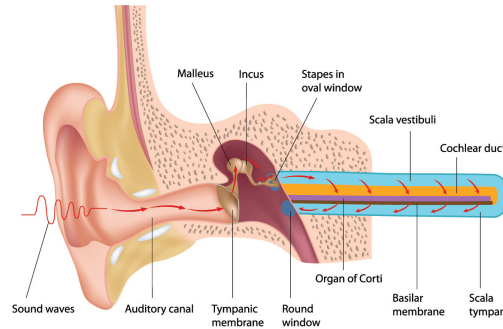


TP Méthodes Numériques

Modélisation d'une corde de guitare et du tympan

ROMAIN DULÉRY PIERRE HEINISCH

30 avril 2015



Partie I : Modélisation et simulation d'une corde de guitare

1.1 : Modélisation physique

La corde est régie par l'équation des ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

■ Modes propres de la vibration d'une corde

Question 1. On recherche une solution de la forme $u(x, t) = U(x) \cos(\omega t)$, on l'injecte donc dans l'équation (1), on obtient alors l'équation suivante :

$$-\omega^2 U(x) \cos(\omega t) = \gamma^2 U''(x) \cos(\omega t)$$

Qui se simplifie en :

$$U''(x) + \omega_0^2 U(x) = 0 \quad (2)$$

avec $\omega_0 = \frac{\omega}{\gamma}$.

C'est une équation harmonique (à variable spatiale), on recherche donc une solution de la forme : $U(x) = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$

On utilise alors les conditions aux limites pour déterminer A et B :

$$\text{— } u(0, t) = 0 \text{ donc } U(0) = 0, \text{ ainsi } A = 0.$$

— $u(L, t) = 0$ donc $U(L) = 0$, ainsi $B \sin(\omega_0 L) = 0$

C'est pourquoi : $\exists n/\omega_0 = \frac{n\pi}{L} = \frac{\omega}{\gamma}$

On obtient donc une famille de solutions :

$$U_n(x) = B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right), \quad \omega_n = n\pi \frac{\gamma}{L} \Leftrightarrow f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Il existe donc une infinité de modes propres de vibration de la corde, caractérisés par :

$$u(x, t) = B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right)$$

Par principe de superposition, la solution générale de l'équation est de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right)$$

A l'instant $t = 0$, la solution devient :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$

Ce qui exprime la convergence simple de la série de Fourier de la fonction $x \rightarrow u(x, 0)$.

Par unicité des coefficients de Fourier, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

Analyse de la cohérence des résultats :

La fréquence fondamentale f_1 est inversement proportionnelle à la longueur de la corde. Ceci est cohérent car la note est d'autant plus grave que la corde est longue. De plus, lorsque la longueur de la corde est divisée par 2, la fréquence double, ce qui correspond à une octave.

Lorsque la masse linéique diminue, la fréquence augmente, donc la note est plus aigüe, ce qui est cohérent avec le fait que les cordes aigües d'une guitare soient plus fines.

Enfin, lorsque la tension augmente, la fréquence également, ce que l'on peut remarquer lorsque on accorde une guitare en tendant plus ou moins les cordes.

■ Cas de la corde réelle avec raideur et amortissements

La corde réelle est régie par l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

1.2 : Discrétisation du modèle par différences finies

Nous allons utiliser la méthode des différences finies afin de rechercher une solution approchée de l'EDP : (3).

Discrétisons la corde de longueur $L = 1$ en $N + 1$ positions $x_l = lh$ avec $0 \leq i \leq N$ et $h = \frac{1}{N}$, et le temps en NF instants $t_n = nk$ avec $k = \frac{1}{SR}$ (où SR est le taux d'échantillonnage, typiquement 44100 Hz). Ainsi on approche la fonction continue $u(x, t)$ par u_l^n en la position $x_l = lh$ et au temps $t_n = nk$, soit $u(x_l, t_n) = u(lh, nk) \approx u_l^n$.

Les deux prochaines questions consistent en l'obtention du schéma numérique.

Question 2. Exprimons $u(x + h, t)$ et $u(x - h, t)$ sous forme de développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u(x + h, t) &= u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + o(h^2) \\ u(x - h, t) &= u(x, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + o(h^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u(x + h, t) + u(x - h, t) = 2u(x, t) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + o(h^2)$$

C'est pourquoi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} + o(1) \quad (4)$$

De même,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)}{k^2} + o(1)$$

et donc, avec les notations introduites pour la discrétisation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^2}(u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{k^2}(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1})$$

De même, en remarquant que :

$$u(x + 2h, t) + u(x - 2h, t) - 4[u(x + h, t) + u(x - h, t)] + 6u(x, t) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + o(h^4)$$

On obtient :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^4}(u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 6u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)$$

En dérivant chaque terme de la relation (4) grâce au fait que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + k) - u(x, t - k)}{2k} + o(1) \approx \frac{u_l^{n+1} - u_l^{n-1}}{2k}$$

On obtient directement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \approx \frac{1}{2kh^2} (u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} - 2u_l^{n+1} + 2u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^{n-1})$$

Nous avons alors approché chaque terme de l'EDP (3) par des combinaisons linéaires de points de la grille de discrétisation, et en injectant les résultats obtenus, on obtient :

$$a_1 u_{l-1}^{n+1} + a_2 u_l^{n+1} + a_1 u_{l+1}^{n+1} \quad (5)$$

$$+ b_1 u_{l-2}^n + b_2 u_{l-1}^n + b_3 u_l^n + b_2 u_{l+1}^n + b_1 u_{l+2}^n \quad (6)$$

$$+ c_1 u_{l-1}^{n-1} + c_2 u_l^{n-1} + c_1 u_{l+1}^{n-1} \quad (7)$$

$$= 0 \quad (8)$$

avec

$$a_1 = -\frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad a_2 = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_1 = \frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_2 = 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2}$$

$$b_1 = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_2 = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_3 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4}$$

Nous nous intéressons désormais aux points du maillage situés à la frontière du domaine. On remarque que pour $l = 1$ et $l = N - 1$, on obtient respectivement $l - 2 = -1$ et $l + 2 = N + 1$, on a donc besoin d'introduire des points dits « fantômes » ou « virtuels », qu'on désigne par u_{-1}^n et u_{N+1}^n .

Question 3. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^2} (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n)$$

Or les conditions aux limites imposent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{h^2} (u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n) \approx 0$$

Or, la corde étant fixée aux extrémités, on a : $\forall n, u_0^n = u_N^n = 0$

On obtient alors $u_{-1} = -u_1$. De même, on obtient $u_{N+1} = -u_{N-1}$ à l'autre extrémité.

Par la suite on désignera par $\bar{\mathbf{u}}^n$ le vecteur des points de discrétisation de la corde à $t = n$

$$\bar{\mathbf{u}}^n = \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

puis que le schéma numérique peut s'écrire sous forme matricielle

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{n+1} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}^n + \overline{\mathbf{C}}\mathbf{u}^{n-1} = 0 \quad (9)$$

avec les matrices de tailles $(N+1) \times (N+1)$ suivantes :

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_1 & c_2 & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_3 - b_1 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_2 & b_3 - b_1 & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notons que les u_0^n et u_N^n sont connus et valent zéro, on peut donc ne pas en tenir compte dans les calculs, ce qui revient à considérer le vecteur

$$\mathbf{u}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix}$$

et les sous-matrices centrales de taille $(N-1) \times (N-1)$: \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} respectivement de $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ et $\overline{\mathbf{C}}$, pour lesquelles on a supprimé la première et dernière ligne et colonne, à savoir :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_1 & c_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_3 - b_1 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_3 & b_2 & b_1 & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_1 \\ \vdots & \ddots & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_2 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

On définit la matrice Toeplitz suivante et son carré :

$$\mathbf{D}_{xx} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & \mathbf{0} \\ \ddots & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -2 & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{xxxx} = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{D}_{xx}$$

Question 4. Etant donné que

$$a_1 = -\frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad a_2 = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2}$$

On a,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = (1 + \sigma_0 k) \mathbf{I} + \frac{\sigma_1 k}{h^2} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \mathbf{0} \\ \ddots & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

Ainsi :

$$\mathbf{A} = (1 + \sigma_0 k) \mathbf{I} - \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx} \quad (10)$$

De même pour C :

$$\mathbf{C} = (1 - \sigma_0 k) \mathbf{I} + \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx} \quad (11)$$

Quand à B, étant donné que

$$b_1 = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_2 = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_3 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4}$$

On a :

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Et il se trouve que cette matrice est exactement la matrice \mathbf{D}_{xxxx} , en prenant en compte le facteur $\frac{1}{h^4}$.

On obtient alors :

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \kappa^2 k^2 \mathbf{D}_{xxxx},$$

■ Stabilité du schéma numérique

Par une analyse de Von Neumann on montre que la condition de stabilité du schéma s'écrit

$$h \geq h_{min} = \sqrt{\frac{\gamma^2 k^2 + \sqrt{\gamma^4 k^4 + 16\kappa^2 k^2}}{2}}$$

1.3 : Programmation du schéma implicite sous Scilab

■ Choix des paramètres σ_0 et σ_1

Question 5. On injecte $\tilde{u}(x, t) = e^{st+j\beta x}$ dans l'EDP (3) :

$$s^2 = -\gamma^2 \beta^2 - \kappa^2 \beta^4 - 2\sigma_0 s - 2\sigma_1 \beta^2 s$$

Soit :

$$s^2 + 2(\sigma_0 + \sigma_1 \beta^2)s + \gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 = 0$$

C'est une équation complexe du second degré, on calcule alors le discriminant réduit :

$$\Delta' = (\sigma_0 + \sigma_1 \beta^2)^2 - \gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4$$

Et pour $\sigma_0 \geq 0$ et $\sigma_1 \geq 0$ petits, $\Delta' < 0$ donc les racines de l'équation caractéristique de l'EDP (3) sont données par $s_{\pm} = \sigma \pm j\omega$ où

$$\sigma(\beta) = -\sigma_0 - \sigma_1 \beta^2, \quad \omega(\beta) = \sqrt{\gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 - (\sigma_0 + \sigma_1 \beta^2)^2}$$

Ainsi la perte $\sigma(\beta)$ décroît avec le nombre d'onde β , et vaut $-\sigma_0$ quand la raideur n'est pas prise en compte.

On peut alors inverser la fonction ω pour avoir l'expression de β en fonction de ω , afin d'exprimer la perte σ en fonction de la fréquence ω .

$$\omega^2 = \gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 - \sigma^2(\beta)$$

En supposant $\sigma_0 \geq 0$ et $\sigma_1 \geq 0$ petits, on peut négliger $\sigma^2(\beta)$ dans cette expression.

On obtient alors, en notant $\xi = \beta^2$:

$$\kappa^2 \xi^2 + \gamma^2 \xi - \omega^2 = 0$$

C'est une équation du second degré, on calcule donc le discriminant :

$$\Delta = \gamma^4 + 4\kappa^2 \omega^2 > 0$$

Ainsi, on obtient l'expression de ξ :

$$\xi(\omega) = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2 \omega^2}}{2\kappa^2}$$

C'est effectivement la seule solution que l'on retient, car $\xi = \beta^2$ force ξ strictement positif.

Finalement, on obtient l'expression de σ en fonction de la fréquence ω :

$$\sigma(\omega) = -\sigma_0 - \sigma_1 \xi(\omega), \quad \xi(\omega) = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2 \omega^2}}{2\kappa^2}$$

On note $T_{60}(\omega)$ la constante de décroissance dépendant de la fréquence ω et définie par

$$T_{60}(\omega) = -\frac{6 \ln 10}{\sigma(\omega)}$$

Soient 2 fréquences $\omega_1 < \omega_2$, on a :

$$\sigma(\omega_1) - \sigma(\omega_2) = -\sigma_1 \xi(\omega_1) + \sigma_1 \xi(\omega_2) = -\frac{6 \ln(10)}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{6 \ln(10)}{T_{60}(\omega_2)}$$

Ainsi

$$\sigma_1 = \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(-\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{1}{T_{60}(\omega_2)} \right)$$

De plus :

$$\sigma(\omega_1) = -\frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)}$$

Comme $\sigma(\omega) = -\sigma_0 - \sigma_1 \xi(\omega)$, on a :

$$\sigma_0 = -\frac{6 \ln(10)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} \right)$$

$$\sigma_0 = \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{\xi(\omega_2)}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)} \right)$$

■ Conditions initiales $u_0(x)$ et $v_0(x)$

A l'instant $t = 0$ la corde est pincée à l'abscisse $x = x_0$ et étirée à la hauteur c_0 , donc on considèrera $u(x, 0) = u_0(x)$ une fonction triangle comme illustrée sur la Figure ?? . De plus on suppose que la corde est lâchée sans vitesse initiale donc $v_0(x) = 0$.

■ Enregistrement stéréo et positionnement des micros

Question 6. Ecrire un programme Scilab qui à partir des paramètres d'entrée fournis :

- Calcule itérativement le profil de la corde (vecteurs \mathbf{u}^n) tout en affichant l'animation
- Calcule et affiche le vecteur *out* enregistrant les vibrations aux positions des micros *rp*
- Emet le son de la corde en stereo à partir du vecteur *out*

1.4 : Analyses qualitative et quantitative du son produit

On commence par s'assurer que la note simulée correspond bien à la fréquence fondamentale en entrée. Par exemple pour $f = 110 \text{ Hz}$, la note LA, vous pouvez vérifier avec une vraie guitare ou encore en décrochant votre téléphone (la tonalité est un LA par défaut). Mais on se propose ici de le vérifier mathématiquement (après tout votre instrument est peut-être mal accordé).

Question 7. Dans cette question on attend de vous que vous preniez du recul quant à vos résultats obtenus.

- Calculer et afficher la transformée de Fourier du signal $s_1 = out(:, 1)$ via la commande *fft* (la symétrie vous permet de ne garder qu'une partie du spectre, ou de repositionner correctement les fréquences autour de zéro via la commande *fftshift*). Déterminer l'indice auquel correspond le pic maximum du spectre. Cette fréquence fondamentale est bien celle que vous avez déclarée en entrée ?
- **Quantitativement** quel est l'effet sur le spectre du paramètre d'inharmonicité B ? de la position x_0 où l'on pince la corde (vers le centre ou près de l'attache appelée le chevalet) ?
- **Qualitativement** quels sont les effets de B et x_0 sur le timbre du son joué ?

Partie II : Modélisation de la membrane tympanique

Dans cette partie, la propagation d'ondes en deux dimensions est illustrée par une vibration transverse d'une membrane élastique.

2.1 : Modélisation physique d'une membrane circulaire libre fixée sur les bords

On note Ω le domaine occupé par la membrane de masse par unité de surface ρ constante. Considérons un petit élément de surface $dxdy$ soumis à des forces de tension T dans les directions x et y , une force extérieure de densité surfacique $f(x, y, t)$ et $w(x, y, t)$ la position transversale du point de coordonnées (x, y) à l'instant t . D'après la seconde loi de Newton la somme des forces s'exerçant sur $dxdy$ s'écrivent :

$$F = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y) dxdy$$

Sachant que la membrane est soumise aux forces suivantes représentées Figure ??, à savoir 4 tensions : $F_1 = -Tdy \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t)$, $F_2 = Tdy \frac{\partial w}{\partial x}(x + dx, y, t)$, $F_3 = -Tdx \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t)$, $F_4 = Tdx \frac{\partial w}{\partial y}(x, y + dy, t)$ et une force extérieure $F_5 = f(x, y, t)dxdy$, la somme des forces s'écrit :

$$F = Tdy \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x + dx, y, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t) \right] + Tdx \left[\frac{\partial w}{\partial y}(x, y + dy, t) - \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t) \right] + f(x, y, t)dxdy$$

Or les termes entre crochets valent $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ d'où pour $f = 0$ la membrane vérifie l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \Delta w$$

où Δ est l'opérateur laplacien définit par

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

On cherche à résoudre le problème suivant, trouver $w(x, y, t)$ sur une durée T_f solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \Delta w \text{ dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T_f) \\ w(x, y, t) = 0 \text{ sur } \Gamma_T = \Gamma \times (0, T_f) \\ w(x, y, 0) = w_0(x, y) \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \quad (12)$$

Comme pour la corde de guitare, la membrane est fixée sur le bord circulaire (deuxième équation, condition de type Dirichlet), possède un déplacement initial $w_0(x, y)$ (troisième équation) et une vitesse initiale nulle (quatrième équation). Afin de modéliser la vibration d'une membrane circulaire, il est plus pratique d'utiliser les coordonnées polaires, notamment pour l'écriture des conditions aux bords. On note $a > 0$ le rayon de la membrane circulaire :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \Gamma = \{(x, y) \in \Omega, x^2 + y^2 = a^2\}$$

Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point de la membrane et (r, θ) ses coordonnées dans la base polaire on a :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

avec $r \in [0, a]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On peut alors calculer les dérivées partielles de u dans la base polaire (r, θ) en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

On introduit les variables adimensionnées suivantes

$$\eta = \frac{r}{a}, \tau = \frac{ct}{a}$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ représente la vitesse de propagation de l'onde.

Question 8. Montrer que le problème (12) devient l'EDP suivante en coordonnées polaires :

Trouver $w(\eta, \theta, \tau)$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}, & \eta \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \tau > 0 \\ w(1, \theta, \tau) = 0 \\ w(\eta, \theta, 0) = w_0(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta)) \\ \frac{\partial w(\eta, \theta, 0)}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

On ajoute à cette équation une condition limite nécessaire en $\eta = 0$:

$$w(0, \theta, \tau) = w^0$$

2.2 : Discrétisation polaire de la surface 2D par un schéma explicite

Le but de cette partie est de discrétiser l'équation des ondes dans la base polaire (13) en utilisant un schéma explicite. Pour cela considérons dans un premier temps une discrétisation de Ω suivant une grille cartésienne $[0, N_x] \times [0, N_y]$ de pas uniforme dx, dy , formée par des points de coordonnées (x_i, y_j) tel que :

$$\begin{cases} x_i = i dx, & 0 \leq i \leq N_x \\ y_j = j dy, & 0 \leq j \leq N_y \\ dx = \frac{1}{N_x+1} \\ dy = \frac{1}{N_y+1} \end{cases}$$

On note dt le pas de temps et on approche la solution $w(x_i, y_j, ndt)$ par w_{ij}^n . Le laplacien est discrétisé par un schéma centré d'ordre deux et on utilise un schéma explicite d'ordre deux en temps. L'ordre de ces schémas peut être vérifié en utilisant un développement de Taylor. Le schéma explicite obtenue pour l'équation des ondes (12) est :

$$\left\{ \frac{w_{ij}^{n+1} - 2w_{ij}^n + w_{ij}^{n-1}}{dt^2} = c^2 \frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{dx^2} + c^2 \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{dy^2} \right. \quad (14)$$

Question 9. En utilisant un développement de Taylor et le schéma explicite (14) écrire les conditions initiales et les conditions limites de l'équation (12) obtenues pour $w_{i,j}^0, w_{i,j}^1$ sur la grille cartésienne.

Question 10. On note maintenant $w_{ij}^n = w(id\eta, jd\theta, ndt)$ les valeurs aux noeuds de la grille polaire représentée Figure ?? . Ecrire le schéma explicite de l'équation (13).

On montre qu'une condition limite en $\eta = 0$ sur la grille polaire se détermine en utilisant le schéma explicite en coordonnées cartésiennes (14), on obtient :

$$\frac{w_0^{n+1} - 2w_0^n + w_0^{n-1}}{dt^2} = \frac{4}{d\eta^2} \left(\frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} w_{1,j} - w_0^n \right)$$

2.3 : Stabilité et précision du schéma

0.0.1 Etude de la stabilité

Commençons par une étude de la stabilité du schéma explicite (10), pour cela on remplace $w_{i,j}^n$ dans l'équation discrétisée, par une solution décomposée en modes de fourier :

$$W_{p_{i,j}}^n = \phi^n e^{i\alpha_1(idx)} e^{i\alpha_2(jdy)}$$

Question 11. Soit $J = \frac{\phi^{n+1}}{\phi^n}$ le coefficient d'amplification, montrer que J vérifie l'équation du second degré suivante :

$$J^2 + \gamma J + 1 = 0$$

avec

$$\gamma = -2 + 2c^2 \frac{dt^2}{dx^2} (1 - \cos(\alpha_1 dx)) + 2c^2 \frac{dt^2}{dy^2} (1 - \cos(\alpha_2 dy))$$

En admettant que le schéma explicite (12) est stable sous la condition

$$|J| \leq 1$$

en déduire que cette condition de stabilité s'écrit aussi :

$$c^2 \left(\frac{dt^2}{dx^2} + \frac{dt^2}{dy^2} \right) \leq 1$$

Ainsi en posant $h = \frac{dxdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ on obtient la condition de courant :

$$\begin{aligned} CFL &= c \frac{dt}{h} \leq 1 \text{ [Cartésien]} \\ CFL &= \frac{d\tau}{d\eta d\theta} \leq 1 \text{ [Polaire]} \end{aligned} \quad (15)$$

$\lambda_{n,m}$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$n = 0$	2.40483	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092
$n = 1$	3.83171	7.01559	10.17347	13.32369	16.47063
$n = 2$	5.13562	8.41724	11.61984	14.79595	17.95982
$n = 3$	6.38016	9.76102	13.01520	16.22347	19.40942
$n = 4$	7.58834	11.06471	14.37254	17.61597	20.82693

TABLE 1 – Valeurs des cinq premiers zéros des fonctions de Bessel J_n .

0.0.2 Etude de la consistance

On souhaite étudier la précision du schéma explicite (14) en coordonnées cartésiennes.

Question 12. En développant $w_{i,j}^{n+1}, w_{i,j}^n, w_{i,j}^{n-1}$ par un développement de Taylor montrer que le schéma est d'ordre 2 en temps *i.e* l'erreur de troncature est en $o(dt^2)$.

En suivant le même principe avec les termes en espace $w_{i+1,j}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i,j}^n, w_{i,j+1}^n$ montrer que l'erreur de troncature est en $o(dx^2, dy^2)$.

Ecrire alors l'erreur de troncature E_t du schéma et en déduire que le schéma est d'ordre deux en temps et en espace. Ainsi le schéma explicite (14) est consistant

$$\lim_{(dt,dx,dy) \rightarrow 0} E_t = 0$$

2.4 : Solutions analytiques

On cherche une solution de notre équation d'onde polaire sous la forme :

$$w(\eta, \theta, \tau) = F(\eta, \theta) \cos(\omega\tau)$$

avec ω la fréquence de vibration de l'onde et F l'amplitude.

Question 13. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'amplitude F .

La condition limite $F(1, 0) = 0$ nous permet de décomposer l'amplitude $F(\eta, \theta)$ sous la forme :

$$F(\eta, \theta) = \sum_n F_n(\eta) \cos(n\theta)$$

Montrer que chaque F_n vérifie l'équation de Bessel suivante, avec $\alpha = \omega\eta$:

$$\frac{d^2 F_n}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dF_n}{d\alpha} + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) F_n = 0$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel. Par ailleurs, c'est une équation du second ordre il existe donc deux solutions linéairement indépendantes. La solution est donc de la forme :

$$F_n(\eta) = d_n J_n(\eta) + e_n Y_n(\eta)$$

avec les fonctions de Bessel d'ordre n de première et deuxième espèce suivantes :

$$J_n(\eta) = \left(\frac{\eta}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\eta^2/4)^m}{m! \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+m} dt}$$

$$Y_n(\eta) = \frac{J_n(\eta) \cos(n\pi) - J_{-n}(\eta)}{\sin(n\pi)}$$

Or les fonctions $Y_n(x)$ divergent au centre de la membrane ($\eta \rightarrow 0$) donc $e_n = 0$ ainsi la solution analytique de l'équation (13) est donnée par :

$$w(\eta, \theta, \tau) = \cos(\omega\tau) \sum_n d_n J_n(\omega\eta) \cos(n\theta)$$

On sélectionne les fréquences en utilisant les conditions limites. Par exemple, dans le cas $n = 0$,

$$w(\eta, \theta, \tau) = \cos(\omega\tau) d_0 J_0(\omega\eta)$$

ainsi ω décrit les zéros de J_0 puisque la condition aux bords est $w(1, \theta, \tau) = 0$. Si on note $\lambda_{m,0}$ la suite de ces zéros, on obtient les fréquences propres de vibration de la membrane :

$$\eta_{m,0} = \frac{\lambda_{m,0}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

En notant $\lambda_{m,n}$ la m -ième racine de J_n , on obtient de même

$$\eta_{m,n} = \frac{\lambda_{m,n}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Les valeurs numériques des racines des fonctions de Bessel J_n sont fournies Table 1. Il en découle que les fréquences propres $\eta_{m,n}$ ne sont pas des multiples de la fréquence fondamentale. Par conséquent le son produit par la membrane n'est pas harmonique.

2.5 : Code scilab du schéma explicite et analyse des résultats

Afin de résoudre numériquement le schéma explicite en coordonnées polaires, on définit w_{ij}^n comme un tableau de taille $(N_\eta) \times (N_\theta + 1)$ avec :

$$\eta = id\eta, \quad i = 1, \dots, N_\eta$$

$$\theta = jd\theta, \quad j = 1, \dots, N_\theta + 1$$

On pose des conditions périodiques en θ :

$$w(\eta, \theta, \tau) = w(\eta, \theta + 2\pi, \tau)$$

Question 14. On prend la condition initiale suivante :

$$w(\eta, \theta, 0) = J_0(\lambda_{0,3}\eta) \quad (16)$$

avec $\lambda_{0,3} = 8.65373$, la valeur approchée de la troisième valeur propre de J_0 correspondant à la fréquence du mode (0,3). De cette façon on a $d_0 = 1$.

Ecrire un programme scilab qui résout numériquement le schéma explicite en coordonnées polaires de l'équation (13) avec les données suivantes :

- $N_\theta = 80$
- $N_\eta = 40$
- $CFL = 0.5$
- $c = 1$

Utilisez la fonction *besselj* de Scilab pour implémenter la condition initiale (voir Figure ??). Créez une animation représentant les vibrations de la membrane à différents instants w^n .

Question 15. La solution analytique correspondant à la condition initiale (16) est :

$$w_{ex}(\eta, \theta, \tau) = \cos(\lambda_{0,3}\tau) J_0(\lambda_{0,3}\eta)$$

Comparer visuellement les deux solutions (analytique w_{ex} et numérique w_{num}) en vérifiant qu'elles possèdent bien le même comportement. Tracez l'erreur relative en $\eta = 0$ en fonction du temps pour différentes valeurs de la CFL. Qu'observez-vous ?

Question 16. On fixe la CFL à 0.8. Tracez l'erreur relative globale $\|w_{ex} - w_{num}\|_\infty$ pour les grilles de taille $(N_\theta = 80, N_\eta = 40)$, $(N_\theta = 40, N_\eta = 20)$ et $(N_\theta = 160, N_\eta = 80)$.

Comparez l'erreur relative obtenue pour les trois différentes grilles et en déduire que le schéma est d'ordre deux en espace.

Question 17. On souhaite à présent représenter le mode (1,1) pour cela on introduit la condition initiale suivante :

$$w(\eta, \theta, 0) = \frac{J_1(\lambda_{1,1}\eta) \cos(\theta)}{2}$$

Créez une animation de la vibration de la membrane à différents instants.