Lista para Modelo Dinâmico

Thiago Mendes Rosa

25/06/2019

1 Teoria

1.1 Modelo Econômico

Harold Zurcher gerencia uma frota de ônibus que é sujeita a todo tipo de problema quando esta na rua. A milhagem (quilometragem) acumulada de um ônibus x_t é a variável de estado do problema. O desgaste do ônibus afeta o custo operacional esperado $c(x_t; \theta_1)$ que depende da milhagem e um vetor de parâmetros não conhecido $\theta_1 = \{\theta_{11}, ..., \theta_{1n}\}$.

Assuma que os custos dos ônibus vem de dois componentes: manutenção regular e despesas operacionais $m(.)$ e o custo $f(.)$ de substituir o motor no caso de falha (que é um evento estocástico que ocorre com alguma probabilidade).

a) Escreva o custo como uma combinação destes dois componentes. Indique claramente quais elementos são função de x_t. Argumente informalmente que $\frac{\partial c}{\partial x_t} > 0$. Esta hipótese é necessária para a solução do modelo. Ela é uma boa hipótese? Você pode fazer um argumento para explicar por que $\frac{\partial c}{\partial x_t}$ poderia ser negativa (pelo menos para alguns valores de x_t)?

Considere que o custo $m(.)$ pode ser decomposto em $m(m_r(x_t), m_o(.))$, em que m_r denota as despesas com manutenção regular e m_o as despesas operacionais. A função custo pode ser escrita como $c = (m(m_r(x_t), m_o(.)), f(x_t, .))$. Espera-se que, quanto maior for a utilização de um ônibus da frota, maiores serão tanto os custos de manutenção regular quanto os custos para substituição do motor em caso de falha (numa eventual retifica do motor). Com isso, quanto mais o ônibus roda, maior é o desgaste de suas peças e, portanto, maiores serão os custos. O custo poderia diminuir com x_t em seus valores iniciais se, por exemplo, houvesse uma garantia do fornecedor para qualquer tipo de problema nas milhas iniciais ou pacotes de manutenção até certo número de milhas inclusos com a compra do veículo. $\square$

b) Rust não possui dados suficientes para estimar os vários componentes da função custo, então ele simplesmente estima $c(x_t, \theta_1)$. Que dados ele precisaria e que estratégia ele poderia empregar se fosse querer identificar separadamente $m()$ e $f()$? Descreva qualquer hipótese que você precisa usar com os dados para fazer funcionar a sua solução.

Rust afirma que não estavam disponíveis dados detalhados de manutenção e dos custos que *envolvem a perda de clientes pela eventual falha de funcionamento nos ônibus, um evento estocástico. Assim, não seria possível decompor o custo como:*

$$c(x, \theta_1) = m(x, \theta_{11} + \mu(x, \theta_{12})b(x, \theta_{13}))$$

em que $(x, \theta_{11}$ *é a esperança condicional das despesas normais com manutenção e operação,* $\mu(x, \theta_{12})$ *é a probabilidade condicional de uma falha inesperada no motor e* $b(x, \theta_{13})$ *é a esperança condicional dos custos relacionados a troca do motor (reboque, troca de peças e perda de confiança do consumidor). Assim, Rust estima apenas a soma desses componentes,* c*. Como a solução é especificar e estimar a soma dos custos, é preciso que estes custos representem efetivamente separáveis em soma e não sejam dependentes entre si.* $\square$

No começo de cada período t Harold Zurcher observa x_t e decide quando pagar o custo de manutenção $c(x_t, \theta_1)$ ou substituir o motor, que instantaneamente leva a medida de uso para zero $x_t = 0$. Então, o benefício de um único período é dado por

$$u(x_t, i_t, \theta) = \begin{cases} -c(x_t, \theta) & \text{if } i_t = 0 \\ R - c(0, \theta) & \text{if } i_t = 1 \end{cases}$$

tal que R é o custo esperado de substituição do motor e i_t é a decisão binária de investimento.

Faça $F(x_{t+1}|x_t, i_t, \theta)$ representar a função de distribuição cumulativa do processo estocástico que governa a evolução da variável de estado.

c) Escreva a equação de Bellman para este problema.

Considere que o processo estocástico governando $\{i_t, x_t\}$ *é solução para o seguinte problema de parada ótima regenerativo:*

$$V_\theta(x_t) = \sup_\Pi \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=t}^{\infty} \beta^{j-t} u(x_j, f_j, \theta_1) | x_t \right\}$$

com a função utilidade definida anteriormente, Π *sendo a sequência infinita das regras de decisão* $\Pi = \{f_t, f_{t+1}, ...\}$*,* f_t *sendo a decisão de troca do motor no período* t*, função de toda a história do processo* $i_t = f_t(x_t, i_{t-1}, x_{t-1}, i_{t-2}, x_{t-2}, ...)$*. A expectativa anterior é tomada com respeito ao processo estocástico controlado* $\{x_t\}$*, cuja probabilidade é denotada por* F *(conforme definição anterior), cuja probabilidade de transição é:*

$$F(x_{t+1}|x_t, i_t, \theta) = \begin{cases} \theta_2 exp\{\theta_2(x_{t+1} - x_t)\} & \text{if } i_t = 0 \quad \text{and } x_{t+1} \geq x_t \\ \theta_2 exp\{\theta_2(x_{t+1})\} & \text{if } i_t = 1 \quad \text{and } x_{t+1} \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A equação acima tem a seguinte lógica: a milhagem acumulada advém de uma distribuição exponencial quando o motor é mantido, considerando a diferença entre o período futuro e o atual; Por outro lado, quando a troca é efetuada, a milhagem se regenera e a distribuição exponencial da milhagem acumulada é função apenas do período futuro.

A função definida anteriormente, $V_\theta(x_t)$, é o valor da função, sendo solução única para a equação de Bellman, dada por:

$$V_\theta(x_t) = \max_{i_t \in C(x_t)} [u(x_t, i_t, \theta_1) + \beta \mathbb{E} V_\theta(x_t, i_t)]$$

em que $C(x_t) = \{0, 1\}$ e $\mathbb{E}V_\theta(x_t, i_t)$ é definido como:

$$\mathbb{E}V_\theta(x_t, i_t) = \int_0^\infty V_\theta(y) p(dy|x_t, i_t, \theta_2) \quad \square$$

Se pode obter uma solução analítica para a equação de Bellman em **c)** assumindo que a distância percorrida em cada período é distribuída exponencialmente com o parâmetro θ_2, que é independente da milhagem rodada no período anterior:

$$F(x_{t+1} - x_t) = 1 - exp(-\theta_2(x_{t+1} - x_t))$$

Fazendo isso implica em uma função política estacionária

$$i(x_t, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_t \geq \gamma(\theta) \\ 0 & \text{if } x_t < \gamma(\theta) \end{cases}$$

tal que $\gamma(\theta)$ é a solução única para

$$R(1 - \beta) = \int_0^{\gamma(\theta)} [1 - \beta exp(-\theta_2(1 - \beta)y)] \frac{\partial c(y, \theta_1)}{\partial y} dy$$

Caso esteja interessado em detalhes deste modelo, ele foi derivado por Rust em um paper anterior ("Stationary Equilibrium in a Market for Durable Assets", Econometrica 1985).

d) Este modelo sofre de um problema de "sobre-previsão". Explique o que significa. Se pode usar este modelo para estimação? Por que ou por que não?

Esta especificação implica em uma função de risco degenerada, na qual, após certo limiar, sempre é realizada a troca do motor ($x_t \geq \gamma(\theta)$). Todavia, o autor aponta que os dados refutam tal hipótese, uma vez que a troca do motor ocorre numa faixa de milhagem muito ampla (de 82.400 a 387.000), sendo incompatível com uma regra de limiar a partir do qual a troca ocorre. Nesse sentido, ao utilizar tal modelo, teríamos um ponto a partir do qual o motor do ônibus é sempre trocado, algo não aderente a realidade. Assim sendo, a utilização desse modelo para previsão não parece ser o mais adequado. Como o autor aponta, a milhagem dos ônibus (x_t) não parece ser apenas o único determinante para a troca do motor, existindo um conjunto de outros fatores que podem influenciar tal decisão (o que levará a adição do termo ε_t ao modelo). Além disso, assume-se que $(x_{t+1} - x_t)$ tem uma distribuição exponencial i.i.d., fato refutado pelo conjunto de dados analisado. $\square$

1.2 Modelo Estocástico

Para estimar o comportamento que vemos nos dados é preciso adicionar termos de erro ao modelo. Uma forma de fazer isso é assumindo que os agentes desviam da solução ótima do modelo:

$$i_t = i(x_t, \theta) + \omega_t$$

Rust opta por uma estratégia diferente. Ele assume que os payoffs recebem choques aleatórios $\varepsilon_{it,t}$:

$$U(x, i, \theta) = \begin{cases} -c(x_t, \theta_1) + \varepsilon_{0,t} & \text{if } i_t = 0 \\ R - c(0, \theta_1) + \varepsilon_{1,t} & \text{if } i_t = 1 \end{cases}$$

$\varepsilon_{it,t}$ é observado por Harold Zurcher, mas não pelo econometrista.

e) Interprete ω_t e ε_t. Que tipo de erro eles representam? Discuta as vantagens e desvantagens de cada escolha de modelagem. Por que você acha que Rust optou pela segunda opção?

Em ω_t, tem-se um componente com variáveis de estado que influenciam a decisão tomada pelo agente, mas desconhecida pelo econometrista. O caso de ε_t é análogo, mas ele entra na função utilidade, como sendo um componente da alternativa i no período t que, igualmente, é conhecido pelo agente mas desconhecido pelo econometrista. Rust argumenta que a primeira opção seria internamente inconsistente, uma vez que o modelo estrutural partiu da hipótese de que o comportamento do agente é compatível com a solução de um problema de otimização dinâmico. A segunda abordagem trata o termo estocástico de modo que ele seja internamente consistente, sendo incorporado explicitamente na solução do problema, com a interpretação de que ε_t é uma variável de estado não observável pelo econometrista, mas pelo observada pelo agente. O autor comenta ainda que essa estratégia garante um benefício adicional ao abrir a possibilidade de que mais parâmetros possam ser estimados. $\square$

f) Escreva a nova função-valor $V(x_t, \varepsilon_t)$

$$V_\theta(x_t, \varepsilon_t) = \sup_{\Pi} \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=t}^{\infty} \beta^{(j-t)}[u(x_j, f_j, \theta_1) + \varepsilon_j(f_j)] | x_t, \varepsilon_t, \theta_2, \theta_3 \right\}$$

Em que $\Pi = \{f_t, f_{t+1}, f_{t+2}, ...\}$, $f \in C(x_t), \forall t$, que é o conjunto de escolha, e a esperança é tomada com respeito ao processo estocástico controlado $\{x_t, \varepsilon_t\}$ cuja densidade de probabilidade é definida a partir de Π e a transição de probabilidade p é dada por:

$$dp\{x_{t+1}, \varepsilon_{t+1}, ..., x_{N+1}, \varepsilon_{N+1} | x_t, \varepsilon_t\} = \prod_{i=t}^{N-1} p(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1} | x_i, \varepsilon_i, \theta_2, \theta_3) \quad \square$$

A solução para este problema é dada por uma regra de decisão estacionária $i_t = i(x_t, \varepsilon_t; \theta)$, que especifica a decisão ótima do agente quando a variável de estado é (x_t, ε_t). Neste ponto, o modelo estatístico é completamente especificado mas ainda é muito complicado de estimar – especialmente com dados limitados.

1.3 Simplificando as hipóteses para estimação

Rust fez as hipóteses simplificadoras $P(x_{t+1}; \varepsilon_{t+1} | x_t, \varepsilon_t) = P_1(x_{t+1}|x_t)P_2(\varepsilon_{t+1})$ (ele chama isso de "Conditional Independence Assumption").

g) Defina o valor esperado condicional de $V(x_t)$ sobre ε como

$$EV(x_t) = \int V(x_t; \varepsilon_t) P_2(\varepsilon_t)$$

Mostre que

$$\begin{aligned} EV(x_t) = \mathbb{E}_t[\max\{&-c(x_t, \theta_1) + \varepsilon_{0,t} + \beta \int EV(x_{t+1}) P(dx_{t+1}|x_t); \\ &-R - c(0, \theta) + \varepsilon_{1,t} + \beta \int EV(x_{t+1}) P(dx_{t+1}|0)\}] \end{aligned}$$

Ao assumir a "Conditional Independence Assumption" (CI), duas restrições estão envolvidas. Conforme argumenta Rust, x_{t+1} é uma estatística suficiente para ε_{t+1}, o que significa que x_{t+1} transmite qualquer dependência estatística entre ε_t e ε_{t+1}.

Assim, aplicando o Teorema 1:

Se

$$G([u(x, \theta_1) + \beta EV_\theta(x)]|x, \theta_2) \equiv \int_\varepsilon \max_{j \in C(x)} [u(x, j, \theta_1) + \beta EV_\theta(x, j)] q(d\varepsilon|x, \theta_2)$$

Então, $(P_i|x, \theta)$, dado por:

$$(P_i|x, \theta) = G_i([u(x, \theta_1) + \beta EV_\theta(x)]|x, \theta_2)$$

em que G_i denota a derivada parcial de G com respeito à $u(x, i, \theta_1)$ e a função EV_θ é o único ponto fixo para um mapeamento de contração T_θ, $T_\theta(EV_\theta) = EV_\theta$, definido para cada $(x, i) \in \Gamma$ por:

$$EV_\theta(x, i) = \int_y G([u(y, \theta_1) + \beta EV_\theta(y)]|y, \theta_2) p(dy|x, i, \theta_3)$$

Agora, basta passar a função de máximo para avaliar em qual estado se tomara a esperança: em que a troca não é realizada ($-c(x_t, \theta_1) + \varepsilon_{0,t} + \beta \int EV(x_{t+1}) P(dx_{t+1}|x_t)$) ou em que ela é realizada ($-R - c(0, \theta) + \varepsilon_{1,t} + \beta \int EV(x_{t+1}) P(dx_{t+1}|0)$) $\square$

h) (*) Prove que a equação anterior é um mapeamento de contração (contraction mapping).

Primeiro, vamos colocar a definiição de contração:

Definição 1 *Seja (X, d) um espaço métrico. Um mapeamento $T : X \to X$ é um mapeamento de contração, ou contração, se existe uma constante c, com $0 \leq c \leq 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$$

para todo $x, y \in X$

Em palavras, uma contração mapeia pontos próximos. Como caso particular, para todo ponto $x \in X$, e qualquer $r > 0$, todos os pontos na bola $B_r(x)$ são mapeados para a bola $B_s(Tx)$, com $r > s$. Se $c < 1$, a contração pode ser chamada de estrita.

Pela CI, temos um mapeamento do espaço $S = \{(x, \varepsilon)|x \in R^k, \varepsilon \in R^{\#}C(x)\}$ para um espaço contraído $\Gamma = \{(x, i)|x \in R^k, i \in C(x)\}$. Sendo a contração estrita, então existe um único ponto fixo, que, neste caso, é o termo EV_θ no espaço reduzido. $\square$

i) Explique o tradeoff resultante da hipótese de independência condicional (CI). Use um exemplo concreto para explicar o que é descartado (ou deixado de lado). O que esta hipótese "compra" (i.e. ela entrega) para a estimação? Essa hipótese é razoável?

Ao adotar a CI, conforme apontado no item g), qualquer dependência entre os termos não observados pelo econometrista depende apenas de x_t, o que acaba sendo uma hipótese forte, conforme Rust *aponta. Todavia, ao adotar tal estratégia, EV_θ deixa de ser função do termo não observado, dispensando que as probabilidades de escolha envolvam uma integração sobre essa função desconhecida. Além disso, a CI implica que EV_θ é um ponto fixo de uma contração sobre o espaço de estado reduzido ($\Gamma = \{(x,i)|x \in R^k, i \in C(x)\}$ ao invés de $S = \{(x,i)|x \in R^k, \varepsilon \in R^{\#C(x)}\}$), o que confere mais um ganho computacional ao evitar o cômputo de mais uma integral para obter EV_θ a partir de V_θ. Ao fazer isso, para o caso dos ônibus, as decisões de troca do motor não observadas pelo econometristas em dois períodos podem depender de outras coisas além da milhagem percorrida. O agente pode, por exemplo, observar as condições das ruas ou a temperatura do ambiente (que pode afetar a temperatura dos componentes do motor e acelerar seu desgaste) para decidir sobre a troca do motor. Pode ainda, por exemplo, optar por direcionar a troca do motor para o períodos em que a demanda por ônibus é menor (como férias) de modo a diminuir eventuais impactos da troca do motor. Todos esses fatores independem da milhagem x_t, afetando a escolha da troca. Apesar de ser uma hipótese forte, parece ser razoável supor que x_t seja o principal fator a influenciar a parcela não observada pelo econometrista*

Embora equação anterior seja uma contração, ainda é difícil computar sem fazer hipóteses distribucionais adicionais sobre ε. Rust assume que o choque $\varepsilon_{it,t}$$ segue uma distribuição valor extremo Tipo I normalizada. Então:

$$\varepsilon_{it,t} \sim EV1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \frac{\pi^2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{6} \end{matrix} \right)$$

j) Por que Rust escolheu uma distribuição padrão para o termo de erro ao invés de adicionar um parâmetro para a sua variância?

Conforme Rust aponta, um valor alto e negativo para $\varepsilon_t(0)$ pode ser interpretado como uma falha não observada de algum componente do ônibus que força para a oficina, enquanto um valor alto e positivo pode ser o reporte do motorista de que o ônibus está bem ajustado. Já $\varepsilon_t(1)$ pode ser associado ao custo associado à troca do motor, em que um valor alto e negativo pode indicar que não há espaço disponível para reparo ou que não existem motores disponíveis para troca, enquanto um valor alto e positivo indica o inverso. Como o autor não consegue identificar esses tipos de custo sem informação adicional, ele optou por arbitrariamente normalizar a média e variância.

A hipótese de distribuição valor extremo nos permite derivar formas funcionais para $EV(x_t)$, e $P(1|x_t, \theta)$.

k) Discuta a racionalidade por trás da hipótese da distribuição de ε_t. Existem outras alternativas? Escolha uma alternativa e discuta os prós e contras em relação à distribuição valor extremo Tipo I.

Ao escolher essa distribuição, o autor assume implicitamente que $\{x_t^j, \varepsilon_t^j\}$ são independentemente distribuídos entre os diferentes ônibus, de menor relevância vis-à-vis sua hipótese de CI. Uma outra possibilidade seria utilizar uma distribuição normal, como no caso de um probit, o que lhe permitiria *acomodar possíveis correlações entre o processo decisório envolvendo a troca de motores dos ônibus. Entretanto, isso levaria a complicações na definição do modelo, demandando maiores informações sobre os custos que envolvem o processo decisório de troca do motor.*

A última simplificação que Rust faz é discretizar o espaço de x_t divindo a milhagem em 90 intervalos de 5000 milhas. Ele assume que o processo x_t por avançar com pelo menos dois incrementos no tempo, que essencialmente reduz a distribuição de $(x_{t+1} - x_t)$ como uma multinomial com parâmetros $\theta_3 = \{\theta_{30}, \theta_{31}\}$.

l) Escreva $P(x_{t+1}|x_t, i_t, \theta)$.

$$P(x_{t+1}|x_t, i_t, \theta) = \begin{cases} g(x_{t+1} - x_t, \theta) & \text{if } i_t = 0 \\ g(x_{t+1} - 0, \theta) & \text{if } i_t = 1 \end{cases}$$

Aqui já se está em posição de estimar o modelo. As únicas duas coisas que não foram especificadas são β e a forma da função custo. Aqui podemos colocar $\beta = 0.9999$[1]. Finalmente, se pode assumir que a função custo é linear:

$$c(x_t, \theta_1) = 0.001\theta_1 x_t$$

m) Observe que não foi incluída uma constante nesta especificação de função custo. O que aconteceria se isto fosse feito? Poderíamos estimar uma constante separadamente? Discuta como isso impacta o resultado final de sua estimativa.

Segundo Rust, o nível absoluto de c não é identificado uma vez que a subtração de uma constante da função utilidade não afeta as probabilidades de escolha. Assim, o que autor busca estimar, ao menos, a mudança nos custos operacionais como função da distância percorrida pelos ônibus, cuja normalização $c(0, \theta_1)$ é utilizada

2 Estimação

2.1 Dados

Primeiro é necessário construir a base de dados. A base consiste em oito arquivos ASCII, contendo dados da leitura mensal do odômetro dos 162 ônibus do frota (Madison Metropolitan Bus Company). Estes dados são da operação dos ônibus entre Dezembro de 1974 e Maio de 1985. Cada arquivo corresponde a um modelo/categoria de ônibus da frota da Madison Metro:

[1] β e R são em geral altamente colineares e portanto de difícil distinção. Para um tratamento rigoroso desta questão veja a seção 3.5 do capítulo escrito por Rust no Handbook of Econometrics (1994). Outra referência útil é o paper de Magnac e Thesmar (Econometrica, 2002).

1. g870.ASC 36x15 matriz do modelo Grumman 870
2. rt50.ASC 60x4 matriz do modelo Chance RT50
3. t8h203.ASC 81x48 matriz do GMC T8H203
4. a452372.ASC 137x18 matriz do GMC A4523, modelo ano 1972
5. a452374.ASC 137x10 matriz do GMC A4523, modelo ano 1974
6. a530872.ASC 137x18 matriz do GMC A5308, modelo ano 1972
7. a530874.ASC 137x12 matriz do GMC A5308, modelo ano 1974
8. a530875.ASC 128x37 matriz do GMC A5308, modelo ano 1975

Os dados em cada arquivo estão vetorizados em uma única coluna: e.g. g870.ASC é um vetor 540x1 consistindo nas colunas de uma matriz 110x4 que foi empilhada. Comece importando os dados e reorganizando cada vetor em uma matriz. As primeiras 11 “linhas” de cada matriz consiste no metadado:

```r
#  Extrair tabela do PDF com a descrição das variáveis

tabulizer::extract_tables("lista2019.pdf",
                          output = "data.frame")[[1]] %>%
  dplyr::bind_rows(dplyr::bind_cols(Row=12,
                                    Field="Monthly odometer reading",
                                    Sample.Entry=4235)) %>%
  xtable::xtable(digits = c(0,0,0,0),
                 caption="Dicionário de variáveis") %>%
  print(include.rownames=F,
                comment=FALSE)
```

Tabela 1: Dicionário de variáveis

Row	Field	Sample.Entry
1	Bus ID	5297
2	Month purchased	8
3	Year purchased	75
4	Month of 1st engine replacement	4
5	Year of 1st engine replacement	79
6	Odometer reading at 1st engine replacement	153400
7	Month of 2nd engine replacement	0
8	Year of 2nd engine replacement	0
9	Odometer reading at 2nd engine replacement	0
10	Month odometer data begins	9
11	Year odometer data begins	75
12	Monthly odometer reading	4235

Você deve organizar os dados em objetos que são fáceis de manipular para realizar a sua estimação. Em particular, observe que os dados do odômetro NÃO são zerados quando o motor é substituído. Você deve realizar esse ajuste. Importante: Todos os dados estão nos arquivos em anexo, mas Rust roda o principal procedimento para um conjunto restrito de ônibus. Esta restrição é devido a aparente heterogeneidade na matriz de transição do espaço de estado entre os ônibus. Os arquivos que devem ser usados para comparar com os resultados de Rust são 1, 2, 3 e 8.

Você deve organizar os dados em objetos que são fáceis de manipular para realizar a sua estimação. Em particular, *observe que os dados do odômetro NÃO são zerados quando o motor é substituído. Você deve realizar esse ajuste.*

Importante: Todos os dados estão nos arquivos em anexo, mas Rust roda o principal procedimento para um conjunto restrito de ônibus. Esta restrição é devido a aparente heterogeneidade na matriz de transição do espaço de estado entre os ônibus. Os arquivos que devem ser usados para comparar com os resultados de Rust são 1, 2, 3 e 8.

```r
# Carregar a base de dados

#### Ler o dicionário de variáveis
#  Extrair tabela do PDF com a descrição das variáveis
dic <- tabulizer::extract_tables("lista2019.pdf",
                                 output = "data.frame")[[1]]

# Listar arquivos com as bases de dados
bases<- data.frame(arquivo=list.files("rust_data"),
                   nome=gsub(".asc","", list.files("rust_data")),
                   linhas=c(rep(137,4),128,36,60,81),
                   stringsAsFactors = F)

# Looping para carregar as bases
for(b in bases$arquivo){

  # Ler a base de dados
  base <- data.table::fread(paste0("rust_data/",b))

  # Definir o número de linhas da matriz
  nl<-bases[bases$arquivo==b,]$linhas

  # Definir número de meses existentes na base
  nm<-nl-12+1

  # Criar objeto para receber os dados fixos de cada ônibus
  dados <- c()
```

```
  # Criar um objeto para receber as informações mensais
  t<-c()

# Criar um objeto para receber as referências
  ref<-c()

# Iniciar looping para carregar as informações fixas,
# repetindo para o número de meses
for(i in 1:11){

  # Capturar as informações de cada ônibus
  assign(paste0("V",i), unlist(rep(base[seq(i,nrow(base),nl),],nm)))

  # Juntar resultados
  dados <- cbind(dados,get(paste0("V",i)))

}

# Retirar as informações mensais (odômetros)

  for(j in 12:nl){


    # Retirar para cada ônibus
    V12 <- base[seq(j,nrow(base),nl)]

    # Juntar resultados
    t <- rbind(t,V12)
}

# Criar um objeto com a referência,
# tendo como base o mês e ano inicial do odômetro


  for(i in seq(10,nrow(base),nl)){

    # Capturar o mês inicial, o ano inicial, definir sempre o primeiro
    # dia de cada mês para transformar em data e criar a sequência de
```

```
    # meses conforme o número de meses(nm) disponíveis na base

    r <- data.frame(ref=seq(
      # Define a data
      lubridate::dmy(paste("01",base[i],
                           base[i+1],sep = "/")),
      # Sequência mensal
      by="month",
      # Pelo número de meses
      length.out = nm))

    # Juntar resultados
    ref<- rbind(ref,r)

}

# Juntar a base final
assign(bases[bases$arquivo==b,]$nome,
cbind(dados,V12=t) %>%
  # Organizar por ônibus
  dplyr::arrange(V1) %>%
  # Trazer referência
  dplyr::bind_cols(ref) %>%
  # Ajustar odômetros para ocasião da troca
  dplyr::mutate(V12_adj=case_when(V12.V1>V6&V6>0~V12.V1-V6,
                                  TRUE~V12.V1), # Primeira troca
                V12_adj=case_when(V12.V1>V9&V9>0~V12.V1-V9,
                                  TRUE~V12_adj), # Segunda troca
                troca=ifelse(V12_adj<lag(V12_adj),1,0), # Criar indicador de troca
                troca=ifelse(is.na(troca)==T,0,troca),
                estado=cut(V12_adj,
                           breaks = c(seq(0,max(V12_adj), by=5000),Inf),
                           labels = FALSE),
                difV12=V12_adj-lag(V12_adj),
                difV12=ifelse(is.na(difV12)==T|difV12<0,V12_adj,difV12))) # Ajustar p

# Remover objetos desnecessários
rm(base,dados,r,ref,t,list=ls(pattern = "V\\d"),b,i,j,nl,nm)
```

```
}
```

2.2 Computação I: NFXP de Rust

Dada as observações $(\{x_0, i_0\}, \{x_1, i_1\}, ..., \{x_T, i_T\})$ podemos escrever uma função verossimilhança

$$\ell(x_1, ..., x_T, i_1, ..., i_T|x_0, i_0, \theta) = \prod_{t=1}^{T} P(i_t|x_t, \theta).P(x_t|x_{t-1}, i_{t-1}, \theta)$$

Você deve ter fórmulas para $P(i_t|x_t, \theta)$ e $P(x_t|x_{t-1}, i_{t-1}, \theta)$ da Parte 1 da lista.

Rust usa o seguinte procedimento:

Passo 1: Estime $\hat{\theta}_3$ usando

$$\ell^1(x_1, ..., x_T, i_1, ..., i_T|x_0, i_0, \theta) = \prod_{t=1}^{T} P(x_t|x_{t-1}, i_{t-1}, \theta_3)$$

Passo 2: Use as estimativas $\hat{\theta}_3$ como valores consistentes e a estimativa $(\hat{\theta}_1, \hat{R})$ usando

$$\ell^2(x_1, ..., x_T, i_1, ..., i_T|\theta) = \prod_{t=1}^{T} P(i_t|x_t, \theta)$$

Para implementar este método você precisará calcular $EV(x_t)$ para cada valor de θ considerado o algoritmo de máxima verossimilhança. Portanto, o seu código deve ser estruturado para ter um algoritmo de ponto fixo "interno" que calcula $EV(x_t)$ (usando a expressão derivada na parte **k)** e um algoritmo de busca "externo" que maximiza a função de verossimilhança. Um bom ponto de partida pode ser o *payoff* do período ou mesmo o valor de $EV(x_t)$ computado na iteração anterior da estimação.

Passo 3: Usando $(\hat{\theta}_1, \hat{R}, \hat{\theta}_3)$ como um ponto inicial, use a função de verossimilhança completa para obter uma estimativa eficiente dos parâmetros.

n) Estime (θ_1, R, θ_3) usando a metodologia de Rust de maximização da função de verossimilhança na equação 2 (ou uma função log-verossimilhança equivalente)[2]. Você deve comparar

[2] Você pode cair em um problema de estimação porque sua linguagem de programação aproxima números bem pequenos para zero. Este é um problema quando estiver calculando (como você verá) $log(exp(x_1) + exp(x_2))$ onde tanto x_1 ou x_2 (ou ambos) são números negativos bem grandes. Nesse caso, se sua linguagem de programação soluciona $exp(x_1) = 0$, então $log(exp(x_1) + exp(x_2)) = x_2$, que é errado. Você pode encontrar uma descrição detalhada deste problema em https://lips.cs.princeton.edu/computing-log-sum-exp/. A solução consiste essencialmente em tirar $exp(x_1)$ da soma do log:

$$log(exp(x_1) + exp(x_2)) = log(exp(x_1).(1 + exp(x_2 - x_1))) = x_1 + log((1 + exp(x_2 - x_1)))$$

os números que estimou com os obtidos por Rust no seu paper (a tabela relevante é Table IX).

```
# Definição da função custo

custo_miope=function(S, FCM, params, p){

  "A função custo míope computa o custo esperado associado com
  cada decisão para cada estado, retornando um conjunto de
  decisões/estados de custo.

   Inputs:
    * Um inteiro S, descrevendo os possíveis estados do ônibus.
    Na pratica, é o número de meses analisados
    * A função de custo de manutenção FMC, que tem como input
    um vetor de parâmetros e estados
    * O vetor params, como entrada para FMC. O primeiro elemento do vetor
      é o custo de substituição cs.
    * Um vetor (3x1) descrevendo os estados de transição de probabilidades

    Outputs:
    * Uma matriz (Sx2) contendo os custos de manutenção e troca para os N
      possíveis estados dos ônibus"

  # Definir o custo de substituição a partir dos
  # Parâmetros fornecidos
  cs = params[1]
  # Definir um vetor para receber os custos
  # de manutenção
  maint_cost = rep(NA,S)
  # Definir um vetor para receber os custos
  # de substituição
  repl_cost = rep(NA,S)

  for(s in 1:S){
    maint_cost[s] = FCM(s,params[-1])
    repl_cost[s] = rc
  }

  cbind(maint_cost,repl_cost)
```

```r
}

# Possíveis formas para a função custo:
# Linear: FCM(s,theta)=theta_11*s
# Quadrática: FCM(s,theta)=theta_11*s+theta_12*s^2
# Exponencial: FCM(s,theta)=exp(theta_11*s)
# Log: FCM(s,theta)=log(theta_11+theta_12*s)

lin_cost=function(s,params) s*params[1]
quad_cost=function(s,params) s*params[1]+s^2*params[2]
exp_cost=function(s,params) exp(s*params[1])
log_cost=function(s,params) log(params[1] + s*params[2])

# Definição das escolhas de probabilidade, como função do vetor de custos

escolha_prob=function(cost_array){

  # Retorna a probabilidade de cada escolha,
  # condicional a um vetor de custos.

  S = nrow(cost_array)
  cost = cost_array-apply(cost_array,1,min) #toma a diferença pois 1) resultados são
                                            # 2) mais estável com exp()
  util = exp(-cost)
  pescolha = util/rowSums(util)

  pescolha
}

# Algoritmo do mapeamento de contração (gera a escolha de probabilidade "forward-lo

contraction_mapping=function(S, p, FCM, params, beta=beta, threshold=1e-9, suppr_outp

  "Computa o valor esperado não-míope do agente para cada decisão possível
  e cada possível estado do ônibus.
  A iteração é realizada até a diferença obtida entre o passo anterior e o atual
  é menor que o limiar.
  Inputs:
```

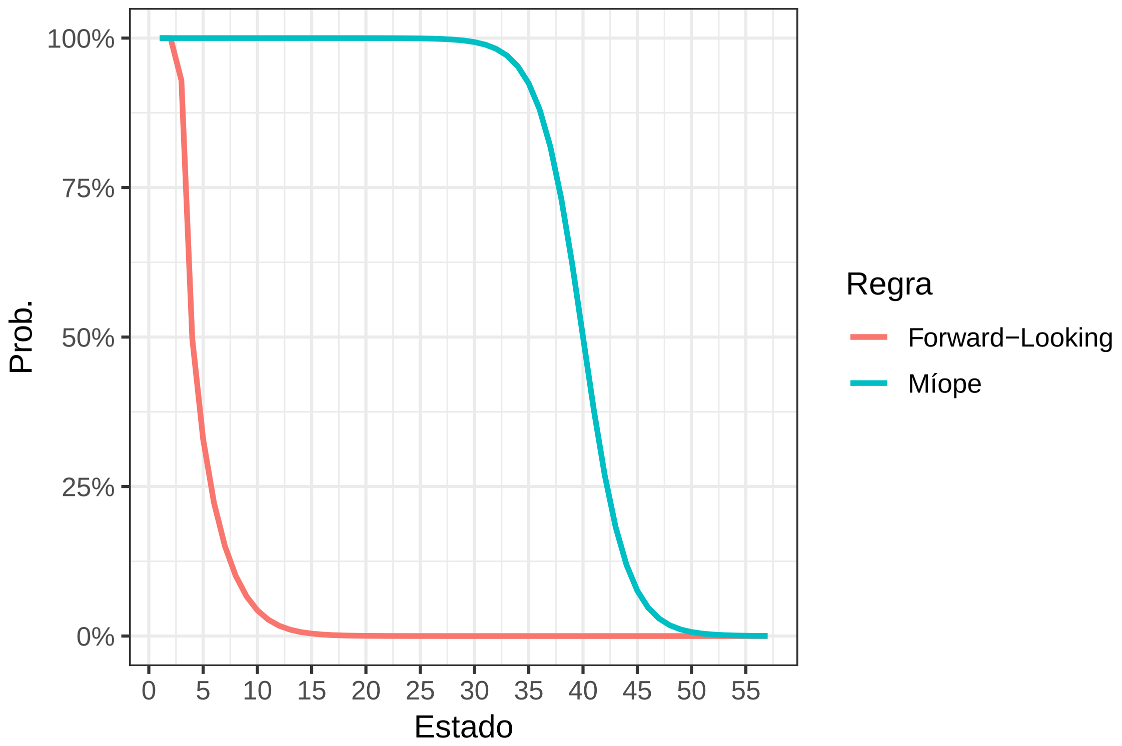
```
* Um número finito de estados S
* Um vetor com as probabilidades de transição de estado p = [p(0), p(1), p(2), ...,
* Uma função de manutenção de custos FMC
* Um vetor de parâmetros para a função custo
* Um fator de desconto beta (opcional)
* Um limiar para convergência (opcional)
Outputs:
* A convergência para a escolha de probabilidade forward-looking e
míope para cada estado, condicional aos 'params'"

achieved = TRUE

# Inicialização das matrizes de estado de transição
# ST_mat: descreve as probabilidades de transição de estado se os custos de manut
# RT_mat: Estado regenerado para 0 se o custo de troca acontece.
# [a,b] = transição do estado "a" para "b"
ST_mat = matrix(0,S,S)
lp = length(p)
for(i in 1:S){
  for(j in 1:lp){
    if((i+j-1)<S)  ST_mat[i,i+j-1] = p[j]
    if((i+j-1)==S) ST_mat[i,i+j-1] = sum(p[j:lp]) #sobre as colunas (probabilidade
  }
}

R_mat = cbind(1,matrix(0,S,S-1))

# Inicialização do valor esperado (que também é a decisão de custo do agente míop
# Aqui, o componente forward-looking é inicializado em 0.
k = 0
EV = matrix(0,S,2)
EV_miope = EV_nova = custo_miope(S, FCM, params, p)

# Contraction mapping loop
while(max(abs(EV_nova-EV)) > threshold){
  # Guardar o valor esperado anterior
  EV = EV_nova
  # Obter a probabilidade de manutenção e troca a partir do valor esperado anteri
```

```
    pescolha = escolha_prob(EV)
    # Computar o custo esperado para cada estado: vetor Nx1
    ecost = rowSums(pescolha*EV)
    # Computar os dois componentes da utilidade forward-looking:
    # No caso de manutenção, a utilidade dos futuros estados ponderada pela
    # probabilidade de transição. No caso de troca,
    # a utilidade futura é a utilidade do estado 0
    futil_maint = ST_mat%*%ecost
    futil_repl = R_mat%*%ecost
    futil = cbind(futil_maint,futil_repl)
    # A utilidade futura é descontada por beta, e adicionado ao custo míope.
    EV_nova = EV_miope + beta*futil
    k = k+1
    if(k == 10000) achieved = FALSE
  }

  if(!suppr_output){
    if(achieved){
      cat("Convergence achieved in ",k," iterations")
    } else {
      cat("CM could not converge! Mean difference = ",round(mean(EV_nova-EV),2))
    }
  }

  list(CP_forward=escolha_prob(EV_nova),CP_miope=escolha_prob(EV_miope))
}

# Criar a base de dados com os grupos 1, 2 e 3
data= rbind(g870[,c("V1","troca","V12_adj","estado","difV12")],
            rt50[,c("V1","troca","V12_adj","estado","difV12")],
            t8h203[,c("V1","troca","V12_adj","estado","difV12")])

# Verificar a probabilidade empírica da mudança em cada estado
p <- data %>%
  # Criar as quebras de [0,5000],(5000,10000],(10000,Inf)
  dplyr::mutate(p=cut(difV12,
                      breaks = c(-Inf,5000,10000,Inf),
                      labels = c("p_x0","p_x1","p_x2"))) %>%
```

```r
  # Agrupar pelas quebras
  dplyr::group_by(p) %>%
  # Contar a quantidade de observações nas quebras
  dplyr::summarise(n=n()) %>%
  # Desagrupar
  dplyr::ungroup() %>%
  # Calcular a proporção
  dplyr::mutate(n=n/sum(n))

# Armazenar proporção em um objeto
p <- p$n

# p_x0 é a chance de manutenção na mesma faixa de milhagem,
# p_x1 é a chance de passa para o status 2,
# enquanto p_x1 chance de estar no último status

# Decisão do agente

# Variável iniciais
# O custo de troca, os parâmetros de manutenção da função custo,
# e a taxa de desconto são definidas aqui.
# A taxa de desconto de beta = 0.9999

# l_1 <- glm(troca~difV12-1,family = binomial(link = "logit"),
#             data = data)
# l_2 <- glm(difV12~lag(difV12)+lag(troca)-1,family = gaussian(link = "identity"),
#             data = data)


rc=20
theta1_1=0.5
theta1_2=0.01
beta=0.98

params_lin = c(rc,theta1_1)
p = p
S = length(table(data$estado))
out = contraction_mapping(S=S, p=p, FCM=lin_cost, params=params_lin, beta = beta)
```

```
## Convergence achieved in  1060  iterations
```

```
lin_forward=out$CP_forward
lin_miope=out$CP_miope
pescolha = lin_forward[,1]

ggdat1 = data.frame(Regra=c(rep("Forward-Looking",nrow(lin_forward)),
                                rep("Míope",nrow(lin_forward))),
                    pMaint=c(lin_forward[,1],lin_miope[,1]),
                    State=rep(1:S,times=2))

ggplot(ggdat1,aes(y=pMaint,x=State,color=Regra))+
  geom_line(lwd=1)+
  theme_bw(12)+
  scale_x_continuous(breaks = seq(0,length(unique(data$estado)),by=5))+
  scale_y_continuous(labels = scales::percent)+
  labs(x="Estado",
       y="Prob.")
```




```
# Estimação

# 1) Modelo Logit de utilidade dinâmica
```

```r
# Grupo 1,2,3
data= rbind(g870[,c("V1","troca","V12_adj","estado")],
            rt50[,c("V1","troca","V12_adj","estado")],
            t8h203[,c("V1","troca","V12_adj","estado")])

# Grupo 4
# data2= rbind(a530875[,c("V1","troca","V12_adj","estado")])

# Grupo 1,2,3 e 4
# data3= rbind(g870[,c("V1","troca","V12_adj","estado")],
#              rt50[,c("V1","troca","V12_adj","estado")],
#              t8h203[,c("V1","troca","V12_adj","estado")],
#              a530875[,c("V1","troca","V12_adj","estado")])

dynamiclogit=function(params,data,S,p,FCM){

  "Avalia os parâmetros de custos subjacente ao padrão de troca do motor
  do ônibus por um agente forward-looking.

  Inputs:
  * Base de dados: um 'data.frame' com:
    -escolha: nome da coluna contendo uma variável dummy de escolha endógena
    -estado:nome da coluna contendo uma variável de estado exógeno

  * p: o vetor de transição de estado da variável exógena.
      Exemplo: p = [0, 0.6, 0.4] significa que o ônibus irá
      mudar para o próximo estado de milhagem com probabilidade 0.6,
      e para o segundo estado de milhagem 0.4.

  * FCM: Função de custo de manutenção, que deve deve ter como
  primeiro argumento o estado s e como segundo argumento um vetor
  de parâmetros."

  endog = data$troca
  exog = data$estado

  N=length(endog)
  S=90
```

```r
  # Matrizes para acelerar a computação do log-likelihood

  # Uma matriz (SxN) indicando o estado de cada computação
  state_mat=matrix(0,S,N)

  for(s in 0:(S-1)) state_mat[s+1,]=(exog==s)*1

  # Uma matriz (2xN) indicanto com uma dummy a decisão
  # tomada por cada agente (manutenção ou troca)
  dec_mat = rbind(t(1-endog),endog)

  "
  A log-likelihood do modelo dinâmico é estimada em alguns passos:
  1) Os parâmetros atuais entram na função  contraction mapping
  2) A função retorna uma matriz de decisão
     de probabilidade para cada estado
  3) Essa matriz é utilizada para computar a log-likelihood das observações
  4) A log-likelihood é somada entre os indivíduos
  "

  util = contraction_mapping(S=S, p=p, FCM=FCM, params=params, beta = beta,suppr_outp
  pescolha = util$CP_forward
  logprob = log(t(state_mat)%*%pescolha)
  -sum(logprob*t(dec_mat))
}


# Aplicação à função custo

# limites
bounds = c(1e-9, Inf)
# Parâmetros
npars=2

# Aplicação ao custo linear
lin_fit = optim(par=rep(.1,npars),fn=dynamiclogit,method=c("L-BFGS-B"),
                lower=bounds[1],upper=bounds[2],
                data=data,S=S,p=p,FCM=lin_cost,control=list(fnscale=1))
```

```r
# Retornar os parâmetros obtidos com a função
loglike =  lin_fit$value
fit_params = lin_fit$par
cat("Log-Likelihood: ",loglike,fill=TRUE)
```

```
## Log-Likelihood:  1752.529
```

```r
cat("RC: ",fit_params[1],fill=TRUE)
```

```
## RC:  0.1
```

```r
cat("thetas: ",fit_params[-1],fill=TRUE)
```

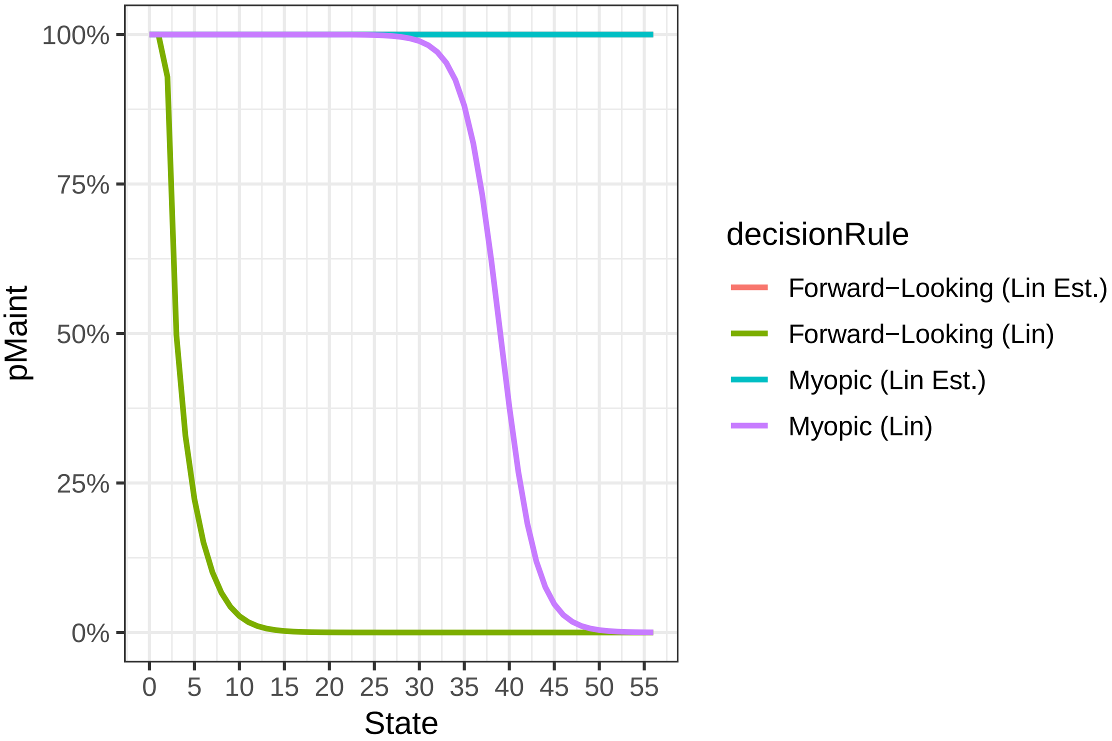
```
## thetas:  0.003033239
```

```r
#Compare with the true values
params_lin = c(20,.5)
linEst = contraction_mapping(S=S, p=p, FCM=lin_cost, params=fit_params, beta =beta)
```

```
## Convergence achieved in  940  iterations
```

```r
lin_forwardEst=linEst$CP_forward
lin_myopicEst=linEst$CP_miope

gglinEst = data.frame(decisionRule=c(rep("Forward-Looking (Lin)",
                                         nrow(lin_forward)),
                                     rep("Myopic (Lin)",nrow(lin_miope)),
                                     rep("Forward-Looking (Lin Est.)",
                                         nrow(lin_forwardEst)),
                                     rep("Myopic (Lin Est.)",
                                         nrow(lin_myopicEst))),
                      pMaint=c(lin_forward[,1],
                               lin_miope[,1],
                               lin_forwardEst[,1],
                               lin_myopicEst[,1]),
                      State=c(0:(nrow(lin_forward)-1),
                              0:(nrow(lin_miope)-1),
                              0:(nrow(lin_forwardEst)-1),
                              0:(nrow(lin_myopicEst)-1)))

ggplot(gglinEst,aes(y=pMaint,x=State,color=decisionRule))+
  geom_line(lwd=1)+
```

```r
  theme_bw(12)+
  scale_x_continuous(breaks = seq(0,length(unique(data$estado)),by=5))+
  scale_y_continuous(labels = scales::percent)
```




```r
  labs(x="Estado",
       y="Prob.")
```

```
## $x
## [1] "Estado"
##
## $y
## [1] "Prob."
##
## attr(,"class")
## [1] "labels"
```

o) Explique como você pode calcular os erros padrão para estes coeficientes.

p) (*)) Calcule o erro padrão usando a metodologia que você descreveu no item o).

q) (*) Rust estimou diferentes versões do seu modelo, variando (i) a função custo, (ii) o parâmetro β e (iii) o número de valores possíveis para a variável de estado x_t. Ele relata alguns resultados para todas parametrizações diferentes do modelo. Baseado apenas no que ele apresenta no paper, argumente argumente quais destas três hipóteses possuem maior consequên-

cia. Descreva e motive uma forma de relaxar a hipótese (cabe a você desenvolver isto e fique a vontade para usar uma das expansões apresentadas por Rust). Refaça a estimação com esta hipótese relaxada. Comente sobre qualquer diferença relevante nos resultados.

2.3 Computação II: método CCP

O método de estimação montado por Rust é "time-consuming" porque requer que você compute um ponto fixo para cada "guess" de θ. Hotz e Miller propõem um método alternativo.

r) Estime $\hat{F}(x_{t+1}|x_t, i_t)$ a partir dos dados. Você pode usar qualquer método (parametric, non-parametric, etc.). Justifique sua escolha.

s) Estime $\hat{P}(i_t = 1|x_t)$ a partir dos dados. Novamente justifique sua escolha de método.

Agora faça

$$\tilde{V}(i_t, x_t; \theta) \equiv \mathbb{E}_{\varepsilon_{i_t,t}}[V(i_t, x_t, \varepsilon_t; \theta)]$$

Uma vez que o termo de erro é média zero, temos

$$\tilde{V}(i_t, x_t; \theta) \equiv -c(x_t, i_t; \theta_1) + \beta \mathbb{E}_{\varepsilon_{i_{t+1},t+1}} \Big[u(x_{t+1}, i_{t+1}; \theta) + \varepsilon_{i_{t+1},t+1} + \beta \mathbb{E}_{\varepsilon_{i_{t+2},t+2}} [\cdots] \Big]$$

tal que as variáveis são distribuídas como

$$x_{t+1} \sim \hat{F}(.|x_t, i_t) i_{t+1} \sim \hat{P}(.|x_{t+1}) x_{t+2} \sim \hat{F}(.|x_{t+1}, i_{t+1})$$

e as expectativas são condicional, significando que elas são tomadas mantendo a história fixa (e conhecida). As propriedades da distribuição valor extremo Tipo I nos dizem que

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{i_t,t}|i_t, x_t] = \gamma - log(P(i_t|x_t))$$

tal que γ é a constante de Euler.

t) Use um argumento recursivo para escrever $\tilde{V}(i_t, x_t; \theta)$ como uma soma infinitamente descontada (infinite discounted sum).

Você deve ser capaz de calcular a expressão que você derivou para $\tilde{V}(i_t, x_t; \theta)$ usando simulação numérica. Faça $\{(x_t^s, i_s^t)\}_{t=1,s=1}^{T,S}$ serem os valores simulados de x_t e i_t. Então você pode calcular $\tilde{V}^s(i_t^s, x_t^s; \theta)$ e obter uma estimativa consistente de

$$\tilde{V}^{sim}(i, x; \theta) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \tilde{V}^{s}(i_t^s, x_t^s; \theta)$$

Seu $\tilde{V}^{sim}$ deve ser uma função de q que é essencialmente calculado para cada “guess”. Observe que este passo deve fazer o estimador mais rápido (uma vez que você não precisa computar a iteração de ponto fixo toda vez que tiver um novo “guess” de θ. Entretanto, o quão rápido será o seu estimador depende do quão “objetivo” (esperto) será a sua escolha de simulação. Em particular tenha em mente o seguinte: (i) é mais rápido sortear um número de uma matriz existente do que simular um número; e (ii) seus sorteios de (x_t^s, i_t^s) não dependem dos parâmetros que você está estimando.

Para concluir o procedimento, relembre do começo que usando a hipótese valor extremo T1

$$\tilde{P}(i_t = 1|x_t; \theta) = \frac{exp(\tilde{V}(x_t, i_t = 1; \theta))}{exp(\tilde{V}(x_t, i_t = 0; \theta)) + exp(\tilde{V}(x_t, i_t = 1; \theta))}$$

Isto fornece um $\tilde{P}$ simulado para cada “guess” de θ e agora o que falta fazer é encontrar a condição de momento para a estimação (basicamente qualquer coisa que é baseado em $\|\tilde{P} - \hat{P}\| = 0$ irá funcionar, embora você pode pensar se irá querer uma matriz de pesos para tornar a estimação mais eficiente).

u) Estime θ_1 e R usando a metodologia Hotz-Miller. Compare os resultados com aqueles obtidos usando o método de Rust. Comente as diferenças.

v) Faça um gráfico de como as estimativas Hotz-Miller mudam a medida que você varia T e S. Para quais níveis de T e S suas estimativas ficam estáveis? Por que novos aumentos no valor de T não mudam suas estimativas?