Primjer 4.6. *Neka je $p > 5$ prosti broj. Dokazati da postoje dva uzastopna prirodna broja koja su oba kvadratni ostatci te dva uzastopna prirodna broja koja su kvadratni neostatci modulo p.*

Rješenje: Od brojeva 2, 5 i 10 barem jedan mora biti kvadratni ostatak modulo p. Zaista, ako je $(\frac{2}{p}) = -1$ i $(\frac{5}{p}) = -1$, onda je $(\frac{10}{p}) = (-1)\cdot(-1) = 1$. Ako je 2 kvadratni ostatak, onda su $1, 2$ uzastopni kvadratni ostatci; ako je 5 kvadratni ostatak, onda su $4, 5$ uzastopni kvadratni ostatci; ako je 10 kvadratni ostatak, onda su $9, 10$ uzastopni kvadratni ostatci. Za neostatke, pogledajmo brojeve 2 i 3. Ako su oba kvadratni neostatci, našli smo dva uzastopna neostatka. U protivnom među brojevima $1, 2, 3, 4$ imamo barem 3 kvadratna ostatka i najviše 1 neostatak. Ako među brojevima $5, 6, \ldots, p-1$ nema uzastopnih neostataka, onda bi u skupu $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ bilo više ostataka nego neostataka, što je nemoguće prema Teoremu 4.1. $\diamondsuit$

Primjer 4.7. *Neka je n cijeli broj oblika $16k+12$ te neka je $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ skup cijelih brojeva sa svojstvom da je $b_i \cdot b_j + n$ kvadrat cijelog broja za sve $i \neq j$. Dokazati da su tada svi brojevi b_i parni.*

Rješenje: Pretpostavimo da je b_1 neparan. Kvadrati pri dijeljenju sa 16 daju ostatke $0, 1, 4, 9$. Stoga je $b_i b_j \equiv 4, 5, 8, 13 \pmod{16}$. Ovo povlači da ako je neki od brojeva b_2, b_3, b_4 paran, onda je on djeljiv s 4, a također i da ne mogu dva od ovih brojeva biti djeljiva s 4. Zaključujemo da je među brojevima b_2, b_3, b_4 najviše jedan paran, tj. barem dva neparna. Dakle, možemo pretpostaviti da su b_1, b_2, b_3 neparni. Iz uvjeta $b_i b_j \equiv 5, 13 \pmod{16}$ imamo $b_i b_j \equiv 5 \pmod{8}$, tj.

$$b_1 b_2 \equiv 5 \pmod{8}, \quad b_1 b_3 \equiv 5 \pmod{8}, \quad b_2 b_3 \equiv 5 \pmod{8}.$$

Množenjem ovih triju kongruencija dobivamo $(b_1 b_2 b_3)^2 \equiv 5 \pmod{8}$, što je kontradikcija, jer kvadrati pri dijeljenju s 8 daju ostatke $0, 1, 4$. $\diamondsuit$

Nije teško provjeriti da skup

$$\{2, 2k^2 - 4k - 4, 2k^2 + 2, 8k^2 - 8k + 6\}$$

ima svojstvo da mu je produkt svakih dvaju različitih elemenata uvećan za $16k + 12$ kvadrat nekog cijelog broja. U terminologiji iz Potpoglavlja 14.6, takvi skupovi se nazivaju $D(16k + 12)$-četvorke. U skladu s prethodnim primjerom, vidimo da su svi elementi skupa parni.