



1、为了评价在一个有向图中两个结点是“连通得有多好”，人们不仅可以看它们之间的最短路径的长度，而且也可以计数最短路径的条数。

在边的费用具有某些限制的条件下，已经证明了这是一个可以有效求解的问题。假设给我们一个边上带有费用的有向图 $G=(V,E)$ ；费用可能是正的或者负的，但是图中的每个圈严格有着正的费用。还给定两个结点 $v,w \in V$ 。给出一个有效的算法计算 G 中最短 v - w 路径的条数。（算法不必列出所有的路径；只要数目就足够了。）

2、某加油站有一个大的地下储油罐存储汽油；这个罐一次至多存 L 加仑。订购油是相当贵的，因此他们希望订货要比较少。每次订货，他们除了所订购油的费用之外，还需要付固定价格 P 的运费。但是，每加仑油多存1天的费用是 c ，因此提前太多订购会增加存储的费用。

他们计划在冬天休业一周，希望储罐到休业的时间是空的。幸运的是，基于多年的经验，他们对于直到这个时间之前的每一天将需要多少油有着精确的规划。假定到他们休业还有 n 天，对于 $i=1,2,\dots,n$ 的每一天 i 他们需要 g_i 加仑汽油。假定储罐在第0天结束时是空的。给出一个算法来决定他们应该在哪些天订货，以及订多少，以使得他们的总费用最小。





3、改划选区（Gerrymandering）是以非常小心的方式划分选区的行为，以便得到有利于某个特定政党的选举结果。假设我们有一组 n 个选区 P_1, P_2, \dots, P_n ，每个选区包含 m 个登记的选民。我们假设把这些选区分成两个地区，每个地区包含 $n/2$ 个选区。现在对每个选区，我们有关于对两个政党中的每一个有多少选民登记的信息。如果这组选区可以按下述方式划分成两个地区，使得同一个政党在两个地区中都占多数，我们将说这组选区对于改划选区是**敏感的**。

给出一个算法来确定给定的一组选区对于改划选区是否敏感；你的算法的运行时间应该是 n 与 m 的多项式。

例. 假设我们有 $n=4$ 个选区，下面是登记选民的信息。

Precinct	1	2	3	4
Number registered for party A	55	43	60	47
Number registered for party B	45	57	40	53

这组选区是敏感的，因为如果把选区**1**与**4**分到一个地区，选区**2**与**3**分到另一个地区，那么政党**A**将在两个地区都占多数。这说明了改划选区中的不公平性：尽管政党**A**在整个人口中只保持微弱多数（**205**对**195**），但他却能拿到两个地区的全部选举人票。





4. Decide whether you think the following statement is true or false. If it is true, give a short explanation. If it is false, give a counterexample.

Let G be an arbitrary flow network, with a source s , a sink t , and a positive integer capacity c_e on every edge e . If f is a maximum s - t flow in G , then f saturates every edge out of s with flow (i.e., for all edges e out of s , we have $f(e) = c_e$).

5. Decide whether you think the following statement is true or false. If it is true, give a short explanation. If it is false, give a counterexample.

Let G be an arbitrary flow network, with a source s , a sink t , and a positive integer capacity c_e on every edge e ; and let (A, B) be a minimum s - t cut with respect to these capacities $\{c_e : e \in E\}$. Now suppose we add 1 to every capacity; then (A, B) is still a minimum s - t cut with respect to these new capacities $\{1 + c_e : e \in E\}$.

