

太阳影子定位

摘要

本文研究太阳影子定位问题，充分考虑影子长度与各参数的关系，建立了影子终点坐标误差最小为目标的优化模型，利用遗传算法确定最优的地点与日期。

问题 1，我们先确定太阳时角、赤纬角等参数与日期和拍摄经、纬度的关系，并计算出太阳高度角和方位角，然后以正东方向为 X 轴正方向，正北方向为 Y 轴正方向，以固定直杆底端为原点建立标准坐标系，得出直杆投影轨迹图。

问题 2，我们以直杆高及经、纬度范围为参数，建立以影子坐标误差平方和最小的优化模型。应用暴力搜索先在中国境内进行搜索，确定最优解拍摄地点为云南（纬度：26.2 经度：103.4）；在全球范围内（考虑到太阳一天只能照射半个地球的约束）进行搜索，确定最优拍摄地点为印度尼西亚（纬度：-3，经度：106）。然后，考虑到题设数据坐标系可能与本文中建立的标准坐标系存在偏差，故引入坐标旋转因子对题设坐标进行修正，同样应用暴力搜索法求得全球最优解为海南三亚市（纬度：18，经度 109）。

问题 3，我们以拍摄位置，拍摄日期为决策变量，杆长和坐标旋转因子为未知参量，建立拍摄地点日期的定位定时优化模型。首先，在问题 2 中坐标旋转优化模型的基础上，添加拍摄日期作为决策变量，建立优化模型。然后，采用遗传算法求出 100 组最优解，接着先采用主成分分析法对拍摄经纬度、拍摄日期、杆长和坐标旋转因子进行相关性分析。发现经纬度的对目标函数的决定因素极高，故对变量进行降维，采用模糊 C-均值中心聚类法得出了更为精确的解，如下表：

表 1 问题 2 拍摄位置表

| | 纬度 | 经度 | 杆长 | 旋转角 | 日期 | 坐标误差 | 地理位置 |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 附件 2 北半球最优地理位置 | 33.64669 | 74.98826 | 1.481639 | -19.1823 | 105.7196 | 0.01155 | 新疆西南领域 |
| 附件 2 北半球最优地理位置 | 8.42971 | 79.15304 | 1.452079 | -31.7072 | 28.89563 | 0.019352 | 斯里兰卡 |
| 附件 3 北半球最优地理位置 | 33.879 | 108.581 | 2.604 | 12.805 | 22.894 | 0.015 | 陕西西安 |
| 附件 3 北半球最优地理位置 | 45.467 | 109.714 | 1.785 | 12.825 | 31.573 | 0.034 | 蒙古 |

问题 4，以图像坐标与现实世界坐标之间的转换关系，结合问题 2，我们建立了拍摄地点的优化模型。首先用 MATLAB 等间隔获取 21 组图片，获得其太阳影长端点坐标，利用世界坐标与图像像素坐标之间的坐标变换关系，通过采集的影长像素点用最小二乘法确定变换矩阵。然后结合问题 2 中坐标旋转优化模型，确定出视频拍摄的地点新疆和内蒙的交界处 $(43^{\circ}, 95^{\circ})$ 。

关键词：影子定位 暴力搜索 遗传算法 模糊 C-均值中心聚类

一、 问题的重述

1.1 问题的背景

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面,太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化,确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1.2 问题的提出

问题 1: 建立影子长度变化的数学模型,分析影子长度关于各个参数的变化规律,并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒)3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

问题 2: 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据,给出若干个可能的地点。

问题 3: 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据,给出若干个可能的地点与日期。

问题 4: 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频,并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型,并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

问题 5: 如果拍摄日期未知,你能否根据视频确定出拍摄地点与日期?

二、 符号的说明及模型的假设

2.1 符号的说明

| | |
|-------------------|----------------|
| t | 北京时间 |
| n | 拍摄日期序列号 |
| (α, β) | 拍摄地点的经、纬度 |
| ω | 太阳时角 |
| h | 太阳高度角 |
| δ | 太阳赤纬角 |
| L | 太阳影子长度 |
| θ | 坐标旋转因子 |
| A | 太阳方位角 |
| H | 固定直杆长 |
| (x, y) | 标准坐标系下太阳影子端点坐标 |

2.2 模型的假设

- a) 太阳光线穿过大气层时折射角较小, 可忽略
- b) 附件所给的太阳影子坐标为绝对可用
- c) 太阳影子拍摄地点不会出现在海上
- d) 固定直杆垂直水平面

三、问题的分析

要通过太阳影子坐标确定拍摄地点和日期, 其关键在于建立太阳影子坐标关于各个参数的变化规律。为了更好的说明太阳影子与各参数的关系, 在后续的分析中我们先对太阳视运动做了简述, 然后引入了天球系统说明各个参数之间的关系。

3.1 问题 1 的分析

问题 1 要求描述 3 米高直杆的太阳影子长度随时间的变化曲线。我们以天球系统中地平坐标系及时角坐标系为理论基础, 首先确定太阳时、时角、赤纬角等参数随日期和拍摄经、纬度的关系。然后, 依据直杆投影图中的直角关系确定影长与固定杆长的关系式, 得到太阳影子长度随时间的变化曲线。最后, 建立以直杆底端为原点, 以正东方向为 X 轴正方向, 以正北方向为 Y 轴正方向的标准坐标系。在此基础上, 结合太阳方位角与太阳影子坐标的几何关系, 得出直杆投影轨迹图。

3.2 问题 2 的分析

问题 2 要求依据附件 1 的影子顶点坐标数据, 给出若干个可能的地点。我们以题设影子顶点坐标作为参考数据, 建立以影子坐标误差平方和为最小的优化模型。基于暴力搜索的准确性、快速性、收敛性的特点, 在该问题中采用暴力搜索对问题进行求解。我们分以下两种模型考虑: 模型 1 假设附件 1 中坐标数据为标准坐标系下测得的数据。因为附件中仅说明以水平面为 x-y 平面建立坐标系, 可能与本文中建立的坐标系存在偏差。因此, 模型 2 是在模型 1 的基础上, 引入坐标旋转因子, 对附件 1 中坐标系进行旋转下的改进模型。

值得指出的是, 太阳一天仅能照射到地球的一半, 因此, 在求解该优化问题时必须对经度和纬度有严格的限制(具体约束条件在模型的建立与求解中提出)。

3.3 问题 3 的分析

问题 3 要求在拍摄日期未知的情况下, 依据太阳影子顶点坐标数据确定直杆所处的地点和日期。首先以日期作为未知量, 结合问题 2 建立优化模型进行求解。基于变量较多, 计算规模大, 所以我们采用遗传算法对上述模型进行求解。以稳定局部最优解为目的, 我们先求出 100 组局部最优解, 然后主层次法对相关变量进行分析, 最后采用模糊 C-均值中心聚类, 求得基于遗传算法的稳定解, 并对其进行分析。

3.4 问题 4 的分析

要通过附件太阳影子变化视频和直杆高度 2 米，建立确定拍摄地点的数学模型，求出若干个可能的拍摄地点。首先观看视频，可得时间和拍摄日期。然后通过 MATLAB 软件在图片中读取多组直杆像素点和太阳影子的坐标，利用图像坐标系与现实世界坐标系之间的转换关系求得太阳影子在世界坐标系中几何坐标，结合问题 2 中的旋转优化模型，可求解可能的拍摄地点。

四、模型的准备

由于太阳光线的照射，物体会形成影子，影子的朝向，影子端点的投影坐标会随着太阳视运动位置的不同而发生改变，同时太阳视运动又与太阳高度、太阳时角和太阳方位角有关。故我们引入天球系统对太阳视运动进行简述。

4.1 天球系统

所谓的天球系统，是以地球为球心，以无限远为天球半径，天球围绕地球做圆周运动。若以太阳为例，由于地球的自转，太阳视运动路径是以天轴为旋转轴的圆。

4.1.1 地平坐标系

地平坐标系是以太阳高度角(h)和太阳方位角(A)组成，坐标系下图 4-1 所示：

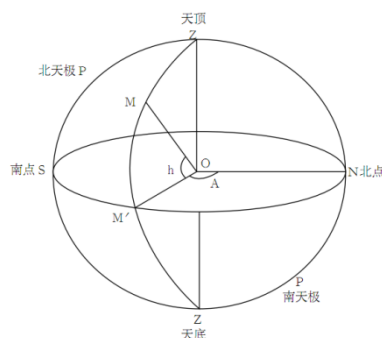


图 4-1 地平坐标系

太阳高度角(h)是指太阳光的入射方向和地平面之间的夹角，与影长密切相关。

太阳方位角(A)是以目标物的正北方向为起始方向，以太阳光的入射方向为终止方向，按顺时针方向所测量的角度，与影子投影的坐标点有关。

4.1.2 时角坐标系

时角坐标系是以赤纬(δ)和时角(ω)组成，坐标系如图 4-2 所示：

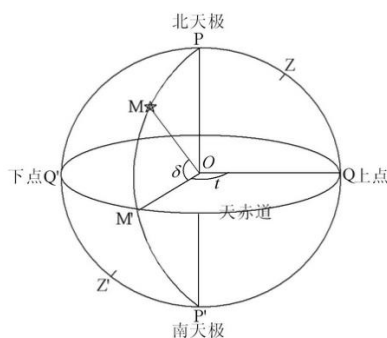


图 4-2 时角坐标系

赤纬角是地球赤道平面与地球中心和太阳中心连线的夹角，赤纬角是由于地球绕太阳运行造成的现象，它随时间而变。因为地轴方向不变，所以赤纬角随地球在运行轨道上的不同点具有不同的数值。赤纬角以年为周期，在 $+23^{\circ}26'$ 与 $-23^{\circ}26'$ 的范围内移动。

时角为每天的视旋转用时角，并设太阳正午时角为 0，上午时角为负，下午时角为正。

4.2 影子坐标的标准坐标系

在建立太阳影子坐标系时，我们以固定杆所处位置的正东方向为坐标水平轴，以正北方向为坐标纵轴，并称此坐标系为影子坐标的标准坐标系。

4.3 太阳光线直射地球情况

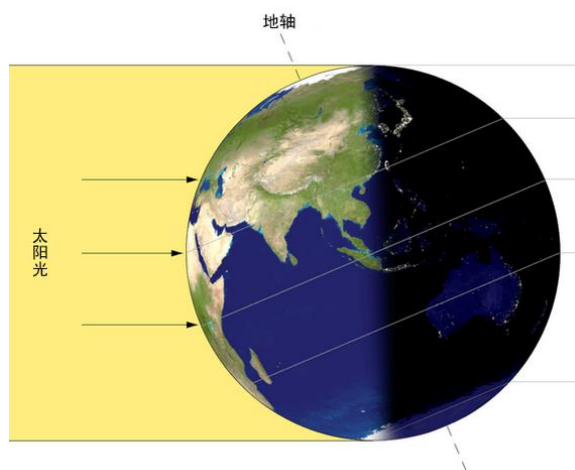


图 4-3 太阳光照射地球情况图

如上图 4-3 所示，当太阳光直射半球时，会存在白天与黑夜，即在利用太阳影子定位技术确定拍摄地点时，需要考虑拍摄地点的实际可行域。

五、模型的建立与求解

5.1 问题 1 的模型建立与求解

根据题意，太阳影子长度是根据太阳高度角变化而变化。为了更好说明直杆在太阳光线的变化，我们首先引入天球系统中坐标系对太阳位置进行描述，然后依据不同时刻的太阳的位置，以太阳光线直线传播受阻产生阴影的特性，求出影长的变化规律。

5.1.1 太阳时角的确定

太阳时角是时角坐标系重要组成部分，可用于计算太阳高度角。计算太阳时角的具体步骤如下：

Step1：平太阳时的确定

设 t 为北京时间，天安门广场的地理位置坐标为 (α, β) ，则有：

$$t_1 = t + 4 \times (\beta - 120) / 60 \quad (1)$$

其中： t_1 为平太阳时； α 、 β 分别为天安门广场纬、经度坐标。

Step2：真太阳时的确定

设真太阳时为 t_2 ，则有：

$$t_2 = t_1 + \frac{E_0}{60} \quad (2)$$

其中： E_0 为平太阳和真太阳时的差，称为时差。查阅资料得一年之中时差如附表 8-1，由表得 2015 年 10 月 22 日对应的时差 E_0 为 15 分 31 秒，代入(2)式中求解。

Step3：太阳时角的确定

单位时间地球自转的角度定义为太阳时角 ω ，计算公式为：

$$\omega = 15 \times (t_2 - 12) \quad (3)$$

其中： t_2 为真太阳时，以 24 小时计。

根据上式，以地球为例，对于同一时刻、同一经度，不同纬度的人们来说，太阳对应的时角是相同的。由题可知，天安门北京时间 $t \in (9, 15)$ ，联立(1)(2)(3)，解得天安门广场太阳时角，如下表 5-1。

表 5-1 北京时间 t 与太阳角度 ω 的对应表

| t | 9:00 | 9:30 | 10:00 | 10:30 | 11:00 | 11:30 | 12:00 | 12:30 | 13:00 | 13:30 | 14:00 | 14:30 | 15:00 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ω | -44.7 | -37.2 | -29.7 | -22.2 | -14.7 | -7.2 | 0.2 | 7.7 | 15.2 | 22.7 | 30.2 | 37.7 | 45.2 |

5.1.2 太阳赤纬角和高度角的确定

(1) 太阳赤纬角的求解

赤纬角也称为太阳赤纬，即太阳直射纬度 δ ，采用 Cooper 提出的计算公式：

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(284+n)}{365} \right) \quad (4)$$

其中： n 为日期序号，2015 年 10 月 22 日换算成 $n=295$ ，代入(4)式得出：

$$\delta = -12.1017^\circ$$

(2) 太阳高度角的确定

太阳高度角是太阳相对于地平线的高度角，这是以太阳视盘面的几何中心和理想地平线所夹的角度。其计算公式为：

$$\sin h = \sin \alpha \cdot \sin \delta + \cos \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \quad (5)$$

其中： h 为太阳高度角； α 为当地纬度； ω 为当地太阳时角。

联立(3)(4)(5)式，取 30 分钟为时间步长，解得太阳高度角 h 随当地北京时间 t 的变化如下表 5-2。对应的变化曲线如图 5-1 所示。

表 5-2 h 随当地北京时间 t 的变化

| t | 9:00 | 9:30 | 10:00 | 10:30 | 11:00 | 11:30 | 12:00 | 12:30 | 13:00 | 13:30 | 14:00 | 14:30 | 15:00 |
|-----|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| h | 23.4 | 27.5 | 31.1 | 34.0 | 36.2 | 37.5 | 37.9 | 37.4 | 36.0 | 33.8 | 30.8 | 27.2 | 23.1 |

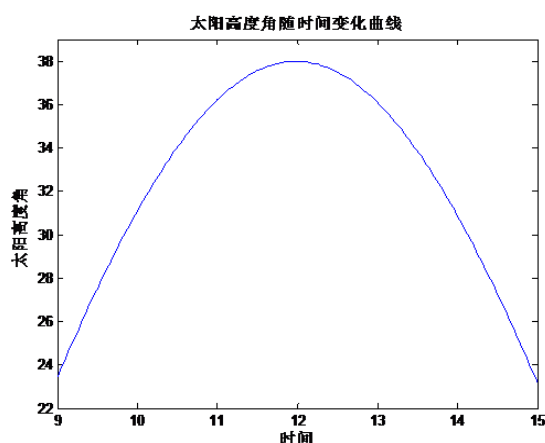


图 5-1 太阳高度随时间变化曲线

由图 5-1 可以看出，太阳高度角曲线在北京时间 12 点呈近似对称分布，最大的太阳高度角为 37.99° ，此角度也称为正午太阳高度角，计算结果与实际相符。

5.1.3 直杆太阳影子长度的变化曲线确定

(1) 3 米直杆影长的确定

以太阳光线直线传播特性为基础，对于一根直立的杆，其影子的位置在一天中将随太阳的位置变化而发生变化。由勾股定理可确定固定直杆与直杆影长的关系，直杆投影如下图 5-2。

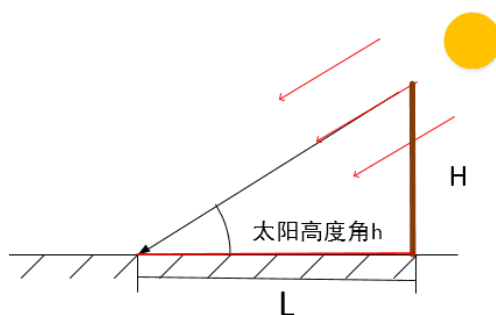


图 5-2 直杆投影图

由图 5-2，容易得：

$$L = \frac{H}{\tan h} \quad (6)$$

其中： L 为直杆影长； H 为固定杆长。

将表 5-2 太阳高度角 h 代入(6)式，得固定直杆影长如下表 5-3，直杆太阳影子长度的变化曲线如图 5-3 所示。

表 5-3 影长 L 与北京时间 t 的关系表

| t | 9:00 | 9:30 | 10:00 | 10:30 | 11:00 | 11:30 | 12:00 | 12:30 | 13:00 | 13:30 | 14:00 | 14:30 | 15:00 |
|-----|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| L | 6.91 | 5.75 | 4.97 | 4.44 | 4.10 | 3.90 | 3.84 | 3.91 | 4.12 | 4.47 | 5.02 | 5.82 | 7.01 |

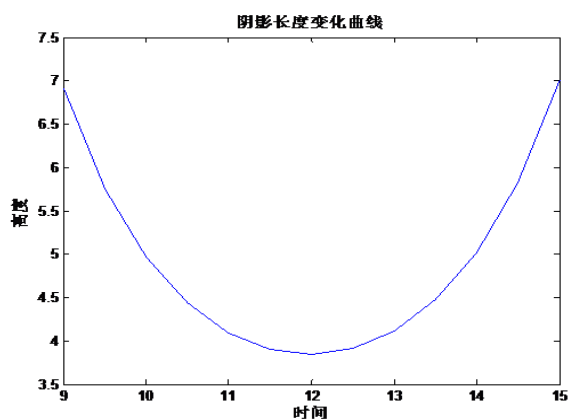


图 5-3 影长 L 与北京时间 t 变化曲线

由表 5-3 和图 5-3 容易知，在 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间，对于放置在天安门一根 3M 直杆，其影长 L 在 12 点左右即对应正午太阳高度角时取得最小值 3.84 米。

(2) 直杆端点影子坐标的确定

对于固定直杆，建立以直杆底端为原点，水平地面为 x - y 平面，直杆垂直于地面。直杆顶点在 x - y 平面运动的轨迹如图 5-4。

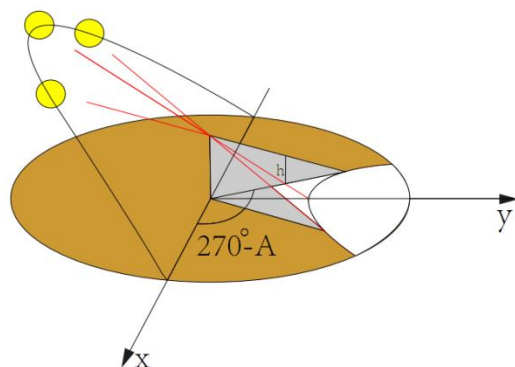


图 5-4 端点投影曲线图

结合地平坐标系中太阳方位角的概念，由图 5-4 可知，直杆端点影子的朝向与太阳方位角有关。

查阅资料得，太阳方位角的计算公式：

$$\sin A = \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos h} \quad (7)$$

在 x-y 平面，建立以直杆底端为原点，以正东方向为 X 轴正方向，以正北方向为 Y 轴正方向的标准坐标系，如下图。

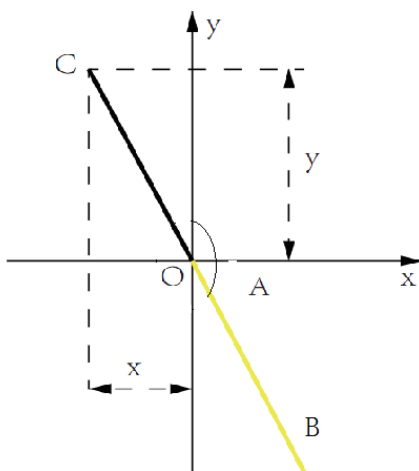


图 5-5 正交平面坐标系图

则在此方向建立的坐标系下有影子顶点坐标：

$$\begin{cases} x = L \cos(270^\circ - A) \\ y = L \sin(270^\circ - A) \end{cases} \quad (8)$$

联立(6)(7)(8)式，作出直杆投影轨迹如下图 5-6。

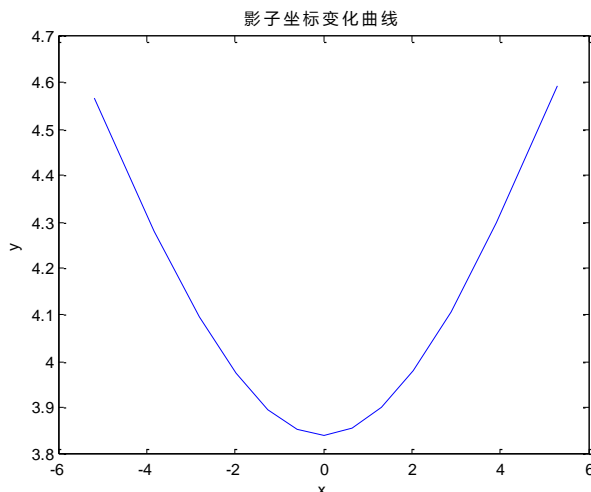


图 5-6 直杆投影轨迹图

由上图可以看出：

- a) 太阳影子的端点坐标在标准坐标系中近似呈对称分布，即总存在下午某个时刻与上午时刻影子关于正北方向对称。
- b) 在 12 点左右，即在正午太阳高度角时， $x=0$ ，此时不存在正东方向的投影，沿正北方向的投影即为影子长度，此时影子长度为最小。

5.2 问题 2 的模型建立与求解

依据题意，要根据附件 1 的影子顶点坐标数据给出若干个可能的地点，考虑到地点可能有多个解，故依据附件 1 中影子顶点坐标数据，以影子顶点坐标误差平方和最小为目标，建立直杆地点的优化模型。

同时，分析知在问题 1 中所得的影子顶点坐标是在以正东和正北方向作为正交轴的坐标系中建立的，而附件中建立的坐标系仅提到以水平地面为 x - y 平面。因此，我们分以下两种模型进行问题 2 的求解。

5.2.1 基于暴力搜索的优化模型

根据问题 1 的结论，已知时间，直杆水平地面上的太阳影子坐标、直杆长度和测量日期，及在经、纬度确定的情况下，即可求出不同时间点的太阳影子的长度及顶点坐标。在问题 2 中，我们考虑以经度纬度为决策变量，以杆太阳影子顶点坐标误差平方和最小为目标，建立优化模型，求得直杆地点最优的经、纬度。

(1) 模型的优化目标

结合问题 2 分析，以固定直杆的经、纬度 (α, β) 作为决策变量，实算太阳影子坐标与实测太阳影子坐标误差平方最小为优化目标，则有：

$$\min c = \sum_{i=1}^k (x_i - x'_i)^2 + \sum_{i=1}^k (y_i - y'_i)^2 \quad (9)$$

其中：\$(x_i, y_i)\$ 为标准坐标系下太阳影子顶点坐标，可由(1)~(8)式求得；\$(x'_i, y'_i)\$ 为附件 1 所给的第 \$i\$ 组坐标对应数据；\$k\$ 为附件 1 中的坐标组数，取值为 21。

(2) 模型的约束条件

I. 赤纬角的约束

由附件 1 所给日期为 2015 年 4 月 18 日，结合问题 1 中(4)式：

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(108+n)}{365} \right) = 10.51^\circ$$

II. 经、纬度角的约束

a) 中国境内的搜索

首先我们假设直杆在中国境内，即有约束条件：

$$\alpha \in (3^\circ, 53^\circ)$$

$$\beta \in (73^\circ, 135^\circ)$$

b) 全球范围的搜索

由于太阳一天之内只能照射到地球的一半，如图 5-7 所示。



图 5-7 太阳光线照射下昼夜分布图

因此，有如下约束条件：

$$\alpha \in (-10^\circ, 170^\circ)$$

$$\beta \in (-90^\circ, 90^\circ)$$

III. 与经纬度有关的约束

a) 时角的约束

由问题 1 中(1)(2)(3)联立可得：

$$\omega = 15 \times \left(t + \frac{4}{60} \times (\beta - 120) + \frac{E_0}{60} - 12 \right)$$

其中：\$t\$ 为北京时间；\$\beta\$ 为直杆经度；\$E_Q\$ 为时差，由附表可查得 4 月 18 日对应的时差为 4 分 18 秒。

b) 太阳高度角的约束，由公式(5)得：

$$\sin h = \sin \alpha \cdot \sin \delta + \cos \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega$$

c) 太阳影长约束，由公式(6)得：

$$\tan h = \frac{H}{L}$$

d) 太阳方位角的约束，由公式(7)得：

$$\sin A = \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos h}$$

IV. 杆长约束

为了方便优化模型的求解，根据实际条件，规定杆长：

$$H \in [1, 5]$$

(3) 建立优化模型

综合考虑上面目标函数和约束条件，则可得最优经、纬度整数优化模型为：

$$\begin{aligned} \min c &= \sum_{i=1}^{21} (x_i - x'_i)^2 + \sum_{i=1}^{21} (y_i - y'_i)^2 \\ s.t. \quad &\left\{ \begin{aligned} \delta &= 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(284+n)}{365} \right) = 10.51^\circ \\ \omega &= 15 \times \left(t + \frac{4}{60} \times (\beta - 120) + \frac{E_Q}{60} - 12 \right) \\ \sin h &= \sin \alpha \cdot \sin \delta + \cos \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \\ \tan h &= \frac{H}{L} \\ \sin A &= \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos h} \\ x_i &= \frac{H \cot h}{\sqrt{1 + (\tan A)^2}} \\ y_i &= \tan A \cdot x_i \\ \alpha &\in (3^\circ, 53^\circ) \text{ 或 } \in (-10^\circ, 170^\circ) \\ \beta &\in (73^\circ, 135^\circ) \text{ 或 } \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ H &\in [1, 5] \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (10)$$

(4) 模型的求解与结果分析

对优化模型的分析可知，未知量有三个分别为经、纬度 α 、 β 和杆长 H ，其计算规模较小，若是直接采用智能算法不仅计算量较大，而且只能得到局部解，不能得到全局最优解。同时考虑到不同的杆长对应着不同的经、纬度，即存在多解情况，所以我们采用暴力搜索的方法，对上述模型进行求解。

暴力搜索是在未知量较少，计算量较小的情况下，以一定的距离作为步长，搜寻全局最优解的可行的算法。

I. 基于暴力搜索的具体步骤

Step1. 选定杆长 H 为1米-5米，步长为0.1米

Step2. 依据收敛性原理确定较优杆长

Step3. 以较优杆长为基准，缩小步长为0.05米

Step4. 在较优杆长 H 情况下，在中国境内搜索直杆地点非劣解

Step5. 在较优杆长 H 情况下，在全球域内搜索直杆地点非劣解

II. 模型的结果分析

表 5-4 中国境内搜索直杆位置

| | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 杆高度 | 1.5 | 1.55 | 1.6 | 1.65 | 1.7 | 1.75 | 1.8 | 1.85 | 1.9 | 1.95 |
| 经度 | 113.7 | 112.9 | 112.1 | 111.3 | 110.5 | 109.7 | 109 | 108.3 | 107.6 | 107 |
| 纬度 | 34.4 | 33.6 | 32.9 | 32.2 | 31.5 | 30.9 | 30.3 | 29.8 | 29.2 | 28.7 |
| 误差平方和 | 0.103 | 0.100 | 0.097 | 0.094 | 0.092 | 0.089 | 0.087 | 0.084 | 0.082 | 0.081 |
| 杆高度 | 2 | 2.05 | 2.1 | 2.15 | 2.2 | 2.25 | 2.3 | 2.35 | 2.4 | 2.45 |
| 经度 | 106.3 | 105.7 | 105.1 | 104.5 | 103.9 | 103.4 | 103.4 | 103.4 | 103.4 | 103.4 |
| 纬度 | 28.3 | 27.8 | 27.4 | 27 | 26.6 | 26.2 | 26.2 | 26.2 | 26.2 | 26.2 |
| 误差平方和 | 0.079 | 0.078 | 0.077 | 0.076 | 0.076 | 0.076 | 0.076 | 0.076 | 0.076 | 0.076 |

由上 5-4 表中国境内搜索直杆位置知（全球搜索直杆位置见附表）：

a) 在坐标不旋转的情况下，中国境内的最优解对应的为云南 $(26.2^{\circ}, 103.4^{\circ})$ ；搜索范围扩大至全球，可知直杆所处的最优位置为印度尼西亚 $(-3^{\circ}, 106^{\circ})$ ，位置地理图如下 5-7。

b) 在杆长微小的波动下，部分解即直杆所在位置的经、纬度不稳定；部分直杆位置解较为稳定，其解不受杆长微小波动的影响。

c) 在如下两个最优位置上，放置一根直杆，其太阳影子坐标随着杆长的波动较小，即解的稳定性好。



图 5-7 暴力搜索最优解地理位置图

5.2.2 基于坐标系旋转的改进模型

在模型 5.2.1 中结果分析中可以看出，不同的杆长利用上述模型可求得多个地点与之对应。虽然这些解都是在较小的误差范围内，求得的全局最优解，但对其杆长进行稳定性分析知，杆长有一个微小的波动，其解变动较大，故我们引入坐标旋转因子对上述模型进行改进。

(1) 坐标系旋转因子的引入

在问题 1 中，我们求解的太阳影子坐标是在标准坐标系下求得的，即 x 轴、 y 轴分别正东和正北方向。然而，对于附件 1 中所给的坐标数据，其建立的坐标系可能并不与标准坐标系重合。故需引入坐标旋转因子对附件所给数据进行坐标变换。

设坐标旋转因子为 θ ， (x'_i, y'_i) 为附件 1 所给第 i 组数据对应的坐标值，其所在的坐标系为 $x'oy'$ 平面， (x''_i, y''_i) 为引入旋转因子 θ 后旋转后第 i 组数据对应的坐标值，其所在的坐标系为 $x''oy''$ 平面，坐标旋转如下图 2-1。

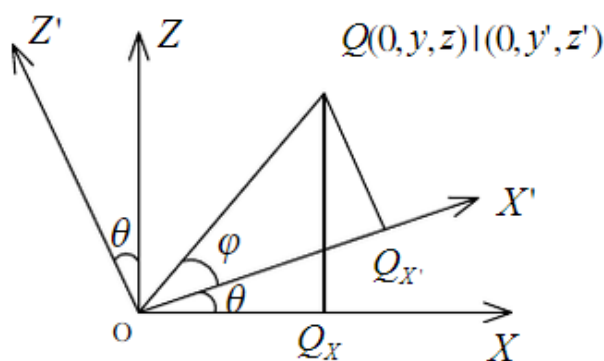


图 2-1 逆时针旋转 θ 角度坐标系变换图

由图 2-1 可得原坐标与变换坐标的计算公式：

$$\begin{cases} x''_i = x'_i \cos \theta - y'_i \sin \theta \\ y''_i = x'_i \sin \theta + y'_i \cos \theta \end{cases}$$

(2) 引入坐标旋转因子的改进模型

结合 5.1.1 中优化模型，可直接得改进模型为：

$$\begin{aligned}
\min c &= \sum_{i=1}^{21} (x_i - x_i'')^2 + \sum_{i=1}^{21} (y_i - y_i'')^2 \\
s.t. \quad & \left\{ \begin{aligned}
& \delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(284+n)}{365} \right) = 10.51^\circ \\
& \omega = 15 \times \left(t + \frac{4}{60} \times (\beta - 120) + \frac{E_0}{60} - 12 \right) \\
& \sin h = \sin \alpha \cdot \sin \delta + \cos \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \\
& \tan h = \frac{H}{L} \\
& \sin A = \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos h} \\
& x_i = \frac{H \cot h}{\sqrt{1 + (\tan A)^2}} \\
& y_i = \tan A \cdot x_i \\
& x_i'' = x_i' \cos \theta - y_i' \sin \theta \\
& y_i'' = x_i' \sin \theta + y_i' \cos \theta \\
& \alpha \in (-10^\circ, 170^\circ) \\
& \beta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\
& \theta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\
& H \in [1, 5]
\end{aligned} \right. \quad (11)
\end{aligned}$$

(3) 基于暴力搜索的改进模型求解与结果分析

I. 模型的结果

在上述优化模型中，引入了一个坐标旋转因子对附件 1 中的坐标进行修正。继续采用暴力搜索用 MATLAB 软件求解如下表 5-5，坐标旋转后最优解的地理位置如下图 5-7。

表 5-5 优化模型的结果

| 纬度 α | 经度 β | 旋转角 θ | 误差平方和 c | 直杆地理位置 |
|-------------|------------|--------------|--------------------|--------|
| 18 | 109 | -15 | 5×10^{-4} | 海南三亚市 |



图 5-7 引入旋转因子后的暴力搜索结果

II. 模型结果的分析

上述求出的可能直杆地理坐标为(18,109)，查找地图发现直杆落在在海南省三亚市的海域上，可见与实际不相符，其原因如下：

- a) 测量影子长度时可能存在随机误差
- b) 在用暴力搜索时， $\Delta\alpha=1^\circ, \Delta\beta=1^\circ$ ，即选定经、纬度的变化步长为 1° ，因此导致结果求解并不精确。
- c) 光线在入射时可能会发生折射，导致实测太阳影子坐标出现偏差。

综上分析得，我们认为测量直杆的拍摄地点为海南三亚市。

上式求解出旋转角 $\theta=-15^\circ$ ，由此可以知道可以知道附件 1 中所给的影子坐标系是相对于标准坐标顺时针旋转 15° 。影子坐标误差如下图，影子坐标见附表。。

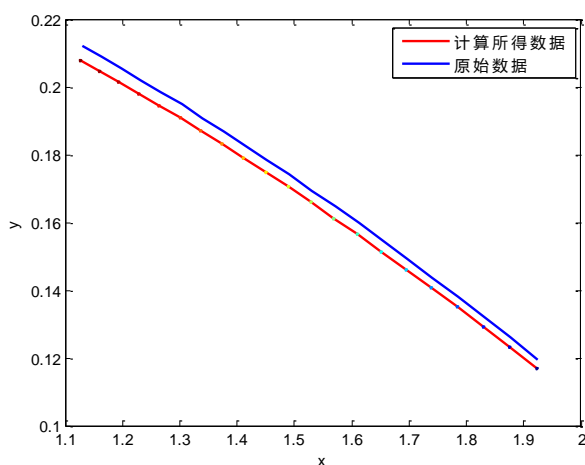


图 5-8 实算影子坐标与旋转后的影子坐标误差图

由上式可以看出，旋转后每一个影子坐标与计算所得影子坐标误差数量级在 10^{-4} ，因此，得到的测量地点为海南三亚是比较合理的

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 基于遗传算法的位置优化模型的建立

对附件 2 和附件 3 所给数据进行分析，可知问题 3 增加了一个变量：日期。结合问

题 2，问题 3 即在其优化模型中添加一个未知变量，即同时考虑直杆地理位置 (α, β) ，直杆长 H ，坐标旋转因子 θ 和测量影子日期序列 n ，建立以杆太阳影子顶点坐标误差平方和最小为目标的优化模型：

$$\begin{aligned}
 \min c &= \sum_{i=1}^{21} (x_i - x_i'')^2 + \sum_{i=1}^{21} (y_i - y_i'')^2 \\
 s.t. \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(284+n)}{365} \right) \\
 & \omega = 15 \times \left(t + \frac{4}{60} \times (\beta - 120) + \frac{E_0}{60} - 12 \right) \\
 & \sin h = \sin \alpha \cdot \sin \delta + \cos \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \\
 & \tan h = \frac{H}{L} \\
 & \sin A = \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos h} \\
 & x_i = \frac{H \cot h}{\sqrt{1 + (\tan A)^2}} \\
 & y_i = \tan A \cdot x_i \\
 & x_i'' = x_i' \cos \theta - y_i' \sin \theta \\
 & y_i'' = x_i' \sin \theta + y_i' \cos \theta \\
 & \alpha \in (-10^\circ, 170^\circ) \\
 & \beta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\
 & \theta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\
 & H \in [1, 5] \\
 & n \in [1, 365]
 \end{aligned} \right. \quad (13)
 \end{aligned}$$

5.3.2 基于遗传算法的位置优化模型的求解

由问题的分析知道，该优化问题存在多个变量，增加了问题求解的难度。在这样的情况下，若继续采用暴力搜索确定经、纬度，不仅计算复杂，而且耗时较多，其优化过程可能不存在最优解。

鉴于遗传算法在解决最优化模型的优势，我们利用遗传算法来求解这个问题，同时为了减少运算的时间，我们在以下的讨论中都将受光照的半球分别南、北半球进行计算。具体操作如下：

Step1: 编码

遗传算法的操作对象是变量序列，所以我们将拍摄位置的经纬度作为这个变量序列。

将每个经度和纬度视为一个基因，一组经度和纬度的组合视为一个基因串。

Step2: 种群初始化

我们确定基因串规模 $n=100$ ，交叉概率 $p_c=100\%$ ，变异概率 $p_m=35\%$ 和最大迭代次数 $N=5000$ 。

Step3: 确定适应度函数

适应度函数是确定基因串好坏的度量，我们以误差平方和为适应度函数：

$$F_i = (x_i - x_i'')^2 + (y_i - y_i'')^2$$

其中： (x_i, y_i) 为标准坐标系下求解得到的太阳影子顶点坐标；

(x_i'', y_i'') 为引入旋转因子 θ 后第 i 组数据对应的坐标值。

Step4: 遗传操作

遗传操作包括三个基本遗传算子：选择、交叉和变异。

①选择算子：遗传算法使用选择运算来实现对基因串中的基因进行优胜劣汰操作，选择的基本思想是：每个基因被选中的概率与其适应度函数值大小成正比。设基因串的大小为 n ，基因 i 的适应度为 F_i ，则 i 被选中遗传到下一代基因串的概率为：

$$P_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

②交叉算子：所谓交叉运算，是指对两个相互配对的基因串依据交叉概率 p_c 相互交换其部分基因，从而形成两个新的基因串。

③变异算子：所谓变异运算，是指依据变异概率 p_m 将基因串中的某些基因值用其它基因值来替换，从而形成一个新的基因串。在这里，变异算子分为三个部分：取一段基因序列，将其倒序插入原位置；取一段基因序列，将其整体向左移动一个单位，再插入原位置；取一段基因序列，将其整体向右移动一个单位，再插入原位置。

Step5: 终止条件

当最优个体的适应度达到给定的阈值 ε ，或迭代次数达到 5000 时，算法终止。

5.3.3 遗传算法搜寻局部最优解

利用遗传算法能求得局部最优解，但是每次运算其解都不相同，且在较小的范围内波动，所以我们认为在这个范围存在比局部最优解更好的解。故我们利用遗传算法求出 100 组局部最优解，部分如下表 5-6：

表 5-6 基于遗传算法的部分 100 组局部最优解

| 组数 | 纬度 | 经度 | 杆高度 | 旋转角 | 天数 |
|----|---------|---------|--------|----------|---------|
| 1 | 29.2803 | 76.1504 | 1.3640 | -24.6983 | 85.9484 |
| 2 | 0.1925 | 83.8933 | 1.9183 | -33.3364 | 14.4278 |
| 3 | 31.4924 | 71.6722 | 1.2439 | -18.8083 | 92.0816 |

| | | | | | |
|-----|---------|---------|--------|----------|----------|
| 4 | 30.2445 | 74.2811 | 1.3864 | -20.0295 | 93.7123 |
| 5 | 35.9546 | 68.9138 | 1.1219 | -17.7583 | 97.3455 |
| 6 | 7.1839 | 88.2002 | 2.2167 | -37.3403 | 46.2156 |
| 7 | 40.6966 | 66.1658 | 1.1390 | -12.8869 | 114.7770 |
| 8 | 1.0892 | 88.0315 | 1.9989 | -41.5390 | 9.7153 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 95 | 11.7253 | 77.3522 | 1.3387 | -30.1601 | 36.1425 |
| 96 | 29.8427 | 74.5686 | 1.1001 | -28.8877 | 71.1437 |
| 97 | 7.3910 | 84.0932 | 1.6320 | -38.0756 | 25.3207 |
| 98 | 26.3930 | 74.3100 | 1.2415 | -24.3829 | 75.0043 |
| 99 | 3.2688 | 80.5671 | 1.5931 | -32.3063 | 13.4691 |
| 100 | 13.4095 | 77.8820 | 1.3322 | -31.1153 | 39.6371 |

对表 2-3 100 组局部最优解进行分析,发现纬度、经度等五个未知量具有较强的相关性,为了更好的说明其内部关系,下面我们采用主成分分析法对纬度、经度、杆高度、旋转因子和天数进行相关性分析。

5.3.4 基于主成分分析法对局部最优解进行模糊聚类

主成分分析是将多个变量通过线性变换关系选出较少个数重要变量的一种多元统计方法,其目的可以对多个变量进行降维和对多个相关变量进行分析。

将 100 组局部最优解导入 SPSS 软件进行主成分分析得如表 5-7 相关系数、表 5-8 特征值及解释的方差表:

表 5-7 各变量相关系数表

| | 纬度 | 经度 | 杆高度 | 旋转角 | 天数 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 纬度 | 1.000 | -.556 | -.254 | .787 | .943 |
| 经度 | -.556 | 1.000 | .811 | -.750 | -.363 |
| 杆高度 | -.254 | .811 | 1.000 | -.263 | .046 |
| 旋转角 | .787 | -.750 | -.263 | 1.000 | .795 |
| 天数 | .943 | -.363 | .046 | .795 | 1.000 |

表 5-8 特征值及解释方差表

| 成份 | 初始特征值 | | |
|----|-------|--------|---------|
| | 合计 | 方差的 % | 累积 % |
| 1 | 3.382 | 56.360 | 56.360 |
| 2 | 2.140 | 35.670 | 92.030 |
| 3 | .333 | 5.547 | 97.577 |
| 4 | .135 | 2.258 | 99.836 |
| 5 | .007 | .111 | 99.946 |
| 6 | .003 | .054 | 100.000 |

由表 5-7 可得,杆高度与拍摄地点的经度具有较强的相关性;旋转角、天数与纬度

具有较强的相关性。

由表 5-8 可得，前两个变量即经度和纬度，能够解释局部最优解相关性高的 92% 的原因。利用主成分分析的结论，利用模糊综合 C-均值中心聚类求得最优解。

在主成分分析结论中，经度和纬度是主要决定局部最优解的两个量，所以我们先考虑 (α, β) 在二维平面进行绘图，如下图 2-4：

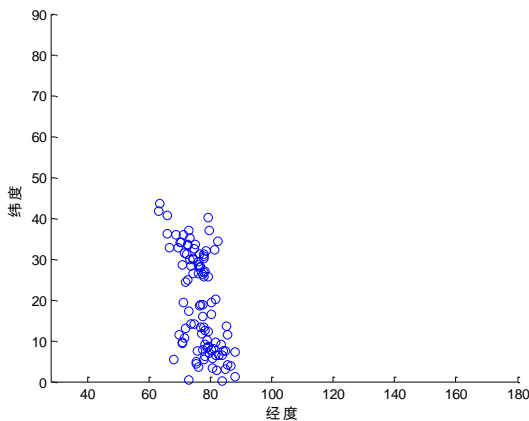


图 5-9 局部最优 (α, β) 图

由图 2-4 可以看出，明显分为两类，故对 100 组数据进行模糊综合 C-均值中心聚类，模糊综合 C-均值中心聚类 [2].

5.3.6 模糊 C-均值中心聚类结果的分析

由问题的分析知，我们在对附件 2 和附件 3 问题的求解中，分别取南、北半球进行计算。

(1) 附件 2 北半球模糊 C-均值中心聚类结果

因为 5.3.5 中 100 组数据明显分为两类，故采用模糊综合 C-均值中心聚类的纬度结果为 $(31.183, 74.162)$ 为第一类聚类解， $(8.674, 79.203)$ 为第二类聚类解。为计算简化，在可取的范围内，在 100 组的局部最优解选取第 77 组和第 90 组局部最优解分别作为两类的更优解。结果如下表 5-9：

表 5-9 附件 2 北半球模糊聚类最优解地理位置表

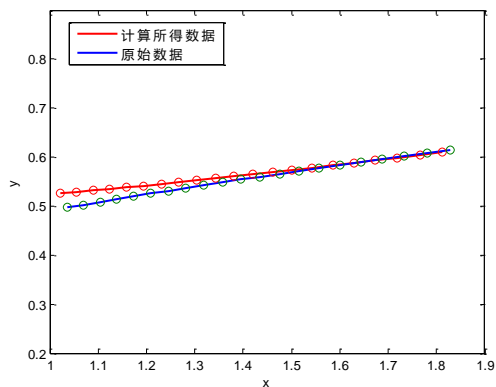
| 纬度 | 精度 | 高度 | 旋转角 | 天数 | 误差平方和 | 地理位置 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 33.64669 | 74.98826 | 1.481639 | -19.1823 | 105.7196 | 0.01155 | 新疆西南领域 |
| 8.42971 | 79.15304 | 1.452079 | -31.7072 | 28.89563 | 0.019352 | 斯里兰卡 |

在地图上查找出，最优地理位置如下图 5-10.



图 5-10 附件 2 北半球模糊聚类最优解地理位置图

对新疆西南领域实算影子坐标与旋转后的影子坐标图分析可知，坐标吻合精度较高，误差图如图 5-11 所示，可见新疆西南领域为一个较优解。



5-11 新疆西南领域实算影子坐标与旋转后的影子坐标误差图

(2) 问题 3 其余半球聚类最优解

上述为计算附件 2 北半球最优地理位置的方法，对于附件 2 南半球和附件 3 最优拍摄地点采取同样的方法，其结果如下表 5-9 所示,最优解地理位置如下图 5-11 所示。

表 5-9 附件 2 南半球和附件 3 最优解

| | 纬度 | 经度 | 杆长 | 旋转角 | 日期 | 坐标误差 | 地理位置 |
|----------------|--------|---------|-------|--------|--------|-------|------|
| 附件 3 北半球最优地理位置 | 33.879 | 108.581 | 2.604 | 12.805 | 22.894 | 0.015 | 陕西西安 |
| 附件 3 北半球最优地理位置 | 45.467 | 109.714 | 1.785 | 12.825 | 31.573 | 0.034 | 蒙古 |



图 5-11 附件 2 南半球和附件 3 最优解地理位置图

对上述聚类结果分析：

- 由附件 2、3 知北京时间为下午，而在阴影半球处于黑夜，所以在欧洲等阴影半球必定不存在拍摄地点的解。
- 南半球可以求出最优解，但是南半球大部分为海域，对于最优解处在海洋中，我们一律剔除。

5.4 问题 4 的模型建立与求解

我们通过 MATLAB 软件中的 `imread` 语句读取图片中直杆像素点和影长的坐标。在定义四种坐标系后，通过摄像机坐标系，图像像素坐标系，图像物理坐标系，世界坐标系四类坐标系之间的转换关系得出影长像点的世界坐标与图像像素坐标之间的坐标变换关系。然后，对方程进行适当的线性处理，通过采集的影长像素点用最小二乘法对模型进行求解。然后结合问题 2 的求解，可以确定出视频拍摄的若干地点。

5.4.1 世界坐标与摄像机坐标之间的变换关系

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} + T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} + T \quad (13)$$

其中： R 为正交变换矩阵， T 为平移矩阵。

齐次坐标表示为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = (t_x \quad t_y \quad t_z)^T$$

正交旋转矩阵中的 9 个方向矢量满足如下 6 个正交约束方程：

$$\begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1 \\ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \\ r_{41}^2 + r_{42}^2 + r_{43}^2 = 1 \\ r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{53}^2 = 1 \\ r_{61}^2 + r_{62}^2 + r_{63}^2 = 1 \end{cases}$$

5.4.2 图像物理坐标与摄像机坐标之间的变换关系

$$\begin{cases} X = fx / z \\ Y = fy / z \end{cases}$$

齐次坐标表示：

$$z \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中：\$(x, y, z)\$ 为空间点 \$P\$ 在摄像机坐标系下的坐标；\$(X, Y)\$ 为空间点 \$P\$ 在图像物理坐标系下的投影坐标。

5.4.3 图像像素坐标与图像物理坐标之间的变换关系

$$\begin{cases} u - u_0 = X / d_x = S_x X \\ v - v_0 = Y / d_y = S_y Y \end{cases}$$

其中：\$S_x = 1/d_x, S_y = 1/d_y\$ 分别为 \$X\$ 与方向 \$Y\$ 上单位长度的像素个数。

齐次坐标为：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & u_0 \\ 0 & s_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中：\$(u, v)\$ 为空间点 \$P\$ 在图像像素坐标系下的投影坐标；\$(u_0, v_0)\$ 是图像中心坐标；\$d_x, d_y\$ 分别为一个像素在 \$X\$ 与方向 \$Y\$ 方向方向上的物理尺寸。

根据(13)(14)(15)三种坐标的变换关系，我们经整理变形后可得世界坐标与图像像素坐标之间的关系：

$$\begin{cases} \frac{X}{f} = \frac{u-u_0}{f_x} = \frac{r_{11}x_c + r_{12}y_c + r_{13}z_c + t_x}{r_{31}x_c + r_{32}y_c + r_{33}z_c + t_z} \\ \frac{Y}{f} = \frac{v-v_0}{f_y} = \frac{r_{21}x_c + r_{22}y_c + r_{23}z_c + t_y}{r_{31}x_c + r_{32}y_c + r_{33}z_c + t_z} \end{cases} \quad (15)$$

其中: $f_x = f \cdot s_x, f_y = f \cdot s_y$

齐次坐标为:

$$\begin{aligned} z \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_x & 0 & u_0 \\ 0 & s_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= M_1 M_2 X_c = M X_c \end{aligned}$$

其中: M 为 3×4 矩阵, 称之为投影矩阵。

$$z_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c^{(i)} \\ y_c^{(i)} \\ z_c^{(i)} \end{pmatrix}$$

其中: $(x_c^{(i)}, y_c^{(i)}, z_c^{(i)}, 1)$ 为二维定标物第 i 点角点坐标, $(u_i, v_i, 1)$ 为第 i 点的图像像素坐标, $m_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3,4)$ 为投影矩阵 M 的第 i 行 j 列元素, 上式可列为三个方程:

$$\begin{cases} z_i u_i = m_{11} x_c^{(i)} + m_{12} y_c^{(i)} + m_{13} z_c^{(i)} + m_{14} \\ z_i v_i = m_{21} x_c^{(i)} + m_{22} y_c^{(i)} + m_{23} z_c^{(i)} + m_{24} \\ z_i = m_{31} x_c^{(i)} + m_{32} y_c^{(i)} + m_{33} z_c^{(i)} + m_{34} \end{cases} \quad (16)$$

通过消去方程 (16) 中的系数 z_i , 我们得到如下的两个关于系数 m_{ij} 的线性方程:

$$\begin{cases} x_c^{(i)} m_{11} + y_c^{(i)} m_{12} + z_c^{(i)} m_{13} + m_{14} - u_i x_c^{(i)} m_{31} - u_i y_c^{(i)} m_{32} - u_i z_c^{(i)} m_{33} = u_i m_{34} \\ x_c^{(i)} m_{21} + y_c^{(i)} m_{22} + z_c^{(i)} m_{23} + m_{24} - v_i x_c^{(i)} m_{31} - v_i y_c^{(i)} m_{32} - v_i z_c^{(i)} m_{33} = v_i m_{34} \end{cases} \quad (17)$$

(17) 式为世界坐标系下 n 个已知点 $(x_c^{(i)}, y_c^{(i)}, z_c^{(i)})^T (i=1,2,\dots,n)$ 及它们对应的像点的齐次坐标 $(u_i, v_i, 1)^T (i=1,2,\dots,n)$, 故我们有 $2n$ 个关于投影矩阵 M 的元素的线性方程, 通过矩阵表示为:

$$\begin{pmatrix} x_c^{(1)} & y_c^{(1)} & z_c^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1 x_c^{(1)} & -u_1 y_c^{(1)} & -u_1 z_c^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_c^{(1)} & y_c^{(1)} & z_c^{(1)} & 1 & -v_1 x_c^{(1)} & -v_1 y_c^{(1)} & -v_1 z_c^{(1)} \\ & & & \dots & & & & & \dots & & \\ & & & \dots & & & & & \dots & & \\ x_c^{(n)} & y_c^{(n)} & z_c^{(n)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_n x_c^{(n)} & -u_n y_c^{(n)} & -u_n z_c^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_c^{(n)} & y_c^{(n)} & z_c^{(n)} & 1 & -v_n x_c^{(n)} & -v_n y_c^{(n)} & -v_n z_c^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{pmatrix} = m_{34} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (18)$$

由(18)式知, M 矩阵乘任意不为零常数不会影响 (x_c, y_c, z_c) 与 (u, v) 的关系。因此在式中指定 $m_{34}=1$, 从而得关于 M 矩阵其他元素的 $2n$ 个线性方程。这里未知元素的个数为 11, 记为 11 维向量 m , 即:

$$Km = U \quad (19)$$

其中: K 为上式左边 $2n \times 11$ 矩阵, m 为未知的 11 维向量; U 为上式右边的 $2n$ 维向量, K, U 为已知的向量。当 $2n > 11$ 时, 我们用最小二乘法求出上述线性方程组的解为 $m = (K^T K)^{-1} K^T U$ 。

m 向量与 $m_{34}=1$ 构成所求解得 M 矩阵, 由空间 6 个世界坐标求上已知点与它们的图像点坐标, 求得 M 矩阵。

5.4.4 获取变换后太阳影子现实世界坐标及模型的求解

由上式矩阵可得太阳影子现实世界坐标如表 5-10 所示:

5-10 太阳影子现实世界坐标

| | | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | 3.457 | 3.422 | 3.371 | 3.336 | 3.311 | 3.242 | 3.207 | 3.156 | 3.130 | 3.087 | 3.035 |
| y | 1.645 | 1.650 | 1.627 | 1.625 | 1.617 | 1.590 | 1.602 | 1.579 | 1.579 | 1.567 | 1.559 |
| x | 3.000 | 2.983 | 2.923 | 2.871 | 2.854 | 2.811 | 2.777 | 2.734 | 2.691 | 2.656 | - |
| y | 1.556 | 1.551 | 1.534 | 1.526 | 1.521 | 1.516 | 1.506 | 1.500 | 1.488 | 1.478 | - |

结合问题 2 中的旋转模型, 可得:

| 结果 | | | |
|----|----|-----|--------|
| 纬度 | 经度 | 旋转角 | 误差平方和 |
| 43 | 95 | 150 | 0.1378 |

误差分析如下图 5-12:

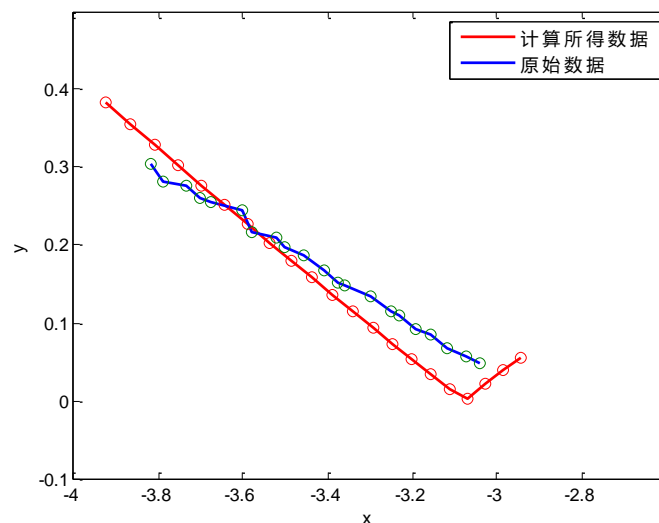


图 5-12 误差分析图

六、模型的评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点：

a) 问题 1 中充分考虑时差的影响，使得太阳时角更贴切实际。并且在标准坐标系中画出了太阳影子端点的轨迹图。

b) 在不同的情况下，选取了适合的算法，问题 2 中，因为变量不算多，计算量不大，采用暴力搜索能够高效的得到全局最优解，问题 3 中，考虑的变量较多，暴力搜索已不再适用，而选取遗传算法能够在用时少，计算精度客观的情况下求得最优解。

c) 遗传算法只能求出局部最优解，我们利用主成分分析和模糊 C-均值中心聚类对遗传算法做了改进。

d) 优化模型中，我们充分考虑了所给数据和太阳照射时仅有半球为白天另半球为黑夜的情况，对经纬度角进行了限制。

6.1.2 模型的不足：

a) 太阳光线从真空穿过大气层会发生折射，会导致理论太阳高度角与实际太阳高度角有偏差，本文仅考虑了理论太阳高度角，未对实际太阳高度角进行说明。

b) 智能算法有一定的局限性，所求的解中可能并不包括实际拍摄地点。

6.2 模型的改进

问题 1 模型的改进：

考虑到大气层中有各种介质，如水蒸气，二氧化碳等，其密度与外太空的真空并不相同，因此当太阳光从外太空的真空传入大气层时，必定会发生偏折，即理论太阳高度角与实际太阳高度角有偏差，查阅资料，根据斯涅耳定律可得修正太阳高度角：

$$h = 90^\circ - r = \arcsin \left[\frac{\sin(90^\circ - H)}{\alpha} \right]$$

其中： H 为理论太阳高度角； α 为大气层折射率。

七、参考文献

- [1] 郑腾飞, 林大钧, 刘小羊, 吴志庭. 基于影子轨迹线反求采光效果的技术研究[J]. 华东理工大学学报, 2010, (3): 458-463.
- [2] 刘群. 日晷投影原理及其应用[J]. 贵州师范大学学报, 2003, (3): 109-112.
- [3] 武琳. 基于太阳阴影轨迹的经纬度估计技术研究[D]. 天津: 天津大学, 2012: 11-32.
- [4] 司守奎, 孙玺菁. 数学建模算法与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015, 207-212.
- [5] 方荣生. 太阳能应用技术[M]. 北京: 中国农业机械出版社, 1985.
- [6] 王玉方. 浅析“竿影定向和测算本地经纬度”的原理[J]. 中学物理教学参考, 2004, (6): 31-32.
- [7] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [8] 方荣生. 太阳能应用技术[M]. 北京: 中国农业机械出版社, 1985.
- 应振华, 缪维予, 方明亮. 地球概论数学参考[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1996.
- [9] 应振华, 缪维予, 方明亮. 地球概论数学参考[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1996.

八、附录

1、程序说明文档

以下程序全部由 MATLAB 写成。其中:ques1.m, fuzzycm.m, yanzheng.m 可独立运行;ques2_2_baoli_sousuo.m, ques3_1_shuju_chuli.m, ques3_1_fun.m, ques4.m 等程序均需要调用 ques2_2_jisuan.m 来计算各角度参数以及阴影的坐标;第三问中的 ques3_1_yichuan.m 需要调用 ques3_1_fun.m 来实现遗传算法;在第三问中所使用的主成分分析使用的是 SPSS 软件的“降维”-“因子分析”, 不在此单独列出。

程序中还包括了一个 excel 文件 yichuan, 用以保存多次运行遗传算法的结果, 其六列数据分别为精度, 纬度, 杆长, 旋转角, 天数, 误差平方和。

各程序的功能如下:

(1) 问题 1:

ques1.m: 用于求解第一问的程序。计算各角度, 计算阴影坐标, 绘制阴影坐标曲线等

(2) 问题 2:

ques2_2_baoli_sousuo.m:第二问中暴力搜索的主函数,通过地毯式的搜索计算最佳解,并画出相应的图形。

ques2_2_jisuan.m:通过输入时间,经纬度,杆高度等参数确定对应的影子坐标的函数。此程序将多次被其他程序调用。

(3) 问题 3:

ques3_1_fun.m:遗传算法的主要函数。用于限制变量的范围以及计算目标函数的值

ques3_1_yichuan.m:遗传算法的主要函数。保存 100 次遗传算法的结果

ques3_1_shuju_chuli.m 是遗传算法的后继程序。用于计算遗传算法中最终确定且保留的解的误差平方和以及相对应的坐标偏差图的程序。

(4) 问题 4:

ques4.m:由转化后的坐标计算实际的经纬度,误差平方和等。

yanzheng.m 用于计算所估计的坐标与实际坐标的误差平方和函数,同时绘制相应的散点图和折线图。

fuzzycm.m 模糊 C 均值聚类的函数,在主成分分析后对经纬度所组成的图像进行分类。通过输入数据以及需要分的类的数目使用此算法进行分类。

2、程序代码

i. ques1.m

```
% *****
*****

%名字: ques1.m
%功能: 用于求解第一问的程序。计算各角度,
% 计算阴影坐标, 绘制阴影坐标曲线等
%作者: 刘家麒
% *****
*****

%%
clc,clear
%当地纬度
psi=39+54/60+26/3600;
k=pi/180;
```

```

%杆长
H=3;
%10月22日是这一年的295日
n=295;
delta=23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);
%时角
%omega=(-45:1:45)-(120-(116+23/60+29/3600));
ts=(9:0.05:15)+4*((116+23/60+29/3600)-120)/60+1*(15+31/60)/60;
omega=15*(ts-12);
%太阳高度角
alpha=asin(sin(psi*k).*sin(delta*k)+cos(psi*k).*cos(delta*k).*cos(omega*k));
jiaodu1=alpha/k;
plot([9:0.05:15],jiaodu1);
xlabel('时间');
ylabel('太阳高度角');
title('太阳高度角随时间变化曲线');
%阴影长度
L=H*cot(alpha);
figure(1)
plot([9:0.05:15],L);
xlabel('时间');
ylabel('高度');
title('阴影长度变化曲线');

%太阳方位角
%A=acos(sin(delta*k).*cos(psi*k)-cos(omega*k).*cos(delta*k).*sin(psi*k)./cos(alpha))
;
%A=asin(-sin(omega*k).*cos(delta*k)./cos(alpha))+pi;
A=asin(sin(omega*k).*cos(delta*k)./cos(alpha))+pi;

%%
x=L.*cos(270*k-A);
y=L.*sin(270*k-A);

```

```

figure(2)
plot(x,y)
xlabel('x');
ylabel('y');
title('影子坐标变化曲线');
ii.    ques2_2_baoli_sousuo.m
% *****
*****

% 名字: ques2_2_baoli_sousuo.m
% 功能: 第二问中暴力搜索的主函数, 通过地毯式的搜索计算最佳解
% 作者: 刘家麒
% *****
*****

%%
clc,clear
x0=[1.0365 1.0699 1.1038 1.1383 1.1732 1.2087 1.2448 1.2815 1.3189
1.3568 1.3955 1.4349 1.4751 1.516 1.5577 1.6003 1.6438 1.6882 1.7337
1.7801 1.8277
];
y0=[0.4973 0.5029 0.5085 0.5142 0.5198 0.5255 0.5311 0.5368 0.5426
0.5483 0.5541 0.5598 0.5657 0.5715 0.5774 0.5833 0.5892 0.5952 0.6013
0.6074 0.6135
];
t=[14.7 14.75 14.8 14.85 14.9 14.95 15 15.05 15.1 15.15 15.2
15.25 15.3 15.35 15.4 15.45 15.5 15.55 15.6 15.65 15.7
];
%daan=zeros(91,181,91);
daan2=10000000;
cha=(1+6/60)/60;
n=108;
k=pi/180;
wd2=zeros(181,5);
p=0;
for H=2:2

```

```

p=p+1;
for wd=-50:55
    for jd=-10:1:170
        % for jd=100:0.1:118
        %     for xuanzhuan=-30:30
        for xuanzhuan=0:0
            % wd=17.4477;
            % jd=108.4486 ;
            % H=2.0522;
            % xuanzhuan=-15.5823;
            [ A,x2,y2 ] = ques2_2_jisuan( t,wd,H,n,jd,cha );

            xuanzhuan2=xuanzhuan*k;
            x1=[cos(xuanzhuan2),-sin(xuanzhuan2) ]*[x0;y0];
            y1=[sin(xuanzhuan2),cos(xuanzhuan2)]*[x0;y0];

            temp=sum((x2-x1).^2)+sum((y2-y1).^2);
            if daan2>temp
                daan2=temp;
                i=wd;j=jd;k2=xuanzhuan;H2=H; % 保存最优解答案
            end
        end
    end
end
end
wd2(p,:)=i,j,k2,H,daan2;
end
daan2 % 最小误差平方和
[i,j,k2]

%% 最优解计算 及画图
wd=i;j=j;xuanzhuan=k2;
xuanzhuan2=xuanzhuan*k;
x1=[cos(xuanzhuan2),-sin(xuanzhuan2) ]*[x0;y0];
y1=[sin(xuanzhuan2),cos(xuanzhuan2)]*[x0;y0];

```

```

[ A,x2,y2 ] = ques2_2_jisuan( t,wd,H,n,jd,cha );
plot(x2,y2,'R','linewidth',2)
hold on
plot(x1,y1,'B','linewidth',2)
legend('计算所得数据','原始数据')
scatter(x2,y2,'R')
scatter(x1,y1)
xlabel('x')
ylabel('y')
% title('影子坐标误差分析图')
iii.    ques2_2_jisuan.m
% *****
*****
% 名字: ques2_2_jisuan.m
% 功能: 通过输入时间, 经纬度, 杆高度等参数确定对应的影子坐标的函数。
% 作者: 刘家麒
% *****
*****

function [ A,x,y ] = ques2_2_jisuan( t_range,wd,H,n,jd,cha )
% 计算对应的坐标 x,y
% t_range 时间的范围
% wd 纬度
% H 木条高度
% n 这一年的第多少天
% jd 精度
% cha 针对每一天不同的时差
%%
psi=wd; %纬度
k=pi/180;
delta=23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);
%时角
ts=(t_range)+4*(jd-120)/60+ cha;
omega=15*(ts-12);

```



```

% 太阳高度角
alpha=asin(sin(psi*k).*sin(delta*k)+cos(psi*k).*cos(delta*k).*cos(omega*k));
jiaodu1=alpha/k;
% 阴影长度
L=H*cot(alpha);
% 太阳方位角
A=asin(sin(omega*k).*cos(delta*k)./cos(alpha))+pi;
% 计算坐标
x=L.*cos(270*k-A);
y=L.*sin(270*k-A);

end

```

iv. ques3_1_fun.m

```

% *****
*****

% 名字: ques3_1_fun.m
% 功能: 遗传算法的主要函数。用于限制变量的范围以及计算目标函数的值
% 作者: 刘家麒
% *****
*****

```

```
function [ f ] = ques3_1_fun( x )
```

```

% shuju= [1.0365   1.0699   1.1038   1.1383   1.1732   1.2087   1.2448   1.2815
1.3189   1.3568   1.3955   1.4349   1.4751   1.516   1.5577   1.6003   1.6438   1.6882
1.7337   1.7801   1.8277
%      0.4973   0.5029   0.5085   0.5142   0.5198   0.5255   0.5311   0.5368   0.5426
0.5483   0.5541   0.5598   0.5657   0.5715   0.5774   0.5833   0.5892   0.5952   0.6013
0.6074   0.6135
%      14.7    14.75   14.8    14.85   14.9    14.95   15    15.05   15.1    15.15
15.2    15.25   15.3    15.35   15.4    15.45   15.5    15.55   15.6    15.65
15.7
%      ];

```

```

shuju=[1.1637  1.2212  1.2791  1.3373  1.396  1.4552  1.5148  1.575  1.6357
1.697  1.7589  1.8215  1.8848  1.9488  2.0136  2.0792  2.1457  2.2131  2.2815
2.3508  2.4213
3.336  3.3299  3.3242  3.3188  3.3137  3.3091  3.3048  3.3007  3.2971  3.2937
3.2907  3.2881  3.2859  3.284  3.2824  3.2813  3.2805  3.2801  3.2801  3.2804
3.2812
13.15  13.2  13.25  13.3  13.35  13.4  13.45  13.5  13.55  13.6
13.65  13.7  13.75  13.8  13.85  13.9  13.95  14  14.05  14.1  14.15
];
% H=2;
% n=108;
x_yuan=shuju(1,:);
y_yuan=shuju(2,:);
t=shuju(3,:);

wd=x(1);
jd=x(2);
H=x(3);
jiaodu=x(4);
n=x(5);
% x 分别是 纬度 经度 杆高度 旋转角 天数
k=pi/180;

%%
if x(1)>90||x(1)<-90 %fai 纬度
    f=5000;
else if x(2)>-167.25||x(2)<-180 %beita 经度
    f=5000;
else if x(3)<1||x(3)>3 %高度
    f=5000;
else if x(4)<-30||x(4)>30 %角度范围
    f=5000;
else if x(5)<=0||x(5)>365 %天数
    f=5000;

```

```

else
    %%
    %          x(1)=x(1)*pi/180;
    %          x(2)=x(2)*pi/180;

    %cha=(1+6/60)/60;
    cha=0;
    [ A,xhat,yhat ] = ques2_2_jisuan( t,wd,H,n,jd,cha );

    %%
    xuanzhuan2=jiaodu*k;
    x2=[cos(xuanzhuan2),-sin(xuanzhuan2) ]*[x_yuan;y_yuan];
    y2=[sin(xuanzhuan2),cos(xuanzhuan2)]*[x_yuan;y_yuan];
    f=sum((xhat-x2).^2)+sum((yhat-y2).^2);
end
end
end
end
end
end

```

v. ques3_1_yichuan.m

```

% *****
*****
%名字: ques3_1_yichuan.m
%功能: 遗传算法的主要函数。保存 100 次遗传算法的结果
%作者: 刘家麒
% *****
*****

```

```

clc,clear

```

```

jieguo=zeros(100,6);

```

```

for i=1:100

options=gaoptimset('Generations',1000,'PopulationSize',400,'StallGenlimit',50,'PlotFcns',@ga
plotbestf);

[x,f]=ga(@ques3_1_fun,5,options);
%纬度 经度 杆高度 旋转角 天数
if f==5000
    i=i-1;
    continue;
end
jieguo(i,:)=x,f];
end

```

vi. ques3_1_shuju_chuli.m

```

% *****
*****

%名字: ques3_1_shuju_chuli.m
%功能: 是遗传算法的后继程序。用于计算遗传算法中最终确定且
%保留的解的误差平方和以及相对应的坐标偏差图的程序。
%作者: 刘家麒
% *****
*****

```

```

shuju=[-1.2352 -1.2081 -1.1813 -1.1546 -1.1281 -1.1018 -1.0756 -1.0496 -1.0237
-0.998 -0.9724 -0.947 -0.9217 -0.8965 -0.8714 -0.8464 -0.8215 -0.7967 -0.7719
-0.7473 -0.7227
0.173 0.189 0.2048 0.2203 0.2356 0.2505 0.2653 0.2798 0.294 0.308
0.3218 0.3354 0.3488 0.3619 0.3748 0.3876 0.4001 0.4124 0.4246 0.4366
0.4484
12.68333333 12.73333333 12.78333333 12.83333333 12.88333333
12.93333333 12.98333333 13.03333333 13.08333333 13.13333333
13.18333333 13.23333333 13.28333333 13.33333333 13.38333333
13.43333333 13.48333333 13.53333333 13.58333333 13.63333333
13.68333333

```

```

];
x_yuan=shuju(1,:);
y_yuan=shuju(2,:);
t=shuju(3,:);

daan=[-41.69105691 72.69570167    1.636431429   -11.89247691   14.29531637
0.012940056
];
%纬度 经度 杆高度 旋转角 天数
wd=daan(1);
jd=daan(2);
H=daan(3);
jiaodu=daan(4);
n=daan(5);

cha=0;
k=pi/180;
[ A,x,y ] = ques2_2_jisuan( t,wd,H,n,jd,cha );

%%
xuanzhuan2=jiaodu*k;
x2=[cos(xuanzhuan2),-sin(xuanzhuan2) ]*[x_yuan;y_yuan];
y2=[sin(xuanzhuan2),cos(xuanzhuan2)]*[x_yuan;y_yuan];
f=sum((x-x2).^2)+sum((y-y2).^2);
yanzheng( x2,y2,x,y )
vii.    ques4.m
% *****
*****
% 名字: ques2_2_baoli_sousuo.m
% 功能: 第二问中暴力搜索的主函数, 通过地毯式的搜索计算最佳解
% 作者: 刘家麒
% *****
*****

```

```

%%
clc,clear
y0=[1.64517790188107 1.64985717154143 1.62742280217558 1.62473875337185
1.61720322792098 1.58974517492121 1.60178776304568 1.57935339367983
1.57918118669305 1.56662197760826 1.55891424517061 1.55623019636688
1.55120651273296 1.53362362001426 1.52591588757661 1.52089220394269
1.51569631332200 1.50564894605417 1.50045305543348 1.48789384634869
1.47784647908085];
x0=[3.45698406365849 3.42227334276623 3.37086926153032 3.33632404066368
3.31053925003292 3.24194530837651 3.20706908745862 3.15566500622272
3.12971471556633 3.08674006451506 3.03500498322791 3.00045976236127
2.98326990194076 2.92310539046898 2.87137030918183 2.85418044876132
2.81104029768442 2.77666057684340 2.73352042576651 2.69054577471524
2.65616605387422
];
t=[8.9017:(30/3600)*4:9.5684];
daan2=10000000;
cha=-(6/60+2/3600);
n=194;
k=pi/180;
wd2=zeros(181,5);
p=0;
for H=2:2
    p=p+1;
    for wd=30:60
        for jd=50:1:120
            for xuanzhuan=-180:180
                [ A,x2,y2 ] = ques2_2_jisuan( t,wd,H,n,jd,cha );

                xuanzhuan2=xuanzhuan*k;
                x1=[cos(xuanzhuan2),-sin(xuanzhuan2) ]*[x0;y0];
                y1=[sin(xuanzhuan2),cos(xuanzhuan2)]*[x0;y0];
            end
        end
    end
end

```

```

        temp=sum((x2-x1).^2)+sum((y2-y1).^2);
        if daan2>temp
            daan2=temp;
            i=wd;j=jd;k2=xuanzhuan;H2=H; % 保存最优解答案
        end
    end
end
end
end
    wd2(p,:)= [i,j,k2,H,daan2];
end
daan2 %最小误差平方和
[i,j,k2]

%% 最优解计算 及画图
wd=i;jd=j;xuanzhuan=k2;
xuanzhuan2=xuanzhuan*k;
x1=[cos(xuanzhuan2),-sin(xuanzhuan2) ]*[x0;y0];
y1=[sin(xuanzhuan2),cos(xuanzhuan2)]*[x0;y0];
[ A,x2,y2 ] = ques2_2_jisuan( t,wd,H,n,jd,cha );
plot(x2,y2,'R','linewidth',2)
hold on
plot(x1,y1,'B','linewidth',2)
legend('计算所得数据','原始数据')
scatter(x2,y2,'R')
scatter(x1,y1)
xlabel('x')
ylabel('y')
% title('影子坐标误差分析图')

viii.   yanzheng.m

% *****
*****

% 名字: ques2_2_baoli_sousuo.m
% 功能: 第二问中暴力搜索的主函数, 通过地毯式的搜索计算最佳解
% 作者: 刘家麒

```

```
% *****
*****
```

```
function [wucha ] = yanzheng( x2,y2,x1,y1 )
%UNTITLED9 此处显示有关此函数的摘要
% 此处显示详细说明
wucha=sum((x2-x1).^2)+sum((y2-y1).^2);
plot(x2,y2,'R','linewidth',2)
hold on
plot(x1,y1,'B','linewidth',2)
legend('计算所得数据','原始数据')
scatter(x2,y2,'R')
scatter(x1,y1)
xlabel('x')
ylabel('y')
end
```

ix. fuzzycm.m