

华东师范大学期末试卷 (A)
2017 —2018 学年第 一 学期

课程名称: 算法设计与分析

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: 计算机科学与软件工程

年级/班级: 2017 硕博

课程性质: 公共必修、公共选修、**专业必修**、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

注意: 1、考试时间为 150 分钟, 考试形式为: 闭卷

2、答案全部做在答题纸上

3、考试完毕后, 试卷和答题纸全部上交

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)。

1. 以下排序算法中, 使用额外辅助空间不是常数大小的是 ()

- A. 计数排序 B. 快速排序
C. 选择排序 D. 插入排序

2. 二叉树是一种每个结点至多有二个儿子的有根树, 如果一颗二叉树当中有 100 个结点具有两个儿子, 则这颗二叉树中的叶子结点个数为 ()

- A. 100 B. 200
C. 99 D. 101

3. 以下关系式中, 已经明确成立的有 ()

- A. $P \subset NP$ B. $NP \subset PSPACE$
C. $P \subset EXPTIME$ D. $NP \subset EXPTIME$

4. 令 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为渐近正函数, 则以下论断正确的有 ()

- A. $f(n) = O(g(n))$ 蕴含着 $g(n) = O(f(n))$;
B. $f(n) = \omega(g(n))$ 蕴含着 $\lg(f(n)) = \omega(\lg(g(n)))$;
C. $f(n) + g(n) = O(\min(f(n), g(n)))$;
D. $f(n) = \omega(g(n))$ 蕴含着 $2^{f(n)} = \omega(2^{g(n)})$ 。

5. 无向图 $G=(V,E)$ 包含 n 个结点, 任意相邻两个结点之间距离为 1, 如果两个结点 s 和 t 之间的距离严格大于 $n/2$, 则 s 和 t 之间的边不相交路径最多有 ()

- A. 一条 B. 两条
C. 三条 D. 四条

二、简答题 (本大题共 20 分)

1、运用主方法(Master Method)求以下递归式的渐进估计, 要有判断依据。(10 分)

$$T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + (n \lg n)^2$$

$$T(n) = 15T\left(\frac{n}{3}\right) + n^4$$

2、请将下面几个渐进函数按趋向于无穷大的速度升序排列。(5 分)

$$n^3, \quad \lg \lg n, \quad (\lg n)!, \quad 2^{\sqrt{n}}, \quad n^{\lg n}$$

3、二项堆的一个自然拓展是 d -项堆, 其中每个非叶子结点有 d 个儿子结点(除了最后一个非叶子结点), 根结点序号为 1。设一个 d -项堆用数组 $A[]$ 保存, 则堆中序号为 i 的结点的第 j 个子结点对应的是 $A[]$ 中的哪个元素? i 结点的父亲结点对应的又是哪个元素? (5 分)

三、考察一个计算机网络中的可靠路由问题, 将该网络建模为一个有向图 $G = (V, E)$, 其中有 n 个顶点 m 条边, 每条边 (u, v) 有一个发送成功率数据 $w(u, v)$, 表示从 u 发出的数据中能够正确到达 v 的百分比。给定一条从结点 s 到 t 的路径, 其总的发送成功率按乘法规则计算为 $\prod_{(u,v) \in p} w(u, v)$, 请设计算法求 s 到 t 之间总的发送成功率最高的路径。(请说明主要思想, 并分析算法的时间复杂度) (10 分)

四、给定 n 个数的序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 假定所有的数都不相同, 我们定义一个明显逆序为一对 $i < j$ 并且 $a_i > a_j + 10$, 请设计一个时间复杂度为 $O(n \lg n)$ 的算法来计算在一个序列中的明显逆序个数。(请说明主要思想, 写出伪代码, 并分析算法的时间复杂度) (10 分)

五、证明: 如果一个图的每个割中都有唯一的一条最小边, 则该图有唯一的最小生成树。并请举反例来说明其逆命题不成立。(10 分)

六、某个酒店给出了未来一年中某间客房每天的单价 c_1, c_2, \dots, c_{365} , 并支持两种结算方式, 一种是按照每天的单价支付, 另外一种则是每连续 30 天可以按照长住价 t_{30} 支付。如果你想租住该客房一年, 请设计算法求总价最低的结算方案。(请说明主要思想, 写出求解的递推式, 并分析算法的时间复杂度) (10 分)

七、给定流网络图 $G = (V, E)$, 每条边 e 上的容量 c_e 都是整数, 假设 G 中存在多个相同大小的最小割, 这些割集中有一个包含最小的边数, 请设计算法找出这个边数最少的割集。(提示: 可以通过修改边的容量值来实现。请说明主要思想并分析算法的时间复杂度。) (10 分)

八、旅行商问题 (TSP): 给定一个无向完全图 $G=(V, E)$ 和正数 K , 每一对结点 (v_i, v_j) 之间有一个非负距离值 $d(v_i, v_j)$, 请问图中是否包含一条经过所有结点 v_1, v_2, \dots, v_n 一次并且总距离不超过 K 的简单回路?

哈密顿回路问题 (HC): 给定一个无向图 $G=(V, E)$, 请问图中是否包含一条经过所有结点 v_1, v_2, \dots, v_n 一次的简单回路?

已知哈密顿回路问题是 NP 完全的, 请证明旅行商问题也是 NP 完全的。(10 分)