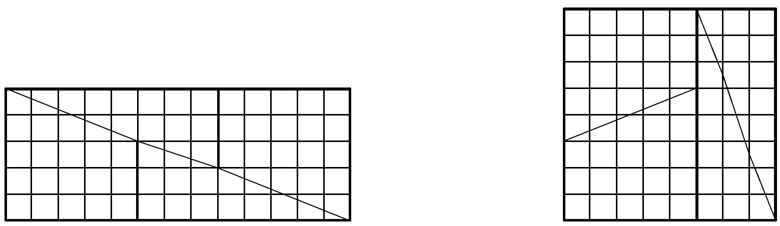
7. Fibonaccijevi brojevi i geometrija

Započet ćemo ovo poglavlje s jednim poznatim geometrijskim paradoksom. Pravokutnik dimenzija 13×5 i kvadrat dimenzija 8×8 razrezani su na 4 dijela kao na slici. Čini se da pravokutnik i kvadrat imaju jednake površine jer su sastavljeni



Slika 2:

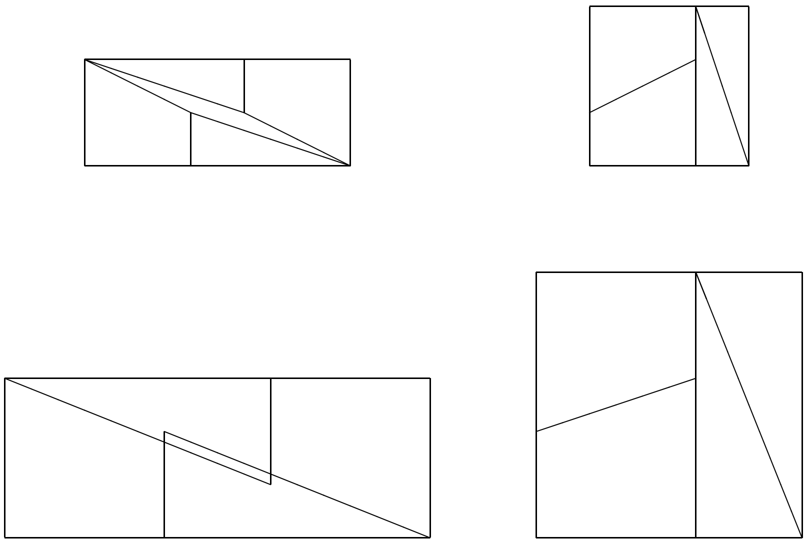
od jednakih dijelova (po 2 trapeza i 2 trokuta istih dimenzija). No, to bi značilo da je $65 = 64$. Kako je to moguće? Gdje se izgubio 1 kvadratić? I gdje su tu Fibonaccijevi brojevi?

Ponajprije, brojevi 5, 8 i 13 su susjedni članovi Fibonaccijevog niza i vidjeli smo da je $13 \cdot 5 - 8^2 = 65 - 64 = 1$. To nije slučajno. Naime, prema Cassinijevom identitetu (3.2) je

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Dakle, Cassinijev identitet nam pokazuje da kao polazište za naš paradoks možemo uzeti bilo koja tri susjedna Fibonaccijeva broja F_{n-1}, F_n i F_{n+1}, te pravokutnik dimenzija $F_{n+1} \times F_{n-1}$ i kvadrat dimenzija $F_n \times F_n$. Ukoliko je broj n paran, površina pravokutnika će biti za jedan veća od površine kvadrata, a ukoliko je n neparan, površina kvadrata će biti za jedan veća od površine pravokutnika.

No, još nismo odgovorili gdje se izgubio 1 kvadratić. Da bi to vidjeli, nacrtajmo sliku za neke manje brojeve n, na primjer za $n = 4$ i $n = 5$ (Slika 3). Sada vidimo

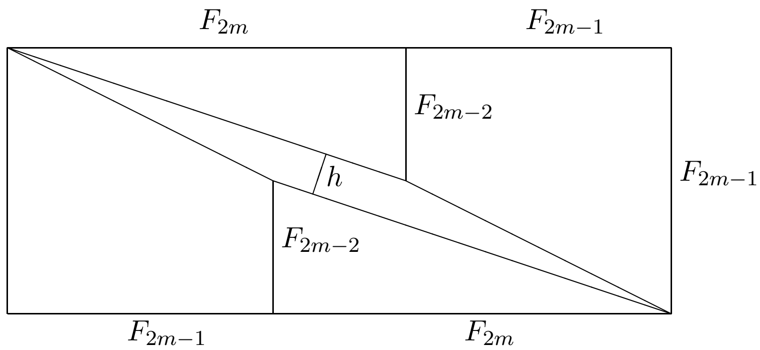


$n = 4$

$n = 5$

Slika 3:

da ono što je izgledalo kao dijagonala pravokutnika u stvari krije jedan paralelogram površine jednake 1. Kako to da ga nismo primjetili na prvoj slici? Da bi to objasnili pogledajmo kolika je najveća širina (tj. visina) tog paralelograma. Ograničit ćemo se na slučaj kad je, kao u našem polaznom paradoksu, površina pravokutnika veća od površine kvadrata. To znači da su dimenzije pravokutnika $F_{2m+1} \times F_{2m-1}$. Označimo



Slika 4:

visinu paralelograma sa h. Budući je površina paralelograma jednaka produktu visine i duljine osnovice, pomoću *Pitagorinog*[1] *poučka* dobivamo:

$$1 = h\sqrt{F_{2m}^2 + F_{2m-2}^2},$$

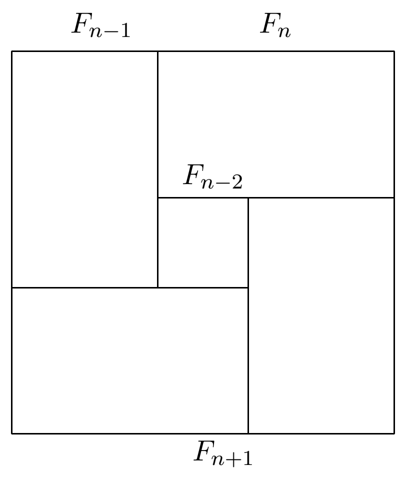
odnosno

$$h = \frac{1}{\sqrt{F_{2m}^2 + F_{2m-2}^2}}.$$

Slika 2 odgovara situaciji za $2m = 6$, pa je tu $h = \dfrac{1}{\sqrt{8^2 + 3^2}} \approx 0.117$. Dakle, najveća širina paralelograma je približno jednaka jednoj devetini stranice kvadratića. Ako bi za dimenzije pravokutnika i kvadrata uzeli veće Fibonaccijeve brojeve, paradoks (tj. skriveni paralelogram) bilo bi još teže otkriti. Na primjer, kod pravokutnika dimenzija 34×13 i kvadrata dimenzija 21×21 visina pripadnog paralelograma jednaka je približno 0.0445.

Pogledajmo sada kako nam geometrija, tj. razrezivanje pravokutnika ili kvadrata na manje dijelove, može pomoći u dokazivanju nekih relacija među Fibonaccijevim brojevima.

Primjer 7.1 Krenimo od kvadrata stranice F_{n+1}. U svaki kut kvadrata stavimo pravokutnik čije su stranice F_n i F_{n-1} (Slika 5). U sredini ostaje kvadrat čija je stranica $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$. Budući zbroj površina pet dijelova na koje smo razdijelili



Slika 5:

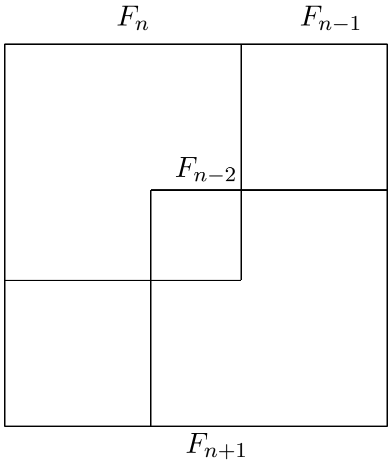
polazni kvadrat mora biti jednak površini polaznog kvadrata, dokazali smo sljedeću formulu:

$$F_{n+1}^2 = 4F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-2}^2.$$

[1]Pitagora (570–500 g. pr. Kr.), grčki matematičar.

♠

Primjer 7.2 Uzmimo ponovo kvadrat stranice F_{n+1} i u dva nasuprotna njegova kuta stavimo kvadrate stranice F_n. Budući je broj F_n veći od polovice broja F_{n+1}, to se ova dva kvadrata sijeku. Presjek je kvadrat stranice $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$. Sa



Slika 6:

Slike 6 vidimo da je polazni kvadrat prekriven s dva kvadrata stranice F_n i dva kvadrata stranice F_{n-1}. No, budući smo površinu središnjeg kvadrata stranice F_{n-2} brojili dvaput, moramo je oduzeti da bi dobili točan rezultat, a to je:

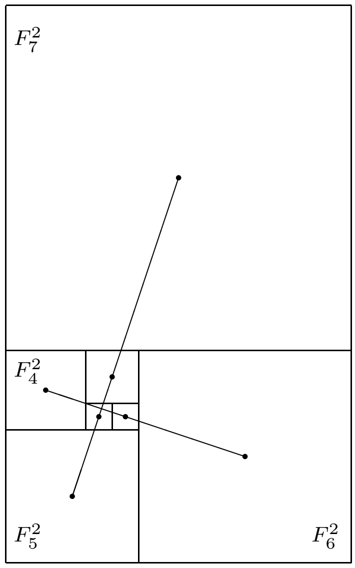
$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2.$$

♠

Primjer 7.3 Uzmimo pravokutnik sa stranicama F_n i F_{n+1}. Upišimo u njega najveći mogući kvadrat, te nastavimo isti postupak na preostalom dijelu pravokutnika (Slika 7). Iz definicije Fibonaccijevih brojeva slijedi da upisani kvadrati imaju stranice redom $F_n, F_{n-1}, \ldots, F_2, F_1$. Na taj način smo dobili novi, geometrijski, dokaz relacije (3.6):

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}\,.$$

Označimo sa C_i središte kvadrata sa stranicom F_i. Pokazat ćemo da središta svih kvadrata leže na dva okomita pravca. Postavimo pravokutni koordinatni sustav



Slika 7:

s ishodištem u točki C_1, te osima x i y paralelnima stranicama polaznog pravokutnika. Prvih nekoliko središta imaju sljedeće koordinate:

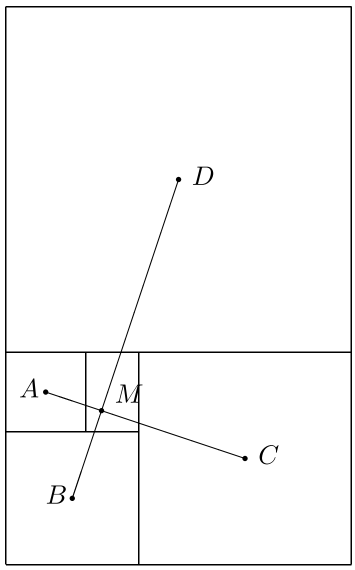
$$C_1(0,0), \quad C_3(\frac{1}{2},\frac{3}{2}), \quad C_5(-1,-3), \quad C_7(3,9);$$

$$C_2(1,0), \quad C_4(-2,1), \quad C_6(\frac{11}{2},-\frac{3}{2}), \quad C_8(-14,5).$$

Dokazat ćemo da sve točke C_{2k-1} leže na pravcu $y = 3x$, a sve točke C_{2k} na pravcu $y = \frac{1-x}{3}$. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Tvrdnja je svakako točna za $k = 1$ i $k = 2$. Dokažimo sada jednu pomoćnu tvrdnju. Promotrimo četiri kvadrata čije su stranice susjedni Fibonaccijevi brojevi $F_i, F_{i+1}, F_{i+2}, F_{i+3}$. Označimo njihova središta redom sa A, B, C, D. Dokazat ćemo da su pravci AC i BD okomiti. Tvrdnju je dovoljno dokazati u slučaju kada je međusobni položaj kvadrata kao na Slici 8, budući se preostali mogući položaji dobivaju iz ovog, rotacijom za 90°, 180° i 270°. Postavimo pravokutni koordinatni sustav sa središtem u donjem lijevom vrhu kvadrata stranice F_{i+1}, te njegovim stranicama kao koordinatnim osima. Tada točke A, B, C, D imaju sljedeće koordinate:

$$A\Big(\frac{1}{2}F_i, \frac{1}{2}(2F_{i+1}+F_i)\Big), \quad B\Big(\frac{1}{2}F_{i+1}, \frac{1}{2}F_{i+1}\Big),$$

$$C\Big(\frac{1}{2}(2F_{i+1}+F_{i+2}), \frac{1}{2}F_{i+2}\Big), \quad D\Big(\frac{1}{2}F_{i+3}, \frac{1}{2}(F_{i+3}+2F_{i+2}\Big).$$



Slika 8:

Pravac AC ima koeficijent smjera

$$k_1 = \frac{F_{i+2} - 2F_{i+1} - F_i}{F_{i+2} + 2F_{i+1} - F_i} = \frac{-F_{i+1}}{3F_{i+1}} = -\frac{1}{3}\,,$$

a pravac BD

$$k_2 = \frac{F_{i+3} + 2F_{i+2} - F_{i+1}}{F_{i+3} - F_{i+1}} = \frac{3F_{i+2}}{F_{i+2}} = 3\,.$$

Budući je $k_1 \cdot k_2 = -1$, pokazali smo da su zaista pravci AC i BD okomiti.

Vratimo se sada na dokaz tvrdnje o točkama C_{2k-1} i C_{2k}. Neka je $k \geq 3$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve manje od k. Tada su, prema upravo dokazanoj pomoćnoj tvrdnji, pravci $C_{2k-1}C_{2k-3}$ i $C_{2k-3}C_{2k-5}$ okomiti na pravac $C_{2k-2}C_{2k-4}$ i prolaze točkom C_{2k-3}. Zaključujemo da točka C_{2k-1} leži na pravcu $C_{2k-3}C_{2k-5}$, a taj pravac, po pretpostavci, ima jednadžbu $y = 3x$. Slično su pravci $C_{2k}C_{2k-2}$ i $C_{2k-2}C_{2k-4}$ okomiti na pravac $C_{2k-1}C_{2k-3}$ i prolaze točkom C_{2k-2}, pa zaključujemo da točka C_{2k} leži na pravcu $C_{2k-2}C_{2k-4}$, a to je pravac $y = \frac{1-x}{3}$.

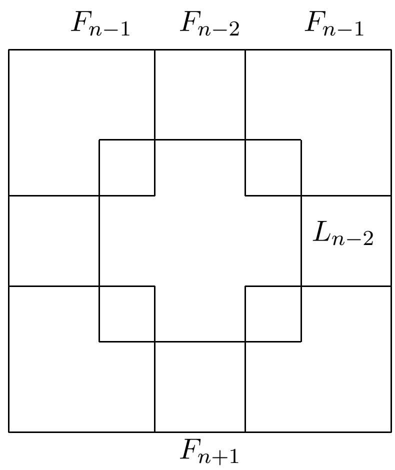
Pokažimo još jedno zanimljivo svojstvo točaka C_i. Označimo sa M točku presjeka pravaca $y = 3x$ i $y = \frac{1-x}{3}$, tj. $M(\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$, a sa $d(C_i, M)$ označimo udaljenost točaka C_i i M. Pokazat ćemo da je $d(C_i, M) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot L_i$. U tu svrhu iskoristit ćemo koordinatni sustav kao na Slici 8 i izračunati $d(A, M)$. U ovom koordinatnom sustavu točka M ima koordinate $M(\frac{1}{5}(3F_{i+1}+F_i), \frac{1}{5}(4F_{i+1}+3F_i))$, pa je

$$\begin{aligned} d^2(A,M) &= \Big[\frac{1}{5}(3F_{i+1}+F_i) - \frac{1}{2}F_i\Big]^2 + \Big[\frac{1}{5}(4F_{i+1}+3F_i) - \frac{1}{2}(2F_{i+1}+F_i)\Big]^2 \\ &= \Big[\frac{3}{10}(2F_{i+1}-F_i)\Big]^2 + \Big[\frac{1}{10}(2F_{i+1}-F_i)\Big]^2 = \frac{1}{10}L_i^2. \end{aligned}$$

♠

Zadaci

1. Nacrtajte sliku koja ilustrira formulu
$$F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}\cdot F_{n-2} + F_{n-2}^2\,.$$
2. Koristeći Sliku 9 napišite formulu koja povezuje kvadrate brojeva F_{n+1}, F_{n-1}, F_{n-2}, F_{n-3} i L_{n-2}.



Slika 9:

3. Nacrtajte slike koje ilustriraju formule
$$\sum_{i=2}^{2n} F_iF_{i-1} = F_{2n}^2, \qquad \sum_{i=2}^{2n+1} F_i\cdot F_{i-1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$
4. Dokažite formulu
$$\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_nL_{n+1} - 2,$$
te je ilustrirajte slikom analogno Primjeru 7.3. Pokažite da i ovdje središta svih kvadrata leže na dva okomita pravca.

5. Dokažite i ilustrirajte formulu

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_{n-1}^2 + \cdots + F_1^2).$$