Racionalne Diofantove šestorke [*]

Andrej Dujella

1 Uvod

Skup od m racionalnih brojeva različitih od nule $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ naziva se *racionalna Diofantova m-torka* ako je $a_i a_j + 1$ potpun kvadrat za sve $1 \leq i < j \leq m$.

Glavno pitanje vezano uz pojam pojam jest koliko veliki mogu biti skupovi s ovim svojstvom. U slučaju Diofantovih m-torki čiji su članovi cijeli brojevi (različiti od nule), na ovo pitanje skoro u potpunosti odgovoreno. Naime, lako je za vidjeti da postoji beskonačno mnogo cjelobrojnih Diofantovih četvorki (npr. $\{k-1, k+1, 4k, 16k^3 - 4k\}$ za $k \geq 2$). S druge strane, poznato je (Dujella, 2004) da ne postoji cjelobrojna Diofantova šestorka, te najviše konačno mnogo takvih petorki. Međutim, u slučaju racionalnih Diofantovih m-torki nije poznata nikakva gornja ograda za njihovu veličinu. Spomenimo da bi takva ograda slijedila iz jedne Langove slutnje koja povlači da postoji apsolutna gornja ograda za broj racionalnih točaka na krivuljama genusa 2. Uočimo da ako je $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ racionalna Diofantova petorka, onda hipereliptička krivulja

$$y^2 = (a_1 x + 1)(a_2 x + 1)(a_3 x + 1)(a_4 x + 1)(a_5 x + 1)$$

ima genus 2. Ako uvedemo oznaku $B(g, \mathbb{Q}) = \max_C |C(\mathbb{Q})|$, gdje C prolazi po svim krivuljama nad $\mathbb{Q}$ genusa g, onda imamo sljedeću ogradu za broj elemenata u racionalnoj Diofantovoj m-torki: $m \leq 5 + B(2, \mathbb{Q})$ (Herrmann, Pethő i Zimmer su pokazali da također vrijedi i $m \leq 4 + B(4, \mathbb{Q})$). Spomenimo da je poznato da je $B(2, \mathbb{Q}) \geq 642$ (Stoll, 2009).

Prvi primjer racionalne Diofantove četvorke pronašao je sam Diofant. Bio je to skup $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\}$. Euler je pokazao da postoji beskonačno

[*] Proširena verzija članka *Rational Diophantine sextuples with mixed signs*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., to appear.

mnogo racionalnih Diofantovih petorki. Jedna takva je npr.

$$\left\{1, 3, 8, 120, \frac{777480}{8288641}\right\}.$$

(Četvorku $\{1, 3, 8, 120\}$ je pronašao Fermat i to je bila prva poznata cjelobrojna Diofantova četvorka.) Od 1999. godine, Gibbs je pronašao ukupno 45 primjera racionalnih Diofantovih šestorki. Prvi takav primjer bio je

$$\left\{\frac{11}{192}, \frac{35}{192}, \frac{155}{27}, \frac{512}{27}, \frac{1235}{48}, \frac{180873}{16}\right\}.$$

Opišimo ukratko Gibbovu metodu. Generiraju se prirodni brojevi A i B, te se AB prikaže u obliku $AB = X^2 - l^2$. Sada se traži treći broj C takav da je $AC + l^2 = Y^2$ i $BC + l^2 = Z^2$. To se može napraviti pretraživanjem "grubom silom", ili rješavanjem Pellovske jednadžbe

$$BY^2 - AZ^2 = l^2(B - A).$$

Potom se u listi C-ova provjerava postoji li neki podskup koji daje šestorku ili barem petorku. Dobivene petorke su pokušavaju proširiti do šestorke korištenjem konstrukcije tzv. regularnih Diofantovih petorki (Dujella, 1997), koju ćemo opisati malo kasnije.

Do danas nije poznat niti jedan primjer racionalne Diofantove sedmorke. Nema niti jasne i opće prihvaćene slutnje o tome bi li takav objekt mogao postojati. Također, ne zna se (a mislim da su to zanimljiva pitanja):

- postoji li beskonačno mnogo racionalnih Diofantovih šestorki;
- postoji li racionalna Diofantova petorka (četvorka, trojka) koja se na barem dva različita načina može proširiti do šestorke.

Napomenimo da svi Gibbsovi primjeri šestorki sadrže svih šest pozitivnih racionalnih brojeva. Stoga se ima smisla pitati postoje li racionalne Diofantove šestorke s "mijevsanim" preznacima. Pokazat ćemo da je odgovor na ovo pitanje potvrdan, i to za svaku kombinaciju predznaka. Budući da je $\{a_1, \ldots, a_6\}$ Diofantova šestorka ako i samo ako $\{-a_1, \ldots, -a_6\}$ ima to svojstvo, dovoljno je pronaći racionalne Diofantove šestorke i jednim, dva i tri negativna elementa.

2 Tri konstrukcije

U konstrukciji racionalnih Diofantovih šestorki koristit ćemo tri metode. U njima ćemo koristiti vezu Diofantovih m-torki i eliptičkih krivulja, te tzv. regularne Diofantove m-torke ($m = 3, 4, 5$).

Neka je $\{a, b\}$ racionalni Diofantov par. Tada je $\{a, b, a + b \pm 2\sqrt{ab + 1}\}$ racionalna Diofantova trojka. Zaista, ako je $ab+1 = r^2$, $c = a+b\pm 2r$, onda je $ac + 1 = (a \pm r)^2$, $bc + 1 = (br)^2$. Takve trojke se zovu *regularne.*

Neka je $\{a, b, c\}$ racionalna Diofantova trojka. Da bi proširili ovu trojku do četvorke s istim svojstvom, trebamo riješiti sustav

$$ax + 1 = \Box, \qquad bx + 1 = \Box, \qquad cx + 1 = \Box. \tag{1}$$

Prirodno se nameće ideja da pridružimo sustavu (1) eliptičku krivulju

$$\mathcal{E}: \qquad y^2 = (ax + 1)(bx + 1)(cx + 1). \tag{2}$$

Na krivulji E imamo tri racionalne točke reda 2, a također i još dvije očite racionalne točke

$$P = (0, 1), \quad S = \left(\frac{1}{abc}, \frac{\sqrt{(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)}}{abc}\right).$$

Može se pokazati da x-koordinata točke $T \in \mathcal{E}(\mathbb{Q})$ zadovoljava sustav (1) ako i samo ako je $T - P \in 2\mathcal{E}(\mathbb{Q})$. Nije teško provjeriti da je $S \in 2\mathcal{E}(\mathbb{Q})$. To znači da brojevi $x(P \pm S)$ zadovoljavaju sustav (1). To su brojevi

$$d_{+,-} = a + b + c + 2abc \pm 2\sqrt{(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)},$$

koje su prvi otkrili Arkin, Hoggatt i Strauss 1979. godine, te pokazali da su $\{a, b, c, d_+\}$ i $\{a, b, c, d_-\}$ racionalne Diofantove četvorke (ako su im elementi različti od nule; za $\{a, b, c\} = \{1, 3, 8\}$ se dobiva $d_+ = 120$, $d_- = 0$). Četvorke ovog oblika se nazivaju *regularne.* Poznata (i još nedokazana) slutnja je da su sve cjelobrojne Diofantove četvorke regularne. Uočimo da ako je trojka $\{a, b, c\}$ regularna, onda je $d_+d_- = 0$.

Neka je $\{a, b, c, d\}$ racionalna Diofantova četvorka koja zadovoljava uvjet da je $abcd \neq 1$, te neka je

$$e_{+,-} = \frac{(a+b+c+d)(abcd + 1) + 2abc + 2abd + 2acd + 2bcd \pm 2\sqrt{(ab+1)(ac+1)(ad+1)(bc+1)(bd+1)(cd+1)}}{(abcd - 1)^2}.$$

Tada vrijedi (Dujella, 1997) da su $\{a, b, c, d, e_+\}$ i $\{a, b, c, d, e_-\}$ racionalne Diofantove petorke (ako su im elementi različti od nule). Uočimo da ako je četvorka $\{a, b, c, d\}$ regularna, onda je $e_+e_- = 0$. Racionalna Diofantova petorka dobivena ovom konstukcijom se naziva *regularna*. Ekvivalentno, racionalna Diofantova petorka $\{a, b, c, d, e\}$ je regularna ako i samo ako vrijedi

$$(abcde + 2abc + a + b + c - d - e)^2 = 4(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)(de + 1)\,.$$

Ova konstrukcija se također može opisati u terminima eliptičke krivulje $\mathcal{E}$. Naime, neka je D točka na $\mathcal{E}$ s x-koordinatom jednakom d. Tada su brojevi e_+ i e_- upravo x-koordinate točaka $D \pm S$ na $\mathcal{E}$. (Regularne Diofantove četvorke i petorke moguće je karakterizirati i pomoću krivulje $y^2 = (ax + 1)(bx + 1)(cx + 1)(dx + 1)$.)

Sada ćemo opisati tri metode za konstrukciju racionalnih Diofantovih šestorki.

- Neka je $ab + 1 = r^2$ i $c = a + b + 2r$, tj. uzmimo regularnu Diofantovu trojku $\{a, b, c\}$. Promotrimo eliptičku krivulju $\mathcal{E}$ danu sa (2). Možemo očekivati da će ta krivulja imati beskonaņo mnogo racionalnih točaka (samo vrlo iznimno će točke P i S biti konačnog reda). Naravno, mi smo u stanju testirati samo konačno mnogo takvih točaka. Testiranje će uključivati uvjet za izvjesni racionalan broj, čiji će brojnik izgledati kao "slučajan" prirodan broj, mora biti potpun kvadrat. Izglednije je da će takav uvjet biti zadovoljen oko je taj brojnik "mali".

  Stoga ćemo u našoj konstrukciji koristiti racionalne točke na $\mathcal{E}$ s relativno malom visinom. Na primjer, ako je $\operatorname{rank}(\mathcal{E}(\mathbb{Q})) = 2$ i X_1, X_2 generatori od $\mathcal{E}(\mathbb{Q})/\mathcal{E}(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$, uzet ćemo točke oblika $T = m_1X_1 + m_2X_2$, za $|m_i| \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ako je $D = P + 2T = [d, d']$, onda je $\{a, b, c, d\}$ Diofantova četvorka (barem neke od ovih četvorki su neregularne; to je bio razlog za izbjegavanje krivulja s rangom 1). Definirajmo točke $E = D + S = [e, e']$ i $F = D - S = [f, f']$. Tada su $\{a, b, c, d, e\}$ i $\{a, b, c, d, f\}$ racionalne Diofantove petorke (i ako je $\{a, b, c, d\}$ neregularna, onda je $ef \neq 0$). Ako je $ef + 1$ potpun kvadrat, onda je $\{a, b, c, d, e, f\}$ racionalna Diofantova šestorka (ukoliko su joj svi elementi različiti od 0, te međusobno različiti).

  Na ovaj način smo pronačli npr. šestorku $\{\frac{5}{36}, \frac{5}{4}, \frac{32}{9}, \frac{189}{4}, \frac{665}{1521}, \frac{3213}{676}\}$ s pozitivnim elementima, (koju je već ranije pronašao Gibbs), ali također i nekoliko šestorki s "miješanim" predznacima, npr.

$$\{\frac{5}{14}, \frac{7}{2}, \frac{48}{7}, \frac{1680}{361}, -\frac{2310}{19321}, \frac{93840}{71407}\}.$$

- Uzmimo ponovo regularnu trojku $\{a,b,c\}$, gdje je $c = a + b + 2r$, i primijenimo istu konstrukciju na par $\{b,c\}$ da bi dobili regularnu trojku $\{b,c,d\}$. Dobivamo da je $d = a+4b+4r$. Da bi $\{a,b,c,d\}$ bila Diofantova četvorka, treba još zadovoljiti samo jedan uvjet, i to da je $ad+1$ potpun kvadrat. (Skoro identičnu metodu za nalaženje četvorki koristio je već Diofant.) Ovaj uvjet vodi na $(a+2r)^2 - 3 = \square$, što možemo zadovoljiti tako da uzmemo $r = \frac{u-a}{2}$, gdje je $u = \frac{\alpha^2+3}{2\alpha}$ za $\alpha \in \mathbb{Q}$. Možemo očekivati da će ovako dobivena četvorka biti neregularna.

  Primjenom ranije opisane konstrukcije za dobivanje regularnih Diofantovih petorki na četvorku $\{a,b,c,d\}$, dobivamo petorke $\{a,b,c,d,e_+\}$ i $\{a,b,c,d,e_-\}$. Ako je e_+e_-+1 potpun kvadrat, onda je $\{a,b,c,d,e_+,e_-\}$ racionalna Diofantova šestorka (ponovo uz pretpostavku da su joj elementi različiti od 0, te međusobno različiti). Kao primjer šestorke dobivene ovom metodom, navodimo

$$\{\frac{27}{35}, -\frac{35}{36}, \frac{1007}{1260}, -\frac{352}{315}, \frac{72765}{106276}, -\frac{5600}{4489}\}.$$

- Neka je $\{a,b\}$ racionalni Diofantov par. Za racionalni broj t, definiramo $c = -\frac{4t(-1+t)(bt-a)}{(-a+bt^2)^2}$. Lako je provjeriti da su $ac+1$ i $bc+1$ potpuni kvadrati, pa je stoga $\{a,b,c\}$ racionalna Diofantova trojka. Ovu trojku možemo proširiti do neregularne četvorke $\{a,b,c,d\}$ tako da uzmemo $d = \frac{8(c-a-b)(a+c-b)(b+c-a)}{(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)^2}$. Ovaj broj je upravo x-koordinata točke $3P$ $(= P + 2P)$ na $\mathcal{E}$. Ponovo možemo primijeniti metodu za dobivanje regularnih Diofantovih petorki na četvorku $\{a,b,c,d\}$, te tako dobiti e_+ i e_-. Ako je $e_+e_- + 1$ potpun kvadrat, onda smo dobili racionalnu Diofantovu šestorku $\{a,b,c,d,e_+,e_-\}$ (ako su svi elementi ovog skupa međusobno različiti i različiti od nule). Razlog zbog kojeg u ovoj konstrukciji koristimo neregularne trojke $\{a,b,c\}$ leži u tome što za regularne trojke za ovako definirani d vrijedi $d = d_+$, pa bi dobivena četvorka bila regularna, što bi povlačilo da je $e_+e_- = 0$. Ovom konstrukcijom smo našli npr. šestorku

$$\{-\frac{5}{9}, \frac{32}{45}, \frac{27}{20}, \frac{216032}{937445}, -\frac{185232905}{263802564}, \frac{175578975}{136095556}\}.$$

Opisani algoritmi su implementirani u programskom paketu PARI/GP, a za računanje ranga je korišten Cremonin program MWRANK.

3 Primjeri

Metoda opisanim u prethodnom poglavlju, pronađeno je ukupno 26 primjera racionalnih Diofantovih šestorki s “miješanim” predznacima. Navodimo ih ovdje prema metodama pomoću kojih su pronađeni.

Prva metoda:

$$\left\{\frac{19}{12},\frac{33}{4},\frac{52}{3},\frac{60}{2209},-\frac{495}{24964},\frac{595}{12}\right\},\ \left\{\frac{31}{84},\frac{9}{7},\frac{49}{12},\frac{160}{21},-\frac{455}{3468},\frac{7200}{2023}\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{14},\frac{7}{2},\frac{48}{7},\frac{1680}{361},-\frac{2310}{19321},\frac{93840}{71407}\right\},\ \left\{\frac{7}{40},-\frac{75}{56},\frac{41}{70},-\frac{5376}{4805},-\frac{300288}{241115},\frac{165}{224}\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{24},-\frac{64}{15},-\frac{407}{120},-\frac{1530}{361},\frac{2088}{9245},\frac{399245}{2889816}\right\},\ \left\{-\frac{8}{17},\frac{85}{72},-\frac{763}{1224},\frac{18360}{11449},\frac{4914}{8993},\frac{332605}{496008}\right\},$$
$$\left\{-\frac{5}{33},\frac{121}{60},\frac{131}{660},\frac{171360}{30899},\frac{51978528}{54014455},\frac{8041}{1500}\right\},$$
$$\left\{\frac{8}{23},\frac{161}{72},\frac{8695}{1656},\frac{54648}{22201},-\frac{11270}{62001},\frac{46288935}{9481336}\right\}.$$

Druga metoda:

$$\left\{\frac{147}{20},\frac{25}{28},\frac{96}{35},-\frac{11}{140},\frac{30723}{3380},\frac{165}{1183}\right\},\ \left\{\frac{253}{1140},-\frac{9}{380},\frac{125}{57},\frac{247}{60},\frac{6688}{375},\frac{2016}{95}\right\},$$
$$\left\{\frac{27}{35},-\frac{35}{36},\frac{1007}{1260},-\frac{352}{315},\frac{72765}{106276},-\frac{5600}{4489}\right\},$$

Treća metoda:

$$\left\{\frac{1}{6},\frac{27}{8},\frac{385}{96},\frac{1280}{243},\frac{250705}{44376},-\frac{25415}{161376}\right\},$$
$$\left\{\frac{27}{14},\frac{49}{18},-\frac{16}{63},\frac{269654}{113569},\frac{11572496}{19969047},-\frac{15578784}{44488087}\right\},$$
$$\left\{\frac{24}{35},-\frac{75}{56},\frac{77}{120},-\frac{846600}{634207},\frac{5629624}{7540215},-\frac{4456963}{3346680}\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{9},-\frac{27}{20},-\frac{55}{36},\frac{96305}{158404},\frac{23144992}{59202405},-\frac{31157568}{20220605}\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{9},-\frac{27}{20},\frac{13}{20},-\frac{304083}{212180},\frac{20055200}{31573161},-\frac{79520320}{67125249}\right\},$$
$$\left\{-\frac{5}{9},\frac{27}{20},\frac{32}{45},\frac{216032}{937445},-\frac{185232905}{263802564},\frac{175578975}{136095556}\right\},$$
$$\left\{\frac{27}{11},\frac{77}{36},-\frac{32}{99},-\frac{43424}{2297339},\frac{811864053}{368716804},-\frac{808311427}{2102956164}\right\},$$
$$\left\{\frac{21}{22},\frac{33}{56},-\frac{64}{77},-\frac{3340352}{3625853},\frac{1092049959}{1018087688},-\frac{778578801}{1587999368}\right\},$$
$$\left\{\frac{27}{35},-\frac{35}{36},\frac{161}{180},-\frac{4771879}{4287380},\frac{917801280}{4823805007},-\frac{2117588000}{6213359943}\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{28},-\frac{27}{35},\frac{35}{36},\frac{3838005}{64606108},\frac{324705510976}{300303876645},-\frac{329539009184}{358699363245}\right\},$$

$$\left\{\frac{7}{26},-\frac{221}{72},-\frac{297}{104},\frac{226791}{1867424},\frac{18453763328}{60529284729},-\frac{19040799232}{6576074649}\right\},$$
$$\left\{-\frac{14}{45},\frac{135}{56},-\frac{185}{504},\frac{25432135}{14622776},\frac{11585718144}{50291423405},\frac{314271141184}{117352732005}\right\},$$
$$\left\{\frac{14}{45},-\frac{135}{56},-\frac{832}{315},\frac{21739328}{125951315},\frac{197932494375}{570623898632},-\frac{207609892105}{76457704968}\right\},$$
$$\left\{-\frac{14}{45},\frac{77}{40},\frac{135}{56},\frac{203687253}{361681960},-\frac{5323853454400}{12959750399967},\frac{4826209930880}{3371383988343}\right\},$$
$$\left\{-\frac{7}{17},-\frac{425}{1008},\frac{2432}{1071},\frac{80888528768}{50503742919},\frac{1661966668042065}{1421147949949456},\frac{13748985346416705}{5799449383741456}\right\}.$$

Možemo uočiti tri šestorke koje sadrže par $\{\frac{5}{9},-\frac{27}{20}\}$, te tri šestorke koje sadrže par $\{\frac{14}{45},-\frac{-135}{36}\}$.

4 Neke krivulje ranga 8

Primjeri racionalnih Diofantovih šestorki koje je pronašao Gibbs su korišteni za nalaženje primjera eliptičkih krivulja relativno velikog ranga, oblika

$$y^2=(ax+1)(bx+1)(cx+1)(dx+1), \tag{3}$$

gdje je $\{a,b,c,d\}$ racionalna Diofantova četvorka, te

$$y^2=(ax+1)(bx+1)(cx+1), \tag{4}$$

gdje je $\{a,b,c\}$ je racionalna Diofantova trojka. U oba slučaja dobivene su krivulje ranga 8. Prethodno navedeni novi primjeri racionalnih Diofantovih šestorki, tj. neke njihove podčetvorke $\{a,b,c,d\}$ i podtrojke $\{a,b,c\}$, daju nekolikoo novi primjera krivulja ranga 8. Pomoću programa MWRANK, našli smo da krivulja (3) ima rang 8 za

$$\{a,b,c,d\}=\left\{\frac{385}{96},\frac{1280}{243},\frac{250705}{44376},-\frac{25415}{161376}\right\},$$

dok krivulja (4) ima rang 8 za $\{a,b,c\}=$

$$\left\{-\frac{1530}{361},\frac{2088}{9245},\frac{399245}{2889816}\right\},\quad \left\{\frac{8695}{1656},\frac{54648}{22201},\frac{46288935}{9481336}\right\},$$

$$\left\{\frac{8695}{1656},-\frac{11270}{62001},\frac{46288935}{9481336}\right\},\quad \left\{\frac{21}{22},\frac{1092049959}{1018087688},-\frac{778578801}{1587999368}\right\},$$

$$\left\{\frac{96305}{158404},\frac{23144992}{59202405},-\frac{31157568}{20220605}\right\},\quad \left\{\frac{269654}{113569},\frac{11572496}{19969047},-\frac{15578784}{44488087}\right\}.$$

Svi rangovi su izračunati bezuvjetno, osim za zadnje dvije trojke, za koje MWRANK daje da je rang jednak 7 ili 8, dok "Parity Conjecture" povlači da je rang paran.

Napomenimo da je trenutni rekord za rang krivulja oblika (4) iznosi 9 (npr. za $\{a, b, c\} = \left\{\frac{1270}{2323}, \frac{5916}{2323}, \frac{6645938861324}{12535672267}\right\}$ – Dujella, 2007), dok za krivulje oblika (3) nije poznat primjer s rangom većim od 8.

Literatura

[1] J. Arkin, V. E. Hoggatt and E. G. Strauss, On Euler's solution of a problem of Diophantus, Fibonacci Quart. **17** (1979), 333–339.

[2] L. Caporaso, J. Harris and B. Mazur, Uniformity of rational points, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 1–35.

[3] J. E. Cremona, Algorithms for Modular Elliptic Curves, Cambridge Univ. Press, 1997.

[4] Diophantus of Alexandria, Arithmetics and the Book of Polygonal Numbers, (I. G. Bashmakova, Ed.), Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).

[5] A. Dujella, On Diophantine quintuples, Acta Arith. **81** (1997), 69–79.

[6] A. Dujella, Diophantine m-tuples and elliptic curves, J. Théor. Nombres Bordeaux **13** (2001), 111–124.

[7] A. Dujella, Irregular Diophantine m-tuples and high-rank elliptic curves, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **76** (2000), 66–67.

[8] A. Dujella, There are only finitely many Diophantine quintuples, J. Reine Angew. Math. **566** (2004), 183–214.

[9] A. Dujella, On Mordell-Weil groups of elliptic curves induced by Diophantine triples, Glas. Mat. Ser. III **42** (2007), 3–18.

[10] Y. Fujita, Any Diophantine quintuple contains a regular Diophantine quadruple, preprint.

[11] P. Gibbs, Some rational Diophantine sextuples, Glas. Mat. Ser. III **41** (2006), 195–203.

[12] P. Gibbs, A generalised Stern-Brocot tree from regular Diophantine quadruples, preprint, `math.NT/9903035`.

[13] T. L. Heath, Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra. Powell's Bookstore, Chicago; Martino Publishing, Mansfield Center, 2003.

[14] E. Herrmann, A. Pethő and H. G. Zimmer, On Fermat's qudruple equations, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **69** (1999), 283–291.

[15] PARI/GP, version 2.3.3, Bordeaux, 2008, `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

Department of Mathematics, University of Zagreb,
Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb, Croatia

E-mail address: `duje@math.hr`