MATEMÁTICA II 2015 2do Sem

Ejemplo resuelto

Dada la función $f(x)=\begin{cases} bx^2+9x, & x\le 1 \\ 15x-3, & x>1 \end{cases}$

1) Encontrar b para que f sea continua
2) Estudiar si f es o no derivable en x=1.

Solución

1) Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.
Como cada tramo de esta función es un polinomio, el punto que queda para analizar es x=1.
Para que sea continua en tal punto deben existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$ y coincidir.

Existirá el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si existen los límites laterales por izquierda y por derecha y ambos son iguales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} bx^2+9x = b+9$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 15x-3 = 12$$

igualando $b+9=12$, resulta $b=3$

Con $b=3$ los límites laterales coinciden, entonces existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 12$.

La función evaluada en 1 debe dar el mismo valor, $f(1)=3.1^2+9.1=12$.
Con el valor $b=3$ la función es continua en x=1 y, en este caso, en todo su dominio que es $\mathbb{R}$

2) La función $f(x)=\begin{cases} 3x^2+9x, & x\le 1 \\ 15x-3, & x>1 \end{cases}$ tiene una expresión a izquierda de 1 y otra a derecha de 1. Para ver si es o no derivable en **x=1**, se calculan (***por definición***) las derivadas laterales $f'_-(1)$ y $f'_+(1)$.
$f(x)$ será derivable en x=1 ***si y sólo si*** ambas existen y coinciden,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3(1+h)^2+9(1+h)-\left[3.1^2+9.1\right]}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2+15h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(3h+15)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (3h+15) = 15 = f'_-(1).$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{15(1+h)-3-\left[3.1^2+9.1\right]}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{15+15h-3-3-9}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{15h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 15 = 15 = f'_+(1).$$