**第一章第一节映射（Mapping）与函数知识图谱构建**

**1. 映射的基本概念**

**1.1 映射的定义**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 设 和 是两个非空集合，若存在一种对应关系 ，使得对 中的任意一个元素 ，在 中都有**唯一确定的元素** 与之对应，则称这种对应关系为**映射（mapping）**。
  + 记作：
  + **术语**：
    - ：**定义域（domain）**
    - ：**陪域（codomain）**
    - 的所有值构成**值域（range）**

**(2) 使用注意事项**

* **映射和函数的关系**：
  + **函数是特殊的映射**，函数的定义域和值域必须是数集，而一般映射的定义域和值域可以是任意集合。
* **映射的唯一性**：
  + **一个元素 只能映射到一个** ，但多个 可以映射到同一个 。
* **映射可以是单射、满射或双射**，后续详细介绍。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断给定的关系是否是映射**
   * **方法**：检查定义域中每个元素是否有且仅有一个像。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：判断下列关系是否为映射：
       1. **解答**：
     + (1) 是映射，每个 对应唯一 。
     + (2) 不是映射，因同一 可对应两个 。
2. **考法 2：判断映射的定义域和值域**
   * **方法**：检查映射的定义域和值域是否完整。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：若 ，且 ，求其定义域和值域。  
       **解答**：
     + 定义域：，即 。
     + 值域：，即 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 1**：判断下列关系是否是映射，并求定义域和值域：

**2. 映射的分类**

**2.1 单射（Injective Mapping）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若 满足：则称 为**单射（one-to-one mapping）**。
* **性质**：
  + 不同的 不能映射到相同的 。
  + **单调函数一定是单射**（单调递增或递减）。
  + **若 可逆，则必为单射**。

**(2) 使用注意事项**

* **如何验证单射？**
  + 令 ，推导是否必然有 。
* **单射不一定是满射！**

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断函数是否为单射**
   * **方法**：令 ，推导 是否唯一成立。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：证明 是单射。  
       **解答**：
     + 设 ，得所以是单射。
2. **考法 2：判断分段函数的单射性**
   * **典型例题**：
     + **例 4**：判断 是否是单射。  
       **解答**：
     + ，不同 映射到相同 ，故**不是单射**。

**(4) 对应练习题**

* **题目 2**：证明 在其定义域内是单射。

**2.2 满射（Surjective Mapping）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若对 中的任意 ，存在 使得：则称 为**满射（onto mapping）**。
* **性质**：
  + 值域 必须等于陪域 。

**(2) 使用注意事项**

* **满射的判断方法**：
  + 令 ，解出 ，检查是否对所有 都有解。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断满射性**
   * **典型例题**：
     + **例 5**：证明 是否为满射。  
       **解答**：
     + 设 ，解得 ，对任意 都有解，因此是满射。

**(4) 对应练习题**

* **题目 3**：证明 是否为满射。

**3. 双射（Bijective Mapping）**

**3.1 双射的定义**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若映射 **同时是单射和满射**，即：
    1. **单射**：
    2. **满射**：对任意 ，存在 使得
  + 则称 **是双射（bijective mapping）**。
* **性质**：
  + **双射的映射一定存在逆映射**。
  + **若 和 均为双射，则 也是双射**。

**(2) 使用注意事项**

* **如何判断双射？**
  + 先判断是否单射，再判断是否满射。
  + 如果某映射有反函数，则必为双射。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断某映射是否为双射**
   * **典型例题**：  
     **例 6**：判断 是否为双射，其中 。  
     **解答**：
     + **单射**：设 ，即：所以是单射。
     + **满射**：令 ，解得 对所有 都有解，因此是满射。
     + 结论： 是**双射**。
2. **考法 2：判断复合映射是否为双射**
   * **典型例题**：  
     **例 7**：设 ，，证明 是否为双射。  
     **解答**：
     + **单射**：令 ：得 ，所以单射成立。
     + **满射**：令 ，解得 对所有 有解，故满射成立。
     + 结论： 是**双射**。

**(4) 对应练习题**

* **题目 4**：判断映射 是否为双射。
* **题目 5**：已知 ，求其单射性，并判断是否为双射。

**4. 逆映射（Inverse Mapping）**

**4.1 逆映射的定义**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若 是双射，则存在唯一的逆映射 使得：
* **求法**：
  + 令 ，解方程求 ，再交换 和 。

**(2) 使用注意事项**

* **只有双射的映射才有逆映射！**
* **求逆映射时要注意定义域和值域的变换**。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：求函数的逆映射**
   * **典型例题**：  
     **例 8**：求 的逆映射。  
     **解答**：
     + 设 ，解得：
     + 交换 ，得 。
2. **考法 2：判断两个函数是否互为逆映射**
   * **典型例题**：  
     **例 9**：已知 ，，证明 与 是否互为逆映射。  
     **解答**：
     + 计算 ：
     + 计算 ：
     + 由于 （对于 不成立），所以 和 **不是互逆**。

**(4) 对应练习题**

* **题目 6**：求 的逆映射，并确定其定义域和值域。
* **题目 7**：已知 ，，判断它们是否互为逆映射。

**5. 复合映射（Composite Mapping）**

**5.1 复合映射的定义**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若 ，，则定义复合映射：
* **性质**：
  + 复合映射的**顺序不能颠倒**，。
  + 若 和 都是单射/满射/双射，则 也是。

**(2) 使用注意事项**

* **复合映射的定义域需取 的值域**。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：求复合映射的表达式**
   * **例 10**：设 ，，求 。
   * **解答**：

**(4) 对应练习题**

* **题目 8**：设 ，，求 和 。

明白了，我们回到之前的知识图谱构建模式，每个知识点按照**以下结构**展开：

1. **知识点概念**
2. **使用注意事项**
3. **考点与考法总结**（每个考法提供1~2个典型例题）
4. **对应练习题**（列出完整题目）

**函数（Function）知识图谱**

**1. 函数的概念**

**1.1 函数的定义**

**(1) 知识点概念**

* **函数的数学定义**：
  + 设 是两个非空数集，若对于 **任意** ，都存在 **唯一确定** 的 使得：则称 为**定义在 上的函数（Function）**，记作：
  + 其中：
    - **定义域（Domain）**： 取值范围
    - **陪域（Codomain）**： 可能的取值范围
    - **值域（Range）**：函数真正取得的所有值

**(2) 使用注意事项**

* **函数的本质是映射，但映射不一定是函数！**
  + **映射可以是任意集合之间的对应，而函数要求 "定义域和值域是数集"**。
* **"唯一确定"是核心条件！**
  + 例如， 不是函数，因为一个 可对应两个 。
* **自变量、因变量的区分**
  + 是**自变量**， 是**因变量**，满足 由 确定。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断某关系是否是函数**
   * **方法**：检查每个 是否对应唯一 。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：判断以下关系是否是函数：
       1. **解答**：
     + (1) 是函数。
     + (2) 不是函数，因为一个 对应两个 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 1**：判断以下关系是否是函数，并说明理由：

**1.2 函数的表示方式**

**(1) 知识点概念**

* **函数可以有不同的表示方式**：
  1. **解析表达式（Analytic Expression）**：
     + 如：
  2. **图象表示（Graphical Representation）**：
     + 通过绘制**坐标图像**直观展现 - 关系
  3. **列表表示（Tabular Representation）**：
     + 如：
  4. **语言描述（Verbal Description）**：
     + 如："一个数的平方加上 1"

**(2) 使用注意事项**

* **不同的表示方式可以相互转换**
  + 解析式 ↔ 图像 ↔ 列表 ↔ 语言描述
* **有些函数可能没有显式解析式**
  + 如**隐函数**：

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 2：函数表示方式的转换**
   * **方法**：将列表或图像转化为解析式。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：给定以下数据表，求出可能的函数表达式：
   * **解答**：
     + 观察发现 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 2**：根据以下图像，写出可能的函数表达式：
  + (给出一张抛物线的图，顶点在 (0,1)，开口向上)

**1.3 函数的定义域和值域**

**(1) 知识点概念**

* **定义域（Domain）**：
  + **函数可取的所有自变量 组成的集合**。
  + 若无特别说明，默认定义域是 **使函数有意义的最大实数范围**。
* **值域（Range）**：
  + **函数的所有可能输出值组成的集合**。
  + 值域通常通过求极值、单调性分析等方法确定。

**(2) 使用注意事项**

* **如何求定义域？**
  1. 分母不能为零，如：**定义域**：
  2. 偶次根式内部必须非负，如：**定义域**：
  3. 对数函数要求真数大于零，如：**定义域**：

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 3：求函数的定义域**
   * **方法**：找出使函数无意义的点，并剔除。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：求以下函数的定义域：
   * **解答**：
     + **定义域**：
2. **考法 4：求函数的值域**
   * **方法**：分析单调性、极值或变换变量求解。
   * **典型例题**：
     + **例 4**：求函数 的值域。

**(4) 对应练习题**

* **题目 3**：求以下函数的定义域和值域：

**2.1 函数的单调性（Monotonicity）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + **单调递增（Strictly Increasing）**：
    - 对于任意 满足 ，若：则称函数 **严格单调递增**。
  + **单调递减（Strictly Decreasing）**：
    - 对于任意 满足 ，若：则称函数 **严格单调递减**。
  + **非严格单调性**（可以取等号）：
    - 单调递增：
    - 单调递减：
* **常见单调函数**：
  + （单调递增）
  + （单调递减）
  + （先递减后递增）
  + （严格单调递增）
  + （严格单调递增）

**(2) 使用注意事项**

* 判断单调性的方法：
  1. **直接定义法**：检查 与 的大小关系。
  2. **导数法**：
     + 若 在区间 上，则 在该区间单调递增。
     + 若 在区间 上，则 在该区间单调递减。
  3. **差分法**（用于数列或离散函数）。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断函数是否单调**
   * **方法**：利用定义或导数判断。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：判断 在 上的单调性。  
       **解答**：
     + 计算导数：
     + 令 ，解得 。
     + 通过分析：
       - 上 ，单调递增。
       - 上 ，单调递减。
       - 上 ，单调递增。

**(4) 对应练习题**

* **题目 1**：判断函数 的单调性。

**2.2 函数的奇偶性（Parity）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若对于所有 使得 ，则称 是**偶函数（Even Function）**。
  + 若对于所有 使得 ，则称 是**奇函数（Odd Function）**。
* **性质**：
  + **偶函数**：
    - 关于 轴对称，如 、。
  + **奇函数**：
    - 关于原点对称，如 、。
  + 若函数既不是奇函数也不是偶函数，则称其**无特殊对称性**。

**(2) 使用注意事项**

* **判断奇偶性的方法**：
  + **代入** 并检查是否满足奇偶函数定义。
  + 奇函数的所有项指数都是**奇数**，偶函数的所有项指数都是**偶数**。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 2：判断函数的奇偶性**
   * **方法**：计算 并分析。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：判断 的奇偶性。  
       **解答**：
     + 计算 ，
     + 所以 是**奇函数**。

**(4) 对应练习题**

* **题目 2**：判断函数 的奇偶性。

**2.3 函数的周期性（Periodicity）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若存在 使得对于所有 ：则称 是**周期函数**，周期为 。
* **常见周期函数**：
  + 三角函数：
    - 和 的周期为 。
    - 的周期为 。

**(2) 使用注意事项**

* **判断周期的方法**：
  1. 直接代入 观察是否相等。
  2. 三角函数的特殊周期性。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 3：求周期函数的最小正周期**
   * **典型例题**：
     + **例 3**：求 的最小正周期。  
       **解答**：
     + 由于 的周期是 ，
     + 的周期为 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 3**：求函数 的周期。

**2.4 函数的有界性（Boundedness）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若存在常数 ，使得对于所有 ：则称 是**有界函数**。
* **常见有界函数**：
  + （在 之间）。

**(2) 使用注意事项**

* 判断有界性的方法：
  + 计算极限或利用单调性。

**(3) 对应练习题**

* **题目 4**：判断 是否有界。

**函数（Function）知识图谱 - 第三部分：反函数与复合函数**

本部分涵盖 **反函数与复合函数**，主要内容包括：

1. **反函数的定义与性质**
2. **求反函数的方法**
3. **复合函数的定义**
4. **复合函数的运算规则**
5. **考点与考法总结**
6. **对应练习题（含完整题目）**

**3.1 反函数（Inverse Function）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若函数 是**双射**（即单射且满射），则存在唯一的反函数 ，使得：
* **记法**：
  + 记作 的反函数为 。
* **反函数的几何意义**：
  + **反函数的图像是原函数关于直线 对称的曲线**。
* **常见反函数对照表**：

|  |  |
| --- | --- |
| 原函数 | 反函数 |
| （ 奇数） |  |
|  |  |
|  |  |
| （） |  |
| （） |  |
| （） |  |

**(2) 使用注意事项**

* **只有单调且双射的函数才有反函数！**
  + 例如， 在 上不是双射，所以**无反函数**。
  + 但在 上， **单调递增且双射**，因此反函数为 。
* **如何求反函数？**
  + 设 ，然后解出 。
  + 交换 ，得到 。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断某函数是否有反函数**
   * **方法**：
     1. 判断是否单调（用导数法或定义法）。
     2. 判断是否满射（检查值域）。
   * **典型例题**：
     1. **例 1**：判断函数 是否存在反函数。  
        **解答**：
     2. 计算导数：因为 对所有 成立，所以 是单调递增，且值域是 。
     3. 因此 是双射，存在反函数。
2. **考法 2：求反函数**
   * **方法**：
     1. 设 ，解出 。
     2. 交换 。
   * **典型例题**：
     1. **例 2**：求函数 的反函数。  
        **解答**：
     2. 设 ，解得：
     3. 交换 ：

**(4) 对应练习题**

* **题目 1**：判断函数 是否存在反函数。
* **题目 2**：求 的反函数。

**3.2 复合函数（Composite Function）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若 ，，则复合函数 定义为：
  + 其中：
    - 先作用于 。
    - 再作用于 。
* **复合函数的示例**：
  + 若 ，，则：

**(2) 使用注意事项**

* **复合函数的顺序不能颠倒**：
  + （除非 和 特殊）。
  + 例如：
    - 若 ，，
    - 则 。
* **复合函数的定义域**：
  + 复合函数 的定义域是**使 有定义，并且 也有定义的所有** 。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 3：求复合函数的表达式**
   * **方法**：逐步替换 并整理。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：已知 ，，求 。  
       **解答**：
     + 。
2. **考法 4：求复合函数的定义域**
   * **方法**：
     + 先求 的定义域。
     + 再求 作用后是否仍有定义。
   * **典型例题**：
     + **例 4**：求 的定义域，若 ，。  
       **解答**：
     + ，
     + 需满足 ，
     + 所以定义域是 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 3**：求 若 ，。
* **题目 4**：求 的定义域，若 ，。

**4.1 函数的四则运算**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 设 和 是两个定义在同一**公共定义域** 上的函数，则：
    - **加法**：
    - **减法**：
    - **乘法**：
    - **除法**：（要求 ）
* **函数四则运算的性质**：
  + 结合律：
  + 交换律：、
  + 分配律：

**(2) 使用注意事项**

* **运算后的函数的定义域**：
  + 加减乘法的定义域为两个函数定义域的**交集**。
  + 除法运算时，需去掉 处的点。
* **运算后可能改变函数的奇偶性、单调性等性质**。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：计算两个函数的和、差、积、商**
   * **方法**：直接进行代数运算，并注意定义域。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：已知 ，，求：
       1. **解答**：
     + ，定义域 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 1**：已知 ，，求：
  1. 并确定其定义域。

**4.2 函数的复合运算**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若 和 可定义，则其复合运算定义为：
  + 其中， 先作用于 ，再由 作用。
* **复合函数的基本性质**：
  + 复合运算**不满足交换律**，即 。
  + 复合运算的**定义域受限**， 必须属于 的定义域，并且 的值必须属于 的定义域。

**(2) 使用注意事项**

* **复合运算后要重新检查定义域！**
  + **如** ，，则 的值必须在 的定义域内，即 。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 2：计算复合函数的表达式**
   * **方法**：将 代入 进行化简。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：已知 ，，求 。  
       **解答**：
     + 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 2**：已知 ，，求 和 并比较两者的关系。

**4.3 函数的分段运算**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 若函数在不同的区间上有不同的表达式，则称其为**分段函数**：

**(2) 使用注意事项**

* **分段函数需要特别注意定义域和连接点的连续性！**
  + **如**：若要求 在 处连续，则必须满足：

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 3：计算分段函数的值**
   * **方法**：根据 取值范围选择合适的表达式计算。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：计算 和 其中：
   * **解答**：
     + 。
     + 。

**(4) 对应练习题**

* **题目 3**：已知计算 和 。

**4.4 函数的变换**

**(1) 知识点概念**

* **函数的变换包括**：
  1. **平移**：
     + 表示**向右**平移 个单位。
     + 表示**向上**平移 个单位。
  2. **伸缩**：
     + 表示**水平缩放**（ 缩小， 拉伸）。
     + 表示**垂直缩放**。
  3. **对称**：
     + 关于 轴对称。
     + 关于 轴对称。

**5.1 初等函数的定义与分类**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 由**基本初等函数**（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数）通过**有限次四则运算、复合运算**构成的函数称为**初等函数（elementary function）**。
* **初等函数的分类**：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **类别** | **一般形式** | **定义域** | **性质** |
| 幂函数 |  | 或部分定义 | 单调性、奇偶性依 而定 |
| 指数函数 | () |  | 恒正、单调性、无界性 |
| 对数函数 | () |  | 单调性、无界性 |
| 三角函数 |  | 或去除奇点 | 周期性、奇偶性 |
| 反三角函数 |  | 定义域有限制 | 反函数特性 |

**5.2 幂函数（Power Function）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 形如 的函数，其中 为常数。
  + **特殊情况**：
    - 时， 是**恒等函数**。
    - 时， 是**常函数**。
    - 为**整数**时，称为**整指数幂函数**。
    - 为**分数**时，称为**分数幂函数**，如 即 。

**(2) 使用注意事项**

* **奇偶性**：
  + 当 为**偶数**， 是偶函数（关于 轴对称）。
  + 当 为**奇数**， 是奇函数（关于原点对称）。
* **单调性**：
  + 时， 在 上单调递增。
  + 时， 在 上单调递减。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断幂函数的奇偶性**
   * **方法**：计算 并与 进行比较。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：判断 的奇偶性。  
       **解答**：
     + 计算 ，
     + 由于 且 ，**函数无奇偶性**。

**(4) 对应练习题**

* **题目 1**：判断函数 的奇偶性。

**5.3 指数函数（Exponential Function）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 形如 （）的函数称为**指数函数**。
* **基本性质**：
  + **定义域**：
  + **值域**：
  + **单调性**：
    - 时，指数函数**单调递增**。
    - 时，指数函数**单调递减**。

**(2) 使用注意事项**

* **指数函数的图像特征**：
  + 永远不会取负值，即 对任意 成立。
  + 过点 且无穷接近 轴但不相交（渐近线为 ）。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 2：指数函数的单调性**
   * **方法**：考察 的大小，判断函数是递增还是递减。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：判断 和 的单调性。  
       **解答**：
     + 是单调递增，
     + 是单调递减。

**(4) 对应练习题**

* **题目 2**：求指数函数 的值域。

**5.4 对数函数（Logarithmic Function）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 形如 （）的函数，定义为：
* **基本性质**：
  + **定义域**：
  + **值域**：
  + **单调性**：
    - 时，**单调递增**。
    - 时，**单调递减**。

**(2) 使用注意事项**

* **对数与指数互为反函数**：
  + 与 互为反函数，其图像关于 对称。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 3：对数函数的单调性**
   * **方法**：考察 的大小，判断函数是递增还是递减。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：求 和 的单调性。  
       **解答**：
     + 是单调递增， 是单调递减。

**(4) 对应练习题**

* **题目 3**：求对数函数 的定义域。  
  根据你的要求，我将根据第二节的内容进行知识图谱的详细构建，按我们之前的架构来分析**第二节：数列的极限**部分，重点关注极限的定义部分，不涉及收敛性。以下是详细分析与构建。

**第一章第二节：数列的极限（Limit of a Sequence）知识图谱**

**2.1 数列极限的定义（Definition of Limit of a Sequence）**

**(1) 知识点概念**

* **定义**：
  + 如果存在一个常数 ，使得对于任意一个正数 ，都存在一个正整数 ，当 时，总有：则称数列 **收敛于** ， 称为数列的**极限**，记作：
* **直观解释**：
  + 当 越来越大时，数列 的值越来越接近某个固定值 。
* **无穷小量定义**：
  + 若 ，则 称为**无穷小量**。

**(2) 使用注意事项**

* **极限唯一性**：
  + 一个数列的极限**最多只能有一个**，即极限是唯一的。
* **ε-N定义的重要性**：
  + 表示一个任意小的正数， 表示满足条件的正整数。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：利用定义证明数列的极限**
   * **方法**：根据 定义，构造 来满足 。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：证明 。  
       **解答**：
     + 任取 ，令 。
     + 当 时：
     + 所以 。
2. **考法 2：求数列极限的直观方法**
   * **方法**：借助**观察法**、**计算法**或**归纳法**来直观判断数列的极限。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：求 。  
       **解答**：
     + 化简分式得到：

**(4) 对应练习题**

1. **题目 1**：利用定义证明 。
2. **题目 2**：求 。
3. **题目 3**：利用定义证明 。

**2.2 极限存在性与直观判断**

**(1) 知识点概念**

* **极限存在的充分必要条件**：
  + 如果数列 的正向收敛与反向收敛的极限相同，则数列极限存在且等于这个值。
* **简单判断法**：
  + 若 为单调有界数列，则 必收敛。

**(2) 使用注意事项**

* 单调性和有界性是常见的极限存在条件。
* 不是所有数列都有极限。

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 3：判断数列极限存在性**
   * **方法**：通过单调性与有界性判断数列是否收敛。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：判断数列 是否收敛。  
       **解答**：
     + 不满足单调性和有界性，不收敛。

**(4) 对应练习题**

1. **题目 4**：判断 是否收敛。
2. **题目 5**：证明 。

**第二节：数列的极限（Limit of a Sequence）知识图谱 - 收敛数列的性质（修订版）**

**2.3 收敛数列的基本性质**

**(1) 唯一性（Uniqueness）**

**知识点概念**

* **定理 1（极限的唯一性）**：
  + 若数列 收敛，则其极限**唯一**，即如果：则必有 。

**使用注意事项**

* **若一个数列具有多个极限，则它不收敛！**
  + 例如，数列 既不收敛于 1，也不收敛于 -1，所以它**不收敛**。

**考点与考法总结**

1. **考法 1：利用唯一性判断数列是否收敛**
   * **方法**：如果某数列的不同子列收敛到不同的值，则该数列不收敛。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：证明数列 不收敛。  
       **解答**：
     + 该数列的偶数项收敛于 1，奇数项收敛于 -1。
     + 由于存在两个不同的极限，因此数列不收敛。

**对应练习题**

1. **题目 1**：判断数列 是否收敛。

**(2) 有界性（Boundedness）**

**知识点概念**

* **定理 2（收敛数列必有界）**：
  + 若数列 **收敛**，则它必**有界**，即存在常数 使得：
* **直观理解**：
  + 如果数列收敛，它就不会无穷增大或无穷减小，因此必然是有界的。

**使用注意事项**

* **有界数列不一定收敛！**
  + 例如：数列 **有界**（在 -1 和 1 之间），但**不收敛**。

**考点与考法总结**

1. **考法 2：判断数列是否有界**
   * **方法**：如果数列收敛，则它一定有界；如果数列有界但不收敛，需要进一步分析。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：证明数列 **是有界的**。  
       **解答**：
     + 因为 在区间 内，所以它是有界的。

**对应练习题**

1. **题目 2**：判断数列 是否有界。

**(3) 保号性（Sign Preservation）**

**知识点概念**

* **定理 3（极限的保号性）**：
  + 若数列 收敛于 且从某一项开始 ，则：
  + 若 在某个 之后恒负，则极限 。

**使用注意事项**

* **极限不会改变数列的正负号趋势**：
  + 若数列 从某项后恒正，则其极限也是非负的。

**考点与考法总结**

1. **考法 3：利用保号性判断极限**
   * **方法**：分析数列的正负性，并利用极限保号性判断收敛情况。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：若 ，试证明 在 充分大时必为负数。  
       **解答**：
     + 由极限保号性可知， 在足够大的 时应保持负值。

**对应练习题**

1. **题目 3**：已知 ，证明对于充分大的 ，。

**(4) 收敛数列与其子数列的关系（定理四）**

**知识点概念**

* **定理 4（子数列继承极限）**：
  + 若数列 收敛于 ，则任意一个子数列 也收敛于 ，即：

**使用注意事项**

* **子数列与母数列的极限相同！**
  + 但反之不成立——即使一个子数列收敛，母数列不一定收敛。

**考点与考法总结**

1. **考法 4：判断子数列是否收敛**
   * **方法**：检查母数列是否收敛，若收敛，则其子数列必收敛于同一极限。
   * **典型例题**：
     + **例 4**：已知 ，试证明任意子数列 仍收敛于 3。  
       **解答**：
     + 由于 收敛于 3，子数列 只是 的部分项，因此仍收敛于 3。

**对应练习题**

1. **题目 4**：已知 ，判断其子数列 是否收敛，并求极限。

**2.4 极限的四则运算性质**

**知识点概念**

* **定理 5（极限的四则运算）**：
  + 若 ，，则：

**第三节：函数的极限（Limit of a Function）知识图谱**

**3.1 函数极限的定义**

**(1) 知识点概念**

**函数极限的基本定义**

* **直观理解**：
  + 当 越来越接近 （但 ）时，函数值 越来越接近某个定值 ，则称**函数 在点 处的极限为** ，记作：
* **数学定义（ 语言）**：
  + 如果对任意给定的 ，都存在 ，使得当 时，满足：则称**极限存在且等于** ，即：

**特殊情况：左极限与右极限**

* **左极限（Left Limit）**：

如果当 仅从 的左侧接近 时， 仍趋近于 ，则称**左极限存在**且等于 。

* **右极限（Right Limit）**：

如果当 仅从 的右侧接近 时， 仍趋近于 ，则称**右极限存在**且等于 。

* **极限存在的充要条件**：
  + 若函数 在点 **左右极限都存在且相等**，则：

**(2) 使用注意事项**

**1. 极限值与函数在该点的值无关**

* **函数极限仅关心 靠近 时 的趋势，而不关心 是否存在**。
* 例如：
  + 设：则：但  **未定义**，因为分母为零。
  + **结论**：极限存在 ≠ 函数在该点有定义。

**2. 极限是“接近”而不是“等于”**

* 在极限定义中，我们考察的是当 **越来越接近** 时 的值，而不是 本身。
* 例如：
  + 设：则：但 。
  + **结论**：极限值与函数在该点的值**可以不同**，极限只是描述趋势。

**3. 只需满足“足够接近”**

* 设：其含义是：
  + **对于任意小的** ，都能找到**某个足够小的** ，使得当 进入区间 内（但 ），总有：
  + 但这个 **不唯一**，只要能找到一个合适的 即可。

**4. 左极限与右极限必须相等**

* 若：则：
* **例子：分段函数**
  + 由于左右极限不相等，故：

**5. 无穷大极限不等于极限不存在**

* 若：表示 越来越大，但它仍然**有极限**（趋向无穷大）。
* 但如果左右极限不同，或者无规律可循，则**极限不存在**。

**例如：**

* 设：则：但极限仍然存在（趋于无穷大）。

**但对于**：

由于 在 时振荡，极限**不存在**。

**6. 不能直接代入求极限**

* 计算函数极限时，不能简单代入 ，因为可能会遇到未定义的情况。
* **常见的特殊情况**：
  + **无意义形式**：、
  + **无穷大形式**：、

**解决方法**：

1. **化简分子分母**：
   * 例如：化简为：
2. **有理化**（适用于根号形式）：
   * 例如：乘以共轭：化简后得到：

**完整的使用注意事项**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **序号** | **注意事项** | **示例** |
| **1** | 极限值与函数在该点的取值无关 | 但 |
| **2** | 极限是“接近”而不是“等于” |  |
| **3** | 只需满足“足够接近” | 只需找到某个合适的 |
| **4** | 左右极限必须相等，极限才存在 | 若 ，则极限不存在 |
| **5** | 无穷大极限不等于极限不存在 |  |
| **6** | 不能直接代入求极限 | 需化简或变形，例如 形式 |

**(3) 考点与考法总结（补充完整）**

**考法 1：利用 语言严格证明函数极限**

**方法**

1. **写出极限定义**：给定 ，寻找合适的 。
2. **构造** ：使得当 时，满足 。
3. **验证 满足要求**：最终推导出不等式成立。

**典型例题**

* **例 1**：证明 。

**解答**

1. 给定 ，我们希望找到 使得：
2. 化简：
3. 令 ，当 时：
4. 结论成立，证明完毕。

**考法 2：计算函数的左右极限并判断极限是否存在**

**方法**

1. **分别计算左极限** 和**右极限** 。
2. **比较左右极限**：
   * 若左右极限相等，则极限存在。
   * 若左右极限不等，则极限不存在。

**典型例题**

* **例 2**：求极限：

**解答**

1. **左极限**（）：
   * 当 时，，所以：
2. **右极限**（）：
   * 当 时，，所以：
3. **左右极限不相等**，故：

**考法 3：利用函数极限与数列极限的关系求极限**

**方法**

* **定理**：若数列 收敛于 ，且：则：

**典型例题**

* **例 3**：已知：计算极限。

**解答**

* 令 ，则 。
* 代入：
* 由于 ，所以：

**考法 4：利用等价无穷小替换求极限**

**方法**

* 若 和 在 处**无穷小阶相同**，则可以用等价无穷小替换求极限。

**常见等价无穷小**

|  |  |
| --- | --- |
| 原函数 | 等价无穷小（） |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**典型例题**

* **例 4**：计算：

**解答**

* 由于 在 处等价，
* 直接替换：

**考法 5：利用无穷小和无穷大的关系求极限**

**方法**

1. **无穷小乘以有界函数仍为无穷小**：
   * 若 时 ，且 有界，则：
2. **无穷大比值法则**：
   * 若 且 ，则：需比较增长速度。

**典型例题**

* **例 5**：计算：

**解答**

* 分析： 的增长速度远快于 ，所以：

**考法 6：利用分段函数计算极限**

**方法**

1. **分别计算左极限与右极限**。
2. **若左右极限相等，则极限存在；否则极限不存在**。

**典型例题**

* **例 6**：求：其中：

**解答**

* **左极限**：。
* **右极限**：。
* 左右极限不相等，故极限不存在。

**(4) 对应练习题**

1. **题目 1**：利用 语言证明：
2. **题目 2**：求：
3. **题目 3**：求：
4. **题目 4**：判断以下函数在 处的极限是否存在：

**第三节：函数的极限（Limit of a Function）知识图谱 - 函数极限的性质**

本部分系统整理 **函数极限的性质**，包括：

1. **唯一性**
2. **局部有界性**
3. **局部保号性**
4. **四则运算性质**
5. **夹逼定理**
6. **考点与考法总结**
7. **对应练习题（含完整题目）**

**3.2 函数极限的基本性质**

**(1) 唯一性（Uniqueness）**

**知识点概念**

* **定理 1（极限的唯一性）**：
  + 若函数 在 处极限存在，则其极限值**唯一**，即如果：则必有 。

**使用注意事项**

* **若一个函数在 处存在多个不同极限，则它的极限不存在！**
* **函数在某点处的极限唯一，并不代表该点的函数值唯一。**

**考点与考法总结**

1. **考法 1：利用唯一性判断极限是否存在**
   * **方法**：如果函数在同一点处趋向不同的极限值，则极限不存在。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：证明分段函数在 处的极限**不存在**。  
       **解答**：
     + 计算左极限：
     + 计算右极限：
     + 因为左右极限不同，所以极限不存在。

**对应练习题**

1. **题目 1**：判断函数：在 处的极限是否存在。

**(2) 局部有界性（Local Boundedness）**

**知识点概念**

* **定理 2（极限函数在点的邻域内有界）**：
  + 若 存在，则**在 的某个邻域内**，函数 必有界，即存在常数 使得：

**使用注意事项**

* **极限存在**是局部有界的前提，若极限不存在，则函数可能无界。
* **无界函数的极限可能不存在**，例如：
  + 在 处的极限**不存在**，因为 在该点的邻域内**无界**。

**考点与考法总结**

1. **考法 2：判断极限是否满足局部有界性**
   * **方法**：如果函数在邻域内趋于无穷，则极限不存在。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：判断：是否存在。  
       **解答**：
     + 由于 在 附近**无界**，极限不存在。

**对应练习题**

1. **题目 2**：判断 是否存在。

**(3) 局部保号性（Local Sign Preservation）**

**知识点概念**

* **定理 3（极限函数在点的邻域内保号）**：
  + 若 ，且 ，则**在足够靠近 的某个邻域内**， 仍为正，即：

**使用注意事项**

* 该定理确保当极限存在且为正（或负）时，函数在邻域内不会突然变号。
* 但若函数在 附近震荡变号，则极限不存在。

**考点与考法总结**

1. **考法 3：判断极限的局部保号性**
   * **方法**：分析函数的正负性，并验证是否存在震荡情况。
   * **典型例题**：
     + **例 3**：判断：是否满足局部保号性。  
       **解答**：
     + 对所有 均成立，且：
     + 因此满足局部保号性。

**对应练习题**

1. **题目 3**：判断 是否满足局部保号性。

**(4) 极限的四则运算性质**

**知识点概念**

* **定理 4（极限的四则运算）**：
  + 若 ，，则：

**使用注意事项**

* 不能直接用四则运算计算不定式，如 ，需变形或使用洛必达法则。

**考点与考法总结**

1. **考法 4：利用极限运算法则计算极限**
   * **方法**：直接应用四则运算法则进行计算。
   * **典型例题**：
     + **例 4**：求：
   * **解答**：
     + 变形为：

**对应练习题**

1. **题目 4**：计算：

**第四节：无穷小与无穷大（Infinitesimals and Infinities）知识图谱**

**4.1 无穷小的定义**

**(1) 知识点概念**

**无穷小的基本定义**

* **定义**：
  + 如果当 时，函数 的极限为 0：则称 **是关于 的无穷小量**（Infinitesimal）。
  + 记作：
* **特殊情况**：
  + 当 时，若 ，则称 **是关于 的无穷小量**。

**无穷小的几何意义**

* 无穷小描述的是函数值在某个点附近无限接近 0 的趋势。
* 例如：
  + 是 处的无穷小。
  + 是 处的无穷小。

**(2) 使用注意事项**

* **无穷小 ≠ 0**
  + 无穷小量趋近于 0，但它们**不等于 0**，即：
* **无穷小与无穷大是相对概念**
  + 若 为无穷小，则其倒数 若趋于无穷，则称其为无穷大量（见下一部分）。
* **无穷小的常见形式**
  + 典型无穷小：

|  |  |
| --- | --- |
| 函数 | 在 处的无穷小 |
| () | 是无穷小 |
| , | 是无穷小 |
|  | 是无穷小 |
|  | 是无穷小 |

**(3) 考点与考法总结**

1. **考法 1：判断一个函数是否是无穷小**
   * **方法**：直接计算极限，看是否趋于 0。
   * **典型例题**：
     + **例 1**：判断 在 处是否是无穷小。  
       **解答**：
     + 计算：
     + 所以 是无穷小。
2. **考法 2：利用无穷小证明极限**
   * **方法**：把复杂函数拆解成已知的无穷小形式。
   * **典型例题**：
     + **例 2**：证明 。  
       **解答**：
     + 由于 在 处等价（无穷小量）。
     + 代入：

**(4) 对应练习题**

1. **题目 1**：判断下列函数是否是无穷小：
   * 在 处
   * 在 处
2. **题目 2**：证明：

**第四节：无穷小与无穷大（Infinitesimals and Infinities）知识图谱**

本部分系统整理 **无穷小的完整知识体系**，包括：

1. **知识点概念**
   * 无穷小的定义
   * 无穷小的性质
   * 无穷小的比较
   * 无穷小与极限的关系
2. **使用注意事项**
3. **考点与考法总结**
4. **对应练习题（含完整题目）**

**4.1 知识点概念**

**(1) 无穷小的定义**

* **无穷小的基本定义**：
  + 如果当 时，函数 的极限为 0：则称 **是关于 的无穷小量**（Infinitesimal）。
  + 记作：
* **特殊情况**：
  + 当 时，若 ，则称 **是关于 的无穷小量**。
* **无穷小的几何意义**：
  + 无穷小描述的是函数值在某个点附近无限接近 0 的趋势。
  + 例如：
    - 是 处的无穷小。
    - 是 处的无穷小。

**(2) 无穷小的性质**

* **无穷小的基本运算性质**：
  1. **无穷小的加法**：
     + 若 和 均为 处的无穷小，则：
  2. **无穷小的乘法**：
     + 若 和 均为无穷小，则：
  3. **无穷小的数量乘法**：
     + 若 是无穷小，且 为常数，则：
* **无穷小的重要定理**
  1. **定理 1（无穷小的加法定理）**：**两个无穷小的和仍是无穷小**。
  2. **定理 2（无穷小的乘法定理）**：**无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小**。
  3. **定理 3（无穷小的极限替换）**：**等价无穷小可互换**（见无穷小比较）。

**(3) 无穷小的比较**

* **无穷小的高阶与低阶比较**
  + 若：则称 **比** ( g(x) **高阶无穷小**，记作：
  + 若：则称 和 **同阶无穷小**，记作：
* **常见等价无穷小（）**

|  |  |
| --- | --- |
| 函数 | 等价无穷小 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**(4) 无穷小与极限的关系**

* **无穷小是极限的一种特殊情况**
  + 若 （即 是无穷小），则：
* **无穷小可以用于求极限**
  + 例如：由于 ，所以直接化简。

**4.2 使用注意事项**

**(1) 无穷小不能简单地当作 0 处理**

* **错误示例**：
  + 设 是 处的无穷小，不能简单地写：
  + **原因**：
    - 无穷小只是趋近于 0，但它仍是一个变量，而 0 是常数。
    - 在计算极限时，错误地将无穷小量当作 0 可能导致错误结论。

**(2) 低阶无穷小在高阶无穷小面前可以忽略**

* **概念**：
  + 若 （即 是 的高阶无穷小），则在极限计算中：
  + **示例**：
    - 设 ，则：
    - 因为 相对于 更快趋近于 0，所以可以忽略。

**(3) 乘积法则：无穷小乘以有界函数仍是无穷小**

* **定理**：
  + 若 是无穷小， 是有界函数，即：则：
* **示例**：
  + 设 是无穷小， 是有界函数（因 ）。
  + 则：

**(4) 无穷小的除法需要谨慎**

* **错误示例**：
  + 不能简单地写：
  + **原因**：
    - 无穷小之间的比值不一定是 1，而需要具体计算极限。
* **正确做法**：
  + 计算：
  + 若极限存在且不为 0，则说明两个无穷小是**同阶无穷小**，否则需要判别高阶低阶关系。

**(5) 等价无穷小可以互相替换**

* **概念**：
  + 若 ，即：则可以在极限计算中用 代替 。
* **常见等价无穷小（）**

|  |  |
| --- | --- |
| 原函数 | 等价无穷小 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

* **示例**：
  + 计算：
  + 由于 ，所以：

**(6) 无穷小与无穷大是相对概念**

* **概念**：
  + 若 是 处的无穷小，则：若趋向无穷大，则称其为**无穷大量**。
* **示例**：
  + 设 。
  + 则 时，（是无穷小）。
  + 但 （是无穷大量）。

**(7) 无穷小不能随意加减无穷大量**

* **错误示例**：
  + 不能简单写：
  + **原因**：
    - 无穷大量的增长速度远远快于无穷小，所以无穷小的存在可以忽略，但不能直接写成等式。

**4.3 总结：完整的使用注意事项**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **序号** | **注意事项** | **示例** |
| **1** | 无穷小不能直接当作 0 | 但 |
| **2** | 低阶无穷小在高阶无穷小面前可以忽略 |  |
| **3** | 无穷小乘以有界函数仍是无穷小 | 是无穷小 |
| **4** | 无穷小的除法要计算极限 |  |
| **5** | 等价无穷小可以互换 |  |
| **6** | 无穷小与无穷大是相对的 |  |
| **7** | 无穷小不能随意加减无穷大量 |  |

**4.4 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断一个函数是否是无穷小**

**方法**

1. 直接计算极限，判断函数值是否趋近于 0。
2. 若 ，则 是无穷小。

**典型例题**

* **例 1**：判断下列函数在 时是否是无穷小：

**解答**

1. 计算：
2. 计算：
3. 计算：

**(2) 考法 2：利用无穷小证明函数极限**

**方法**

1. 采用等价无穷小替换法（, 等）。
2. 转化成熟悉的极限形式。

**典型例题**

* **例 2**：证明：

**解答**

* 由于 （等价无穷小），所以：

**(3) 考法 3：利用无穷小比较高阶低阶**

**方法**

1. 计算 ：
   * 若极限 ，则 是比 **高阶无穷小**。
   * 若极限 ，则 和 **同阶**。
   * 若极限 ，则 是比 **低阶无穷小**。

**典型例题**

* **例 3**：判断 与 在 时的无穷小阶数。

**解答**

* 计算：
* 由于极限为 0，说明 是比 **高阶无穷小**，即：

**(4) 考法 4：等价无穷小替换法**

**方法**

1. 直接利用常见的等价无穷小（见使用注意事项）。
2. 用等价无穷小代换复杂函数的极限。

**典型例题**

* **例 4**：计算：

**解答**

* 由于 （等价无穷小），所以：

**(5) 考法 5：利用无穷小的运算性质**

**方法**

1. 采用 **无穷小的加法、乘法、数量乘法** 进行计算。
2. 若无穷小相加，阶数大的主导。

**典型例题**

* **例 5**：证明：

**解答**

* 采用 **等价无穷小**：
  + 。
* 代入：化简：

**(6) 考法 6：利用无穷小与无穷大的关系**

**方法**

1. 若 ，则 可能趋于无穷大。
2. 若 ，则 可能趋于无穷小。

**典型例题**

* **例 6**：计算：

**解答**

* 由于 远比 变化快，因此：
* 因此 是 时的无穷小。

**4.5 总结：完整的考点与考法**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **考法** | **方法** | **典型例题** |
| **考法 1** | 判断函数是否是无穷小 |  |
| **考法 2** | 利用无穷小证明极限 |  |
| **考法 3** | 比较无穷小的高低阶 |  |
| **考法 4** | 等价无穷小替换法 |  |
| **考法 5** | 利用无穷小运算性质 |  |
| **考法 6** | 无穷小与无穷大的关系 |  |

**4.4 对应练习题**

1. **判断下列函数是否是无穷小**：
   * 在 处
   * 在 处
2. **证明**：
3. **求极限**：

**5.1 知识点概念**

**(1) 无穷大的定义**

* **无穷大的基本定义**：
  + 若当 时，函数 的极限趋向无穷：则称 **是关于 的无穷大量**（Infinity）。
  + 记作：
* **特殊情况**：
  + 当 或 时，若 趋向无穷大，则称  **是关于 的无穷大量**。
* **无穷大的几何意义**：
  + 无穷大描述的是函数值在某个点附近无限增大或减小的趋势。
  + 例如：
    - 在 时趋向 ，在 时趋向 。
    - 在 时趋向 。

**(2) 无穷大的性质**

* **无穷大的基本运算性质**：
  1. **无穷大的加法**：
     + 若 ，，则：
  2. **无穷大的乘法**：
     + 若 ， 且趋向无穷，则：
  3. **无穷大的倒数**：
     + 若 ，则：
* **无穷大的重要定理**
  1. **定理 1（无穷大的加法定理）**：**两个无穷大的和仍是无穷大**。
  2. **定理 2（无穷大的乘法定理）**：**无穷大与非零有限数的乘积仍是无穷大**。
  3. **定理 3（无穷大的极限替换）**：**若 ，则 和 具有相同的无穷大趋势**。

**(3) 无穷大的比较**

* **无穷大的增长速度比较**
  + 若：则称 **比** ( g(x) **增长慢**，记作：
  + 若：则称 和 **增长速度相同**，记作：
* **常见无穷大的增长速度排序（）**
  + 其中 ，。

**(4) 无穷大与极限的关系**

* **无穷大表示极限不存在**
  + 若 ，则通常称极限不存在（但趋于无穷大）。
* **无穷大可以用于极限计算**
  + 例如：由于 远比 增长快，因此结果趋于 0。

**5.2 使用注意事项**

**(1) 无穷大不能简单当作一个确定的数**

* **错误示例**：
  + ❌
  + ✅ （但仍需明确增长速度）
* **原因**：
  + 无穷大表示的是一个“无限增大的趋势”，而不是一个确定的数。
  + **未定式（Indeterminate Forms）**：
    - （可能有界、无穷或振荡）
    - （需要比较增长速度）
    - （可能趋于有限值）

**(2) 无穷大的加法与减法**

* **相同阶的无穷大可以相加**：
  + 若 ，则：
* **较大阶的无穷大主导相加结果**：
  + 例如：
  + 因为 的增长速度远大于 ，所以 的贡献可忽略。

**(3) 无穷大的乘法**

* **两个无穷大相乘仍是无穷大**：
  + 若 ，，则：
* **但当无穷大与无穷小相乘时，需具体分析**：
  + 可能是 0，也可能是有限值，甚至可能趋向无穷：
    - 例如：
    - 但：

**(4) 无穷大的除法**

* **需要比较增长速度**：
  + 若：则 **比** ( g(x) **增长慢**。
  + 例如：
    - 说明 的增长速度远快于 。
* **常见增长速度排序（）**：
  + 其中 ，。

**(5) 无穷大的倒数**

* **若 ，则** ：
  + 例如：
* **若 ，则** ：
  + 例如：

**(6) 指数、对数和阶乘的无穷大比较**

* **指数增长比多项式增长快**：
  + 例如：
  + 说明 增长远快于 。
* **对数增长最慢**：
  + 例如：
* **阶乘增长极快**：
  + 例如：
  + 说明 的增长远快于 。

**(7) 无穷大不能直接用于极限计算**

* 直接代入可能导致未定式，需要转换计算：
  + 例如：需要分析更精确的增长率。
* 使用洛必达法则（适用于未定式 或 ）：
  + 例如：采用洛必达法则：

**5.3 总结：完整的使用注意事项**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **序号** | **注意事项** | **示例** |
| **1** | 无穷大不是确定的数 | 是未定式 |
| **2** | 无穷大的加法需要考虑增长速度 |  |
| **3** | 无穷大的乘法要考虑因子变化 |  |
| **4** | 无穷大的除法需要比较增长速度 |  |
| **5** | 无穷大的倒数趋于 0 |  |
| **6** | 指数、对数、阶乘的增长顺序 |  |
| **7** | 无穷大不能直接代入计算极限 | 需要转换或使用洛必达法则 |

**5.4 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数是否是无穷大**

**方法**

1. **直接计算极限**，如果 ，则 是无穷大。
2. **分析函数的增长趋势**，判断其是否趋于无穷。

**典型例题**

* **例 1**：判断下列函数在 时是否是无穷大：

**解答**

1. 计算：
   * 趋于无穷大。
2. 计算：
   * 也是无穷大。
3. 计算：
   * 不是无穷大，而是无穷小。

**(2) 考法 2：利用无穷大计算极限**

**方法**

1. **利用增长速度比较法**，判断极限值是否趋于无穷大或无穷小。
2. **用洛必达法则计算未定式**，特别是 和 形式。

**典型例题**

* **例 2**：计算：

**解答**

1. 直接代入，分子和分母都趋于无穷大：
2. **用洛必达法则**（对分子分母分别求导）：
3. 继续使用洛必达法则：
4. 再次使用洛必达法则：
   * 因此，极限值为 **0**。

**(3) 考法 3：比较无穷大的增长速度**

**方法**

1. **计算极限比值**：
   * 若结果为 0，说明 增长比 慢。
   * 若结果为 ，则两者增长速度相同。
   * 若结果为 ，则 增长比 快。

**典型例题**

* **例 3**：比较 和 的增长速度。

**解答**

1. 计算：
2. **洛必达法则**求导 次后：
   * 说明 的增长速度远大于 。

**(4) 考法 4：等价无穷大替换法**

**方法**

1. **利用常见等价无穷大**，替换复杂的无穷大函数。
2. **用增长速度排序法**，确定增长主导项。

**典型例题**

* **例 4**：计算：

**解答**

* 由于 （增长远慢），所以：

**(5) 考法 5：利用无穷大的运算性质**

**方法**

1. 采用 **无穷大的加法、乘法、数量乘法** 进行计算。
2. 若无穷大相加，阶数大的主导。

**典型例题**

* **例 5**：证明：

**解答**

1. **用增长速度比较法**：
2. 采用斯特林公式近似：
3. 计算比值：
4. 由于 远大于 ，所以：
   * 说明 。

**(6) 考法 6：利用无穷大与无穷小的关系**

**方法**

1. **若 ，则** 。
2. **若 ，则** 。

**典型例题**

* **例 6**：计算：

**解答**

1. 由于 （指数比多项式增长快），所以：

**5.5 总结：完整的考点与考法**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **考法** | **方法** | **典型例题** |
| **考法 1** | 判断函数是否是无穷大 |  |
| **考法 2** | 计算无穷大极限 |  |
| **考法 3** | 比较无穷大的增长速度 |  |
| **考法 4** | 等价无穷大替换 |  |
| **考法 5** | 无穷大运算 |  |
| **考法 6** | 无穷大与无穷小的关系 |  |

**5.4 对应练习题**

1. **判断下列函数是否是无穷大**：
   * 在 处
   * 在 处
2. **计算极限**：
3. **证明**：

**第五节：极限的运算法则（Limit Operations Rules）知识图谱**

**5.1 知识点概念**

**(1) 极限的四则运算法则**

* **定理 1（极限的加法法则）**：
  + 若 ，，则：
* **定理 2（极限的减法法则）**：
* **定理 3（极限的乘法法则）**：
* **定理 4（极限的除法法则）**：

**(2) 极限的保号性**

* **定理 5（极限的正负性传递）**：
  + 若 且 ，则在 的某个邻域内，存在 使得：
* **推论**：
  + 若 ，且 ，则 在邻域内保持负号。

**(3) 极限的单调性**

* **定理 6（极限的单调性）**：
  + 若在 附近，函数 和 满足：且极限均存在：则有：

**(4) 两个重要极限**

* **定理 7（ 重要极限）**：
* **定理 8（ 重要极限）**：

**5.2 使用注意事项**

**(1) 四则运算法则的适用范围**

* **四则运算法则仅适用于极限存在且有限的情况**：
  + 适用：**前提：** 和 **均为有限数**。
  + **错误情况**：

**(2) 乘法与除法的特殊情况**

* **极限乘法法则的隐患**
  + 若 且 ，则：是 **未定式**，需要进一步分析，如尝试等价变形或洛必达法则。
* **极限除法法则的前提**
  + 计算：**前提：** 。
  + 若 ，则可能属于：
    - 形式（未定式）：需要化简或使用洛必达法则。
    - 形式：需要比较增长速度或使用洛必达法则。

**(3) 除法运算时避免错误**

* **极限为零的函数不能作为除数**：
  + 例如：
    - 需要检查分母是否趋于 0，否则可能导致未定式。
* **如果分母的极限是无穷大，则整体极限为 0**
  + 例如：
    - 因为 ，所以其倒数趋于 0。

**(4) 极限的保号性适用范围**

* **极限保号性仅适用于极限值 的情况**：
  + 若：
    - 则在 附近， 也为正数。
  + **错误情况**：
    - 若 ，则不能直接判断 在邻域内的符号。

**(5) 极限的单调性**

* **单调性推理需要在整个邻域内成立**
  + 若已知：
    - 仅当极限存在且适用于整个邻域时，才能推理：

**(6) 特殊极限形式的处理**

* **未定式的处理策略**
  + **未定式类型**：

|  |  |
| --- | --- |
| 未定式形式 | 处理方法 |
|  | 变形为 或 |
|  | 用洛必达法则 |
|  | 用洛必达法则或因式分解 |
|  | 通分或有理化 |

* **无穷小和无穷大的运算**
  + 若 是无穷小，则：
  + 若 是无穷大，则：

**(7) 利用重要极限的计算技巧**

* **的应用**
  + 计算：**思路**：
    - 由于 ，所以：
* **的应用**
  + 计算：**思路**：
    - 令 ，取对数：
    - 用等价无穷小替换：
    - 所以：

**总结：完整的使用注意事项**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **序号** | **注意事项** | **示例** |
| **1** | 四则运算适用于有限极限 | 有限，才能用四则法则 |
| **2** | 乘法与除法需注意未定式 |  |
| **3** | 除数不能为 0 | 需检查分母 |
| **4** | 保号性适用于 | 不能断定符号 |
| **5** | 单调性需在整个邻域成立 | 仅局部单调不适用 |
| **6** | 未定式的处理方法 | 用洛必达 |
| **7** | 重要极限的应用 |  |

**5.3 考点与考法总结**

在极限运算中，考试常考察的类型主要集中在四则运算、极限的单调性、极限的保号性，以及重要极限的应用等方面。以下是更加完整的考点与考法总结：

**(1) 考法 1：利用四则运算计算极限**

**方法**

1. 直接代入极限值，若分母不为 0，则可以使用加、减、乘、除法直接计算。
2. 若代入后出现未定式，需要化简或使用其他方法。

**典型例题**

* **例 1**：计算：

**解答**

* 直接代入：
* **例 2**：计算：

**解答**

* 直接代入，分母为 0，出现未定式：
* 需要因式分解：
  + 约去 ，得：

**(2) 考法 2：利用极限的单调性估计极限**

**方法**

1. 构造函数的单调关系，寻找上下界限。
2. 若两个函数的极限相等，则可以推得中间函数的极限。

**典型例题**

* **例 3**：利用单调性证明：

**解答**

* 由已知不等式：
* 取极限：
* 由夹逼定理：

**(3) 考法 3：利用极限的保号性**

**方法**

1. 先计算函数的极限值，判断其正负号。
2. 根据保号性定理，判断函数在邻域内是否保持同号。

**典型例题**

* **例 4**：判断：在 附近是否恒正。

**解答**

1. 计算：
2. **由于极限值是 0，不能直接判断正负号**。
3. 需要进一步分析 在 附近的变化趋势：
   * 若 ，。
   * 若 ，。
4. **结论：** 在 附近不保持正号。

**(4) 考法 4：利用洛必达法则计算未定式**

**方法**

1. 适用于未定式 或 。
2. 对分子分母分别求导，计算极限。

**典型例题**

* **例 5**：计算：

**解答**

1. 直接代入：
   * 属于未定式。
2. **用洛必达法则**：

**(5) 考法 5：应用两个重要极限计算**

**方法**

1. 识别极限形式，转换为已知重要极限。
2. 若形式不匹配，可尝试变换或等价替换。

**典型例题**

* **例 6**：计算：

**解答**

* 由于：
* 夹逼定理：
* **例 7**：计算：

**解答**

* 设 ，取对数：
* 由于 ：
* 所以：

**总结：完整的考点与考法**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **考法** | **方法** | **典型例题** |
| **考法 1** | 直接计算四则运算极限 |  |
| **考法 2** | 估计极限范围（单调性） |  |
| **考法 3** | 利用保号性判断正负 |  |
| **考法 4** | 处理未定式（洛必达法则） |  |
| **考法 5** | 重要极限的应用 |  |
| **考法 6** | 重要极限的变形 |  |

**5.4 对应练习题**

1. **计算极限**：
2. **利用极限的单调性证明**：
   * 证明
3. **应用两个重要极限计算**：
   * 计算

**第六节：极限存在判别准则 I（夹逼准则）知识图谱**

**6.1 知识点概念**

**(1) 夹逼准则（Squeeze Theorem）**

**定理内容**

设数列 满足：

1. **从某项起，即存在 ，当 时**：
2. **两端数列极限相同，即**：

那么中间数列 也收敛于 ，即：

**适用范围**

* **用于求解难以直接计算极限的数列**。
* **特别适用于含三角函数、指数函数、对数函数等不容易求解的极限问题**。
* **如果可以构造两个已知极限的数列，将目标数列夹在中间，则目标数列极限与两端数列极限相同**。

**(2) 夹逼准则的几何直观理解**

* 设 在数轴上， 被夹在 和 之间。
* 若 和 同时收敛到 ，那么 也必须收敛到 。
* 直观地看，数列 被“逼”向 。

**(3) 夹逼准则的推论**

**推论 1：三角函数极限计算**

**证明思路**：

* 利用几何方法，构造不等式：
* 取极限可得结论。

**推论 2：无穷小乘以有界函数的极限**

若 且 （ 为常数），则：

**证明思路**：

* 取 的上界和下界：
* 由 ，两侧趋于 0，得结论。

**6.2 使用注意事项**

**(1) 必须构造两个已知极限相同的数列**

* 夹逼准则的关键在于 **找到两个极限相同的数列** 和 ，使得：并且：
* 若无法找到这样一对数列，则无法直接使用夹逼定理。

**错误示例**

* 若已知：但：**则不能使用夹逼定理**，因为左右两侧数列的极限不同，无法保证 也收敛。

**(2) 上下界数列必须收敛**

* **若 或 之一发散（趋向无穷或震荡），则夹逼定理不适用**。
* 例如：但：
  + 由于 **两端发散**，不能使用夹逼准则来确定 的极限。

**(3) 目标数列不能比已知数列增长得更快**

* 夹逼定理只适用于被夹逼的数列 **不超过** 和 的增长速度。
* 如果 在某一方向上增长得比 还快，则可能无界，不能使用夹逼准则。

**错误示例**

* 设：
  + 左侧趋向 1，右侧趋向 2，因此不能确定 的极限。

**(4) 适用于难以直接求解的极限**

* 夹逼定理适用于 **无法直接计算** 的极限，如涉及三角函数、指数函数、对数函数的情况。
* 例如：
  + 由于 ，所以：
  + 取极限：
  + 由夹逼定理得：

**(5) 适用于证明无穷小的极限**

* **如果一个数列被两个趋于 0 的数列夹住，那么它本身也趋于 0**。
* 例如：
  + 由于：
  + 所以：

**6.3 考点与考法总结（详细版）**

**(1) 典型考法**

考试中，关于夹逼定理的考察方式主要有三种：

**考法 1：利用夹逼定理计算极限**

**方法**

1. 构造夹逼不等式：
2. 计算 和 的极限。
3. 由夹逼定理推得 的极限。

**典型例题**

* **例 1**：证明：

**解答**

1. 由于 ，两侧乘以 ：
2. 取极限：
3. 由夹逼定理：

**考法 2：利用夹逼定理计算三角函数极限**

**方法**

1. 通过几何方法或不等式构造夹逼关系。
2. 计算上下界的极限并利用夹逼定理。

**典型例题**

* **例 2**：证明：

**解答**

1. 由几何证明方法：
2. 取极限：
3. 由夹逼定理：

**考法 3：利用夹逼定理计算无穷小极限**

**方法**

1. 找到一个数列被两个趋于 0 的数列夹住。
2. 计算极限并利用夹逼定理。

**典型例题**

* **例 3**：计算：

**解答**

1. 由于：
2. 计算两端极限：
3. 由夹逼定理：

**6.4 对应练习题**

1. **利用夹逼定理计算极限**：
   * 证明：
   * 证明：
2. **利用夹逼定理计算三角函数极限**：
   * 证明：

**第六节：极限存在判别准则 II（单调有界准则）知识图谱**

**6.1 知识点概念**

**(1) 单调数列的定义**

**单调递增数列**

如果数列 满足：

则称其为 **单调递增数列**。

**单调递减数列**

如果数列 满足：

则称其为 **单调递减数列**。

**单调数列**

* **单调递增或单调递减的数列统称为** **单调数列**。
* **单调数列可能有界或无界**，但**只有单调且有界的数列才能保证收敛**。

**(2) 数列的有界性**

**上界与下界**

* **上界**：如果存在数 使得对所有的 都有：则称 是该数列的 **上界**，该数列 **有上界**。
* **下界**：如果存在数 使得对所有的 都有：则称 是该数列的 **下界**，该数列 **有下界**。

**有界数列**

* 如果一个数列既有上界又有下界，则称其为 **有界数列**，即：
  + 若数列仅有上界但无下界（或仅有下界但无上界），则不能称为有界数列。

**(3) 单调有界准则的数学表达**

**定理内容**

* **定理（单调有界准则）**：
  + 如果数列 **单调且有界**，则该数列必定收敛。
  + 换句话说：
    - 若 **单调递增** 且 **有上界**，则其极限存在。
    - 若 **单调递减** 且 **有下界**，则其极限存在。

**推论**

1. **有界数列不一定收敛，但单调有界数列一定收敛**。
2. **单调递增有界数列的极限是其上确界**。
3. **单调递减有界数列的极限是其下确界**。

**(4) 单调有界准则的推论**

**推论 1：单调递增有界数列的极限**

* 若 单调递增且有上界 ，则：（即该数列的极限是其上确界）

**推论 2：单调递减有界数列的极限**

* 若 单调递减且有下界 ，则：（即该数列的极限是其下确界）

**\**6.2 使用注意事项***

**(1) 数列必须同时满足\*\*“单调”和“有界”两个条件\*\***

* **只有单调递增且有上界，或单调递减且有下界的数列，才能保证收敛**。
* 如果仅满足一个条件，而不满足另一个条件，则无法使用单调有界准则。

**错误示例**

* **有界但不单调的数列**：
  + 该数列的取值在 之间，有界。
  + 但由于它在正负之间不断振荡，并非单调，**不能保证收敛**。
* **单调但无界的数列**：
  + 该数列是 **单调递增** 的，但它**没有上界**，因此发散至无穷大，极限不存在。
* **总结**：
  + **有界数列不一定收敛**（可能振荡）。
  + **单调数列不一定收敛**（可能无界）。
  + **单调有界的数列一定收敛**。

**(2) 单调有界准则可以用于证明数列收敛，但不能计算极限**

* **单调有界准则只能保证极限存在，不能给出极限的具体值**。
* 如果需要计算极限，需要结合其他方法，如**确界定义、夹逼准则或洛必达法则**。

**正确示例**

* 证明：收敛：
  + **证明单调性**：
    - 计算：
    - 该数列是 **单调递增**。
  + **证明有界性**：
    - 由于：
    - 说明该数列有上界 。
  + **由单调有界准则可知**，该数列收敛，但该准则**无法直接得出极限值**，仍需计算：

**(3) 有界不等于收敛，单调不等于有界**

* 仅仅满足“有界”或“单调”之一，不能保证收敛。

**错误示例**

1. 数列：
   * 该数列的值在 之间，有界，但不是单调的，所以 **不一定收敛**。
2. 数列：
   * 该数列是单调递增的，但没有上界，因此发散。

**(4) 收敛极限等于上确界或下确界**

* **单调递增有界数列的极限是其上确界**。
* **单调递减有界数列的极限是其下确界**。

**正确示例**

* 设：
  + 该数列 **单调递增**，有界（上界为 1）。
  + 其极限等于 **上确界 1**。
* 设：
  + 该数列 **单调递减**，有界（下界为 0）。
  + 其极限等于 **下确界 0**。

**6.3 考点与考法总结（详细版）**

在考试中，单调有界准则主要考察以下几类问题：

**(1) 考法 1：利用单调有界准则判断数列是否收敛**

**方法**

1. **先证明数列是单调的**：
   * 计算 ，若恒正则单调递增，恒负则单调递减。
2. **再证明数列有界**：
   * 若数列单调递增，则寻找上界；
   * 若数列单调递减，则寻找下界。
3. **由单调有界准则得出收敛性**。

**典型例题**

* **例 1**：判断数列：是否收敛，并求极限。

**解答**

1. **单调性**：
   * 计算：
   * 所以该数列 **单调递增**。
2. **有界性**：
   * 由于：
   * 该数列有上界 。
3. **结论**：
   * 由 **单调有界准则**，该数列收敛，且：

**(2) 考法 2：利用单调有界准则证明极限存在**

**方法**

* 适用于一些极限计算较复杂的数列，只需要证明极限存在，而不求具体值。

**典型例题**

* **例 2**：设数列：证明该数列收敛。

**解答**

1. **证明单调递增**：
   * 计算：
   * 由于 ，则 ，所以 ，数列 **单调递增**。
2. **证明有界性**：
   * 由于：
   * 可知数列有上界 。
3. **结论**：
   * 由 **单调有界准则**，该数列收敛。

**6.4 对应练习题**

1. **利用单调有界准则判断数列收敛性**：
   * 证明：是否收敛，并求极限。
2. **计算数列的极限**：
   * 计算：

**6.4 对应练习题**

1. **利用单调有界准则判断数列收敛性**：
   * 证明：是否收敛，并求极限。
2. **计算数列的极限**：
   * 计算：

由于所有文件都已加载，我可以直接开始分析 **第七节** 的内容。请稍等，我将按照我们之前的模式整理 **第七节** 的知识点、注意事项、考点考法以及练习题！🚀

**第七节：无穷小量与无穷大量（Infinitesimals and Infinities）知识图谱**

**7.1 知识点概念**

**(1) 无穷小量的定义**

* **无穷小（Infinitesimal）**：
  + 如果 ，则称 在 时为 **无穷小量**，记作：
  + 例如：因此 在 时是无穷小。
* **无穷小的分类**：
  + **高阶无穷小**：如果 ，则 是比 高阶的无穷小，记作：
  + **等价无穷小**：如果 ，则称 和 是等价无穷小，记作：

**(2) 无穷大量的定义**

* **无穷大量（Infinity）**：
  + 如果 ，则称 在 时为 **无穷大量**，记作：
  + 例如：因此 在 时是无穷大量。

**(3) 无穷小与无穷大的关系**

* 无穷大量与无穷小量互为倒数：
  + 设 是无穷小量（），则 是无穷大量（）。
  + 例如：

**(4) 无穷小的性质**

1. **无穷小的加法**：
   * 两个无穷小的和仍是无穷小：
2. **无穷小的乘法**：
   * 无穷小的乘积仍是无穷小：
3. **无穷小的比较**：
   * 若 ，则：

**(5) 等价无穷小替换**

* **等价无穷小**是某些函数在极限运算中的近似表达：
  + （当 ）
  + （当 ）
  + （当 ）

**7.2 使用注意事项**

**(1) 无穷小的替换必须满足等价关系**

* **无穷小的等价替换仅适用于极限计算，不适用于一般代数运算。**
* 例如：但**不能直接将** 替换为 在所有运算中使用。
  + **正确使用：**
  + **错误使用：**

**常见的等价无穷小**

|  |  |
| --- | --- |
| 形式 | 等价无穷小（当 时） |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**(2) 无穷小量的阶次比较**

* **无穷小量之间有阶次之分，高阶无穷小比低阶无穷小更趋近于 0。**
* 例如：
* **性质：**
  + 若 ，则：
  + 例如：

**(3) 无穷小的运算规则**

* **无穷小的加法：**
  + 若 和 都是无穷小，则它们的和仍然是无穷小：
* **无穷小的乘法：**
  + 若 和 都是无穷小，则它们的乘积是更高阶的无穷小：
* **无穷小的倒数可能变为无穷大量：**
  + 若 是无穷小（趋近于 0），则 可能趋向无穷大：

**(4) 无穷小与无穷大的互为倒数**

* **如果 是无穷小（），则 是无穷大。**
* 例如：

**典型错误**

* 不能随意取倒数：
  + 仅在计算极限时才能进行转换。

**(5) 无穷小代换在求极限时的使用**

* 在极限计算中，低阶无穷小可以被高阶无穷小忽略。
* 例如：
  + 由于 ：
  + 所以极限为：

**(6) 无穷大量的运算规则**

* **无穷大量的加法**
  + 若 且 ，则：
* **无穷大量的乘法**
  + 若 且 ，则：
* **无穷大量的倒数是无穷小**
  + 若 ，则：

**7.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用等价无穷小求极限**

**方法**

1. 识别被考察的函数是否可以表示成等价无穷小量。
2. 替换无穷小量，简化极限表达式。
3. 计算极限。

**典型例题**

* **例 1**：计算：

**解答**

* 由于 （当 时）：

**易错点**

* 不能直接写：**仅在极限计算中才能使用等价无穷小替换。**

**(2) 考法 2：利用无穷小与无穷大的倒数关系求极限**

**方法**

1. 确定无穷小量 。
2. 取其倒数 ，转化为无穷大量。
3. 计算极限。

**典型例题**

* **例 2**：计算：

**解答**

* 由于 是无穷小量（当 时），所以：**结论**：极限值为 。

**易错点**

* 不能错误地写成：**倒数关系会改变无穷小与无穷大的趋势！**

**(3) 考法 3：利用洛必达法则计算未定式**

**方法**

1. 识别未定式，如 或 。
2. 使用洛必达法则，对分子分母分别求导。
3. 计算极限。

**典型例题**

* **例 3**：计算：

**解答**

* 由于直接代入得：
  + 这是未定式，可以使用洛必达法则：

**易错点**

* 不能直接写：
  + 需要严格使用等价无穷小或洛必达法则。

**(4) 考法 4：无穷小量的高阶比较**

**方法**

1. 判断两个无穷小量 和 的大小关系。
2. 计算：
   * 若结果为 0，说明 是比 高阶的无穷小。
   * 若结果为有限常数，说明 与 为等价无穷小。
   * 若结果为 ，说明 不是无穷小，或者是低阶无穷小。

**典型例题**

* **例 4**：判断 和 的高阶关系。

**解答**

* 计算：**结论**： 是比 高阶的无穷小。

**易错点**

* 不能直接比较大小，需要使用极限法则进行计算。

**(5) 考法 5：利用无穷大量的运算规则**

**方法**

1. 识别无穷大量的计算规则：
2. 使用无穷大量的计算方法求解。

**典型例题**

* **例 5**：计算：

**解答**

* 直接代入得：
  + 这是未定式，可以使用洛必达法则：
* **结论**：极限值为 0。

**易错点**

* 不能直接使用等价无穷小替换，需要使用洛必达法则或增长速度比较。

**(6) 考法 6：利用泰勒展开计算无穷小**

**方法**

1. 识别需要展开的函数（如 、、）。
2. 使用泰勒展开，截取适当的项进行近似计算。

**典型例题**

* **例 6**：计算：

**解答**

* 由于 的泰勒展开：
  + 代入：
  + 所以：

**易错点**

* 不能直接近似为 ，需要截取高阶项进行计算。

**7.4 对应练习题**

1. **计算极限**：
   * 计算：
   * 计算：
2. **判断无穷小的阶数**：
   * 判断 和 的高阶关系。

**第八节：函数的连续性（Function Continuity）知识图谱**

**8.1 知识点概念**

**(1) 函数连续的定义**

**定义：函数在一点处的连续性**

设函数 在某点 附近有定义，如果：

1. **存在**；
2. **存在**；
3. **极限值等于函数值**：则称函数 在 **处连续**。

**(2) 左连续与右连续**

**定义**

* 若：则称 在 **左连续**。
* 若：则称 在 **右连续**。

**应用**

* 如果 在 **既左连续又右连续**，则在 **处连续**。
* 若仅满足左连续或右连续，函数在该点**不连续**。

**(3) 可去间断点与连续性**

* 若函数在 处的极限存在：但：
  + 则称 处存在 **可去间断点**。
* 可通过 **重新定义函数值** 使其变得连续。

**(4) 常见基本函数的连续性**

|  |  |
| --- | --- |
| **函数类型** | **连续性情况** |
| **多项式函数** | **在整个定义域内连续** |
| **指数函数** | **在整个定义域内连续** |
| **对数函数** | **在定义域 内连续** |
| **三角函数** | **在整个实数范围内连续** |
| **反三角函数** | **在定义域内连续** |
| **分段函数** | **需逐段分析连续性** |

**8.2 使用注意事项**

1. **检查极限存在性**：
   * 若 **不存在**，则函数在 处 **必不连续**。
2. **检查函数值是否定义**：
   * 若 **未定义**，则 处**不连续**。
3. **检查极限值是否等于函数值**：
   * 若 ，则 **处不连续**。
4. **可去间断点可通过补充定义消除**：
   * 若 ，但 ，可改定义使 使其连续。

**8.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数在一点的连续性**

**方法**

1. 计算左极限和右极限，检查是否相等。
2. 计算函数值，检查是否存在且等于极限。
3. 若满足定义，则连续，否则间断。

**典型例题**

* **例 1**：判断函数：在 处的连续性。

**解答**

1. 计算左右极限：
2. 由于左右极限不相等，函数在 **不连续**。

**(2) 考法 2：利用可去间断点构造连续函数**

**方法**

1. 计算极限 ，若极限存在但 ，则函数在该点 **有可去间断点**。
2. 通过定义 使其变为连续函数。

**典型例题**

* **例 2**：若：使其在 处连续，求 。

**解答**

1. 计算极限：
2. 使其连续，令 ，得：

**8.4 对应练习题**

1. **判断函数的连续性**：
   * 判断：在 处是否连续。
2. **利用可去间断点构造连续函数**：
   * 设：使 在 处连续，求 。

**第八节：函数的间断点（Discontinuities of Functions）知识图谱**

本部分系统整理 **函数的间断点**，包括：

1. **知识点概念**
   * 间断点的定义
   * 间断点的分类：
     + 可去间断点
     + 跳跃间断点
     + 无穷间断点
2. **使用注意事项**
3. **考点与考法总结**
4. **对应练习题（含完整题目）**

**8.1 知识点概念**

**(1) 间断点的定义**

* **间断点（Discontinuity）**：
  + 若函数 在某点 处 **不连续**，即：
    - **不存在**，或者
  + 则称 为 **间断点**。

**(2) 间断点的分类**

* 根据间断点的不同特征，将其分为三类：

**(a) 可去间断点（Removable Discontinuity）**

* **定义**：
  + 如果 在 处的左右极限相等：但：
  + 则称 为 **可去间断点**。
* **处理方法**：
  + 重新定义 ，使其在该点连续。
* **示例**：
  + 计算极限：
  + 但 ，所以 处为可去间断点。
  + **若改定义 ，则函数在 处连续。**

**(b) 跳跃间断点（Jump Discontinuity）**

* **定义**：
  + 若函数在 处的左右极限 **不相等**，即：
  + 则称 处为 **跳跃间断点**。
* **特点**：
  + **函数值可能存在，也可能不存在**。
  + **无法通过修改函数值来消除跳跃间断点**。

**(c) 无穷间断点（Infinite Discontinuity）**

* **定义**：
  + 若函数在 处至少有一个方向上的极限趋于无穷：
  + 则称 处为 **无穷间断点**。

**8.2 使用注意事项**

1. **检查左右极限是否存在**：
   * 若 ，则该点是跳跃间断点。
2. **检查极限是否趋于无穷**：
   * 若极限趋于无穷，该点是无穷间断点。
3. **检查函数值是否可定义**：
   * 若极限存在但函数值不同，该点为可去间断点，可重新定义函数值使其连续。

**第八节：函数的间断点（Discontinuities of Functions）知识图谱**

**8.1 知识点概念**

**(1) 间断点的定义**

* **间断点（Discontinuity）**：
  + 若函数 在某点 处 **不连续**，即：
    - **不存在**，或者
  + 则称 为 **间断点**。

**(2) 间断点的分类**

* 根据间断点的不同特征，将其分为三类：

**(a) 可去间断点（Removable Discontinuity）**

* **定义**：
  + 如果 在 处的左右极限相等：但：
  + 则称 为 **可去间断点**。
* **处理方法**：
  + 重新定义 ，使其在该点连续。
* **示例**：
  + 计算极限：
  + 但 ，所以 处为可去间断点。
  + **若改定义 ，则函数在 处连续。**

**(b) 跳跃间断点（Jump Discontinuity）**

* **定义**：
  + 若函数在 处的左右极限 **不相等**，即：
  + 则称 处为 **跳跃间断点**。
* **特点**：
  + **函数值可能存在，也可能不存在**。
  + **无法通过修改函数值来消除跳跃间断点**。

**(c) 无穷间断点（Infinite Discontinuity）**

* **定义**：
  + 若函数在 处至少有一个方向上的极限趋于无穷：
  + 则称 处为 **无穷间断点**。

**8.2 使用注意事项**

1. **检查左右极限是否存在**：
   * 若 ，则该点是跳跃间断点。
2. **检查极限是否趋于无穷**：
   * 若极限趋于无穷，该点是无穷间断点。
3. **检查函数值是否可定义**：
   * 若极限存在但函数值不同，该点为可去间断点，可重新定义函数值使其连续。

**8.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断间断点的类型**

**方法**

1. 计算左右极限，判断是否相等。
2. 检查函数值是否存在，是否等于极限。
3. 根据结果判断间断点类型。

**典型例题**

* **例 1**：判断函数：在 处的间断性。

**解答**

1. 计算左右极限：
2. 由于左右极限相等，检查函数值：
3. **结论**：函数在 处 **连续**。

**8.4 对应练习题**

1. **判断函数的间断点类型**：
   * 设：判断 处的间断性，并给出类型。
2. **利用可去间断点构造连续函数**：
   * 设：使 在 处连续，求 。
3. **分析无穷间断点**：
   * 设：判断 处的间断性。

由于所有内容都已加载，我将按照我们之前的知识图谱模式，详细分析下一章节的知识点。请稍等，我会系统整理并给出完整的概述、使用注意事项、考点考法以及对应练习题！🚀

**第九节：函数的导数与微分（Derivative and Differential of Functions）知识图谱**

**9.1 知识点概念**

**(1) 导数的定义**

* **导数的极限定义**：
  + 设函数 在点 处有定义，若极限：存在，则称 在 处可导， 称为  **在 处的导数**。
* **左导数与右导数**：
  + 左导数：
  + 右导数：
  + 若 ，则 存在。

**(2) 导数的几何意义**

* **导数表示切线的斜率**：
  + 在曲线 上，点 处的切线斜率就是导数：
* **直线的方程**：
  + 过 的切线方程：
* **几何解释**：
  + 若 ，则函数在 处 **单调递增**；
  + 若 ，则函数在 处 **单调递减**；
  + 若 ，则 可能是极值点。

**(3) 导数的物理意义**

* **速度与加速度**：
  + 若 表示物体的位移，则速度 ：
  + 加速度 ：
* **其他物理量**：
  + 变化率：导数可表示变化率，如温度变化率、电流变化率等。

**(4) 常见函数的导数**

|  |  |
| --- | --- |
| 函数 | 导数 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**(5) 微分的定义与几何意义**

* **微分的定义**：
  + 若函数 在 处可导，则称：为 在 处的微分。
* **微分的几何意义**：
  + 微分 是 **切线的增量**，与函数的实际增量 近似：

**9.2 使用注意事项**

在使用 **导数与微分** 进行计算时，需要特别注意以下关键问题，以避免错误理解和误用。

**(1) 可导一定连续，连续不一定可导**

* **定理**：
  + 若函数 在某点 **可导**，则 **在 处一定连续**。
  + 但如果 **在 处连续，并不意味着可导**。

**错误示例**

* 设函数：
  + 在 处：
  + 由于左右导数不相等， **在 处不可导**，但该点**是连续的**。

**(2) 左右导数必须相等才能保证可导**

* 若 ，则 **在 处不可导**。

**错误示例**

* 设：
  + 计算导数：
  + 因此 在 **可导**，因为左右导数相等。

**(3) 可导性与局部线性近似**

* 若函数在 处可导，则可用 **线性近似**：
  + 这在数值计算中非常有用，如 **微分近似计算**。

**正确示例**

* 计算 的近似值：
  + 设 ，在 处有：
  + 近似：

**(4) 绝对值、分段函数的可导性**

* **绝对值函数在拐点不可导**：
  + 在 处不可导。
* **分段函数在分界点需要检查左右导数是否相等**。

**错误示例**

* 判断：在 处是否可导。
* 计算左右导数：
* 由于左右导数不相等，函数在 处不可导。

**(5) 高阶导数的存在性**

* **若 的一阶导数 存在，但不可导，则二阶导数不存在**。
* **若 连续，则 可微**（称为 级函数）。

**正确示例**

* 设：
  + 计算导数：
  + 计算二阶导数：
  + 在 处， 不存在，因此 在 处**不可微**。

**(6) 微分的几何意义**

* **微分 是 的切线增量**：
  + 通过微分 ，可计算小增量下的近似值。
  + ，但不完全相等。

**正确示例**

* 设：
  + 计算 ：
  + 若 且 ：

**(7) 导数不存在的情况**

* **尖点**：
  + 如 在 处无导数。
* **跳跃间断点**：
  + 若函数在 处有跳跃间断点，则不可导。
* **无穷间断点**：
  + 若函数在 处趋于无穷，则不可导。

**(8) 常见考试易错点**

|  |  |
| --- | --- |
| **错误理解** | **正确做法** |
| 认为连续一定可导 | 需检查左右导数是否相等 |
| 直接使用 计算微分 | 需使用 |
| 计算导数时忘记检查可导性 | 需先判断函数的连续性和左右导数 |
| 误认为所有导数均可求极限 | 若二阶导数不存在，则可能不可微 |

**9.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数定义求导**

**方法**

1. **使用导数定义公式**：
2. **代入函数并计算极限**。

**典型例题**

* **例 1**：求函数 的导数。

**解答**

1. 代入定义：
2. 展开并计算：

**(2) 考法 2：利用左右导数判断可导性**

**方法**

1. **计算左右导数**：
   * 若 ，则 在 处可导；
   * 若 ，则不可导。

**典型例题**

* **例 2**：判断函数 在 处是否可导。

**解答**

1. **计算左导数**：
2. **计算右导数**：
3. **结论**：
   * 由于 ，函数在 处**不可导**。

**(3) 考法 3：计算曲线的切线方程**

**方法**

1. **计算导数，得到切线斜率**：
2. **使用点斜式方程**：

**典型例题**

* **例 3**：求函数 在 处的切线方程。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算点 处的切线方程：
3. **结论**：

**(4) 考法 4：利用微分近似计算函数增量**

**方法**

1. 计算微分：
2. 近似计算函数增量：

**典型例题**

* **例 4**：用微分近似计算 。

**解答**

1. 设 ，则：
2. 取 ，：
3. 近似值：

**(5) 考法 5：二阶导数与凹凸性**

**方法**

1. **计算二阶导数**：
2. **判断凹凸性**：
   * 若 ，函数在该区间**上凸**（凸向上）。
   * 若 ，函数在该区间**下凸**（凸向下）。

**典型例题**

* **例 5**：判断函数 的凹凸性。

**解答**

1. 计算二阶导数：
2. 解 ：
3. **判断凹凸性**：
   * 若 ，则 （下凸）。
   * 若 ，则 （上凸）。

**(6) 考法 6：利用洛必达法则计算未定式**

**方法**

1. 识别未定式，如 或 。
2. 使用洛必达法则，对分子分母分别求导：

**典型例题**

* **例 6**：计算：

**解答**

1. 直接代入：属于未定式。
2. 使用洛必达法则：

**9.4 对应练习题**

1. **使用定义求导**：
   * 计算：的导数。
2. **计算切线方程**：
   * 计算 在 处的切线方程。
3. **计算微分近似**：
   * 计算 在 附近的微分近似。

**第十节：有界性与最大最小值定理（Boundedness and Extreme Value Theorem）知识图谱**

**\**10.1 知识点概念***

**(1) 函数的有界性**

* **定义**：
  + 若存在常数 ，使得对定义域内所有 ，都有：
  + 则称 **有界**，否则称其 **无界**。
* **分类**：
  + **上界**：若 成立，则称 **有上界**。
  + **下界**：若 成立，则称 **有下界**。
  + **无界函数**：若函数的取值可以任意大或小，则称其**无界**。
* **示例**：
  + 在整个实数集上 **有界**，且 。
  + 在 上 **无上界**，但有下界 0

**(2) 最大值与最小值**

* **定义**：
  + 若 在区间 内存在 使得：

且对某个 ：

* + - 则称 为**最大值**， 为**最大值点**。
  + 类似地，若存在 使得：

且存在 使得：

* + - 则称 为**最小值**， 为**最小值点**。
* **局部极值与全局极值的区别**：
  + **局部极值**：在某个小区间内是最大或最小的值。
  + **全局极值**：在整个区间内是最大或最小的值。

**(3) 最大最小值定理**

* **定理内容（极值存在定理）**：
  + 若函数 在 **闭区间 内连续**，则 **必在 上取得最大值和最小值**。
  + 即存在 使得：
* **推论**：
  + 最大值和最小值可以出现在 **端点** 或 **区间内的驻点**。
* **示例**：
  + 设 在区间 上：
    - 在 处取最大值 ；
    - 在 处取最小值 。

**10.2 使用注意事项**

1. **必须是闭区间**：
   * 若区间是开区间，如 ，可能不存在最大或最小值。
   * 例如， 在 上无最小值。
2. **必须连续**：
   * 若 在区间内不连续，则可能无最大或最小值。
   * 例如：在 上无最大值。
3. **最大值最小值可在端点取到**：
   * 需检查端点值 和 。
4. **驻点不一定是极值点**：
   * 需比较端点与驻点处的函数值。

**10.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数是否有界**

**方法**

1. 计算函数在区间内的值域范围，判断是否有界。
2. 若无界，则说明**至少有一个方向趋于无穷**。

**典型例题**

* **例 1**：判断函数：在 上是否有界。

**解答**

1. 计算极限：
2. 由于 在 处趋于无穷，因此在 上无界。

**(2) 考法 2：计算最大最小值**

**方法**

1. 计算驻点：解 。
2. 计算端点值 和 。
3. 比较驻点值和端点值，确定最大值和最小值。

**典型例题**

* **例 2**：求函数 在 上的最大最小值。

**解答**

1. 计算导数：
2. 解方程：
3. 计算函数值：
4. 结果：
   * 最大值：（在 和 处）。
   * 最小值：（在 处）。

**10.4 对应练习题**

1. **判断函数是否有界**：
   * 证明 在 内是否有界。
2. **计算最大最小值**：
   * 求 在 上的最大最小值。
3. **应用最大最小值定理**：
   * 证明 在 上有最大值和最小值，并求出值。

**第十节：零点定理和介值定理（Root Theorem and Intermediate Value Theorem）知识图谱**

**10.1 知识点概念**

**(1) 零点定理**

**定义**

* **零点定理（Bolzano’s Theorem）**：
  + 若函数 **在闭区间 内连续**，且满足：
    - 即 和 符号相反，则**至少存在一点** ，使得：

**几何意义**

* **零点定理表明**：在闭区间上连续的函数，如果其端点值异号，则函数曲线**必定穿过横轴**，即在该区间内至少有一个零点。

**示例**

* 设：
  + 计算：
  + 因为 ，所以存在 使得 。
  + 实际上，零点为 。

**(2) 介值定理**

**定义**

* **介值定理（Intermediate Value Theorem, IVT）**：
  + 若函数 在闭区间 上**连续**，且 ，则对于任意数 **介于 与 之间**，必定存在 使得：[  
    f(c) = k

**几何意义**

* **介值定理表明**：连续函数的曲线不会跳跃，任意两个函数值之间的所有值，函数必然取到。

**示例**

* 设：
  + 计算：
  + 由于 ，根据介值定理，存在 使得：

**10.2 使用注意事项**

1. **函数必须在区间内连续**
   * 若 **不连续**，零点定理与介值定理**无法保证结论成立**。
   * 例如：
     + 在 上 ，，但 在 处不连续，**无法保证存在零点**。
2. **零点定理不提供零点的具体位置**
   * 它只能**保证零点的存在**，但无法直接计算零点的值，需要借助数值方法（如二分法）。
3. **介值定理适用于任意值**
   * 介值定理不仅适用于零点，还可以证明函数取到任意介于 和 之间的值。

**10.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用零点定理证明零点的存在**

**方法**

1. 计算 和 。
2. 检查 是否成立。
3. 结论：存在 使 。

**典型例题**

* **例 1**：证明 在 上至少有一个零点。

**解答**

1. 计算函数值：
2. 由于 ，根据零点定理， 在 内至少有一个零点。

**(2) 考法 2：利用介值定理证明方程可解**

**方法**

1. 计算 和 。
2. 选取某个 使 或 。
3. 结论：存在 使 。

**典型例题**

* **例 2**：证明方程 在 内至少有解。

**解答**

1. 设 ，计算：
2. 由于 ，，根据零点定理，方程在 内有解。

**(3) 考法 3：结合数值方法逼近零点**

**方法**

1. **二分法**：
   * 设 。
   * 取中点 ，计算 。
   * 若 ，则 即为零点；
   * 若 ，则令 ；
   * 若 ，则令 。
   * 反复迭代，逐渐收敛到零点。

**典型例题**

* **例 3**：用二分法求解 在 内的近似解（精确到 ）。

**解答**

* 计算：
  + ，。
  + 取 ，计算 ，重复迭代至精度达到 。

**10.4 对应练习题**

1. **利用零点定理证明零点存在**：
   * 证明 在 上至少有解。
2. **利用介值定理证明方程可解**：
   * 证明 在 内有解。

**第十节：一致连续性（Uniform Continuity）知识图谱**

**10.1 知识点概念**

**(1) 一致连续性的定义**

* **一般连续性（Pointwise Continuity）**：
  + 若函数 在点 处满足：
  + 则称 在 处 **连续**。
* **一致连续性（Uniform Continuity）**：
  + 若在区间 上，**存在同一个** ，使得对所有 ：
  + **无论 选在哪里， 都相同**，则称 **在 上一致连续**。

**(2) 一致连续性与一般连续性的区别**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **性质** | **一般连续性** | **一致连续性** |
| **定义** | 仅对单个点成立 | 对整个区间成立 |
| **的取法** | 依赖于具体点 | 适用于所有 |
| **适用范围** | 任意函数 | 受区间影响 |
| **极端情况** | 可能随 变大， 变小 | 不随 变化 |

**(3) 有界闭区间上连续函数的一致连续性定理**

**定理内容**

* 若 **在闭区间 上连续**，则 在 **上一致连续**。

**推论**

* **连续函数在有界闭区间上一致连续，但开区间不一定一致连续**。
* 例如：
  + 在 上连续，但不一致连续（因为 时，变化趋于无穷大）。
  + 在 上一致连续。

**(4) 常见函数的一致连续性分析**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **函数** | **定义域** | **一致连续性** |
|  |  | **一致连续** |
|  |  | **不一致连续**（因为 时，变化速率变大） |
|  |  | **一致连续**（因为 的变化被限制在 [-1,1] 内） |
|  |  | **不一致连续**（靠近 0 时，变化趋于无穷大） |

**10.2 使用注意事项**

1. **一致连续函数必然连续，连续函数不一定一致连续**：
   * **在 连续，但不一致连续**，因为靠近 0 时变化过快。
2. **在无界区间上，连续函数不一定一致连续**：
   * 例如 在 一致连续，但在 上不一致连续。
3. **一致连续性与微分关系密切**：
   * 若 **在区间上可微，且导数有界**，则 一致连续。
   * 例如 在 上一致连续，因为 有界。

**10.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数是否一致连续**

**方法**

1. 检查函数是否在闭区间上连续：
   * 若是，则**必然一致连续**（定理）。
2. 若函数在开区间上连续，需进一步检查：
   * 计算 的变化速率，是否在整个区间内保持稳定。

**典型例题**

* **例 1**：判断 是否在 和 上一致连续。

**解答**

1. 在 上， 连续，且有界，因此一致连续。
2. 在 上， 导数为 ，随着 ，变化速率变大，因此不一致连续。

**(2) 考法 2：利用一致连续性证明极限交换**

**方法**

1. 若 在区间上一致连续，可交换极限：
2. 若 仅一般连续，则极限交换可能不成立。

**典型例题**

* **例 2**：设 ，证明其极限与一致连续性关系。

**解答**

1. 计算：
2. 由于 在 上一致连续，可交换极限：

**10.4 对应练习题**

1. **判断一致连续性**：
   * 判断 在 和 上是否一致连续。
2. **利用一致连续性证明极限交换**：
   * 证明 在 上一致连续，并交换极限。

**第二章第一节：导数的定义（Definition of Derivative）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 变化率的基本概念（引例）**

* **平均变化率（Average Rate of Change）**
  + 设 是一个函数，给定区间 ，函数值的增量为：
  + 定义 **平均变化率** 为：
  + 物理意义：
    - **直线运动**中表示平均速度：
    - **经济学**中表示收益率的变化速率。

**(2) 导数的定义**

* **导数的极限定义**
  + 设函数 在某点 附近有定义，若极限：存在，则称 在 处**可导**， 称为 \* *在 处的*。
* **导数的几种记法**
  + **拉格朗日记号**（Lagrange notation）：
  + **莱布尼茨记号**（Leibniz notation）：
  + **牛顿记号**（Newton notation）：（主要用于物理）
* **左导数与右导数**
  + 左导数：
  + 右导数：
  + 若 ，则 存在。

**(3) 常见函数的导数计算**

* **基本函数的导数**

|  |  |
| --- | --- |
| 函数 | 导数 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**2.2 使用注意事项**

1. **导数存在性依赖于极限存在性**
   * 若 不存在，则函数在该点不可导。
   * 例如：在 处不可导。
2. **可导一定连续，但连续不一定可导**
   * **可导函数一定连续**，但反之不成立。
   * 例如：在 处**连续但不可导**。
3. **端点不可导**
   * 若 是定义域的端点，则无法取 或 ，因此端点通常不可导。
4. **计算导数时，注意分段函数的不同情况**
   * 例如：
   * 需分别计算左导数和右导数。

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数定义求导**

**方法**

1. **使用导数定义公式**：
2. **代入函数并计算极限**。

**典型例题**

* **例 1**：求函数 的导数。

**解答**

1. 代入定义：
2. 展开并计算：

**2.4 对应练习题**

1. **使用定义求导**：
   * 计算：的导数。
2. **判断函数是否可导**：
   * 判断 在 处是否可导，并计算左导数和右导数。
3. **计算特殊点的导数**：
   * 计算：在 处的导数，并判断可导性。

**第二章第一节：导数的几何意义（Geometric Meaning of Derivative）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 导数与切线斜率**

* **几何解释**
  + 设函数 的曲线 在某点 处可导，则：
  + **几何意义**：
    - 表示**曲线在 处的切线斜率**。
    - 直观来看，导数衡量了曲线的局部变化趋势，即：
      * ，曲线在 处**上升**（单调递增）。
      * ，曲线在 处**下降**（单调递减）。
      * ，曲线在 处**可能达到极值**。
* **曲线与切线的关系**
  + 若函数 在 处可导，则曲线 在该点有**唯一切线**，切线的斜率就是 。

**(2) 切线方程**

* **切线方程公式**
  + 设曲线 在 处可导，切线的方程为：
* **示例**
  + 设 ，求曲线在 处的切线方程。
* **解答**
  + 计算导数：
  + 计算函数值：
  + 切线方程：即：

**(3) 导数与曲线的局部特性**

* **局部单调性**
  + 若 在某区间恒成立，则 **单调递增**。
  + 若 在某区间恒成立，则 **单调递减**。
* **拐点与凸凹性**
  + 若 ，曲线**向上凸**（凹口朝上）。
  + 若 ，曲线**向下凸**（凹口朝下）。
  + 拐点：若 且二阶导数在 处符号改变，则 是拐点。

**2.2 使用注意事项（详细扩展版）**

在使用 **导数的几何意义** 进行计算和分析时，需要特别注意以下关键问题，以避免错误理解和误用。

**(1) 可导性与切线的存在性**

* **导数存在是切线存在的前提**：
  + 若函数 在 处可导，则该点必有**唯一切线**，切线斜率为 。
  + 若不可导，则切线可能**不存在**，如 在 处无切线。

**错误示例**

* 设 ，求 处的切线方程。
* **解答**：
  + 计算左右导数：
  + 由于左右导数不相等，导数不存在，故**切线不存在**。

**(2) 水平切线的特殊情况**

* 若 ，则该点切线为**水平线**，但不一定是极值点。
* 水平切线可用于判断函数的局部极值。

**正确示例**

* 设 ，求切线方程。
* **解答**：
  1. 计算导数：
  2. 计算切线斜率：
  3. 计算函数值：
  4. 切线方程：
* **分析**：
  1. 此处虽有水平切线，但  **不是极值点**（可从二阶导数 看出）。

**(3) 分段函数的切线分析**

* 计算切线前，需检查分段点的可导性。
* 若 处不可导，则切线可能不存在。

**正确示例**

* 设：
  + 判断 处的可导性。
* **解答**：
  + 计算左右导数：
  + 由于左右导数相等， **可导**，切线方程为：

**(4) 单调性与导数的关系**

* 若 ，则 在该区间**单调递增**。
* 若 ，则 在该区间**单调递减**。

**错误示例**

* 设 ，判断单调性。
* **错误解答**：
  + 计算导数：
  + 令 ，得：
  + **错误点**：未检查 符号变化，直接认为 是极值点。
* **正确分析**：
  + 在不同区间考察导数符号：
    - 取 ，（递增）。
    - 取 ，（递减）。
    - 取 ，（递增）。
  + **结论**：
    - 和 **单调递增**。
    - **单调递减**。

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数求曲线的切线方程**

**方法**

1. 计算导数 。
2. 计算切线斜率 。
3. 使用切线方程：

**典型例题**

* **例 1**：求曲线 在 处的切线方程。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算斜率：
3. 计算函数值：
4. 切线方程：即：

**(2) 考法 2：利用导数判断函数单调性**

**方法**

1. 计算导数 。
2. 令 求关键点。
3. 在不同区间内考察 的符号，判断单调性。

**典型例题**

* **例 2**：讨论 在 上的单调性。

**解答**

1. 计算导数：
2. 因式分解：
3. 解方程：
4. 分区间判断符号：
   * ：负（递减）。
   * ：正（递增）。
   * ：负（递减）。
   * ：正（递增）。
5. **结论**：
   * 在 和 **单调递减**。
   * 在 和 **单调递增**。

**2.4 对应练习题**

1. **求切线方程**：
   * 求 在 处的切线方程。
2. **判断单调性**：
   * 讨论 在 上的单调性。
3. **计算拐点**：
   * 计算 的拐点。

**第二章第一节：函数的可导性和连续性（Differentiability and Continuity of Functions）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 函数的可导性定义**

* **可导性的定义**：
  + 若函数 在点 处的导数存在，即：存在，则称 在 处 **可导**。
* **可导性与局部线性近似**
  + 若 在 处可导，则可用 **线性近似**：
  + 这表示函数在 附近**局部近似为一条直线**。

**(2) 可导性与连续性的关系**

**定理：可导一定连续，连续不一定可导**

* **若函数 在 处可导，则 在 处必连续**。
* **但若 在 处连续，并不一定可导**，例如尖点处函数不可导。

**证明（可导 连续）**

* 若 在 处可导，则：
  + 取极限 ：
  + 这正是**函数在 处连续的定义**，故可导 连续。

**(3) 不可导的几种情况**

1. **函数在该点不连续**
   * 若 在 处不连续，则必不可导。
   * 例如阶梯函数：在 处不连续，故不可导。
2. **函数在该点处有尖点**
   * 例如：
   * 计算左右导数：
   * 由于左右导数不相等，故不可导。
3. **函数在该点处的切线斜率趋于无穷**
   * 例如：
   * 计算导数：
   * 在 处：
   * 由于斜率趋于无穷，故不可导。

**2.2 使用注意事项**

**(1) 可导性一定蕴含连续性，但连续性不一定蕴含可导性**

* **若函数 在某点 可导，则 在该点一定连续。**
* **若函数在 处连续，并不意味着它在该点可导。**
  + 例如，函数 在 处连续，但由于左右导数不相等，**不可导**。

**(2) 计算可导性时必须先检查连续性**

* 如果函数在某点不连续，则必然不可导。
* **计算可导性之前，先验证函数是否连续。**
  + 例如，函数：
  + 在 处：
    - 左极限
    - 右极限
    - 由于 ，**不连续，必然不可导**。

**(3) 判断可导性时要计算左右导数**

* 可导的必要条件是**左右导数相等**。
* **步骤：**
  1. 计算左导数 ：
  2. 计算右导数 ：
  3. 如果 ，则 在 处不可导。

**(4) 常见不可导情况**

1. **函数在该点不连续**
   * 例如，阶梯函数在跳跃点处不连续，必然不可导。
2. **函数在该点有尖点**
   * 例如， 在 处的左右导数不相等，故不可导。
3. **函数在该点斜率趋于无穷**
   * 例如， 在 处的导数 趋于无穷，故不可导。

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数定义判断可导性**

**方法：**

1. 计算导数定义：
2. 计算左右导数：
   * 若 ，则 **可导**。
   * 若不相等，则**不可导**。

**典型例题**

* **例 1**：判断 在 处的可导性。

**解答**

1. 计算左右导数：
2. 由于左右导数不相等， 在 处不可导。

**(2) 考法 2：利用可导性判断函数的连续性**

**方法：**

1. 若 **可导**，则必连续。
2. 若函数不连续，则直接判断其**不可导**。

**典型例题**

* **例 2**：判断下列函数在 处的连续性：

**解答**

1. 计算极限：
2. 由于 ，函数在 处**不连续，必然不可导**。

**(3) 考法 3：利用二阶导数判断无穷斜率情况**

**方法：**

1. 计算导数：
2. 观察是否趋于无穷大：
   * 若导数无限增大，则不可导。

**典型例题**

* **例 3**：判断 在 处的可导性。

**解答**

1. 计算导数：
2. 在 处：
3. 由于斜率趋于无穷，故不可导。

**(4) 考法 4：利用分段函数的可导性**

**方法：**

1. 计算每个部分的导数。
2. 计算分界点的左右导数，检查是否相等。

**典型例题**

* **例 4**：判断 是否在 处可导：

**解答**

1. 计算左右导数：
2. 由于左右导数相等， 在 处可导，且 。

**2.4 对应练习题**

**1. 判断函数的可导性**

**题目 1**

判断下列函数在 处的可导性：

**解答**

* + 计算左右导数：
  + 由于左右导数不相等，故  **在 处不可导**。
  + 计算左右极限：
  + 由于 ，函数在 处**不连续**，所以**不可导**。

**2. 计算特殊点的导数**

**题目 2**

计算下列函数在 处的导数（如存在）：

**解答**

* + 计算导数：
  + 在 处：
  + 由于斜率趋于无穷大，故 **不可导**。
  + 计算左右导数：
  + 由于左右导数相等，故 **在 处可导，且** 。

**3. 计算切线方程**

**题目 3**

求函数 在 处的切线方程。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算斜率：
3. 计算函数值：
4. 切线方程：即：

**4. 分段函数的可导性分析**

**题目 4**

设函数：

讨论 在 处的可导性。

**解答**

1. 计算左右导数：
2. 由于左右导数相等， **在 处可导，且** 。

**5. 利用导数判定连续性**

**题目 5**

判断函数：

在 处的连续性与可导性。

**解答**

1. **检查连续性**：
   * 由于 ，函数在 处**不连续**，故不可导。

**第二章第二节：函数的和、差、积、商的求导法则（Sum, Difference, Product, and Quotient Rules for Differentiation）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 和差法则（加法与减法的求导）**

* **定理（线性运算的导数法则）**：
  + 设 和 在某点 处可导，则：
  + 即，函数的**和或差的导数等于各个函数导数的和或差**。
* **示例**
  + 设 和 ，求 的导数。
  + **解答**
    1. 计算单独的导数：
    2. 计算 的导数：

**(2) 积法则（乘法的求导）**

* **定理（乘积法则）**：
  + 若 和 在某点 处可导，则：
  + 这意味着：**求两个函数的乘积的导数时，需要用“一个函数对另一个求导”的方式处理**。
* **示例**
  + 设 ，，求 的导数。
  + **解答**
    1. 计算单独的导数：
    2. 计算 的导数：

**(3) 商法则（除法的求导）**

* **定理（商法则）**：
  + 若 和 在某点 处可导，且 ，则：
  + 该法则本质是利用乘法法则和逆函数求导法则推导得出。
* **示例**
  + 设 ，，求 的导数。
  + **解答**
    1. 计算单独的导数：
    2. 计算 的导数：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 乘法和除法求导法则必须严格按照公式应用**

* **乘法法则**：
  + 不能简单地对每一项求导后相乘：
    - **错误示例**：
    - **正确求导**：
* **商法则**：
  + 不能错误地对分子、分母分别求导后相除：
    - **错误示例**：

**(2) 商法则不能用于分母为零的点**

* 若 在某点 处，则 在该点**不可导**。
* **示例**
  + 设：
  + 其导数为：
  + 但在 处， **无定义，更不可导**。

**(3) 乘法法则和商法则可以与链式法则结合**

* 若函数是复合形式，则先用**复合函数求导**，然后结合**积法则或商法则**：
  + 例如：
    - **求导时应先用乘法法则**：
    - 计算：

**(4) 求导时应先展开再计算**

* 若函数包含多个运算（如多个乘积），先展开再求导可以减少计算量。
* **示例**
  + 设：
  + **错误方式（直接用积法则）**：
    - 需要三次乘积求导，计算复杂。
  + **正确方式（先展开再求导）**：
    - 展开：
    - 直接求导：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：函数的和、差、积、商求导**

**方法**

1. 识别函数的运算方式（加法、减法、乘法、除法）。
2. 选择合适的求导法则。
3. 代入公式计算。

**典型例题**

* **例 1**：求：的导数。

**解答**

1. **分项求导**：

**(2) 考法 2：使用乘法法则进行求导**

**方法**

1. 设 。
2. 计算 和 。
3. 代入乘法法则：

**典型例题**

* **例 2**：求 的导数。

**解答**

1. 识别乘积：
2. 计算：

**(3) 考法 3：使用商法则进行求导**

**方法**

1. 设 。
2. 计算 和 。
3. 代入商法则：

**典型例题**

* **例 3**：求 的导数。

**解答**

1. 设：
2. 计算：
3. 代入公式：

**2.4 对应练习题**

1. **基本求导**
   * 计算：的导数。
2. **乘法法则应用**
   * 计算：的导数。
3. **商法则应用**
   * 计算：的导数。
4. **综合应用**
   * 计算：的导数。

**反函数的求导法则（Derivative of Inverse Functions）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 反函数的定义**

* 设 是一个函数，若存在一个函数 使得：在定义域和值域范围内成立，则称 是 的**反函数**，记作 。
* 反函数的几何性质：
  + **原函数与反函数的图像关于直线 对称**。
  + 若 是单调函数，则其反函数 也为单调函数。

**(2) 反函数的求导公式**

* 设 可导且 ，则其反函数 也可导，且：其中，。
* 换句话说：**即求反函数的导数时，先求原函数的导数，再取倒数。**

**(3) 反函数求导的常见计算步骤**

1. 设 ，确定 的单调性（保证其反函数存在）。
2. 计算 。
3. 令 ，代入 计算导数。

**(4) 反函数求导的几种典型类型**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **函数** | **反函数** | **导数公式** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**2.2 使用注意事项**

**(1) 反函数存在的必要条件：原函数必须是单调函数**

* 若函数 **在其定义域上单调递增或递减**，则其反函数 存在。
* 如果 **不是单调的**，那么在某些区间上可能**无法定义反函数**，或者需要分段讨论。
* **示例**
  + 设 ，则在 **不是单调函数**，因此没有全局反函数。
  + 但在 或 时， **单调递增或递减**，可分别定义 （）或 （）。

**(2) 计算反函数导数时，必须先求出**

* 反函数求导的关键步骤：
  1. 先求出原函数的导数 。
  2. 确定 。
  3. 利用公式：
* **示例**
  1. 设 ，求 的导数。
  2. **解答**
     1. 计算导数：
     2. 代入反函数求导公式：
  3. 这一步骤必须**先求出 ，才能计算最终表达式**。

**(3) 反三角函数的求导要注意定义域**

* **常见反三角函数的导数**：
  + 反三角函数的导数有特定的适用范围，例如：
    - **只能在 内求导**，因为超出此范围无定义。
    - **可在整个实数范围内求导**。

**(4) 计算隐函数的导数时，要使用隐函数求导法**

* 如果已知 和 之间的关系是一个隐式方程 ，可以使用**隐函数求导法**：
  1. **对方程两边求导**，记住对 求导时必须乘上 。
  2. **整理方程，解出** 。
* **示例**
  1. 设 ，求 。
  2. **解答**
     1. 两边对 求导：
     2. 提取 ：
     3. 求导数：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：直接应用反函数求导公式**

**方法**

1. 计算 。
2. 代入：

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.2-4）**  
  求 的反函数的导数。

**解答**

1. 计算导数：
2. 代入公式：

**(2) 考法 2：利用反三角函数求导**

**方法**

1. 直接应用公式：

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.2-6）**  
  计算 。

**解答**

1. 设 ，则：

**(3) 考法 3：求隐函数的导数**

**方法**

1. 设方程 ，对两边求导。
2. 解出 。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.2-8）**  
  求隐函数 的导数。

**解答**

1. 对两边求导：
2. 提取 ：
3. 求导数：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.2-4**：求 的反函数的导数。  
（2）**课本习题 2.2-6**：计算 。  
（3）**课本习题 2.2-8**：求隐函数 的导数。  
（4）**课本习题 2.2-10**：已知 ，求 。

**复合函数的求导法则（Chain Rule for Differentiation）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 复合函数的定义**

* 若 是 的函数， 又是 的函数：则称 为 的**复合函数**，记作：其中：
  + **外层函数（外函数）**：
  + **内层函数（内函数）**：

**(2) 复合函数的求导法则（链式法则）**

* 设 ，若 和 在定义域内均可导，则：
* **理解方式**：
  1. **先对外函数求导**，但不改变内函数的表达形式。
  2. **再乘以内函数的导数**。

**(3) 复合函数求导的常见类型**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **函数形式** | **外函数** | **内函数** | **导数计算** |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**2.2 使用注意事项**

**(1) 识别外函数和内函数**

* **错误方式**：
  + 直接对整个表达式求导，而没有考虑复合结构。
* **正确方法**：
  + 先分解出**外层函数**和**内层函数**，再逐步求导。
* **示例**
  + 设 ：
    - **外函数**：
    - **内函数**：
    - **求导**：

**(2) 不能直接对指数或对数部分求导**

* **错误方式**：
  + 直接使用普通求导公式，如：
* **正确方法**：
  + 先对指数部分求导，再乘上指数底数：

**(3) 复合函数可以嵌套多层**

* **示例**
  + 设 ，
    - **最外层**：
    - **中间层**：
    - **最内层**：
  + 依次求导：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：基本的复合函数求导**

**方法**

1. 识别外函数 和内函数 。
2. 使用链式法则：

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.2-12）**  
  计算 。

**解答**

1. 设：
   * 外函数
   * 内函数
2. 计算：

**(2) 考法 2：指数和对数函数的复合求导**

**方法**

1. 设 。
2. 计算：

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.2-14）**  
  计算 。

**解答**

1. 设：
   * 外函数
   * 内函数
2. 计算：

**(3) 考法 3：三角函数的复合求导**

**方法**

1. 设 。
2. 计算：

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.2-16）**  
  计算 。

**解答**

1. 设：
   * 外函数
   * 内函数
2. 计算：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.2-12**：计算 。  
（2）**课本习题 2.2-14**：计算 。  
（3）**课本习题 2.2-16**：计算 。  
（4）**课本习题 2.2-18**：计算 。

**基本求导法则与导数公式（Basic Differentiation Rules and Derivative Formulas）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 常见基本求导法则**

在求导过程中，我们常用以下基本法则：

1. **常数函数的导数**：
2. **幂函数的导数（幂函数法则）**：
3. **指数函数的导数**：
4. **对数函数的导数**：
5. **三角函数的导数**：
6. **反三角函数的导数**：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 幂函数求导适用于所有实数指数**

* **幂函数求导的通用公式**：
* 特殊情况：
  + 当 时：
  + 当 时：
  + 当 时：
  + 当 为分数时，如 ：

**(2) 计算指数函数和对数函数导数时，需注意底数**

* **自然指数函数 求导最简单**：
* **任意底数 的指数函数求导**：
  + 例如：
* **对数函数求导时，注意底数不同**：
  + 例如：

**(3) 三角函数求导需注意定义域**

* **正弦、余弦函数的导数公式**：
* **正切函数的导数**：
  + 由于 在 处无定义，因此在这些点处不可导。

**(4) 反三角函数的求导必须满足定义域限制**

* 例如：
  + 若 ，则 无定义，因此无法求导。
* 例如：
  + 该导数在整个实数范围内都存在。

**(5) 复合函数求导要用链式法则**

* **不能直接对函数整体求导，需要逐层拆解**
* **示例**
  + 设：
  + **错误求导**：
  + **正确求导（使用链式法则）**：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：直接应用求导公式**

**方法**

1. 识别函数类型。
2. 直接套用对应的求导公式。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.2-20）**  
  计算 。

**解答**

1. 直接使用幂函数求导法则：

**(2) 考法 2：指数和对数求导**

**方法**

1. 识别指数或对数结构。
2. 直接应用公式求导。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.2-22）**  
  计算 。

**解答**

1. 设 ，则：

**(3) 考法 3：三角函数求导**

**方法**

1. 识别三角函数类型。
2. 直接应用公式求导。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.2-24）**  
  计算 。

**解答**

1. 设 ，则：

**(4) 考法 4：复合函数求导**

**方法**

1. 识别外层函数和内层函数。
2. 逐层使用链式法则求导。

**典型例题**

* **例 4（课本习题 2.2-26）**  
  计算 。

**解答**

1. 设：
   * 外函数
   * 内函数
2. 计算：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.2-20**：计算 。  
（2）**课本习题 2.2-22**：计算 。  
（3）**课本习题 2.2-24**：计算 。  
（4）**课本习题 2.2-26**：计算 。  
（5）**课本习题 2.2-28**：计算 。

**第二章第三节：高阶导数（Higher-Order Derivatives）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 高阶导数的定义**

* **一阶导数**：函数 的一阶导数表示为：反映了函数的变化率和切线斜率。
* **二阶导数**：对 再求导，得到**二阶导数**：反映函数变化率的变化，即**曲率**或**加速度**。
* **高阶导数**：对 再求导，可得\*\* 阶导数\*\*：其中 为正整数，表示导数的阶数。

**(2) 高阶导数的常见性质**

1. **常数函数的所有高阶导数均为零**
2. **幂函数的高阶导数**
   * 若 ，则其 阶导数为：
   * 当 时，。
3. **指数函数的高阶导数**
   * 若 ，则：
   * 若 ，则：
4. **三角函数的高阶导数**
   * 若 ，则：**规律**：每 4 阶循环一次，即：
   * 若 ，同理：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 高阶导数的计算步骤必须严格按照递推关系进行**

* 计算高阶导数时，必须**逐步递推**，不能直接写出高阶导数表达式。
* **示例**
  + 设 ，求 。
  + **正确方法**：
    1. 计算一阶导数：
    2. 计算二阶导数：
    3. 计算三阶导数：
  + **错误方法**：直接尝试猜测高阶导数的通式。

**(2) 幂函数的高阶导数有终止性**

* 若 ，则：
* **示例**
  + 设 ，求 。
  + **计算**
    1. 一阶导数：
    2. 二阶导数：
    3. 三阶导数：
    4. 四阶导数：
    5. 五阶导数：
    6. **六阶导数及以上全部为 0**：

**(3) 三角函数的高阶导数具有周期性**

* **和 的高阶导数每 4 阶循环一次**：
  + **通用公式**：
* **示例**
  + 设 ，求 。
  + 计算：
    - 由于 每 4 阶导数循环：

**(4) 指数函数的高阶导数遵循指数特性**

* 若 ，则：
* 若 ，则：
* **示例**
  + 设 ，求 。
  + 计算：

**(5) 乘积形式的高阶导数计算要用递推展开**

* **不能直接对乘积分别求导，而是用** 莱布尼茨公式：
* **示例**
  + 设 ，求 。
  + **正确计算**
    1. 计算一阶导数：
    2. 计算二阶导数：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：计算高阶导数**

**方法**

1. 计算一阶导数。
2. 逐步递推求高阶导数。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.3-5）**  
  计算 的四阶导数。

**解答**

1. 计算导数：

**(2) 考法 2：三角函数的高阶导数**

**方法**

1. 识别周期性（每 4 阶循环）。
2. 计算 以确定导数形式。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.3-8）**  
  计算 ，其中 。

**解答**

1. 由于 每 4 阶导数循环：
2. 计算二阶导数：
3. 所以：

**(3) 考法 3：指数与幂函数的高阶导数**

**方法**

1. 使用递推关系进行计算。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.3-10）**  
  计算 ，其中 。

**解答**

1. 计算一阶导数：
2. 计算二阶导数：
3. 计算三阶导数：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.3-5**：计算 ，其中 。  
（2）**课本习题 2.3-8**：计算 ，其中 。  
（3）**课本习题 2.3-10**：计算 ，其中 。

**第四节 隐函数的导数（Implicit Differentiation）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 隐函数的定义**

* 若 和 之间的关系由方程：

确定，且无法直接将 显式表示为 ，则称 是 的**隐函数**。

* **显函数与隐函数的区别**
  + **显函数**： 能直接表示成 的函数，如：
  + **隐函数**： 不能直接表示成 的函数，如：

**(2) 隐函数求导法**

当 不能显式表达时，可对**方程两边求导**，然后解出 。

**隐函数求导的一般步骤**

1. 对方程 **两边同时对 求导**，注意 也是 的函数，因此求导时需乘上 。
2. 整理方程，求解 。

**(3) 隐函数求导的常见类型**

1. **基本隐函数**
   * 例：求隐函数 的导数。
   * **解答**
     1. 两边求导：
     2. 应用链式法则：
     3. 解出 ：
2. **涉及三角函数的隐函数**
   * 例：求隐函数 的导数。
   * **解答**
     1. 对两边求导：
     2. 解出 ：
3. **涉及指数和对数的隐函数**
   * 例：求 的导数。
   * **解答**
     1. 对两边求导：
     2. 解出 ：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 不能忽略对 的求导**

* 由于 是 的隐函数，即 ，对 求导时必须应用**链式法则**：
* **错误示例**
  + 设 ，求导时：
    - **错误求导**：
    - **正确求导**：

**(2) 复杂隐函数的求导需应用 乘积法则或链式法则**

* 例如：
* 对两边求导：
* **常见的情况**
  + 当隐函数中存在三角、指数、对数等非线性项时，必须结合**链式法则**求导。
  + 当隐函数涉及 和 的乘积时，必须使用**乘积法则**。

**(3) 计算二阶隐导数时，必须对 再求导**

* 例如：
* **求一阶导数**：
* **求二阶导数**：

**(4) 不能遗漏 在方程中的求解**

* 例如：
  + 设 ，求 。
  + **错误求解**
  + **正确求导**

**(5) 隐函数导数在曲线切线斜率计算中的应用**

* **若给定方程 ，求某点 处的切线方程**
  + 计算 并代入
  + 切线方程：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：基本隐函数求导**

**方法**

1. 对等式两边求导。
2. 解出 。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.4-3）**  
  计算 的导数。

**解答**

1. 对两边求导：
2. 解出 ：

**(2) 考法 2：三角和指数隐函数求导**

**方法**

1. 使用三角或指数函数求导法则。
2. 解出 。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.4-5）**  
  计算 的导数。

**解答**

1. 对两边求导：
2. 解出 ：

**(3) 考法 3：二阶隐函数求导**

**方法**

1. 先求 。
2. 再对 求导。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.4-7）**  
  计算 的二阶导数。

**解答**

1. 一阶导数：
2. 二阶导数：

**(4) 考法 4：隐函数的切线与法线方程**

**方法**

1. 计算 。
2. 代入切线方程：
3. 法线方程：

**典型例题**

* **例 4（课本习题 2.4-9）**  
  计算 在 处的切线和法线方程。

**解答**

1. 计算 ：
2. 在 处：
3. 切线方程：
4. 法线方程：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.4-3**：计算 的导数。  
（2）**课本习题 2.4-5**：计算 的导数。  
（3）**课本习题 2.4-7**：计算 的二阶导数。  
（4）**课本习题 2.4-9**：计算 在 处的切线和法线方程。

**参数方程所确定的函数的导数（Differentiation of Parametric Equations）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 参数方程的定义**

* 若 和 不能直接用 的形式表示，而是由第三个变量 作为参数给出：则称这样的表达方式为**参数方程**，其中 称为**参数**。

**(2) 参数方程求导的基本公式**

* 设 和 可导，则**曲线的导数**：其中：
  + **分子**： 计算 对参数 的导数。
  + **分母**： 计算 对参数 的导数。

**(3) 参数方程求二阶导数**

* 一阶导数：
* 二阶导数：

**(4) 参数方程的常见类型**

* **基本参数方程**
  + **圆**：
  + **椭圆**：
  + **摆线**：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 计算导数时必须检查分母是否为零**

* **分母 不能为零**，否则曲线可能在该点处有**垂直切线**或该点可能是拐点。
* **示例**
  + 设：
  + 计算导数：
  + 若 ，即 ，则 无法直接计算，需进一步分析该点的几何性质。

**(2) 计算二阶导数时，必须用链式法则**

* **计算二阶导数的正确步骤**
  1. 先求一阶导数 ：
  2. 再求 ：
  3. 代入：
* **示例**
  1. 设：
  2. **计算一阶导数**：
  3. **计算二阶导数**：

**(3) 计算曲线的切线方程时，必须代入对应的 值**

* **切线方程**：

其中：

* **示例**
  + 设：
  + 在 处求切线方程：
    1. 计算：
    2. 计算：在 处：
    3. **切线方程**：

**(4) 参数方程的对称性**

* **若 和 均是偶函数，则曲线关于 轴对称**
* **若 是偶函数且 是奇函数，则曲线关于原点对称**

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：计算一阶导数**

**方法**

1. 计算 和 。
2. 代入公式 。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.4-11）**  
  计算参数方程 ， 的导数。

**解答**

1. 计算：
2. 计算导数：

**(2) 考法 2：计算二阶导数**

**方法**

1. 先求一阶导数 。
2. 再求 。
3. 代入公式：

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.4-13）**  
  计算参数方程 ， 的二阶导数。

**解答**

1. 计算：
2. 计算：
3. 计算：

**(3) 考法 3：计算曲线的切线方程**

**方法**

1. 计算 ，。
2. 计算 并代入。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.4-15）**  
  计算参数方程 ， 在 处的切线方程。

**解答**

1. 计算：
2. 计算：在 处：
3. **切线方程**：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.4-11**：计算 ， 的导数。  
（2）**课本习题 2.4-13**：计算 ， 的二阶导数。  
（3）**课本习题 2.4-15**：计算 ， 在 处的切线方程。  
（4）**课本习题 2.4-17**：计算 ， 的导数，并求 处的切线方程。

**相关变化率（Related Rates）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 相关变化率的定义**

* 若两个变量 和 随时间 变化，并且存在某种函数关系 ，则可以通过隐函数求导法求出它们的**变化率关系**：
* **相关变化率的核心思想**：
  + 通过变量间的关系，求出一个变量随时间的变化率，进而求解另一个变量的变化率。

**(2) 相关变化率的计算公式**

* 若 和 满足隐函数关系 ，则对两边求导：
* 使用**链式法则**展开：
* 解出：

**(3) 相关变化率的典型应用**

1. **几何相关变化率**：
   * 计算面积、体积、长度、角度的变化率，如圆的半径变化引起的面积变化。
2. **物理相关变化率**：
   * 计算速度、加速度、流速等，如水流入圆锥形水桶时的水深变化率。
3. **经济和工程应用**：
   * 计算生产率、成本变化等。

**2.2 使用注意事项**

**(1) 确保所使用的变量是时间的函数**

* **错误方法**：
  + 直接对变量求导，而忽略它们是时间的函数。
* **正确方法**：
  + 变量 、、、、 等都是时间 的函数，即：计算导数时应应用**链式法则**。

**(2) 识别已知量和未知量**

* 相关变化率问题通常给定：
  + 某个变量在特定时刻的值。
  + 某个变量的变化率 或 。
  + 目标是求另一个变量的变化率。
* **示例**
  + 若已知水位高度 变化率 ，求水桶内水量 的变化率 。

**(3) 确保变量单位一致**

* 变量单位必须匹配，例如：
  + 长度变化率（米/秒）。
  + 体积变化率（立方米/秒）。
  + 角度变化率（弧度/秒）。

**(4) 变量变化方向要符合实际物理意义**

* **正负号的物理意义**：
  + 表示 增加， 表示 减少。
  + 例如：一个水桶正在漏水，水位 下降，则 。

**(5) 设定合理的数学关系**

* 变量之间往往存在几何、物理或工程上的关系，例如：
  + **勾股定理**（直角三角形）：
  + **体积公式**：
  + **圆面积**：
  + **流体力学**：

**(6) 计算二阶相关变化率**

* 若需要求某变量的二阶变化率（如加速度），需要进一步对 求导：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：几何相关变化率**

**方法**

1. 找到变量间的几何关系。
2. 对等式求导，求解未知变化率。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.4-19）**  
  **题目**：设一个圆的半径随时间变化，其变化率为 cm/s，求圆面积 的变化率。

**解答**

1. 公式：
2. 对两边求导：
3. 代入 ：

**(2) 考法 2：直角三角形相关变化率**

**方法**

1. 设定直角三角形的边长关系。
2. 对等式求导，解出未知变化率。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.4-21）**  
  **题目**：梯子长 5 米，斜靠在墙上，底部以 1 m/s 的速度滑动，求梯子顶端下降的速度。

**解答**

1. 设：
2. 对两边求导：
3. 代入 ，（）：
4. 解出：

**(3) 考法 3：体积变化率**

**方法**

1. 设定体积公式，如球体、圆柱体或圆锥体。
2. 对等式求导，解出未知变化率。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.4-23）**  
  **题目**：水以 立方米/分钟的速率流入圆锥形水桶，底面半径 2 米，高 4 米，求水位上升的速率。

**解答**

1. 体积公式：
2. 圆锥的半径与高度成比例：代入：
3. 对等式求导：
4. 代入 ：
5. 解出：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.4-19**：设一个圆的半径随时间变化，其变化率为 cm/s，求圆面积的变化率。  
（2）**课本习题 2.4-21**：梯子长 5 米，斜靠在墙上，底部以 1 m/s 的速度滑动，求梯子顶端下降的速度。  
（3）**课本习题 2.4-23**：水以 立方米/分钟的速率流入圆锥形水桶，底面半径 2 米，高 4 米，求水位上升的速率。  
（4）**课本习题 2.4-25**：球体的半径以 m/s 增长，求球体积变化率。

**微分的定义与微分的几何意义（Differential Definition and Geometric Meaning）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 微分的定义**

* 设函数 在某点 处可导，即其导数 存在，则微分 定义为：

其中：

* + 是自变量 的一个增量。
  + 是 关于 的微分。
* **微分的近似表达**：
  + 若 表示函数值的增量，则：
  + 适用于 很小时， 和 近似相等。

**(2) 微分的几何意义**

* **微分 代表切线的增量**
  + 设曲线 在点 处的切线方程为：令 ，得：
  + 即 **微分 近似于切线的增量**。
* **与函数增量 的关系**
  + **函数增量**：
  + **近似关系**：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 仅适用于可导函数**

* **函数必须在某点处可导，才能计算微分**：
  + 若函数不可导，如 在 处不可导，则 不存在。
* **示例**
  + 在 处：
    - **错误**：（因为 不存在）。
    - **正确**：使用极限定义导数来判断。

**(2) 微分与函数增量 之间的误差**

* **函数增量**：
* **微分近似**：
* **误差估计**：
  + 设误差项为 ，则：
  + 当 时， 趋于零。

**(3) 选择合适的**

* 通常取为一个小量，例如：
  + 若 在 附近微小变化，可取 。
* 在计算误差时，应确保 足够小，使得 能近似 。

**(4) 微分的单位分析**

* **微分量 和 具有相同的单位**，即：
  + 若 以秒为单位，则 也是秒， 也是秒对应的变化量。

**(5) 近似计算中的应用**

* 微分用于近似计算，当 很小时：适用于计算复杂函数的近似值，如：
  + 。
  + 。

**(6) 微分的图像意义**

* **微分是曲线在某点处的切线增量**：
  + 曲线上 是实际增量。
  + 切线上的 是微分值。
  + 当 足够小时，。

**2.3 额外的考点与考法总结**

**(1) 考法 4：误差估算与近似计算**

**方法**

1. 计算导数 。
2. 计算微分 。
3. 估算误差项 。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.5-11）**  
  **题目**：用微分近似计算 。

**解答**

1. 设 ，选择 ，则：
2. 计算：取 ：
3. 近似值：

**(2) 考法 5：验证微分的近似性**

**方法**

1. 计算 。
2. 计算 并比较误差。

**典型例题**

* **例 4（课本习题 2.5-13）**  
  **题目**：验证 在 处的微分 对 的近似性。

**解答**

1. 计算：近似：
2. 计算微分：
3. 误差：

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：计算微分**

**方法**

1. 计算函数的导数 。
2. 使用公式 计算微分。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.5-3）**  
  计算 的微分。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算微分：

**(2) 考法 2：微分的几何意义**

**方法**

1. 计算切线方程：
2. 计算增量 和微分 之间的近似关系。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.5-5）**  
  设 ，计算 处的微分。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算微分：

**(3) 考法 3：误差估算与近似计算**

**方法**

1. 计算导数 。
2. 计算微分 。
3. 估算误差项 。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.5-11）**  
  **题目**：用微分近似计算 。

**解答**

1. 设 ，选择 ，则：
2. 计算：取 ：
3. 近似值：

**(4) 考法 4：验证微分的近似性**

**方法**

1. 计算 。
2. 计算 并比较误差。

**典型例题**

* **例 4（课本习题 2.5-13）**  
  **题目**：验证 在 处的微分 对 的近似性。

**解答**

1. 计算：近似：
2. 计算微分：
3. 误差：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.5-3**：计算 的微分。  
（2）**课本习题 2.5-5**：计算 在 处的微分。  
（3）**课本习题 2.5-7**：计算 在 处的微分。  
（4）**课本习题 2.5-9**：计算 在 处的微分。  
（5）**课本习题 2.5-11**：用微分近似计算 。  
（6）**课本习题 2.5-13**：验证 在 处的微分 对 的近似性。

**基本初等函数的微分公式与微分计算法则（Differentiation Formulas of Elementary Functions）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 基本初等函数的微分公式**

* **幂函数微分**：
* **指数函数微分**：
* **对数函数微分**：
* **三角函数微分**：
* **反三角函数微分**：

**(2) 微分计算法则**

1. **常数因子法则**：
2. **和差法则**：
3. **乘积法则**：
4. **商法则**：
5. **复合函数微分法（链式法则）**：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 确保使用正确的微分公式**

* **幂函数微分**：
* **指数函数微分**：
* **对数函数微分**：
* **三角函数和反三角函数的微分**：

**(2) 乘积法则和商法则的适用性**

* 乘积法则：
* 商法则：**注意**：若 ，商法则不适用。

**(3) 复合函数微分需用链式法则**

* 若 ，则：
* 例如：
  + 设 ，求微分：

**(4) 确保变量可导**

* **若函数在某点不可导，则微分不适用**
  + 例如：

**(5) 计算复杂函数微分时，分步进行**

* **示例**：
  + 若 ，使用乘积法则和链式法则：

**2.3 额外的考点与考法总结**

**(1) 考法 1：计算基本初等函数的微分**

**方法**

1. 直接使用基本微分公式。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.5-15）**  
  计算 的微分。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算微分：

**(2) 考法 2：乘积与商法则的应用**

**方法**

1. 使用乘积或商法则计算微分。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.5-17）**  
  计算 的微分。

**解答**

1. 乘积法则：

**(3) 考法 3：复合函数的微分**

**方法**

1. 使用链式法则计算复合函数的微分。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.5-19）**  
  计算 的微分。

**解答**

1. 设 ，则：

**(4) 考法 4：对数函数和指数函数的微分**

**方法**

1. 使用对数或指数函数的微分公式。

**典型例题**

* **例 4（课本习题 2.5-21）**  
  计算 的微分。

**解答**

1. 乘积法则：

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.5-15**：计算 的微分。  
（2）**课本习题 2.5-17**：计算 的微分。  
（3）**课本习题 2.5-19**：计算 的微分。  
（4）**课本习题 2.5-21**：计算 的微分。  
（5）**课本习题 2.5-23**：计算 的微分。  
（6）**课本习题 2.5-25**：计算 的微分。

**微分在近似计算中的应用（Application of Differentials in Approximate Calculation）知识图谱**

**2.1 知识点概念**

**(1) 微分在近似计算中的基本思想**

* **微分 可用于估算函数值的变化**
  + 设函数 在 附近可导，则有：
  + 当 很小时，函数增量 可近似用 计算：

**(2) 微分近似的应用场景**

1. **计算函数值的近似值**
   * 当 略有变化时，用微分估计 的变化。
2. **计算误差**
   * 若 表示测量误差，则微分可估计相应的函数值误差。
3. **估算百分比误差**
   * **相对误差**：

**2.2 使用注意事项**

**(1) 适用于小量变化，不适用于大范围变化**

* 微分近似计算仅适用于 很小时，即 在某一点附近的微小变化。
* **误差来源**：
  + 近似计算基于**一阶泰勒展开**，高阶项被忽略：
  + 仅使用线性近似：
  + 当 过大时，近似误差会显著增加。
* **示例**
  + 近似计算 时， 较小，误差可以忽略。
  + 若 （如 ），则误差较大，应使用更高阶展开。

**(2) 误差估算与修正**

* 微分近似计算的误差可通过**高阶导数估算**：
* 若要求更高精度：
  + 使用**二阶泰勒展开**：
  + 例如，在计算 时，可进一步修正：

**(3) 计算误差的单位匹配**

* **单位检查**：
  + 若 以 **厘米（cm）** 为单位，则 也应以 **厘米（cm）** 计算。
  + 若 以 **秒（s）** 为单位，则 也应以 **秒（s）** 计算。
  + 若计算体积误差，则单位应为 **立方厘米（cm³）**。
* **示例**
  + 设圆的半径误差 cm，计算面积误差：结果单位应为 **cm²**，不能写成 **cm³**。

**(4) 误差的正负方向**

* 误差的**符号决定方向**：
  + 若 ，则 表示增量；
  + 若 ，则 表示减少；
  + 绝对误差为 ，而**相对误差**应除以原函数值：

**(5) 用微分计算近似值时，选择合适的展开点**

* 选择的基准点 应尽量靠近目标值 ，以减少误差：
  + 例如，计算 时，选择 优于 或 。
* **示例**
  + 计算 ，可选择 作为展开点：计算：

**(6) 确保测量误差的合理性**

* 若测量误差  **过大**，微分近似可能无法准确估算：
  + **低精度测量**（如手持刻度尺）可能导致较大误差。
  + **高精度测量**（如数控机床）可以使用微分近似。
* **示例**
  + 设球的半径测量误差 cm，计算体积误差：结果应在合理的物理测量范围内。

**2.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用微分近似计算函数值**

**方法**

1. 计算函数的导数 。
2. 计算微分 。
3. 近似计算：

**典型例题**

* **例 1（课本习题 2.5-27）**  
  **题目**：用微分近似计算 。

**解答**

1. 设 ，选择 ：
2. 计算微分：
3. 计算近似值：

**考点拓展**

* 此类题目通常考察**如何选择合理的近似点** 。
* 应选取离目标数 最近的整数或已知值，以减少误差。

**(2) 考法 2：估算测量误差**

**方法**

1. 计算微分 。
2. 计算误差 和相对误差：

**典型例题**

* **例 2（课本习题 2.5-29）**  
  **题目**：圆的半径测量误差为 cm，估算面积的误差。

**解答**

1. 设圆的面积：
2. 计算微分：
3. 取 cm， cm：

**考点拓展**

* 误差估算在**工程测量、物理实验、统计数据分析**等领域有重要应用。
* **单位匹配**：测量误差的单位必须与原物理量一致。

**(3) 考法 3：计算相对误差**

**方法**

1. 计算微分 。
2. 计算相对误差：

**典型例题**

* **例 3（课本习题 2.5-31）**  
  **题目**：若球的半径测量误差为 cm，求球体积的相对误差。

**解答**

1. 设球体积：
2. 计算微分：
3. 取 cm， cm：
4. 计算相对误差：

**考点拓展**

* **相对误差的单位为无量纲**，以百分比形式表示。
* 在实验误差分析中，常用**相对误差**衡量测量精度。

**(4) 考法 4：高阶近似计算**

**方法**

1. 计算泰勒展开的二阶项：
2. 计算近似值。

**典型例题**

* **例 4（课本习题 2.5-33）**  
  **题目**：用二阶微分近似计算 。

**解答**

1. 设 ，在 展开：
2. 计算：

**考点拓展**

* 在**高精度计算**和**误差控制**中，泰勒展开是更可靠的方法。
* 在**物理学**（如热膨胀、量子力学）和**工程学**（如误差分析）中常用二阶展开。

**(5) 考法 5：误差传播**

**方法**

1. 计算误差的累积传播：
2. 估算最终误差。

**典型例题**

* **例 5（课本习题 2.5-35）**  
  **题目**：设 ，已知测量误差 ，，估算 的误差。

**解答**

1. 计算偏导数：
2. 计算误差传播：
3. 取 ，：

**考点拓展**

* 在**实验物理、工程测量**等场景中，误差传播计算可用于分析系统误差的影响。

**2.4 对应练习题**

（1）**课本习题 2.5-27**：用微分近似计算 。  
（2）**课本习题 2.5-29**：圆的半径测量误差为 cm，估算面积的误差。  
（3）**课本习题 2.5-31**：若球的半径测量误差为 cm，求球体积的相对误差。  
（4）**课本习题 2.5-33**：用二阶微分近似计算 。  
（5）**课本习题 2.5-35**：计算函数 的误差传播。

**第三章第一节 罗尔定理（Rolle's Theorem）知识图谱**

**3.1 知识点概念**

**(1) 罗尔定理的内容**

* 设函数 在区间 上满足以下条件：
  1. **连续性**： 在 **闭区间** 上连续；
  2. **可导性**： 在 **开区间** 内可导；
  3. **端点处取相等值**：。
* **则至少存在一点** 使得：

即，函数在区间内部至少有一个**水平切线（导数为 0 的点）**。

**(2) 罗尔定理的几何意义**

* 罗尔定理表明：**如果函数在端点处取得相等的值，则在区间内至少有一个驻点（水平切线）**。
* **直观解释**：
  + 在 和 处的函数值相等，曲线在这两个点之间**必须经过一个极值点**，否则曲线无法返回到原来的值。
  + 在该极值点处，导数 。

**(3) 罗尔定理的应用**

* 罗尔定理是**拉格朗日中值定理的特殊情况**，当 时，它保证至少存在一点 使得导数为 0。
* 该定理用于证明某些函数在特定区间内是否有极值点。

**3.2 使用注意事项**

**(1) 三个条件必须全部满足**

* 罗尔定理成立的前提是函数 **同时满足**：
  1. **连续性**： 在 **闭区间** 上连续；
  2. **可导性**： 在 **开区间** 内可导；
  3. **端点值相等**：。
* 如果**缺少任意一个条件**，则无法保证存在 使得 。

**示例 1（不满足连续性）**

* 设：
* 在 上：
  + **处有间断**，**不满足罗尔定理**。

**示例 2（不满足可导性）**

* 设：
* 在 上：
  + **处不可导**，**不满足罗尔定理**。

**示例 3（不满足端点相等条件）**

* 设：
* 在 上：
* **端点值不相等**，**不满足罗尔定理**。

**(2) 不能推断所有点 满足**

* 罗尔定理只保证 **至少存在一个** ，不能推断所有点 都满足 。

**示例**

* 设：
* 在 上：
  + 满足罗尔定理，且有两个点 和 满足 。

**(3) 罗尔定理仅适用于闭区间**

* 罗尔定理必须在闭区间 上考虑，否则不成立。

**示例**

* 在开区间 上， 即使满足 ，但由于区间未封闭，可能无法保证存在导数为 0 的点。

**(4) 罗尔定理可用于证明某些方程有解**

* 如果函数满足罗尔定理，则在某个点 处 ，这可以用来证明某些方程至少有一个解。

**示例**

* 设 ，考虑 ：
  + 。
  + 在 内可导。
  + 可用罗尔定理证明 在某个点 处有解。

**3.3考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数是否满足罗尔定理**

**方法**

1. 检查 是否在 上连续；
2. 检查 是否在 内可导；
3. 检查 是否成立。

**典型例题**

* **例 1（课本习题 3.1-3）**  
  **题目**：验证函数 在区间 上是否满足罗尔定理，并求出满足结论的点。

**解答**

1. **连续性**：
   * 是 **多项式函数**，在 上连续。
2. **可导性**：
   * 在 内可导。
3. **端点相等**：
   * ，条件成立。
4. **求导数**：

设 ：

**结论**：

* 是满足罗尔定理的点。

**(2) 考法 2：判断某函数是否不满足罗尔定理**

**方法**

1. 检查三大条件，找出哪个条件不满足。

**典型例题**

* **例 2（课本习题 3.1-5）**  
  **题目**：验证 在 上是否满足罗尔定理。

**解答**

1. **连续性**：
   * 在 **连续**。
2. **可导性**：
   * 在 处不可导，不满足条件。
3. **端点相等**：
   * ，，满足。

**结论**：

* **因为 处不可导，不满足罗尔定理**，所以不能保证存在 使 。

**(3) 考法 3：利用罗尔定理证明某方程有解**

**方法**

1. 选取合适的函数 。
2. 验证是否满足罗尔定理的条件。
3. 推出 存在解，从而证明方程有解。

**典型例题**

* **例 3（课本习题 3.1-7）**  
  **题目**：设 ，证明它在 上满足罗尔定理，并求出满足结论的点。

**解答**

1. **连续性**：
   * 在 **连续**。
2. **可导性**：
   * 在 内可导。
3. **端点相等**：
   * **端点值不相等，不满足罗尔定理**。

**结论**：

* 因端点值不相等，罗尔定理不适用，无法保证存在 使得 。

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.1-3**：验证函数 在区间 上是否满足罗尔定理，并求出满足结论的点。  
（2）**课本习题 3.1-5**：验证 在 上是否满足罗尔定理。  
（3）**课本习题 3.1-7**：设 ，证明它在 上满足罗尔定理，并求出满足结论的点。  
（4）**课本习题 3.1-9**：若 在 上满足罗尔定理，证明至少有一点 使得 。  
（5）**课本习题 3.1-11**：若 满足罗尔定理，是否一定有唯一的 使 ？为什么？

**第三章 第一节：拉格朗日中值定理（Lagrange Mean Value Theorem）**

**3.1 知识点概念**

**(1) 拉格朗日中值定理的内容**

设函数 在区间 上满足以下条件：

1. **连续性**： 在 **闭区间** 上连续
2. **可导性**： 在 **开区间** 内可导

则至少存在一点 使得：

其中右边的分数称为**割线的斜率**，即该定理表明，在区间 内，至少存在一点 使得曲线的切线斜率等于割线斜率

**(2) 拉格朗日中值定理的几何意义**

该定理说明，曲线 在区间 上的**平均变化率**（即割线斜率）等于在某一点 处的瞬时变化率（即导数）

直观解释：

* 给定一个函数 ，在 之间连接起始点和终点的割线，其斜率为：
* 那么，在 内，至少有一个点 使得**切线斜率**等于割线斜率，即：

**(3) 拉格朗日中值定理的应用**

1. **证明某些方程的解的存在性**
2. **证明函数的单调性和凸性**
3. **估计函数的增长速度**
4. **分析物理现象（如平均速度和瞬时速度）**

**3.2 使用注意事项**

**(1) 需要保证函数满足连续性和可导性**

如果 在 不连续，或者在 不可导，则拉格朗日中值定理不一定成立

示例 1：函数不连续  
设：

在 上：

* 处有间断，不满足连续性，无法应用拉格朗日中值定理

示例 2：函数不可导  
设：

在 上：

* 处不可导，因此不满足条件，无法保证存在 使 等于平均变化率

**(2) 不能推断唯一的**

拉格朗日中值定理仅保证**至少存在一个** ，但可能有多个

示例：  
设：

在 上：

* 计算 后会发现有两个满足 的点

**(3) 拉格朗日中值定理可用于估算函数值**

在 的导数已知时，可以用拉格朗日中值定理估算某点的函数值近似

**(4) 拉格朗日中值定理可用于证明不等式**

在某些数学证明中，可利用拉格朗日中值定理推导出函数的不等式关系。例如，设 在 上满足条件，则：

若已知 的符号可确定，则可得：

* **若 恒成立，则 ，即函数递增**
* **若 恒成立，则 ，即函数递减**

示例：利用拉格朗日中值定理证明指数函数 的单调递增性。  
设 ，在 上：

1. 在 上连续，在 内可导
2. 恒成立
3. 由拉格朗日中值定理：其中 ，因 ，可得 ，即 单调递增

**(5) 拉格朗日中值定理的局限性**

尽管定理保证在区间 内至少存在一个 使得 ，但：

* **定理不适用于无穷区间**，仅适用于有限闭区间
* **定理不能保证 的唯一性**，可能存在多个 使得导数等于割线斜率
* **定理无法直接给出函数的具体变化趋势**，只是一个局部结果，无法用于全局行为的分析

**(6) 不能用于不可微函数的估算**

* 在现实应用中，某些不光滑的函数（如分段定义函数、绝对值函数）并不可微，不能直接用拉格朗日中值定理进行分析。例如：
  + 若 ，则在 上， 处不可导，因此定理不适用

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数是否满足拉格朗日中值定理**

**方法**

1. 检查 是否在 上连续
2. 检查 是否在 内可导
3. 计算 并找出满足条件的

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.1-13）**  
**题目**：验证 在 上是否满足拉格朗日中值定理，并求出满足结论的点

**解答**

1. **连续性**：  
    是多项式函数，在 上连续
2. **可导性**：  
    在 内可导
3. **计算割线斜率**：
4. **求导数**：设 ：取 ，则

**(2) 考法 2：应用拉格朗日中值定理证明函数的单调性**

**方法**

1. 计算
2. 通过导数符号分析函数的增减性

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.1-15）**  
**题目**：证明 在 上是增函数

**解答**

1. **计算割线斜率**：
2. **求导数**：在 内，，说明函数单调递增

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.1-13**：验证 在 上是否满足拉格朗日中值定理，并求出满足结论的点  
（2）**课本习题 3.1-15**：证明 在 上是增函数  
（3）**课本习题 3.1-17**：证明 在 上的增长速度不超过   
（4）**课本习题 3.1-19**：分析 在 上是否满足拉格朗日中值定理

**(3) 考法 3：利用拉格朗日中值定理证明不等式**

**方法**

1. 选取适当的函数
2. 计算 并分析其符号
3. 由拉格朗日中值定理得出不等式关系

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.1-21）**  
**题目**：证明对任意 ，有不等式：

**解答**

1. 设 ，在 上应用拉格朗日中值定理，则存在 使得：
2. 计算 ：
3. 由于 ，可得：即：

**(4) 考法 4：拉格朗日中值定理在速度和位移问题中的应用**

**方法**

1. 设物体在 时间内的位移函数为
2. 计算平均速度：
3. 由拉格朗日中值定理，至少存在一个时刻 使得瞬时速度：说明在某个时刻，瞬时速度等于平均速度

**典型例题**  
**例 4（课本习题 3.1-23）**  
**题目**：一辆汽车在 10 秒内行驶了 100 米，证明在这 10 秒内至少有一个时刻，它的瞬时速度等于 10 m/s

**解答**

1. 设汽车的位移函数为
2. 计算平均速度：
3. 由于汽车行驶的轨迹是连续的，且速度随时间变化是可导的，则满足拉格朗日中值定理
4. 因此存在 使得：即在某个时刻，汽车的瞬时速度等于 10 m/s

**(5) 考法 5：拉格朗日中值定理用于误差分析**

**方法**

1. 设 是某种测量值的近似计算函数
2. 通过中值定理估算误差的最大值

**典型例题**  
**例 5（课本习题 3.1-25）**  
**题目**：已知 在 上的最大误差是多少？

**解答**

1. 设误差函数：
2. 在 上应用拉格朗日中值定理，存在 使得：
3. 由于 在 内最大取值为 ，所以最大误差约为：

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.1-13**：验证 在 上是否满足拉格朗日中值定理，并求出满足结论的点  
（2）**课本习题 3.1-15**：证明 在 上是增函数  
（3）**课本习题 3.1-17**：证明 在 上的增长速度不超过   
（4）**课本习题 3.1-19**：分析 在 上是否满足拉格朗日中值定理  
（5）**课本习题 3.1-21**：利用拉格朗日中值定理证明   
（6）**课本习题 3.1-23**：证明某辆汽车在某时刻的瞬时速度等于平均速度

**第三章 第一节：柯西中值定理（Cauchy Mean Value Theorem）**

**3.1 知识点概念**

**(1) 柯西中值定理的内容**

设函数 和 在区间 上满足以下条件

1. **连续性**： 和 在 **闭区间** 上连续
2. **可导性**： 和 在 **开区间** 内可导
3. **在 内成立**

则至少存在一点 使得

即，曲线 与 的切线斜率在某个点 处的比值等于两曲线在端点处的平均变化率之比

**(2) 柯西中值定理的几何意义**

柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广，它的几何意义是：**若两个函数 和 在区间内满足条件，则在区间内至少存在一点 使得两条切线的斜率之比等于两条割线的斜率之比**

特别地，当 时，柯西中值定理就退化为拉格朗日中值定理，即

**(3) 柯西中值定理的应用**

1. **证明函数之间的比值关系**
2. **推导洛必达法则**
3. **物理应用，如速度和加速度的关系**

**3.2 使用注意事项**

**(1) 需要保证 在 内成立**

柯西中值定理的条件比拉格朗日中值定理更严格，必须保证 在区间内可导且 。如果 在某点处，则可能导致分母为零，进而无法应用定理。

示例：设

在 上，计算

当 时，，所以柯西中值定理不可用。

**(2) 柯西中值定理不能推出**

柯西中值定理的结论是

但这并不意味着 ，只有当 时，才能推出 。

**(3) 柯西中值定理可用于推导洛必达法则**

设 ，且 和 满足柯西中值定理，则有

令 ，则得到洛必达法则

**(4) 柯西中值定理适用于比值关系的证明**

在物理和经济学应用中，柯西中值定理可用于分析两个变量的变化率之比。例如，在物理中，若 是位移函数， 是速度函数，则柯西中值定理可以证明在某一时刻，速度和加速度的比值等于平均变化率之比。

**(5) 不能用于不可导或间断函数**

如果 或 在 上不连续，或在 内不可导，则柯西中值定理不适用。例如：

* 设 ， 在 上，因 在 处不可导，柯西中值定理不适用。
* 若 在某点 处有拐点且 ，则定理无法应用。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：判断函数是否满足柯西中值定理**

**方法**

1. 检查 和 是否在 上连续
2. 检查 和 是否在 内可导
3. 检查 是否成立
4. 计算 并找出满足条件的

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.1-27）**  
**题目**：验证 ， 在 上是否满足柯西中值定理，并求出满足结论的点

**解答**

1. 和 在 上连续
2. 和 在 内可导
3. 在 内成立
4. 计算割线斜率：
5. 计算导数：
6. 设 ：

**(2) 考法 2：利用柯西中值定理证明不等式**

**方法**

1. 设 和 为待证不等式涉及的函数
2. 计算 和 并分析其符号
3. 由柯西中值定理得出结论

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.1-29）**  
**题目**：证明对任意 ，有不等式

**解答**

1. 设 ，
2. 和 在 上满足柯西中值定理的条件
3. 存在 使得

**(3) 考法 3：利用柯西中值定理推导洛必达法则**

**方法**

1. 设 和 在某点 处满足极限关系
2. 计算 和
3. 通过极限运算得到洛必达法则

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.1-31）**  
**题目**：利用柯西中值定理推导洛必达法则

**解答**

1. 设
2. 由于 和 在 上满足柯西中值定理，则存在 使
3. 令 ，则

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.1-27**：验证 ， 在 上是否满足柯西中值定理，并求出满足结论的点  
（2）**课本习题 3.1-29**：证明   
（3）**课本习题 3.1-31**：利用柯西中值定理推导洛必达法则

我已收到你上传的**第三章第二节**内容，现在将按照之前的模式进行详细的知识点分析

**第三章 第二节：导数与函数的单调性（Derivative and Monotonicity of Functions）**

**3.1 知识点概念**

**(1) 单调函数的定义**

设函数 在某区间 上定义

* 若对任意 且满足 ，有则称 **在该区间上单调递增（或非减）**
* 若对任意 且满足 ，有则称 **在该区间上单调递减（或非增）**
* 若上述不等式取严格不等（即 或 ），则称 **严格单调递增** 或 **严格单调递减**

**(2) 导数与单调性的关系**

若函数 在区间 内可导，则可通过其导数的符号确定其单调性

* **若 对任意 成立，则 在 上单调递增**
* **若 对任意 成立，则 在 上单调递减**

**(3) 单调性的判别定理**

设函数 在区间 上可导，则

* **若 在 内恒成立，则 在 上严格单调递增**
* **若 在 内恒成立，则 在 上严格单调递减**
* **若 在某些点取值但不恒为零，单调性无法确定**，需进一步分析

**(4) 判断函数单调性的步骤**

1. 计算
2. 求 的解，找到可能的拐点
3. 讨论各区间 的符号
4. 根据符号确定函数在各区间的单调性

**3.2 使用注意事项**

**(1) 仅适用于可导函数**

单调性的导数判别法要求 **在区间内可导**，如果函数在某些点不可导，则不能直接用导数判别法。例如：

* 设 ，它在 上递减，在 上递增，但在 处不可导，因此不能直接通过 判断单调性
* 若函数 在某个点不可导，则需要使用**增量法**或**定义法**判断单调性

**(2) 需要分区间讨论**

如果 在某个区间内改变符号，则必须分区间讨论单调性。例如：

* 设 ，计算导数解 得到临界点 ，然后分区间讨论 的符号

**(3) 存在驻点不代表单调性改变**

当 时，不一定意味着函数在 处改变单调性，需要进一步检查 是否在该点两侧发生符号变化。例如：

* 设 ，计算导数当 时，，但两侧 均为正，因此 在整个区间内单调递增，并没有因 而发生单调性变化

**(4) 端点值在闭区间上的影响**

如果函数在闭区间 上单调，但 在端点处的极限不同，可能会影响整体单调性的判断。例如：

* 设 在 上，，但端点 处 ，仍然可以认为 在 上单调递增

**(5) 需结合极限和导数进行判别**

在某些情况下，导数 在整个区间内的符号相同，但其极限行为可能影响单调性。例如：

* 设 ，计算导数但当 时，，仍然需要结合极限分析单调性

**(6) 函数的单调性与导数的单调性不同**

导数的单调性并不一定决定函数的单调性。例如：

* 设 ，其导数在 递增，在 递减，在 递增，但这并不意味着 在相应区间是递增或递减

**(7) 不能仅凭 判定极值**

驻点 可能是极值点，但也可能不是。例如：

* 设 ，，在 处 ，但 没有极值
* 若需要进一步判定极值，需要使用**二阶导数判别法**

**(8) 对数和指数函数的单调性需结合定义域分析**

对数函数 仅在 内定义，其单调性需结合定义域进行分析。例如：

* 在 内可导，且 ，因此单调递增
* 但在 时函数无定义，因此不能说其在整个实数集上单调递增

**(9) 反函数的单调性需要结合原函数分析**

若 单调递增，则其反函数 也单调递增，若 单调递减，则 也单调递减。例如：

* 设 在 上严格单调递增，则其反函数 在 内也严格单调递增

**(10) 多项式函数的单调性通常通过求导和二阶导数分析**

* 设 ，先求导数 ，再通过二阶导数 进行单调性和凸性的进一步分析

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数判断函数的单调性**

**方法**

1. 计算导数
2. 解方程 找到临界点
3. 在每个区间内检查 的符号
4. 若 则函数在该区间单调递增，若 则函数在该区间单调递减

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.2-5）**  
**题目**：判断函数 的单调性

**解答**

1. 计算导数
2. 解方程 用求根公式解得
3. 将数轴分为三个区间：、、，在各区间内检查 的符号
4. 若 在该区间内，函数递增，若 在该区间内，函数递减

**(2) 考法 2：证明某函数是否单调**

**方法**

1. 计算
2. 若 在整个区间内保持同号，则函数单调

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.2-7）**  
**题目**：证明 在 上严格单调递增

**解答**

1. 计算导数
2. 由于 恒成立，故 在 上单调递增

**(3) 考法 3：单调性与极值的关系**

**方法**

1. 计算 并求解 找到驻点
2. 在驻点两侧检查 的符号
3. 若 在驻点左侧为正，右侧为负，则驻点是**极大值**
4. 若 在驻点左侧为负，右侧为正，则驻点是**极小值**

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.2-9）**  
**题目**：求函数 的极值点

**解答**

1. 计算导数
2. 解方程
3. 在区间 、、 讨论 的符号
4. 结论： 处是极大值， 处是极小值

**(4) 考法 4：利用单调性判断方程根的个数**

**方法**

1. 计算 并分析函数单调性
2. 若 单调递增，则方程 最多有一个解
3. 若 先递增后递减，则方程可能有两个解

**典型例题**  
**例 4（课本习题 3.2-11）**  
**题目**：讨论方程 的根的个数

**解答**

1. 计算导数
2. 令 得到驻点 ，分析 单调性
3. 若 取适当值，方程可能有两个解

**(5) 考法 5：单调性与反函数的关系**

**方法**

1. 若 在某区间严格单调递增，则其反函数 也严格单调递增
2. 若 在某区间严格单调递减，则其反函数 也严格单调递减

**典型例题**  
**例 5（课本习题 3.2-13）**  
**题目**：证明 在 上单调递增

**解答**

1. 由于 在 上单调递增，其反函数 也在 单调递增

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.2-5**：判断 的单调性  
（2）**课本习题 3.2-7**：证明 在 上单调递增  
（3）**课本习题 3.2-9**：求函数 的极值点  
（4）**课本习题 3.2-11**：讨论方程 的根的个数  
（5）**课本习题 3.2-13**：证明 在 上单调递增

**第三章 第三节：导数与函数的极值（Derivatives and Function Extremes）**

**3.1 知识点概念**

**(1) 函数的极值**

设函数 在某个区间内定义，若存在某点 使得：

* **局部极大值**：对任意充分接近 的 ，有则称 为**局部极大值**，点 为**极大值点**。
* **局部极小值**：对任意充分接近 的 ，有则称 为**局部极小值**，点 为**极小值点**。

**(2) 极值点的必要条件——费马定理**

若函数 在某点 处取得极值，且在该点可导，则

即，极值点一定是驻点（导数为 0 的点），但驻点不一定是极值点。

**(3) 极值点的充分条件**

* **一阶导数判别法**（单调性法）：
  + 若 在 左侧为正，在右侧为负，则 为极大值点。
  + 若 在 左侧为负，在右侧为正，则 为极小值点。
* **二阶导数判别法**（凸性法）：
  + 若 ，则 为极小值点。
  + 若 ，则 为极大值点。

**(4) 极值的求法**

1. 计算 并求解 以找到驻点
2. 在驻点两侧检查 的符号或计算
3. 确定极值点及极值大小

**3.2 使用注意事项（详细扩展版）**

**(1) 仅适用于可导函数**

极值的求法依赖于导数，因此要求函数在考察点**可导**。如果函数在某些点不可导，则不能直接使用导数判别法，而需要使用**函数定义或增量法**分析。例如：

* **函数 在 处不可导**，但从定义可知，它在该点取得极小值，因为在左侧递减、右侧递增。
* **分段函数可能在连接点处不可导**，此时需要通过左右极限分析单调性和极值情况，而不能单纯使用导数方法。

**(2) 极值点必须是驻点，但驻点不一定是极值点**

费马定理表明，如果 在某个点取得极值，且可导，则必有 ，即极值点一定是驻点（导数为 0 的点）。但反之不成立，驻点可能只是函数的拐点。例如：

* **函数 的导数 ，当 时，，但它不是极值点，因为函数在该点没有单调性变化。**
* **若 在驻点两侧符号未改变，则该驻点不是极值点。**

**(3) 极值点可能出现在端点**

如果函数定义在闭区间 ，则极值可能出现在驻点**或端点**。此时，仅使用导数求驻点是不够的，还需要检查端点处的函数值。例如：

* **函数 在区间 上，其导数 ，仅在 处为 0，但端点 的函数值更大，因此在该区间的最大值出现在端点而不是驻点。**
* **在闭区间上，求最大最小值的方法是：求导数找到驻点，计算驻点和端点的函数值，比较大小后确定极值。**

**(4) 极值点可能是局部极值，而非全局极值**

* **局部极值**：在某个小区间内最大或最小，但在整个定义域上可能不是最大或最小。例如：
  + **函数 在 处取得极大值，但它不是整个区间上的最大值**，因为 时，。
* **全局极值**：在整个定义域上最大或最小。一般在闭区间问题中，通过对比所有可能极值（驻点、端点）计算来求得。

**(5) 一阶导数判别法的适用范围**

* **当 在某点左右发生符号变化时，可以使用一阶导数判别法**：
  + 若 在 左侧为正、右侧为负，则 为极大值点；
  + 若 在 左侧为负、右侧为正，则 为极小值点；
  + 若 在 两侧符号相同，则 不是极值点。

示例：

* **函数 的导数为 ，解 得到驻点 。**
* **在 上，，在 上 ，在 上 ，因此 是极大值点， 是极小值点。**

**(6) 二阶导数判别法的适用范围**

* **当 存在且不为 0 时，可用二阶导数判别法**：
  + 若 ，则 为极小值点；
  + 若 ，则 为极大值点；
  + 若 ，则二阶导数判别法失效，需要用一阶导数方法或更高阶导数判断。

示例：

* **函数 的导数为 ，解 得到驻点 。**
* **计算二阶导数 进行判别：**
  + ， 为极大值点；
  + ， 为极小值点。

**(7) 极值问题中的常见陷阱**

1. **导数为零的点不一定是极值点**
   * 例： 在 处 ，但该点既不是极大值也不是极小值。
2. **极值点不一定是全局最大或最小**
   * 例： 的极小值 不是全局最小值，函数在无穷远处趋向更小的值。
3. **端点极值不能忽略**
   * 例： 在 上的最小值在端点 ，而不是驻点 处。

**(8) 在闭区间上求极值的方法**

1. **求导找到驻点**：解 确定驻点；
2. **计算驻点的函数值**；
3. **计算区间端点的函数值**；
4. **比较驻点和端点的函数值，选出最大最小值**。

示例：

* **函数 在 上的最大最小值**
  + 计算驻点 处的函数值；
  + 计算端点 处的函数值；
  + 比较得出区间内的最大最小值。

**(9) 多项式函数的极值**

* **多项式函数的极值通常可以通过一阶或二阶导数求得**，并且极值点的个数最多为多项式的最高次幂减 1。
* 例：三次函数最多有 2 个极值点，四次函数最多有 3 个极值点。

**(10) 反函数的极值**

* 若 在某点 处有极值，且 可逆，则反函数 在相应的 处也具有极值，极值类型相同。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数判断极值**

**方法**

1. 计算 并解 找到驻点
2. 在驻点两侧检查 的符号，或计算
3. 若 在驻点左侧为正、右侧为负，则该点是极大值点
4. 若 在驻点左侧为负、右侧为正，则该点是极小值点
5. 若 在驻点两侧符号相同，则该点不是极值点

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.3-5）**  
**题目**：求函数 的极值点

**解答**

1. 计算导数
2. 解 用求根公式解得
3. 讨论驻点两侧 的符号，若符号改变，则确定该点为极值点

**(2) 考法 2：利用极值判断方程根的个数**

**方法**

1. 计算 找到极值点
2. 讨论方程 的解的情况
3. 若 有两个极值点，且 在极值之间，则方程可能有两个解
4. 若 取极值点对应的函数值，则方程可能有唯一解
5. 若 超出极值范围，则方程可能无解

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.3-7）**  
**题目**：讨论方程 的根的个数

**解答**

1. 计算导数
2. 令 ，得到驻点
3. 计算极值 和 ，判断 取值对方程解的影响

**(3) 考法 3：极值点与函数最大最小值**

**方法**

1. 计算 找极值点
2. 在闭区间上，还需计算端点值
3. 比较极值和端点值，确定最大最小值

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.3-9）**  
**题目**：求函数 在 上的最大最小值

**解答**

1. 计算
2. 找极值点并计算 值
3. 计算端点 和 的值
4. 选取最大最小值

**(4) 考法 4：极值点与单调性的关系**

**方法**

1. 计算 找驻点
2. 在驻点两侧讨论单调性变化
3. 结合单调性和极值点，判断函数的整体变化趋势

**典型例题**  
**例 4（课本习题 3.3-11）**  
**题目**：证明函数 在 内的单调性

**解答**

1. 计算导数
2. 由于 恒成立，故 在 上单调递增

**(5) 考法 5：利用二阶导数判别极值**

**方法**

1. 计算 找驻点
2. 计算 并在驻点处求值
3. 若 则该点是极小值点，若 则该点是极大值点

**典型例题**  
**例 5（课本习题 3.3-13）**  
**题目**：求函数 的极值点

**解答**

1. 计算 ，解 得到驻点
2. 计算二阶导数 并判别极值

**(6) 考法 6：极值与函数拐点的区别**

**方法**

1. 极值点是由一阶导数判别的，拐点是由二阶导数判别的
2. 若 且 ，则是极值点
3. 若 且 ，则是拐点

**典型例题**  
**例 6（课本习题 3.3-15）**  
**题目**：求函数 的拐点

**解答**

1. 计算二阶导数 ，解
2. 计算三阶导数 并判别拐点

**(7) 考法 7：极值点与反函数的关系**

**方法**

1. 若 在某点 处有极值，且 可逆，则反函数 在相应的 处也具有极值，极值类型相同

**典型例题**  
**例 7（课本习题 3.3-17）**  
**题目**：证明 在 上单调递增

**解答**

1. 由于 在 上单调递增，其反函数 也在 单调递增

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.3-5**：求函数 的极值点  
（2）**课本习题 3.3-7**：讨论方程 的根的个数  
（3）**课本习题 3.3-9**：求函数 在 上的最大最小值

**第三章 第四节：函数单调性判定法**

**3.1 知识点概念**

**(1) 利用导数判定函数的单调性**

设函数 在区间 内可导，则

* 若 对任意 成立，则 在 上单调递增
* 若 对任意 成立，则 在 上单调递减

**(2) 单调性的判别步骤**

1. **计算导数**
2. **解方程**  找到驻点
3. **分区间讨论 的符号**
4. **根据符号变化确定单调性**

**(3) 单调性判定的特殊情况**

* 若 在某个区间内恒成立，则函数在该区间上为**常数函数**
* 若 在驻点两侧符号不变，则该驻点不是极值点，但函数在该区间仍保持单调性

**(4) 利用二阶导数判定单调性**

设 在区间 内具有二阶导数，则

* 若 ，则 单调递增，即 单调递增
* 若 ，则 单调递减，即 单调递减

**3.2 使用注意事项**

**(1) 适用于可导函数**

单调性的判别方法主要依赖于导数，因此要求函数在研究区间**连续且可导**。如果函数在某些点不可导，则不能直接用导数判别法，而需结合定义分析。例如：

* **函数 在 处不可导**，因此不能使用导数方法判断其单调性，而需要直接分析函数值在两侧的变化情况，发现其左侧单调递减，右侧单调递增。
* **分段函数**可能在拼接点不可导，例如在 处导数左右极限不相等，因此无法用导数判别法判断整个函数的单调性。

**(2) 需要分区间讨论**

如果 在区间内存在多个零点或不连续点，则必须分区间讨论。尤其是当 可能改变符号时，需要找到所有临界点并在不同区间分别判定单调性。例如：

* **函数**  的导数为解方程 得到驻点 ，然后必须分区间讨论 的符号，以确定函数的单调性。

**(3) 需结合极限分析单调性**

在某些情况下，即使导数在某一区间内一直为零或不确定的形式，仍需要结合极限分析单调性。例如：

* **函数**  的导数说明该函数在 上单调递增。但其极限行为 和 需要结合分析，以确保单调性结论的正确性。

**(4) 二阶导数判定法的局限性**

二阶导数可以用于判定**导数 的变化趋势**，但不能直接用于判断函数单调性。

* 若 ，则 单调递增，**但这并不意味着 也是递增的**。
* 若 ，则 单调递减，**但 可能仍然是递增的**。
* 例如，**函数**  在 处的二阶导数为但 ，所以无法直接使用二阶导数判别法判断单调性。

**(5) 单调性和极值的关系**

* 若 在某点两侧发生符号变化，则该点为极值点；
* 若 在某点两侧符号不变，则该点不是极值点，而是单调递增或递减的持续部分。

示例：  
**函数**  的导数为

求 得到驻点 ，再在各区间检查 的符号，确定 为极大值点， 为极小值点。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用一阶导数判定函数的单调性**

**方法**

1. 计算
2. 解 找驻点
3. 在驻点两侧检查 的符号
4. 若 在该区间内，函数递增，若 在该区间内，函数递减

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.4-5）**  
**题目**：判断函数 的单调性

**解答**

1. 计算导数
2. 解 用求根公式解得
3. 在驻点两侧讨论 的符号，确定单调性

**(2) 考法 2：利用二阶导数判定函数的单调性**

**方法**

1. 计算 并求
2. 若 ，则 单调递增
3. 若 ，则 单调递减

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.4-7）**  
**题目**：证明 在 上单调递增

**解答**

1. 计算导数
2. 计算二阶导数
3. 由于 恒成立，故 在 上单调递增

**(3) 考法 3：利用单调性求解方程的根的个数**

**方法**

1. 计算 并讨论函数单调性
2. 若 单调递增，则方程 最多有一个解
3. 若 先递增后递减，则方程可能有两个解

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.4-9）**  
**题目**：讨论方程 的根的个数

**解答**

1. 计算导数
2. 解 得到驻点
3. 计算极值 和 ，判断 取值对方程解的影响

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.4-5**：判断 的单调性  
（2）**课本习题 3.4-7**：证明 在 上单调递增  
（3）**课本习题 3.4-9**：讨论方程 的根的个数

**第三章 第四节：曲线的凹凸性与拐点**

**3.1 知识点概念**

**(1) 函数的凹凸性**

设函数 在区间 内具有二阶导数，定义如下：

* 若 在 上恒成立，则称 **在 上是凹向上的**（或称为凸函数）
* 若 在 上恒成立，则称 **在 上是凹向下的**（或称为凹函数）

**几何意义**：

* 若曲线凹向上，则其切线始终在曲线上方
* 若曲线凹向下，则其切线始终在曲线下方

**(2) 凹凸性的判别法**

设函数 在区间 上具有二阶导数，则：

* 若 对 恒成立，则 在 上凹向上
* 若 对 恒成立，则 在 上凹向下
* 若 在某些点改变符号，则该点可能是拐点，需要进一步判定

**(3) 拐点的定义**

若函数 在某点 处的二阶导数 **从正变负或从负变正**，即 在该点发生符号变化，则称 为**拐点**，即曲线在该点处改变凹凸性。

**(4) 拐点的判别法**

设函数 在某点 处二阶导数存在，则：

* 若 在 两侧符号不同，则 是拐点
* 若 在 两侧符号相同，则 不是拐点

**3.2 使用注意事项**

**(1) 适用于可导函数**

单调性的判别方法主要依赖于导数，因此要求函数在研究区间**连续且可导**。如果函数在某些点不可导，则不能直接用导数判别法，而需结合定义分析。例如：

* **函数 在 处不可导**，因此不能使用导数方法判断其单调性，而需要直接分析函数值在两侧的变化情况，发现其左侧单调递减，右侧单调递增。
* **分段函数**可能在拼接点不可导，例如在 处导数左右极限不相等，因此无法用导数判别其整体单调性，而需结合左、右极限来分析。

**(2) 需要分区间讨论**

如果 在区间内存在多个零点或不连续点，则必须分区间讨论。尤其是当 可能改变符号时，需要找到所有临界点并在不同区间分别判定单调性。例如：

* **函数 的导数**解方程 得到驻点 ，然后必须分区间讨论 的符号，以确定函数的单调性。

**(3) 需结合极限分析单调性**

在某些情况下，即使导数在某一区间内一直为零或不确定的形式，仍需要结合极限分析单调性。例如：

* **函数 的导数**说明该函数在 上单调递增。但其极限行为 和 需要结合分析，以确保单调性结论的正确性。

**(4) 二阶导数判定法的局限性**

二阶导数可以用于判定**导数 的变化趋势**，但不能直接用于判断函数单调性。

* 若 ，则 单调递增，**但这并不意味着 也是递增的**。
* 若 ，则 单调递减，**但 可能仍然是递增的**。
* 例如，**函数**  在 处的二阶导数为但 ，所以无法直接使用二阶导数判别法判断单调性，需要进一步分析。

**(5) 单调性和极值的关系**

* 若 在某点两侧发生符号变化，则该点为极值点；
* 若 在某点两侧符号不变，则该点不是极值点，而是单调递增或递减的持续部分。

示例：  
**函数**  的导数为

求 得到驻点 ，再在各区间检查 的符号，确定 为极大值点， 为极小值点。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用一阶导数判定函数的单调性**

**方法**

1. 计算
2. 解 找驻点
3. 在驻点两侧检查 的符号
4. 若 在该区间内，函数递增，若 在该区间内，函数递减

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.4-5）**  
**题目**：判断函数 的单调性

**解答**

1. 计算导数
2. 解 用求根公式解得
3. 在驻点两侧讨论 的符号，确定单调性

**(2) 考法 2：利用二阶导数判定函数的单调性**

**方法**

1. 计算 并求
2. 若 ，则 单调递增
3. 若 ，则 单调递减

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.4-7）**  
**题目**：证明 在 上单调递增

**解答**

1. 计算导数
2. 计算二阶导数
3. 由于 恒成立，故 在 上单调递增

**(3) 考法 3：利用单调性求解方程的根的个数**

**方法**

1. 计算 并讨论函数单调性
2. 若 单调递增，则方程 最多有一个解
3. 若 先递增后递减，则方程可能有两个解

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.4-9）**  
**题目**：讨论方程 的根的个数

**解答**

1. 计算导数
2. 解 得到驻点
3. 计算极值 和 ，判断 取值对方程解的影响

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.4-11**：判断 的凹凸性  
（2）**课本习题 3.4-13**：求 的拐点  
（3）**课本习题 3.4-15**：判断 在 上的凹凸性

**第三章 第五节：函数的极值与其求法**

**3.1 知识点概念**

**(1) 函数的极值定义**

设函数 在某个区间 内定义，若存在某点 使得：

* **局部极大值**：在 的某个邻域内， 对所有 成立，则称 为**局部极大值**， 为**极大值点**。
* **局部极小值**：在 的某个邻域内， 对所有 成立，则称 为**局部极小值**， 为**极小值点**。

**(2) 极值点的必要条件——费马定理**

**定理内容**：若 在某点 处取得极值，且该点处**可导**，则必有

即极值点一定是驻点（导数为 0 的点），但驻点不一定是极值点。

**(3) 极值点的充分条件**

* **一阶导数判别法（单调性法）**：
  + 若 在 左侧为正，在右侧为负，则 是**极大值点**。
  + 若 在 左侧为负，在右侧为正，则 是**极小值点**。
  + 若 在 两侧符号相同，则 不是极值点。
* **二阶导数判别法（凸性法）**：
  + 若 ，则 是**极小值点**。
  + 若 ，则 是**极大值点**。
  + 若 ，二阶导数判别法失效，需要进一步分析高阶导数。

**(4) 极值的求法**

1. 计算 ，并解 以找到驻点。
2. 通过一阶导数或二阶导数的方法判断驻点是否为极值点。
3. 计算极值点处的函数值 。

**3.2 使用注意事项**

**(1) 最大最小值可能出现在驻点、端点或不可导点**

* **驻点（导数为 0 的点）**：若函数 在某点 可导，且 ，则 可能是最值点，但需要进一步判断。
* **端点**：如果 在闭区间 内定义，则最值可能出现在端点 或 。
* **不可导点**：若 在 处不可导（如绝对值函数 在 处），仍需检查是否为最大或最小值点。

**(2) 极值不一定是最大最小值**

极值仅表示函数在某个小范围内的最高点或最低点，不代表它是整个区间的最大或最小值。例如：

* **函数**  在 处取得极大值，但该点不是全局最大值，因为 在无穷远处趋向更大的值。
* **函数**  在 处有驻点，但它既不是极大值也不是极小值。

**(3) 端点可能是唯一的最大最小值点**

在闭区间 上，如果函数在整个区间内单调递增或递减，则端点是唯一的最大或最小值。例如：

* **函数**  在 上单调递增，因此最大值出现在 ，最小值出现在 。

**(4) 需检查函数是否连续**

最大最小值定理要求函数在闭区间上连续。如果函数在某些点不连续，则最大或最小值可能不存在。例如：

* **函数 在 上没有最小值，因为 时** 。

**(5) 在无界区间上求最值需要结合极限分析**

如果函数定义在无界区间上，则最大或最小值可能不存在，或者需要结合极限分析。例如：

* **函数 在 上的最大值不存在，但最小值是** 。

**(6) 单调性可用于快速判断最大最小值**

若函数在整个区间上单调递增或递减，则最大或最小值一定出现在端点。例如：

* **函数**  在 上单调递增，因此最大值出现在 ，最小值出现在 。

**(7) 二阶导数判别法可辅助判断最值**

如果函数的二阶导数存在，可用二阶导数判别法来判断极值是否是最值：

* 若 ，则 在 处为极小值，但仍需对比端点值来判断是否是最小值。
* 若 ，则 在 处为极大值，但仍需对比端点值来判断是否是最大值。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数求闭区间上的最大最小值**

**方法**

1. 计算导数 ，求驻点（解方程 ）。
2. 计算驻点和端点的函数值。
3. 取最大值和最小值。

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.5-11）**  
**题目**：求函数 在 上的最大最小值。

**解答**

1. 计算导数
2. 解
3. 计算驻点和端点的函数值
4. 取最大值和最小值：最大值为 2，最小值为 -2。

**(2) 考法 2：判断无界区间上的最大最小值**

**方法**

1. 计算导数 判断单调性。
2. 结合极限分析函数的取值范围。

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.5-13）**  
**题目**：求函数 在 上的最值。

**解答**

1. 计算导数说明 单调递增。
2. 计算极限结论：最大值不存在，最小值为 0。

**(3) 考法 3：利用单调性求最大最小值**

**方法**

1. 计算导数 并讨论函数单调性。
2. 若 单调递增，则最大值出现在区间右端点，最小值出现在左端点；若 单调递减，则相反。

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.5-15）**  
**题目**：求函数 在 上的最大最小值。

**解答**

1. 计算导数说明 单调递减。
2. 计算端点值结论：最大值为 ，最小值为 。

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.5-11**：求函数 在 上的最大最小值  
（2）**课本习题 3.5-13**：求函数 在 上的最值  
（3）**课本习题 3.5-15**：求函数 在 上的最大最小值

**第三章 第六节：函数的图形描绘**

**3.1 知识点概念**

**(1) 函数图形描绘的基本步骤**

在研究函数的图像时，通常需要结合以下几个关键步骤：

1. **定义域与奇偶性分析**：确定函数的定义范围，并判断其是否具有对称性（偶函数或奇函数）。
2. **单调性与极值分析**：求导数 并判断函数的单调区间和极值点。
3. **凹凸性与拐点分析**：求二阶导数 并判断凹凸区间以及拐点。
4. **渐近线分析**：研究函数的水平渐近线、竖直渐近线或斜渐近线。
5. **特殊点的计算**：计算零点、交点等关键点，以辅助绘制函数图形。
6. **整体趋势归纳**：结合所有分析，描绘函数的大致形状。

**(2) 解析对称性**

* **偶函数** ：关于 轴对称，例如 。
* **奇函数** ：关于原点对称，例如 。

**(3) 渐近线**

* **水平渐近线**：，则 为水平渐近线。
* **垂直渐近线**：分母为 0 且分子不为 0 时，可能存在垂直渐近线。
* **斜渐近线**：当 时， 为斜渐近线。

**3.2 使用注意事项**

**(1) 端点处的连续性**

* 如果函数定义在区间 ，应当检查端点的左右极限是否相等，以保证图像的连接性。

**(2) 在驻点附近的变化趋势**

* 通过一阶导数的符号变化，判断函数在极值点附近是上升还是下降，从而更精确地描绘图像。

**(3) 需要结合二阶导数确定凹凸性**

* 时，图像是凸向上的（凹口向上）。
* 时，图像是凸向下的（凹口向下）。

**(4) 渐近线的正确应用**

* 水平渐近线表明函数在无穷远处的行为，不能用于局部绘制。
* 竖直渐近线处函数值趋于无穷大或无穷小，绘制时应在该处断开。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用导数描绘函数图像**

**方法**

1. 计算导数 并求驻点。
2. 计算二阶导数 以确定凹凸性。
3. 确定函数的单调性区间，并结合拐点、极值点绘制图像。

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.6-5）**  
**题目**：描绘函数 的大致图像。

**解答**

1. 计算导数
2. 解
3. 计算二阶导数 在 处改变符号，因此 是拐点。
4. 结合极值点、拐点、单调区间，绘制大致图像。

**(2) 考法 2：分析渐近线**

**方法**

1. 计算 判断水平渐近线。
2. 计算分母为 0 的点并分析极限，确定垂直渐近线。
3. 计算 判断斜渐近线。

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.6-9）**  
**题目**：求函数 的渐近线并画出草图。

**解答**

1. 计算水平渐近线水平渐近线 。
2. 计算竖直渐近线竖直渐近线 。
3. 结合单调性分析，绘制大致图像。

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.6-5**：描绘函数 的大致图像  
（2）**课本习题 3.6-9**：求函数 的渐近线并画出草图  
（3）**课本习题 3.6-11**：分析函数 的图像特征

**第三章 第七节：弧微分**

**3.1 知识点概念**

**(1) 弧长的基本概念**

在曲线几何中，若曲线 在区间 上具有连续的导数，则其微小段弧长可用微分的方式来表示。设曲线的参数方程为

则该曲线上一点 处的微小弧长 可表示为

**(2) 平面曲线的弧长微分公式**

当曲线以直角坐标形式 给出时

当曲线以参数方程 给出时

当曲线以极坐标形式 给出时

**(3) 弧长公式**

曲线从 到 的弧长 由积分计算  
**直角坐标形式**

**参数方程形式**

**极坐标形式**

**3.2 使用注意事项**

**(1) 适用曲线的光滑性要求**

* 计算弧长时，要求曲线 在区间内连续可微，即 存在并连续。如果曲线存在尖点或不可导点，需要分段计算弧长。例如：
  + **函数 在 处不可导**，因此不能直接用弧长公式计算全区间弧长，需要分左右两部分积分。
  + **分段函数可能在拼接点不可导**，例如：在 处导数左右极限不同，因此无法直接用弧长积分计算完整的弧长，需要分段计算。

**(2) 选择适当的坐标系进行计算**

* 在某些情况下，使用参数方程或极坐标比直角坐标更方便。例如：
  + 对于圆 ，用极坐标 更方便计算弧长，而不是直接用 。
  + 对于螺线 ，用极坐标计算弧长比用直角坐标积分更直观。

**(3) 计算弧长时要选取正确的积分区间**

* 若曲线是对称的，可以利用对称性简化积分计算。例如：
  + 计算**半圆**  上半部分的弧长时，只需计算 从 到 的弧长，并利用对称性得出完整弧长：
  + **计算闭合曲线的弧长时，积分区间应覆盖完整的一周**，如圆的弧长应从 到 。

**(4) 在极坐标中，小心 的影响**

* 计算极坐标曲线弧长时，若 在某些点处不连续，需要分段积分。例如：
  + **极坐标曲线 在 处的导数为零**，但在更大 处增大，因此计算弧长时应避免忽略导数的影响。

**(5) 计算过程中可能需要近似方法**

* 若积分无法解析求解，可使用**数值积分方法**（如梯形法、辛普森法）进行近似计算。例如：
  + 计算 在 上的弧长时：由于无法求出解析解，可以使用数值积分方法得到近似值。

**(6) 渐近线的存在可能影响弧长的收敛性**

* 若函数在某个点趋于无穷大，则弧长积分可能发散。例如：
  + 函数 在 上的弧长：由于 时，积分趋于无穷大，因此弧长不收敛。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用直角坐标公式计算弧长**

**方法**

1. 计算导数
2. 带入弧长公式：

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.7-5）**  
**题目**：求曲线 在区间 上的弧长。

**解答**

1. 计算导数：
2. 计算弧长：由于该积分无法直接求出解析解，可使用数值积分方法。

**(2) 考法 2：利用参数方程计算弧长**

**方法**

1. 计算 和
2. 带入弧长公式：

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.7-9）**  
**题目**：求圆 在区间 上的弧长。

**解答**

1. 计算微分：
2. 计算弧长：

**(3) 考法 3：利用极坐标公式计算弧长**

**方法**

1. 计算
2. 带入弧长公式：

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.7-11）**  
**题目**：求螺线 在 上的弧长。

**解答**

1. 计算微分：
2. 计算弧长：由于积分较复杂，可用数值积分方法计算。

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.7-5** 求曲线 在 上的弧长  
（2）**课本习题 3.7-9** 求圆 在 上的弧长  
（3）**课本习题 3.7-11** 求螺线 在 上的弧长

**第三章 第七节：曲率及计算公式**

**3.1 知识点概念**

**(1) 曲率的基本概念**

曲率描述了曲线在某一点的弯曲程度。曲率越大，曲线在该点的弯曲程度越大；曲率越小，曲线越接近一条直线。曲率的数学定义是单位切向量随弧长变化的速率，即

其中 是曲线在该点的切线方向， 是曲线的弧长参数。

**(2) 曲率的计算公式**

对于不同形式的曲线，其曲率的计算公式不同：

**直角坐标系曲率公式**  
若曲线以直角坐标表示为 ，其曲率计算公式为

若曲线以参数方程 表示，则曲率公式为

其中 是对参数 求导， 是二阶导数。

**极坐标系曲率公式**  
若曲线以极坐标形式 给出，则曲率计算公式为

**(3) 曲率半径**

曲率半径 定义为曲率的倒数，即

曲率半径反映了曲线在该点附近的局部近似圆的半径。曲率半径越大，曲线越平缓；曲率半径越小，曲线越弯曲。

**3.2 使用注意事项**

**(1) 适用于二阶可微曲线**

计算曲率圆时，要求曲线至少具有二阶导数，即曲线的曲率 存在并连续。如果曲线在某点不可导或曲率为零，则曲率圆的概念不适用。例如：

* **函数 在 处不可导，因此无法计算曲率圆**
* **直线的曲率为零，因此其曲率圆的半径为无穷大，即曲率圆退化为直线本身**
* **对于分段函数，在拼接点处如果导数不连续，无法直接使用曲率圆计算方法**

**(2) 曲率圆的方向由法线方向决定**

曲率圆的圆心沿着曲线的法线方向，因此计算时需要注意法线的方向。对于曲线 ，曲率圆圆心的计算公式为

如果法线方向计算错误，可能导致曲率圆的位置出错，进而影响计算结果

**(3) 曲率半径的大小决定曲线的弯曲程度**

曲率半径越大，曲线越平缓，曲率圆的半径更接近直线。例如：

* **圆的曲率半径等于圆的半径，且曲率在圆上每一点都相同**
* **抛物线 在不同点处的曲率半径不同，远离原点的点曲率半径较大，表示曲线变得更平缓**

**(4) 计算曲率半径时应检查单位一致性**

如果曲率 取绝对值，则曲率半径 也应保持正值。例如：

* 在物理计算中，若曲率半径涉及单位（如米），需确保计算时单位统一，避免因单位转换错误导致的计算偏差

**(5) 在极坐标中计算曲率半径时，应检查 的可微性**

如果 在某点不可导或其二阶导数不连续，需要分段计算曲率圆。例如：

* **螺旋线 在 处具有特殊性，需要单独分析该点的曲率圆**
* **如果曲线在某些点处存在跳跃或拐点，则曲率圆的计算可能不适用**

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用直角坐标公式计算曲率半径**

**方法**

1. 计算一阶导数 和二阶导数
2. 代入曲率半径公式
3. 若曲率半径趋于无穷大，说明该点处曲线接近直线

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.7-21）**  
**题目** 求曲线 在 处的曲率半径

**解答**

1. 计算导数
2. 计算曲率半径，在 处计算得 ，表示该点处曲线较平坦

**(2) 考法 2：利用参数方程计算曲率圆**

**方法**

1. 计算 和
2. 代入曲率半径和曲率中心公式
3. 计算曲率圆心坐标

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.7-23）**  
**题目** 求圆 的曲率半径

**解答**

1. 计算微分
2. 计算曲率半径结果为 ，说明圆的曲率半径就是其本身的半径

**(3) 考法 3：利用极坐标公式计算曲率半径**

**方法**

1. 计算 和
2. 代入曲率半径公式

**典型例题**  
**例 3（课本习题 3.7-25）**  
**题目** 计算螺线 在 处的曲率圆半径及曲率中心

**解答**

1. 计算微分
2. 计算曲率半径
3. 计算曲率圆心坐标（需结合极坐标单位法向量）

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.7-21** 求曲线 在 处的曲率半径  
（2）**课本习题 3.7-23** 求圆 的曲率半径  
（3）**课本习题 3.7-25** 计算螺线 在 处的曲率圆半径及曲率中心

**第三章 第八节：二分法**

**3.1 知识点概念**

**(1) 二分法的基本概念**

二分法（Bisection Method）是一种数值方法，用于在某个区间内寻找函数的根。其基本思想是利用函数在区间端点的符号变化，逐步缩小区间，从而逼近方程 的解。

二分法适用于连续函数 在区间 上，如果 和 符号相反，即 ，根据零点存在定理，函数在该区间内至少有一个根。

**(2) 二分法的计算步骤**

1. 选择初始区间 ，确保
2. 计算区间中点 ：
3. 计算 并判断：
   * 若 ，则 为方程的根
   * 若 ，说明根在 ，令
   * 若 ，说明根在 ，令
4. 继续迭代，直到满足给定的误差精度

**(3) 收敛性分析**

二分法的误差在第 次迭代后满足

其中 为实际的根。由于每次迭代都会将区间缩小一半，因此二分法的收敛速度为**线性收敛**，收敛速度较慢。

**(4) 适用范围**

* 适用于**单根存在的连续函数**，要求 在区间 内至少有一个根
* 不能用于**多个根的情况**，如果区间内有多个根，可能会收敛到某个特定根
* 适用于**非导数可求的函数**，因为方法仅依赖于函数值的符号，而不涉及导数计算

**3.2 使用注意事项**

**(1) 初始区间必须满足零点定理条件**

* 选定的区间 必须保证 ，否则方法无效
* 如果 ，需要重新选择区间或使用其他方法

**(2) 不能处理重根或多根的情况**

* 若函数在区间 内有多个根，二分法可能会收敛到一个特定的根，而无法找到所有根
* 若函数有重根（如 ），则 ，二分法无法找到根

**(3) 计算精度由区间长度决定**

* 误差范围与迭代次数成指数关系，每次迭代误差减少一半，因此要求较高精度时，需要进行较多次迭代

**(4) 收敛速度较慢**

* 二分法的收敛速度较慢，仅为线性收敛，相较于牛顿法（切线法）等方法，其效率较低

**(5) 适用于求解无导数函数的根**

* 二分法仅依赖于函数值，不需要计算导数，因此适用于不可导或导数难以计算的情况，如分段函数、特殊函数等

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用二分法求方程的近似解**

**方法**

1. 选取初始区间 ，确保
2. 计算中点 ，并判断 的符号
3. 根据符号变化选择新的区间，并继续迭代，直到满足精度要求

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.8-5）**  
**题目** 用二分法求方程 在区间 内的近似解，精度要求

**解答**

1. 计算函数值

由于 ，可以使用二分法

1. 计算中点

由于 ，更新区间为

1. 继续迭代，直到满足 ，最终得到近似解

**(2) 考法 2：比较二分法与其他求根方法的优劣**

**方法**

1. 分析二分法的优缺点
2. 与牛顿法（切线法）、割线法进行比较，判断不同方法适用的场景

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.8-9）**  
**题目** 比较二分法与牛顿法在求解方程 时的收敛速度

**解答**

1. 二分法需要不断缩小区间，每次减少一半误差，收敛较慢
2. 牛顿法利用导数加速迭代，通常具有二次收敛速度，在初值合适时比二分法快得多
3. 若函数导数难以计算或存在不连续点，二分法仍然是较稳健的选择

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.8-5** 用二分法求解方程 在 内的近似解，精度要求   
（2）**课本习题 3.8-7** 用二分法求方程 在 内的根  
（3）**课本习题 3.8-9** 比较二分法与牛顿法的收敛速度

**第三章 第八节：切线法（牛顿法）**

**3.1 知识点概念**

**(1) 切线法（牛顿法）的基本概念**

切线法（Newton’s Method）是一种快速收敛的数值方法，用于寻找方程 的近似解。其基本思想是利用函数在某点的**切线**来近似函数的行为，从而快速迭代逼近根。

牛顿法的迭代公式为：

其中 是当前近似解， 是新的近似解， 是函数在 处的导数。

**(2) 牛顿法的计算步骤**

1. 选择一个初始值 （通常靠近根）
2. 计算函数值 和导数值
3. 用牛顿迭代公式计算新的近似解
4. 继续迭代，直到满足误差精度

**(3) 牛顿法的收敛性**

* **局部二次收敛**：如果初值 选得好，牛顿法的误差在每次迭代时大约减少平方倍，即误差收敛速度远快于二分法
* **对初值依赖较强**：如果 选得不好，可能会导致牛顿法收敛缓慢甚至发散

**(4) 适用范围**

* 适用于**导数易计算的连续函数**，要求 在区间内可导，且
* 不能用于**无导数或导数为零的情况**，如在极值点求根可能会遇到分母为零的问题
* 适用于**单根求解问题**，若函数存在多个根，需选取合适的初值才能正确收敛

**3.2 使用注意事项**

**(1) 初始点的选择对收敛速度影响大**

* 若初始点靠近实际根，牛顿法的收敛速度极快，通常在数次迭代后即可获得高精度近似解
* 若初始点选得不好，可能会远离真实解，甚至导致方法发散

**(2) 牛顿法可能失效的情况**

* **导数为零的情况**：如果 ，则迭代公式分母为零，方法失效。例如：在 处，牛顿法无法继续迭代
* **函数存在拐点或极值点**：如果初始点位于函数的拐点或极值点附近，牛顿法可能会收敛到错误的解
* **函数非单调时可能产生震荡**：如果 在不同区间内存在多个零点，牛顿法可能在不同根之间跳跃，导致收敛不稳定

**(3) 牛顿法通常优于二分法，但计算成本较高**

* 牛顿法比二分法收敛更快，通常只需较少的迭代次数即可得到高精度解
* 但牛顿法需要计算导数 ，而二分法仅需要计算函数值，因此牛顿法在某些情况下计算成本较高

**(4) 牛顿法的收敛性分析**

* 牛顿法的误差收敛满足二次收敛关系：其中 是实际的根， 是一个常数。
* 这意味着，若初值选得好，每次迭代的误差减少平方倍，收敛速度远快于二分法（线性收敛）。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用牛顿法求方程的近似解**

**方法**

1. 选择一个合适的初始点
2. 计算导数
3. 使用牛顿迭代公式
4. 继续迭代，直到满足精度要求

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.8-11）**  
**题目** 用牛顿法求方程 在 处的近似解，精度要求

**解答**

1. 计算函数及导数
2. 设 ，计算
3. 继续迭代，直到满足 ，最终得到近似解

**(2) 考法 2：比较牛顿法与二分法的收敛速度**

**方法**

1. 比较二分法和牛顿法的收敛阶数
2. 通过迭代次数计算不同方法的误差变化

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.8-13）**  
**题目** 比较二分法与牛顿法在求解 时的收敛速度

**解答**

1. 二分法收敛速度较慢，每次迭代区间减半，误差满足：
2. 牛顿法收敛速度更快，每次迭代误差平方减少：
3. 在实际计算中，牛顿法通常需要较少的迭代次数即可达到同样精度

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.8-11** 用牛顿法求解方程 在 处的近似解，精度要求   
（2）**课本习题 3.8-13** 比较二分法与牛顿法的收敛速度  
（3）**课本习题 3.8-15** 对比牛顿法和割线法的误差变化

**第三章 第八节：割线法**

**3.1 知识点概念**

**(1) 割线法的基本概念**

割线法（Secant Method）是一种数值方法，用于求解方程 的近似解。割线法是牛顿法（切线法）的变形，它用两点间的割线代替切线，因此不需要计算导数。其迭代公式为

其中， 和 是前两次迭代的近似解， 和 分别是它们对应的函数值。

**(2) 割线法的计算步骤**

1. 选择两个初始点 和 ，确保
2. 计算新的近似解
3. 继续迭代，直到满足精度要求

**(3) 收敛性分析**

* **超线性收敛**：割线法的收敛速度介于牛顿法（二次收敛）和二分法（线性收敛）之间，其误差收敛率约为 （黄金比例）。
* **对初值的依赖性较强**：若初始点选取得不好，割线法可能收敛较慢或不收敛。

**(4) 适用范围**

* 适用于**无导数的连续函数**，因为割线法不依赖于导数，只需要函数值。
* 适用于**单根的求解**，若方程在某个区间内存在多个根，割线法可能会收敛到不同的根。
* 不能用于**函数值变化很小的情况**，如果 ，则分母接近零，方法可能失败。

**3.2 使用注意事项**

**(1) 选取合适的初值以保证收敛**

* 初值 和 需要靠近实际根，过远的初值可能导致收敛速度慢或发散。
* 选取的初值不宜使得 和 太接近，否则计算过程中可能会出现数值不稳定性。

**(2) 可能遇到分母接近零的问题**

* 若 ，则分母很小，割线法可能会产生数值误差甚至失败。
* 解决方法：当 过小时，可以改用二分法或调整初值。

**(3) 计算过程中可能出现跳跃现象**

* 如果函数在某些区间剧烈变化，割线法可能会跳过根，导致迭代不稳定。
* 例如，在方程 中，若初始点选在较远的区间，割线法可能直接跳过 附近的根。

**(4) 割线法在某些情况下比牛顿法更稳定**

* 对于牛顿法，若 在某些点处接近 0，则牛顿法可能会失败。
* 割线法不需要计算导数，因此可以避免这种情况，特别适用于函数导数难以计算的情况。

**3.3 考点与考法总结**

**(1) 考法 1：利用割线法求方程的近似解**

**方法**

1. 选取初始点 和 ，确保
2. 使用割线法迭代公式
3. 继续迭代，直到满足精度要求

**典型例题**  
**例 1（课本习题 3.8-17）**  
**题目** 用割线法求方程 在 处的近似解，精度要求

**解答**

1. 计算函数值
2. 计算割线迭代
3. 继续迭代，直到满足 ，最终得到近似解

**(2) 考法 2：比较割线法与牛顿法的收敛速度**

**方法**

1. 比较割线法和牛顿法的误差变化率
2. 通过迭代次数计算不同方法的误差变化

**典型例题**  
**例 2（课本习题 3.8-19）**  
**题目** 比较牛顿法与割线法在求解 时的收敛速度

**解答**

1. 牛顿法的误差收敛满足二次收敛关系这意味着，每次迭代误差减少平方倍。
2. 割线法的误差收敛满足超线性收敛关系，收敛速度约为 倍（黄金比例）。
3. 在实践中，牛顿法通常比割线法快，但割线法不需要计算导数，适用于函数导数难以计算的情况。

**3.4 对应练习题**

（1）**课本习题 3.8-17** 用割线法求方程 在 处的近似解，精度要求   
（2）**课本习题 3.8-19** 比较牛顿法与割线法在求解 时的收敛速度  
（3）**课本习题 3.8-21** 研究割线法在 处的收敛性