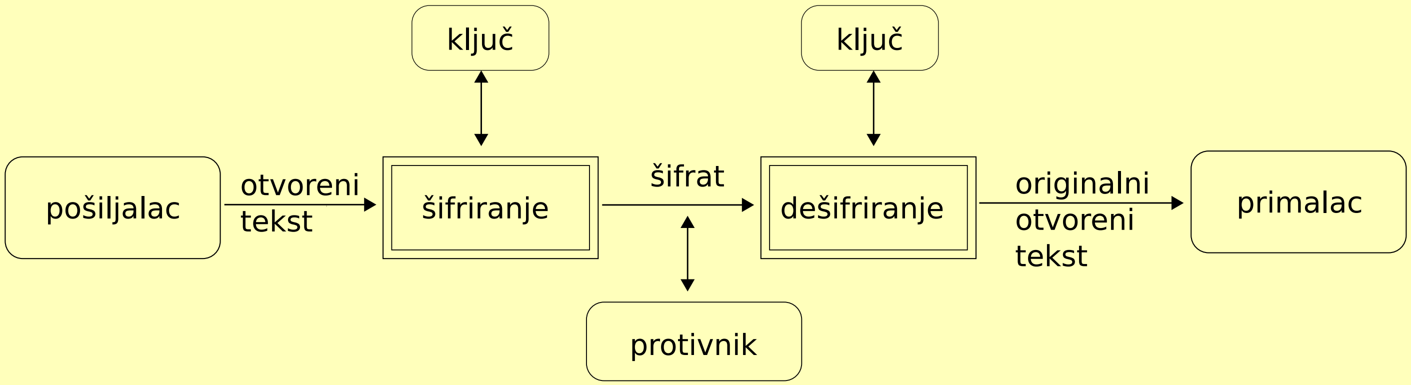
Teorija brojeva i kriptografija

Andrej Dujella

PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
HAZU, Razred za matematičke, fizičke i kemijske znanosti
e-mail: duje@math.hr
URL: http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/

Kriptografija

Šifriranje ili kriptografija (tajnopis) je znanstvena disciplina koja se bavi proučavanjem metoda za slanje poruka u takvom obliku da ih samo onaj kome su namijenjene može pročitati.

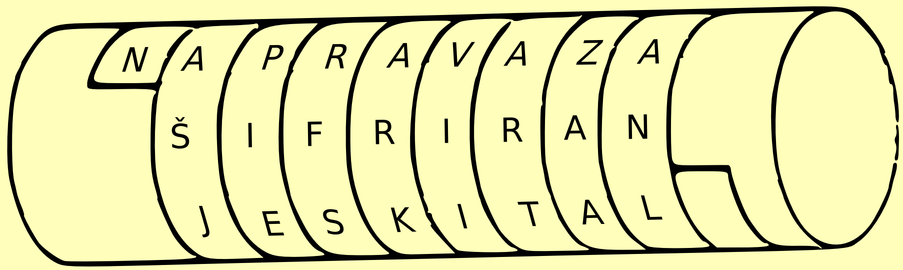


Glavne metode klasične kriptografije:

- transpozicija (premještanje) TAJNA $\mapsto$ JANAT
- supstitucija (zamjena) TAJNA $\mapsto$ UBKOB

Transpozicijske šifre

Skital (Sparta, 5. st. pr. Kr.)



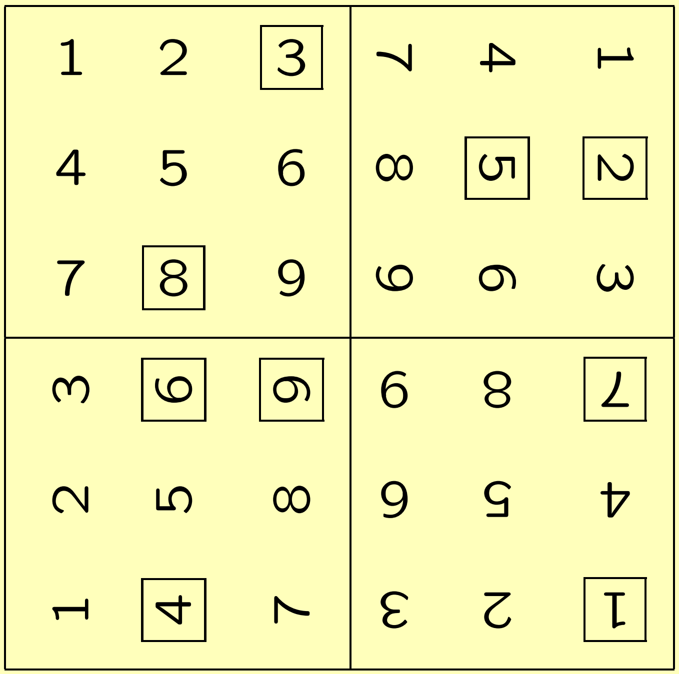
Stupčana transpozicija

Poruka se piše po redcima, a čita po stupcima, ali s promijenjenim poretkom stupaca

6	1	3	7	5	2	4
S	T	U	P	Č	A	N
A	T	R	A	N	S	P
O	Z	I	C	I	J	A

TTZASJURINPAČNISAOPAC

Rotirajuća rešetka (Cardano, 16. st.)



I	L	N	Z	J	A
K	P	O	M	E	S
S	I	U	K	I	N
O	G	U	R	K	R
A	N	U	K	I	U
K	N	A	A	C	I

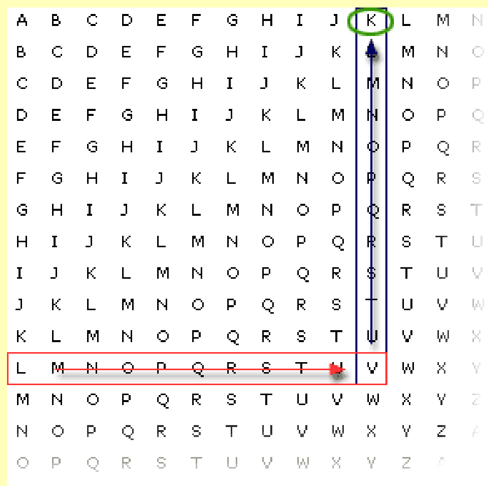
NESIGURNI KOMUNIKACIJSKI KANAL ZA PORUKU

1 2 3 4

Supstitucijske šifre

Cezarova šifra (1. st. pr. Kr.)
- svako slovo se pomakne za k mjesta u alfabetu,
- Cezar je koristio šifru s $k = 3$

Vigenèreova šifra (16. st. – 19. st.)
- ključna riječ $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$,
- slova se pomiču redom za $k_1, k_2, \ldots, k_m, k_1, k_2, \ldots$ mjesta



ENIGMA (1920. – 2. svjetski rat)

- najčuveniji naprava za šifriranje
- Kriptoanaliza: Marian Rejewski i Alan Turing

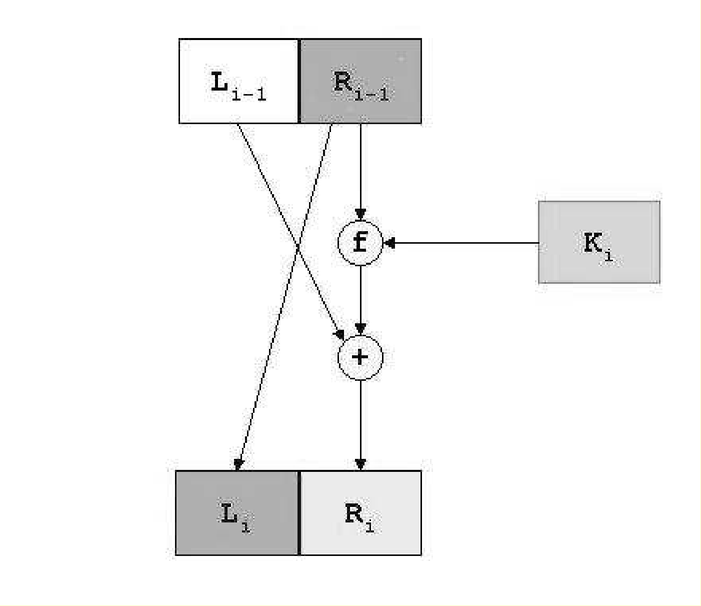
Hrvatska:

- Ivan Krstitelj Prus: Cryptographia nova seu Ars cryptographica noviter inventa (Nova kriptografija ili nedavno izmišljena kriptografska vještina, 1732.)

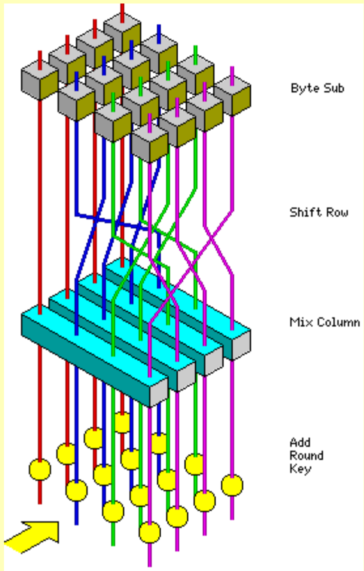
- Jules Verne: Mathias Sandorf - roman u kojem se opisuju urote u Austro-Ugarskoj, koje uključuju slanje šifriranih poruka; važan dio radnje se odvija u Hrvatskoj, posebno u Dubrovniku te pazinskom Kaštelu.

- Zagreb Enigma 16081 iz 1943. (predavanje Nicolas Courtois, 20th Central European Conference on Cryptology, Zagreb, 24.-26.6.2020.)

DES – Data Encryption Standard (1976. – 1998.)
- kombinira se supstitucija i transpozicija,
- ključna riječ ima 56 bitova (binarnih znamenaka $0, 1$),
- 16 rundi šifriranja



AES – Advanced Encryption Standard (2000. –)
- koristi operacije u polju $\mathbb{F}_{2^8}$,
- polje ima $2^8 = 256$ elemenata
- elementi polja su polinomi stupnja ≤ 7 s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$,
- operacije su zbrajanje polinoma u $\mathbb{F}_2[x]$ ($1{+}1{=}0$) i množenje polinoma modulo fiksni polinom osmog stupnja: $x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$



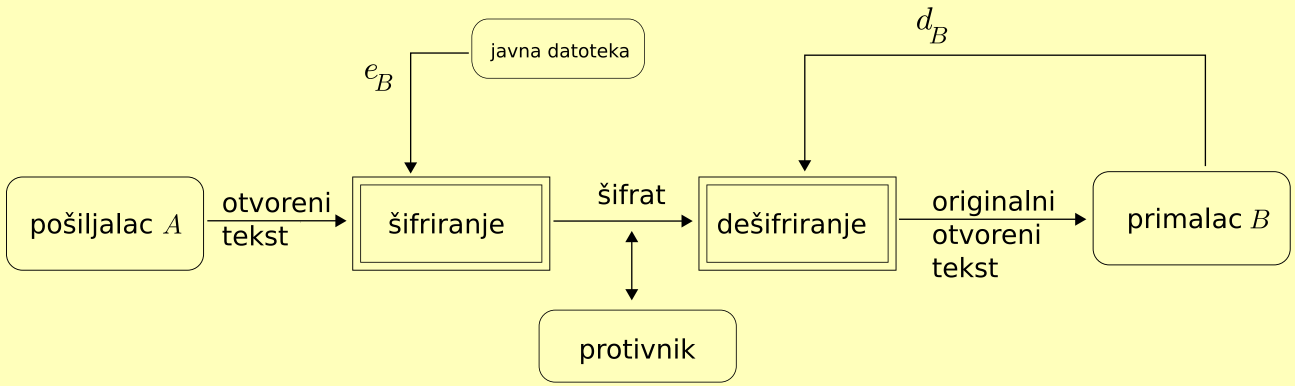
Kriptosustavi s javnim ključem

Sigurnost svih do sada navedenih kriptosustava leži u tajnosti ključa.

Problem: Kako sigurno razmijeniti ključ?

Ideja: javni ključ e_K za šifriranje, tajni (osobni) ključ d_K za dešifriranje.

Ovdje e_K mora biti tzv. jednosmjerna funkcija, tj. nju se računa lako, a njezin inverz jako teško.



Kriptosustavi s javnim ključem su puno sporiji od suvremenih simetričnih kriptosustava (npr. AES-a). Zato se u praksi ne koriste za šifriranje poruka, već za:

- razmjenu ključeva,
- digitalni potpis: $z = d_A(e_B(x))$, $e_A(z) = e_B(x)$.

Osnova za kriptosustave s javnim ključem su "teški" matematički problemi, koji uglavnom dolaze iz algoritamske teorije brojeva:

- faktorizacija velikih složenih brojeva

- problem diskretnog logaritma (DLP)

$$a^x \equiv b \pmod{p}$$

- eliptički diskretni logaritam (ECDPL)

- post-kvantna kriptografija (rešetke, kodovi za ispravljanje grešaka, supersingularne eliptičke krivulje)

Teorija brojeva

Teorija brojeva je grana matematike koja se ponajprije bavi proučavanjem svojstava cijelih brojeva.

Ima vrlo dugu i bogatu povijest (Euklid, Euler, Gauss).

Dugo je smatrana "najčišćom" granom matematike, u smislu da je bila najdalja od bilo kakvih konkretnih primjena.

Danas je teorija brojeva jedna od najvažnijih grana matematike za primjene u kriptografiji i sigurnoj razmjeni informacija (od 1975. godine nadalje).

Neke teme i primjeri problema iz teorije brojeva.

Djeljivost:

- Je li broj 123456789 djeljiv s 9?
- Naći broj koji pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 2, pri dijeljenju s 11 daje ostatak 1, a pri dijeljenju s 13 daje ostatak 9.
- Naći ostatak pri dijeljenju broja 2^{100} sa 101.

Prosti brojevi i faktorizacija:

- Prirodan broj $p > 1$ je prost ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$.
- Koliko ima prostih brojeva?
- Je li broj 91 prost?
- Je li broj $2^{31} - 1$ prost?
- Rastaviti na proste faktore broj 1001.
- Rastaviti na proste faktore broj $2^{32} + 1$.
- Može li se svaki paran broj veći od 2 prikazati kao zbroj dva prosta broja?

($4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3+7$, $12 = 5+7$)

Najveći zajednički djelitelj:

- Odrediti $\mathrm{nzd}(901, 1001)$ (bez faktorizacije).
- Naći cijele brojeve x i y takve da je $901x - 1001y = \mathrm{nzd}(901, 1001)$.

Euklidov algoritam:

$$\begin{aligned} 1001 &= 901 \cdot 1 + 100 \\ 901 &= 100 \cdot 9 + 1 \end{aligned}$$

Dakle, $\mathrm{nzd}(901, 1001) = 1$. Nadalje,

$$\begin{aligned} 1 &= 901 - 100 \cdot 9 = 901 - (1001 - 901 \cdot 1) \cdot 9 \\ &= 901 \cdot 10 - 1001 \cdot 9. \end{aligned}$$

Diofantske jednadžbe:

$$3x + 5y = 28 \quad \text{(linearna)}$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{(Pitagorina)}$$

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad \text{(Pellova)}$$

$$y^2 = x^3 + 17 \quad \text{(Mordellova, eliptička)}$$

$$x^4 - 12x^3y + 20x^2y^2 + 12xy^3 + y^4 = 1 \quad \text{(Thueova)}$$

Skup $\{1, 3, 8, 120\}$ je jedna **Diofantova četvorka**. Produkt svaka dva od ovih brojeva uvećan za jedan daje kvadrat.

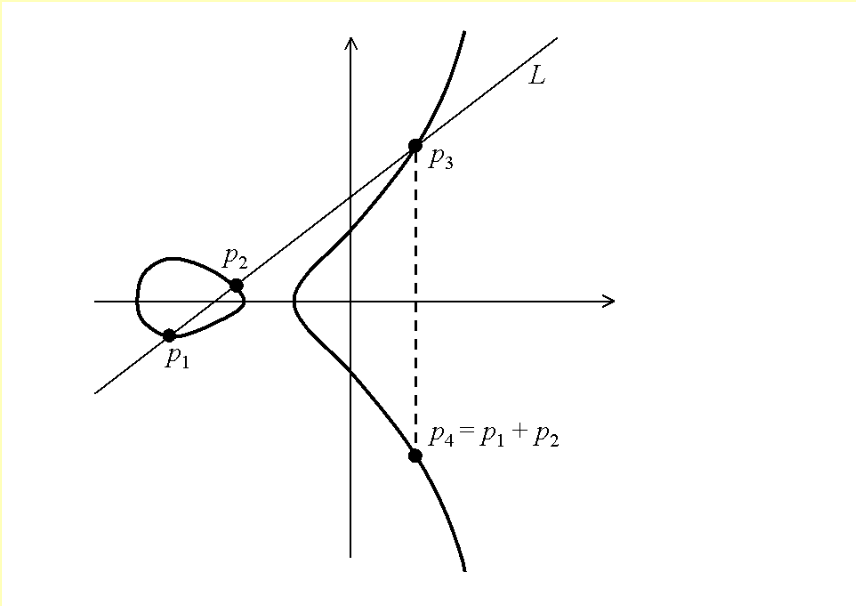
$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 1 &= 2^2, & 3 \cdot 8 + 1 &= 5^2, \\ 1 \cdot 8 + 1 &= 3^2, & 3 \cdot 120 + 1 &= 19^2, \\ 1 \cdot 120 + 1 &= 11^2, & 8 \cdot 120 + 1 &= 31^2. \end{aligned}$$

Nedavno je dokazano da ne postoji Diofantova petorka (ali se zna da postoji beskonačno mnogo takvih šestorki u racionalnim brojevima).
Ako je $\{1, 3, 8, d\}$ Diofantova četvorka, onda je $d = 120$.

$$1 \cdot d + 1 = x^2, \quad 3 \cdot d + 1 = y^2, \quad 8 \cdot d + 1 = z^2$$

$(xyz)^2 = (d+1)(3d+1)(8d+1)$ – eliptička krivulja

Eliptička krivulja: $y^2 = x^3 + ax + b$



ECDLP: $xP = \underbrace{P + \cdots + P}_{x \text{ pribrojnika}} = Q$ (nad $\mathbb{F}_p$ ili $\mathbb{F}_{2^k}$)

ECDLP je teži od DLP $\Rightarrow$ ista sigurnost uz kraći ključ ($1024 \longleftrightarrow 160$)

Diffie–Hellmanov protokol za razmjenu ključeva

G je konačna ciklička grupa s generatorom g, tj.
$G = \{g, g^2, \ldots, g^{|G|}\}$

Alice i Bob žele se dogovoriti o jednom tajnom elementu grupe G, preko nesigurnog komunikacijskog kanala kojeg prisluškuje Eva.

Primjer: Grupa $\mathbb{F}_{11}^{*} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ (operacija je množenje modulo 11) je ciklička grupa s generatorom 2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^x	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

Primjer: Grupa točaka na eliptičkoj krivulji

$$E : \quad y^2 = x^3 + x + 3$$

nad poljem $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je ciklička grupa s generatorom $P = (4, 1)$.

x	1	2	3	4	5	6
xP	$(4, 1)$	$(6, 6)$	$(5, 0)$	$(6, 1)$	$(4, 6)$	$\mathcal{O}$

$$\begin{array}{llcll} & G,\ g & & G,\ g & \\ \text{Alice} & a & \longrightarrow & g^a & \text{Bob} \\ & g^b & \longleftarrow & b & \end{array}$$

Eva: G, g, g^a, g^b

Alice: $(g^b)^a = g^{ab}$ $\searrow$

razmijenili su ključ

Bob: $(g^a)^b = g^{ab}$ $\nearrow$

Eva: g^a, g^b ? g^{ab}

Da bi protokol funkcionirao, grupa G treba biti takva da je u njoj potenciranje lako, a logaritmiranje teško.

Primjeri takvih grupa jesu multiplikativna grupa konačnog polja $\mathbb{F}_q^*$ i grupa $E(\mathbb{F}_q)$ točaka na eliptičkoj krivulji nad konačnim poljem (q mora imati barem 300 znamenaka kod $\mathbb{F}_q^*$, odnosno barem 50 znamenaka kod $E(\mathbb{F}_q)$).

RSA kriptosustav

(Rivest, Shamir, Adleman (1977))

- izaberemo tajno dva velika prosta broja p i q,

- izračunamo $n = p \cdot q$ i $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = n+1-p-q$ (Eulerova funkcija),

- izaberemo e tako da je $e < \varphi(n)$ i $\mathrm{nzd}(e, \varphi(n)) = 1$,

- izračunamo tajno d takav da je $d \cdot e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ (linearna diofantska jednadžba $d \cdot e - t \cdot \varphi(n) = 1$, rješava se proširenim Euklidovim algoritmom.

(n, e) – javni ključ

(p, q, d) – tajni (osobni) ključ

šifriranje: $e_K(x) = x^e \bmod n$

dešifriranje: $d_K(y) = y^d \bmod n$

Provjera:
$d_K(e_K(x)) \equiv d_K(x^d) \equiv x^{de} \equiv x^{t\varphi(n)+1} \equiv (x^{\varphi(n)})^t \cdot x \equiv x \bmod n$ (Eulerov teorem)

- sigurnost leži u teškoći faktorizacije velikih brojeva:
onaj tko zna ili može otkriti faktore p i q javno poznatog broja n, taj može izračunati $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, te saznati tajni eksponent d rješavajući linearnu diofantsku jednažbu $d \cdot e - t \cdot \varphi(n) = 1$.

- efikasnost: modularno potenciranje može se izvesti vrlo efikasno metodom uzastopnog kvadriranja (još se naziva i metoda "kvadriraj i množi" ili "binarne ljestve") koja koristi binarni zapis broja n.

Recimo da želimo izračunati x^{13}. Binarni zapis od 13 je $(1\,1\,0\,1)_2$. Sada x^{13} možemo izračunati kao

$$x^{13} = x \cdot (x^2)^2 \cdot ((x^2)^2)^2.$$

Mogli bismo reći da smo binarni zapis čitali s desna na lijevo. Ako isti zapis pročitamo s lijeva na desno, onda imamo

$$x^{13} = x \cdot ((x \cdot x^2)^2)^2.$$

- Teško je faktorizirati veliki prirodan broj n.

- Možda i nije; npr. $n = 10^{200} = 2^{200} \cdot 5^{200}$,
$n = 9999 \cdots 9919 = x^2 - 9^2 = (x-9)(x+9)$

- Teško je faktorizirati n koji je produkt dva velika pažljivo odabrana prosta broja p i q (s barem stotinjak znamenaka)

- Kako naći (tajno) veliki prosti broj?

Prostih brojeva ima “puno”, pa možemo krenuti od slučajno izabranog prirodnog broja zadane veličine te tražiti prvi veći prosti broj. Kako za dani veliki prirodni broj efikasno odrediti je li prost ili složen?
Čini se (“školskim” načinom - dijeleći redom s 2, 3, . . .) da je to podjednako teško kao faktorizirati veliki prirodni broj slične veličine.

● Testiranje prostosti – može se puno brže nego "školski". Postoje polinomijalni ("efikasni") algoritmi koji ne koriste definiciju prostih brojeva, već neka njihova svojstva koja su jednostavna za provjeru.

Mali Fermatov teorem: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$,

$x^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

(Miller-Rabinov vjerojatnosni test; Agrawal-Kayal-Saxena deterministički test; Lucas-Lehmerov test za Mersenne-ove brojeve)

Najveći danas poznati prosti broj je Mersenneov broj $2^{82589933} - 1$ koji ima 24 862 048 znamenaka (pronađen u prosincu 2018. godine).

- Faktorizacija: ne može puno brže nego "školski" (po onome što je danas poznato). Najbolji poznati algoritmi su subeksponencijalni. Osnovna ideja je izračunati nzd(n, y) za prikladno odabrani y (tako da rezultat bude $\neq 1, n$). (Metode kvadratnog sita, sita polja brojeva i eliptičkih krivulja.)

Broj RSA-250 sa 250 decimalnih znamenaka (829 bitova) je faktoriziran u veljači 2020. godine:

$$
\begin{aligned}
& 2140324650240744961264423072839333563008614715144755017797754920881418023447140136643345519095804679610992851872470914587687396261921557363047454770520805119056493106687691590019759405693457452230589325976697471681738069364894699871578494975937497937 \\
&= 64135289477071580278790190170577389084825014742943447208116859632024532344630238623598752668347708737661925585694639798853367 \\
&\times 33372027594978156556226010605355114227940760344767554666784520987023841729210037080257448673296881877565718986258036932062711.
\end{aligned}
$$

Hvala Vam na pozornosti!