华东师范大学期末试卷（A）

2018 —2019 学年第 一 学期

课程名称：＿＿算法设计与分析＿＿

学生姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　学　　号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

专　　业：＿计算机科学与软件工程＿＿　　　　年级/班级：＿＿2018 硕博＿＿＿

课程性质：公共必修、公共选修、**专业必修**、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

注意：1、考试时间为 150 分钟，考试形式为：闭卷

2、答案全部做在答题纸上

3、考试完毕后，试卷和答题纸全部上交

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。

1. 以下排序算法中，平均复杂度与合并排序同阶的是（　　）

A. 快速排序　　B. 选择排序

C. 插入排序　　D. 冒泡排序

2. 无向图 G 连通度为 2，每条边有不同权值，则权值最大的边一定不会包含在 G 的(　　)

A. 某个顶点开始的最短路径树中　　B. 深度优先生成树中

C. 广度优先生成树中　　D. 最小生成树中

3. 用某种排序方法对关键字序列（25，84，21，47，15，27，68）进行排序时，序列的变化情况如下：

21，47，68，25，15，27，84

21，47，27，25，15，68，84

15，25，27，21，47，68，84

则所采用的排序方法是(　　)

A. 冒泡排序　　B. 选择排序　　C. 快速排序　　D. 堆排序

4. 如果某图的邻接矩阵是对角线元素均为零的上三角矩阵，则此图是(　　)

A. 有向完全图　　B. 连通图

C. 有向无环图　　D. 强连通图

5. 以下说法最符合稳定匹配问题的 Gale-Shapley 算法性质的是(　　)

A. 天涯何处无芳草　　B. 先发制人，后发受制于人

C. 酒香不怕巷子深　　D. 路漫漫其修远兮，吾将上下而求索

二、简答题（本大题共 20 分）

1、运用主方法(Master Method)求以下递归式的渐进估计，要有判断依据。（10 分）

$$T(n) = 16T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n(\lg n)^2$$

2、请将下面几个渐进函数按趋向于无穷大的速度升序排列（这里lg$n$以 2 为底）。（5 分）

$\sqrt{n}$, $n\lg n$, $2^{\sqrt{\lg n}}$, $\lg n^{\lg n}, n^2$,

3、请简单描述 PSPACE, P, NP, EXPTIME 这四个复杂性类之间的关系。？（5 分）

三、在计算机网络等应用领域中经常需要在某个图$G=(V,E)$中寻找从源点s到终点t之间的某种最短路径，请问目前我们学过的算法中有哪些可以用于这类问题？请简单描述它们各自的特色和时间复杂度。（10 分）

四、区间调度问题：给定一个包含n个任务的集合$S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，其共享同一台机器，该机器同一时刻只能运行一个任务，每个任务a_i有一个开始时间s_i和结束时间f_i，若a_i被选中则在 $[a_i,f_i)$时段内独享该机器。如果两个任务的运行时段不重合则称二者相容，现在的问题是要选择一个数量最多且彼此相容的任务子集。课堂上学习的算法是按照结束时间采取的贪心算法，请问是否也可以按照开始时间的某种贪心思路来解决。（请说明主要思想，写出伪代码，并分析算法的时间复杂度）（10 分）

五、【分治法】给定n颗大溪地黑珍珠，需要遴选相等体积的珍珠做项链，假设只有一个简单的无砝码天平用于比较两颗珍珠是否等重（因此体积也相等），现在的问题是要判断n颗珍珠中是否有一半以上珍珠为相同重量，能否设计一个时间复杂度为$O(n\lg n)$以内的算法解决这一问题？（请说明主要思想，描述主要步骤，并分析算法的时间复杂度）（10 分）

六、【动态规划】 假设在连续n个交易日中，某支股票第i天每股的交易价格固定为p_i。如果第i天买入第j天卖出，则其收益为p_j-p_i。现在要求最多只能有一次买入和一次卖出操作，并且要使其收益最大化。请设计算法在$O(n)$时间内找到最优的买入卖出日期(i,j)。（请写出递推式，说明算法主要思想及时间复杂度）（10 分）

七、请判断下述论断的真假，如果正确请给出一个简短的解释；如果错误请给出一个反例。给定流网络图$G=(V,E)$，每条边e上有正整数带宽限制c_e，源点s，终点t，按照 Ford-Fulkerson 算法可以在多项式时间内地计算出最大的s-t流，令(A,B)为对应的最小割，A为最终剩余图中从s可以到达的点集，B为与其他点集。

1）任给图 G 中一条s-t路径，那么路径中的带宽最小边会被最大的s-t流用光带宽。(5 分)

2）如果给每条边的带宽值增加 1，那么(A,B)仍旧是图中的最小s-t割。(5 分)

八、大教室调度问题（BCSP）：假设中北校区只有一间可以容纳 100 人同时考试的教室，期末考试期间收到n个考试申请，每个申请i有一个开始时间s_i，一个截止时间f_i和一个考试时长t_i，即考试i必须安排在区间$[s_i,f_i]$中连续的t_i个时间单位内进行，同一时刻教室内只能有一场考试。参数在系统中都是正整数（按照起始时间偏移量），时间以分钟为单位。问题是：是否存在调度方案可以让所有来申请的考试在截止时间之前完成？

子集和问题（SSP）：任给自然数$w_1,w_2,\ldots,w_n$和目标值W，问$\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$有一个子集加起来恰好等于W吗？

已知**子集和问题**是NP完全的，请证明**大教室调度问题**也是NP完全的。（10 分）

课程名称：___算法设计与分析__

学生姓名：____________________ 学　　号：____________________

专　　业：_计算机科学与软件工程__ 年级/班级：___2018 硕博______

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。

ADDCB

二、简答题（本大题共 20 分）

1、运用主方法(Master Method)求以下递归式的渐进估计，要有判断依据。（10 分）

$T(n) = 16T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$　　答：　$T(n) = n^3$

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n(\lg n)^2$　　答：　$T(n) = n^2$

2、请将下面几个渐进函数按趋向于无穷大的速度升序排列（这里$\lg n$以 2 为底）。（5 分）

$\sqrt{n}$,　　$n\lg n$,　　$2^{\sqrt{\lg n}}$,　　$\lg n^{\lg n}$, n^2,

答：

$2^{\sqrt{\lg n}}$,　　$\sqrt{n}$,　　$n\lg n$,　　n^2,　　$\lg n^{\lg n}$　或者　$2^{\sqrt{\lg n}}$,　　$\sqrt{n}$,　　$\lg n^{\lg n}$,　　$n\lg n$,　　n^2

3、请简单描述 PSPACE, P, NP, EXPTIME 这四个复杂性类之间的关系。？（5 分）

答案：　P⊆NP⊆PSPACE⊆ EXPTIME，P⊂EXPTIME。

三、在计算机网络等应用领域中经常需要在某个图$G = (V, E)$中寻找从源点s到终点t之间的某种最短路径，请问目前我们学过的算法中有哪些可以用于这类问题？请简单描述它们各自的特色和时间复杂度。（10 分）

答案：如果边上不带权的话，BFS 算法就可以计算源点s到其他所有可达点之间的最短路径，$O(V + E)$或者$O(n + m)$都行。如果边权非负的话，Dijkstra 算法可以，采用优先队列可以达到$O(m\lg n)$或者$O(E\lg V)$。如果边权可以为负担没有负圈的话，Bellman-Ford 算法可以，$O(mn)$或者$O(EV)$。

四、区间调度问题：给定一个包含n个任务的集合$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，其共享同一台机器，该机器同一时刻只能运行一个任务，每个任务a_i有一个开始时间s_i和结束时间f_i，若a_i被选中则在$[s_i, f_i)$时段内独享该机器。如果两个任务的运行时段不重合则称二者相容，现在的问题是要选择一个数量最多且彼此相容的任务子集。课堂上学习的算法是按照结束时间采取的贪心算法，请问是否也可以按照开始时间的某种贪心思路来解决。（请说明主要思想，写出伪代码，并分析算法的时间复杂度）（10 分）

答：按照开始时间从大到小排序即可，等于按结束时间从小到大的镜像。

五、【分治法】给定n颗大溪地黑珍珠，需要遴选相等体积的珍珠做项链，假设只有一个简单的无砝码天平用于比较两颗珍珠是否等重（因此体积也相等），现在的问题是要判断n颗珍珠中是否有一半以上珍珠为相同重量，能否设计一个时间复杂度为$O(n\lg n)$以内的算法解决这一问题？（请说明主要思想，描述主要步骤，并分析算法的时间复杂度）（10 分）

答：课后习题，两种方法，一种是每次分成两半，递归运行，如果有返回多数的，就用其和其余比较，看是否是整个区间的多数代表，时间复杂度为$O(n\lg n)$。二是两两比较，等重就留一颗，否则都拿开，最后剩下的进行全员比对，时间复杂度为$O(n)$。

六、【动态规划】 假设在连续n个交易日中，某支股票第i天每股的交易价格固定为p_i。如果第i天买入第j天卖出，则其收益为$p_j - p_i$。现在要求最多只能有一次买入和一次卖出操作，并且要使其收益最大化。请设计算法在$O(n)$时间内找到最优的买入卖出日期(i,j)。
（请写出递推式，说明算法主要思想及时间复杂度）（10 分）
答：用$A[i]$记录假设在第i天卖出对应最佳方案所能够得到的最大收益，$A[0] = 0$；
则有$A[i] = max\{0, A[i-1] + p_i - p_{i-1}\}$，最后在$A$中寻找最大值。

七、请判断下述论断的真假， 如果正确请给出一个简短的解释；如果错误请给出一个反例。给定流网络图$G = (V, E)$，每条边e上有正整数带宽限制c_e，源点s，终点t，按照 Ford-Fulkerson 算法可以在多项式时间内地计算出最大的s-t流，令(A, B)为对应的最小割，A为最终剩余图中从s可以到达的点集，B为与其他点集。
1）任给图 G 中一条s-t路径，那么路径中的带宽最小边会被最大的s-t流用光带宽。(5 分)
2）如果给每条边的带宽值增加 1，那么(A, B)仍旧是图中的最小s-t割。(5 分)
答：都是错的。

八、大教室调度问题（BCSP）：假设中北校区只有一间可以容纳 100 人同时考试的教室，期末考试期间收到n个考试申请，每个申请i有一个开始时间s_i，一个截止时间f_i和一个考试时长t_i，即考试i必须安排在区间$[s_i, f_i]$中连续的t_i个时间单位内进行，同一时刻教室内只能有一场考试。参数在系统中都是正整数（按照起始时间偏移量），时间以分钟为单位。问题是：是否存在调度方案可以让所有来申请的考试在截止时间之前完成？
子集和问题（SSP）：任给自然数$w_1, w_2, \ldots, w_n$和目标值W，问$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$有一个子集加起来恰好等于$W$吗？
已知**子集和问题**是NP完全的，请证明**大教室调度问题**也是NP完全的。（10 分）
答：先说明 BCSP 属于 NP。从 SSP 归约到 BCSP，令$F = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$，可以把每个$w_i$转换成一个申请$(s_i = 0, t_i = w_i, f_i = F)$，再增加一个申请$(s_{n+1} = W, t_{n+1} = 1, f_{n+1} = W + 1)$。