1、为了评价在一个有向图中两个结点是"连通得有多好",人们不仅可以看它们之间的最短路径的长度,而且也可以计数最短路径的条数.

在边的费用具有某些限制的条件下,已经证明了这是一个可以有效求解的问题. 假设给我们一个边上带有费用的有向图G=(V,E); 费用可能是正的或者负的,但是图中的每个圈严格有着正的费用. 还给定两个结点 $v,w\in V$. 给出一个有效的算法计算G中最短v-w路径的条数. (算法不必列出所有的路径; 只要数目就足够了.)

2、某加油站有一个大的地下储油罐存储汽油,这个罐一次至多存**L**加仑. 订购油是相当贵的,因此他们希望订货要比较少. 每次订货,他们除了所订购油的费用之外,还需要付固定价格**P**的运费. 但是,每加仑油多存**1**天的费用是c,因此提前太多订购会增加存储的费用。

他们计划在冬天休业一周,希望储罐到休业的时间是空的. 幸运的是,基于多年的经验,他们对于直到这个时间之前的每一天将需要多少油有着精确的规划. 假定到他们休业还有n天,对于i=1,2,...,n的每一天i他们需要 g_i 加仑汽油. 假定储罐在第0天结束时是空的. 给出一个算法来决定他们应该在哪些天订货,以及订多少,以使得他们的总费用最小.

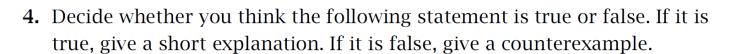
3、改划选区(Gerrymandering)是以非常小心的方式划分选区的行为,以便得到有利于某个特定政党的选举结果。假设我们有一组n个选区 $P_1,P_2,...,P_n$,每个选区包含m个登记的选民。我们假设把这些选区分成两个地区,每个地区包含n/2个选区。现在对每个选区,我们有关于对两个政党中的每一个有多少选民登记的信息。如果这组选区可以按下述方式划分成两个地区,使得同一个政党在两个地区中都占多数,我们将说这组选区对于改划选区是**敏感**的.

给出一个算法来确定给定的一组选区对于改划选区是否敏感;你的算法的运行时间应该是n与m的多项式.

例. 假设我们有n=4个选区,下面是登记选民的信息.

Precinct	1	2	3	4
Number registered for party A	55	43	60	47
Number registered for party B	45	57	40	53

这组选区是敏感的,因为如果把选区1与4分到一个地区,选区2与3分到另一个地区,那么政党A将在两个地区都占多数。 这说明了改划选区中的不公平性:尽管政党A在整个人口中只保持微弱多数(205对195),但他却能拿到两个地区的全部选举人票。



Let G be an arbitrary flow network, with a source s, a sink t, and a positive integer capacity c_e on every edge e. If f is a maximum s-t flow in G, then f saturates every edge out of s with flow (i.e., for all edges e out of s, we have $f(e) = c_e$).

5. Decide whether you think the following statement is true or false. If it is true, give a short explanation. If it is false, give a counterexample.

Let G be an arbitrary flow network, with a source s, a sink t, and a positive integer capacity c_e on every edge e; and let (A,B) be a mimimum s-t cut with respect to these capacities $\{c_e : e \in E\}$. Now suppose we add 1 to every capacity; then (A,B) is still a minimum s-t cut with respect to these new capacities $\{1+c_e : e \in E\}$.

