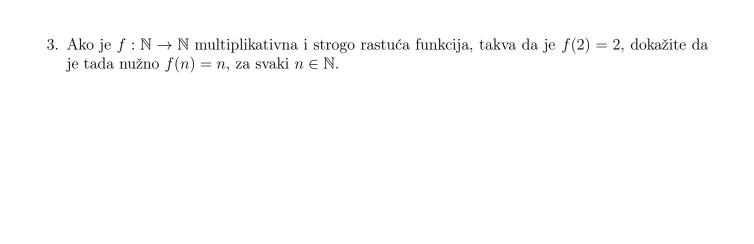
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-------|---|---|---|-------------|-----|---|----------|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| IMBAG | | | | IME I PREZI | ME. | | |

Teorija brojeva 2. kolokvij, 24.6.2019.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

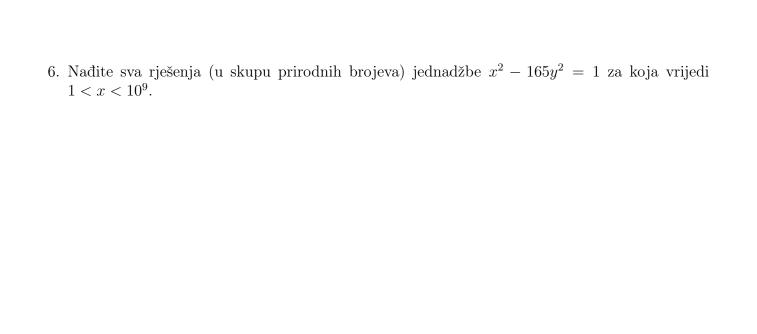
1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $167x^2+123xy+23y^2.$

| 2. Odredite $h(-68)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d=$ | = -68. |
|---|--------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



- 4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{577}{260}$ i $\frac{1+\sqrt{13}}{8}.$

| 5. | Nađite sve Pitagor | rine trokute u kojima | je jedna stranica j | jednaka 119. | |
|----|--------------------|-----------------------|---------------------|--------------|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |



Rješenja:

- 1. $5x^2 + 5xy + 13y^2$
- 2. h(-68) = 4, $x^2 + 17y^2$, $2x^2 + 2xy + 9y^2$, $3x^2 + 2xy + 6y^2$, $3x^2 2xy + 6y^2$
- 3. Prvo pokažemo da je f(3) = 3. Neka je f(3) = 3 + m, za $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada je

$$f(6) = 6 + 2m \Rightarrow f(5) \le 5 + 2m \Rightarrow f(10) \le 10 + 4m \Rightarrow f(9) \le 9 + 4m \Rightarrow f(18) \le 18 + 8m$$

$$\Rightarrow f(15) \le 15 + 8m$$

Ali s druge strane je $f(15) = f(3)f(5) > (3+m)(5+m) = 15+8m+m^2$, pa je $m^2 < 0$, tj. m = 0 i f(3) = 3.

Sada indukcijom pokažemo da je f(n) = n za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da za $k \ge 2$ vrijedi da je f(i) = i za sve i = 1, 2, ..., 2k - 1. Tada je gcd(2, 2k - 1) = 1, pa je f(4k-2)=2(2k-1)=4k-2. Jer je f(2k-1)=2k-1 i f je strogo rastuća, onda mora biti f(j) = j za sve $j \in [2k-1, 4k-2]$. Posebno je f(2k)=2k i f(2k+1)=2k+1. (4k-2>2k+1), pa indkucijom slijedi tvrdnja.

4.
$$\frac{577}{260} = [2, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 3], \frac{1 + \sqrt{13}}{8} = [0, 1, \overline{1, 2, 1, 4, 14, 4}]$$
5. $(119, 408, 425), (119, 1008, 1015), (119, 7080, 7081), (56, 105, 119), (119, 120, 169)$

- 6. (1079, 84), (2328481, 181272)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-------|---|---|---|-------------|-----|---|----------|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| IMBAG | | | | IME I PREZI | ME. | | |

Teorija brojeva 2. kolokvij, 24.6.2019.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se č**itljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

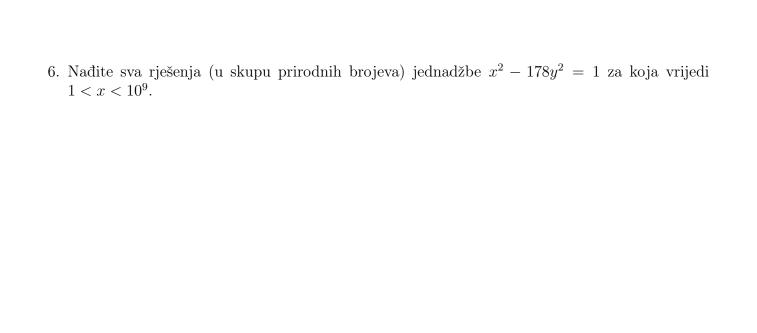
1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $159x^2-127xy+26y^2.$

| 2. Odredite $h(-63)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d=-63$. |
|--|
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |

| 3. | Neka je $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ multiplikativna funkcija. tada je g identiteta na $\mathbb{N}.$ | Dokažite: Ako je g strogo rastuća i vrijedi $g(2)=2, \label{eq:gaussian}$ |
|----|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

- 4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{563}{236}$ i $\frac{7+\sqrt{13}}{8}.$

| 5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 91. | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |



Rješenja:

- 1. $9x^2 5xy + 12y^2$ 2. h(-63) = 5, $x^2 + xy + 16y^2$, $2x^2 + xy + 8y^2$, $2x^2 xy + 8y^2$, $3x^2 + 3xy + 6y^2$, $4x^2 + xy + 4y^2$, 3. Isto kao u prvoj grupi.
- 4. $\frac{563}{236} = [2, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 2], \frac{7 + \sqrt{17}}{8} = [1, 3, \overline{14, 4, 1, 2, 1, 4}]$ 5. (35, 84, 91), (91, 312, 325), (91, 588, 595), (91, 4140, 4141), (60, 91, 109)
- $6.\ (1601,120),\, (5126401,384240)$