MATEMÁTICA 1 – 1er parcial-1era fecha - 5-05- 2022 TEMA 2

Apellido y Nombres..*Legajo#*..............

Se tendrán en cuenta para la corrección los siguientes criterios:
Desarrollo y justificación de los pasos para llegar a la respuesta - Escritura explícita de la respuesta - Claridad y orden en la escritura

1) a) Dada la ecuación de la parábola: $x^2 - 2x + 20y = -21$, hallar la ecuación canónica.

b) Hallar todos sus elementos y graficar.

c) Hallar **todos** los puntos sobre el eje **y** que estén a distancia **10** del punto **(6,2). Graficar.**

2) Sean $\boldsymbol{H} = \{x: x = 4t + 6 \wedge t \in \mathbb{N}\}$ y $\boldsymbol{M} = \{x: x = 2w \wedge w \in \mathbb{N}\}$ conjuntos.

a) Demostrar que $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{M}$

b) Sea $A = \{2,3,4,5\}$ determinar un conjunto B tal que $A - B = \emptyset$.

3) a) Dado un rectángulo cuya base $\boldsymbol{x}$ es la mitad de su altura $\boldsymbol{y}$, definir la función que da el perímetro del rectángulo en función de la longitud de la base $\boldsymbol{x}$.

b) Si $\boldsymbol{V} = \{x, y, z\}$ y $\boldsymbol{W} = \{2,3\}$, expresar por extensión el conjunto $\boldsymbol{WxV}$

4) a) Se define en $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales la operación Δ como: $a\Delta b = a - \frac{1}{2} - b$, donde "-" es la resta usual en $\mathbb{Q}$. Demostrar que no tiene elemento neutro.

b) Sean W, Y y Z elementos de un Algebra de Boole B, demostrar usando axiomas y teoremas, justificando cada paso, que: $ZY + (Y' + Z')' + ZYW + WW' = ZY$

c) Dada el Algebra de Boole $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, siendo $B = \{0,1\}$ determinar: i) $(1 \vee 0')'$ ii) $(1' \wedge 0)'$

Escaneado con CamScanner

1 a) $x^2 - 2x + 20y = -21$

Hallar la ecuación canónica

$$x^2 - 2x + 20y = -21$$

$$\underbrace{(x^2 - 2x)} + 20y = -21$$

$$\underbrace{x^2 - 2x + (-1)^2} - (-1)^2$$

$$(x-1)^2$$

$$(x-1)^2 - 1 + 20y = -21$$

$$(x-1)^2 = -21 + 1 - 20y$$

$$(x-1)^2 = -20 - 20y$$

$$(x-1)^2 = -20(y+1)$$

$$\underbrace{(x-1)^2 = 4(-5)(y+1)}$$

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA

Escaneado con CamScanner

b) Elementos y gráfica

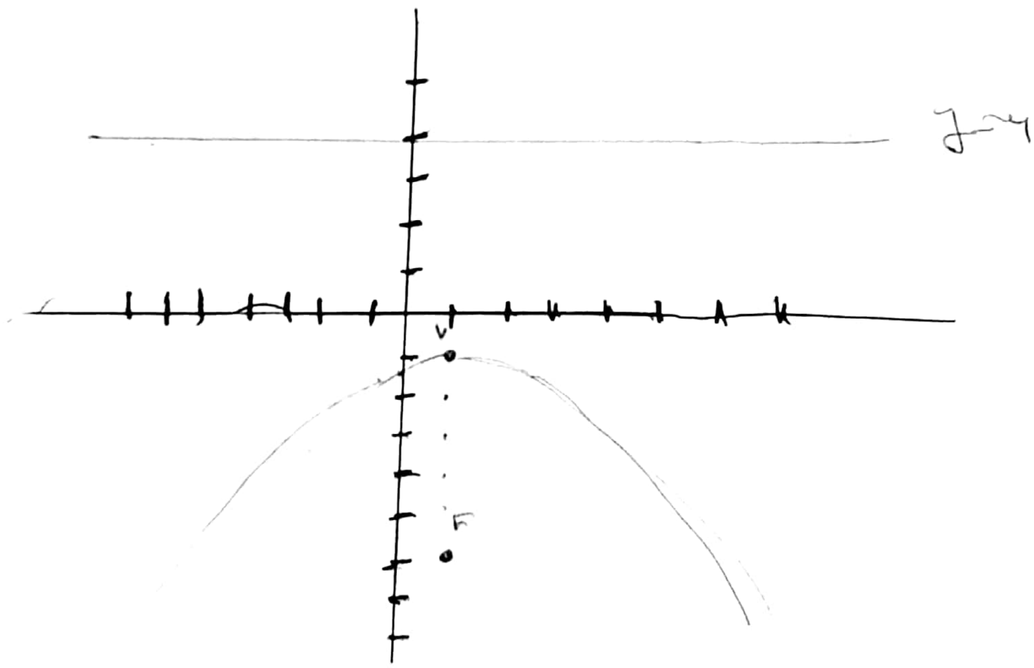
$$(x-\underbrace{1}_{\alpha})^2 = 4(\underbrace{-5}_{c})(y+\underbrace{1}_{\beta})$$

vértice $(1,-1)$

Foco $(1,-1-5) = (1,-6)$

Directriz $y = 4$

eje focal paralelo al eje y



• OBS:

$(x-1)^2 = -20(y+1)$

$x=0$ $(-1)^2 = -20(y+1)$

$\frac{1}{-20} - 1 = y$

$y=-6$

$(x-1)^2 = -20\cdot(-5)$

$(x-1)^2 = 100$

$y=-2$

$(x-1)^2 = 20$

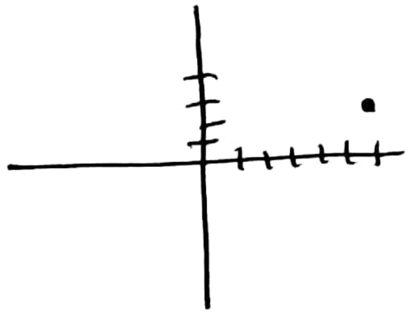
$x = \pm\sqrt{20} + 1$

Escaneado con CamScanner

c) Todos los puntos sobre el eje y a distancia 10 de $(6,2)$

Puntos $P(x,y)$

$$\boxed{d(P,(6,2)) = 10}$$



Pero $P(x,y)$ está sobre el eje y $\Rightarrow$ $x=0$

$$P(x,y) = P(0,y)$$

$$10 = d(P(x,y),(6,2)) = d((0,y),(6,2))$$

$$10 = \sqrt{(0-6)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 10^2 = (-6)^2 + (y-2)^2$$

$$100 = 36 + (y-2)^2$$

$$100 - 36 = (y-2)^2$$

$$64 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{64} = y-2$$

$$\Rightarrow \quad 8 = y-2 \quad \sigma \quad -8 = y-2$$

$$\Rightarrow \quad 10 = y \quad \sigma \quad -6 = y$$

Escaneado con CamScanner

ENTONCES los puntos son:

$P(0,10)$ y $P(0,-6)$

— x —

(2) a) $H = \{x : x = 4t+6 \wedge t \in N\}$

$M = \{x : x = 2w \wedge w \in N\}$

$H \subseteq M$

Sea $x \in H \Rightarrow \exists t \in N : \quad x = 4t+6 \Rightarrow$

$x = 2.2t + 2.3$ con $t \in N \Rightarrow$

$x = 2(\underbrace{2t+3}_{\in \mathbb{N}}) \quad , t \in N$

pues $2, t, 3 \in \mathbb{N}$ y la suma y el producto son cerrados en $\mathbb{N}$

$\Rightarrow x = 2w$, con $w = 2t+3$, $w \in N$

$\Rightarrow x \in M$

$\therefore \quad H \subseteq M$

Escaneado con CamScanner

b) $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = ?$ tal que $A - B = \emptyset$

"$A - B = \{a \in A : a \notin B\}$"

Como quiero que $A - B = \emptyset$ (o sea que no existan elementos que estén en A y no estén en B) entonces necesito que

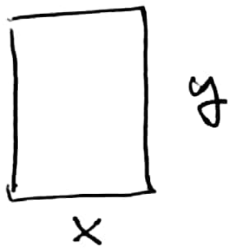
$A \subseteq B$

POR EJEMPLO, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\rightarrow A - B = \emptyset$

——— x ———

3 a)



$x = \frac{1}{2} y \quad (2x = y)$

Perímetro en función de la base x

"Perímetro" $= L + L + L + L$ $= x + x + y + y$

$= 2x + 2y$

$P(x) = 2x + 2(2x) = 2x + 4x = 6x$

Escaneado con CamScanner

Dominio de $P(x)$ = los reales positivos
(no tiene sentido que la base sea 0, no tendríamos "rectángulo")
No puede pasar que x sea negativo

b) $V = \{x, y, z\}$ $W = \{2, 3\}$

$\underbrace{W \times V}_{}$ por extensión

Producto cartesiano

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$W \times V = \{(2,x); (2,y); (2,z); (3,x); (3,y); (3,z)\}$$

Escaneado con CamScanner

(4) a) $\mathbb{Q}$ racionales

Δ tq $a \Delta b = a - \frac{1}{2} - b$

Δ NO TIENE NEUTRO

(e sería neutro si para todo $a \in \mathbb{Q}$

$a \Delta e = e \Delta a = a$)

en este caso

$a \Delta e = a \underbrace{- \frac{1}{2} - e}_{0} = a \Rightarrow e = (-\frac{1}{2})$

$e \Delta a = \underbrace{e - \frac{1}{2}}_{0} - a = a$

$e = \frac{1}{2}$ $\forall$ NUNCA $\underline{-a = a}$

NO PUEDE EXISTIR e tal que e sea neutro para Δ para cualquier $a \in \mathbb{Q}$

POR EJEMPLO $a = 0$

$0 \Delta e = 0 - \frac{1}{2} - e = 0 \rightarrow e = -\frac{1}{2}$

$e \Delta 0 = e - \frac{1}{2} - 0 = 0 \rightarrow e = \frac{1}{2}$

NO PUEDE SER

Escaneado con CamScanner

b) w, y, z elementos de un Álgebra de Boole B $\Rightarrow$

$$zy + (y' + z')' + zyw + ww' = zy$$

$$zy + (y' + z')' + zyw + ww'$$

$$= zy + \underbrace{y'' \cdot z''}_{\text{DE MORGAN}} + zyw + \underbrace{ww'}_{= 0 \ (B8) \text{ complemento}}$$

$$= zy + y'' \cdot z'' + \underbrace{zyw + 0}_{= zyw, \ 0 \text{ neutro}}$$

$\downarrow$

$$= zy + y \cdot z + zyw$$

(T4 involución)

$\downarrow$ conmutatividad (B2)

$$= \underbrace{zy + zy}_{\text{idempotencia}} + zyw$$

T1

$$= zy + zyw$$

$$= zy$$ (ABSORCIÓN)

Escaneado con CamScanner

c)

$$(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$$

$$B = \{0, 1\}$$

(i) $(1 \vee 0')' = ?$

$$(1 \vee 0')' = (1 \vee 1)' = (1)' = 0$$

o

$$(1 \vee 0')' = 1' \wedge 0'' = 0 \wedge 0 = 0$$

(ii) $(1' \wedge 0)' = (0 \wedge 0)' = 0' = 1$

o

$$(1' \wedge 0)' = (1'' \vee 0') = 1 \vee 1 = 1$$

Escaneado con CamScanner