphi(25) = 20 \implies 6^{20} \equiv 1 \pmod{25} \implies 6^{22} \equiv 6^2 \pmod{100} \implies 6^{6666} \equiv 6^6 \equiv 56 \pmod{100}$.

4. Neka je $f(x) = x^3 + 2x^2 - 21$. Rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{7}$ su $x_0 = 0, -2$. Nultočka $x_0 = 0$ je dvostruka i ne može se proširiti do rješenja mod 7^2 jer bi moralo vrijediti $x_0^3 + 2x_0^2 - 21 \equiv -21 \not\equiv 0 \pmod{7^2}$.

Neka je sada $x_0 = -2$. Vrijedi $f(-2) = -21$ i $f'(-2) = 4$. Stoga je rješenje kongruencije mod 7^2 jednako $x_1 = -2 + 21 \cdot 4^{-1} = 40 \equiv -9 \pmod{7^2}$ (koristili smo da je $4^{-1} = 2 \pmod{7}$).

Sada vrijedi $f(-9) = -588$. Stoga je rješenje kongruencije mod 7^3 jednako $x_2 = -9 + 588 \cdot 4^{-1} = 138 \pmod{7^3}$.

Dakle, jedino rješenje je $x \equiv 138 \pmod{7^3}$.

5.a. 857 je prost, $\left(\frac{340}{857}\right) = \left(\frac{85}{857}\right) = \left(\frac{857}{85}\right) = \left(\frac{7}{85}\right) = \left(\frac{85}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right) = 1$

5.b. Ako $2 \mid n$, tada bi moralo vrijediti $89 \mid x^2 + 3 \implies \left(\frac{-3}{89}\right) = 1$. Međutim, vrijedi $\left(\frac{-3}{89}\right) = -1$, kontradikcija.

Ako $2 \nmid n$, tada bi moralo vrijediti $89 \mid 5x^2 + 3 \implies \left(\frac{-15}{89}\right) = 1$. Međutim, vrijedi $\left(\frac{-3}{89}\right) = -1$, $\left(\frac{5}{89}\right) = 1$, kontradikcija.