AST1100 Prosjekt Del 1

Daniel Heinesen, daniehei

DATO

Innhold

Del I
Motoren

Sammendrag

For å starte en romreise, trenger man en motor, og i denne delen skal vi se på hvordan man lager en enkel modell for en slik motor, ved å simulere en boks med partikler. Motoren får fremdriften sin fra bevegelsesmengden av partiklene som går ut gjennom et hull i bunnen av boksen. Vi skal så bruke denne bevegelsesmengden til å regne ut hvor mange slike bokser og hvor mye drivstoff det trengs for å få en rakett ut i verdensrommet.

1 Hvordan lage en motor:

Sammendrag

Målet her er å lage en boks med en haug partikler som spretter rundt i boksen. Vi skal så lage et hull i boksen hvor noen partikler kan forsvinne ut av. Ta av bevegelses mengde i retning nedover, vil gjøre at boksen får en bevegelsenmengde oppover. Dette er grunnprinsippet bak rakettmotoren vår

1.1 Boks med partikler

1.1.1 Teori

Før vi faktisk lager en boks som fungere som en motor, må vi se på en boks uten et hull, og hvordan vi lager trykk i denne.

Har man en gass med en temperatur over 0K – hvilket i praktis alle gasser har – vil partiklene i denne gassen ha kinetisk energi, som betyr en hastighet. Putter du disse partiklene inn i et lukket rom, vil de kollidere med veggene. Det er disse kollisjonene som gjør at man får et trykk inne i boksen. For å lage motoren vi vil ha på raketten, trenger vi slik en boks med partikler.

1.1.2 Metode

Vi starter med én boks med størrelse $L \times L \times L$, hvor $L = 10^{-6}m$. Inne i boksen plasserer vi $N = 10^5$ partikler – nærmere bestemt H_2 molekyler – spredd tilfeldig rundt om i boksen. I tillegg til en posisjon må disse partiklene ha en hastighet. Fra termodynamikken får vi $Maxwell - Boltzmannfunksjonen$, som forteller oss fordelingen av hastigheten til partiklene

$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\vec{v}}{2kT}} \tag{1}$$

Vi kan utvidde denne til

$$P(v_x, v_y, v_z) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)} e^{-\frac{mv_x}{2kT}} \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)} e^{-\frac{mv_y}{2kT}} \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)} e^{-\frac{mv_z}{2kT}} \tag{2}$$

Hvor k er *Boltzmannskonstant* og T er temperaturen. Og siden vi vet at disse er uavhengige sannsyneligheter, så blir

$$P(v_i) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)} e^{-\frac{mv_i}{2kT}} \tag{3}$$

Det betyr at vi kan vi hver av hastighetskomponentene en tilfeldig fart med en normalfordelig med $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ og $\mu = 0$. Partikelens startposisjon i rommet har ikke noe normalfordeling, og plasseres ut med en uniform tilfeldighet. Vi lar så partiklene snu hastighetskomponenten tilsvarende retningen på normalvektoren til veggen den treffer, m.a.o treffer den høyreveggen snur x-komponenten til partiklen, og tilsvarende for de andre veggene.

Siden partiklen snur når den treffer en vegg, så må veggen utføre en kraft på den, som kan utrykkes:

$$F_i = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p_i}{\Delta t} \tag{4}$$

Dette gir oss så trykket

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\frac{2p_i}{\Delta t}}{A} = \frac{2p_i}{\Delta t L^2} \tag{5}$$

I formelen over er p_i den bevegelsesmengden til alle partiklene som treffer veggen i tidsintervallet Δt.
Ut i fra analytiske utregninger, får vi vite at

$$P = nkT \tag{6}$$

hvor n er antall partikler per volum. Dette er en fin måte å sjekke om reultet vi får fra simuleringen er korrekt. Et annet analytisk resultat vi kan sammenlikne med er kinetisk energi. Den analytisk formelen for gjennomsnitts energien til en partikkel er

$$E_k = \frac{3}{2} kT \tag{7}$$

Etter vi har kjørt simuleringen sitter vi igjen med men en haug med partikler med en posisjon og en hastighet, fra hastigheten kan vi så regne ut den kinetisk energien

$$E_k = \frac{1}{2n} m_{h2} \sum_{i=1}^{n} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{8}$$

Så nå har vi satt opp en boks med partikler, i tillegg til to måter vi kan sjekke at vi gjorde det korrekt.

1.1.3 Utføring og resultater

I de simuleringene som ble gjort her brukte jeg parameterene at:

- $T = 10000K$, Temperaturen i kelvin
- $t = 10^{-9}$, Tidsintervallet jeg brukte i simuleringen
- $N = 10^5$, Antall partikler
- $Steps = 10000$", Antall steg i tidsintervallet
- $\Delta t = t/steps$, Størrelsen på tidsstegene jeg tok

For kjøringen av denne simuleringen brukte jeg et smart triks som forenkler kodingen litt: i stedenfor at partiklene beveger seg mellom 0 og L, lar man dem bevege seg mellom $-\frac{L}{2}$ og $\frac{L}{2}$. Dette gjør at når man skal sjekke om de har truffet veggene, så trenger man ikke å sjekke for om $x_i < 0$ eller $x_i > L$, men man trenger bare sjekke om $|x| > L/2$. Men numpy kan dette reduseres til 4 linjer med kode, og kjører raskt. Etter å ha snudd farten plasserer jeg også partiklene på innsiden av veggen.

Fra denne simuleringen får jeg:

```
Numerical Pressure: 13756.1188494
Analytical Pressure: 13800.0
Analytical energy: 2.07e-19
Numerical energy: 2.06623799518e-19
```

Som vi kan se har vi fått det vi ønsket: en boks med partikler, hvor både trykket og den kinetiske energien er veldig nært den analytiske. Vi kan da gå videre til hullet i boksen.

1.2 En lekkende boks

1.2.1 Teori

Nå som vi har en fungerende boks med partikler, så kan vi prøve å åpne et hull i bunnen. Da vil et vist antall partikler fly ut av hullet. Siden bevegelsesmengden skal være bevart i systemet, og vi mister bevegelsesmengde med partiklene som forsvinner ut gjennom hullet, så må boksen få en like stor, men motsatt rettet bevegelsesmengde. Denne bevegelsesmengden gjør at boksen beveger seg oppover, og vi har en fungerende motor!

1.2.2 Metode

Siden vi skal ha en rakettmotor er det naturlig at hullet er i bunnen. Hullet skal også være kvadratisk. Så får å se hvor my kraft vi får i motoren, så teller vi opp bevegelsesmengden partiklene. I tillegg teller vi antallet som forsvinner, siden vi senere vil trenge å vite hvor mye masse som forvinner per tidsenhet. Det er viktig at trykk og temperatur skal holdes konstant hele tiden, dette betyr at vi ikke kan la partiklene som forsvinner ut gjennom hull bli borte, men vi må gjøre noe slik at det alltid er like mange partikler i boksen til en hver tid. Det diskuteres nedenfor hvordan dette gjøres.

1.2.3 Utføring og resultater

Jeg bruker alle de samme parameterene som over, men i tillegg bruker jeg at

- $H = \frac{L}{2}$, Størrelsen på hullet

Her kommer det en liten diskusjon om hva man skal gjøre med partiklene som forsvinner gjennom hullet i gulvet. Siden trykket skal holdes konstant, kan man ikke bare la dem forsvinne inn i evigheten. En metode er å plassere dem med en tilfeldig posisjon og hastighet inne i boksen. Dette virker i utgangspunktet som en god metode, men man finner fort ut at trykket og energien vil begynne å synke, dette kan være fordi man gir de partiklene som starter med en stor hastighet nedover en ny tilfeldig fart, mens de som har en lav hastighet for være i fred. M.a.o får man en hopphopning av partikler med lav hastighet. Metoden jeg valgte å gå for var å la disse partiklene som går gjennom hullet bare sprette tilbake – men telle at de har truffet hullet–. Dette er en urealistisk metode, men bevarer energi og trykk, så derfor valgte jeg å gå får denne.

Det kan være vanskelig å få hullet til å ha rett størrelse, og jeg måtte mange ganger korregere numykoden for å få rett resultat. For å sjekke at riktig mengde partikler gikk gjennom hullet, talte jeg antall partikler som traff gulvet og de som traff hullet. Siden $H = \frac{L}{2}$, så forventer vi at $\frac{1}{4}$ av partiklene som treffer gulvet også går ut gjennom hullet. Jeg valgte også å printe ut informasjon om antall partikler som forsvant per sekund og mengden masse som forsvant per sekund.

Sist men ikke har jeg ikke med bevegelsesmengden som boksen fikk, men kraften, da det er den som brukes til alle beregninger videre.

Her er resultet

```
Force: 1.72650965887e-09
Number of particles colliding with floor: 257317
Number of particles escaped: 64252
Number of particles escaped per sec: 6.4252e+13
Mass lost per sec: 2.120316e-13
```

Som vi kan se hadde vi rett, ca $\frac{1}{4}$ av partiklene som traff gulvet forsvant. Men de to tallene vi får bruk for senere er kraften og masse tapt per sekund.

Nå som vi har dette, har vi en fungerende motor, og vi kan sende raketten ut i bane.

2 Utregning av drivstoff

!!! Siden jeg har byttet seed, må jeg forandre tallene under !!!

Sammendrag

Nå som vi har en motor, og vet hvor mye kraft den gir fra seg og hvor mye masse som forsvinner fra den, kan vi se på hvor mange av disse boksene og hvor mye drivstoff vi trenger, for å sende denne raketten ut i verdensrommet.

2.1 Flere bokser

Som vi kan se over er kraften fra en boks ikke i nærheten av å få oss noe sted, vi trenger flere bokser – mange flere. For å finne en brukelig mengde bokser kan vi bruke unnslipshastigheten til planeten som et mål. Denne kan regnes ut ved å finne ut når kinetisk energi er større enn den potensielle energien fra gravitasjonskraften.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} \tag{9}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{10}$$

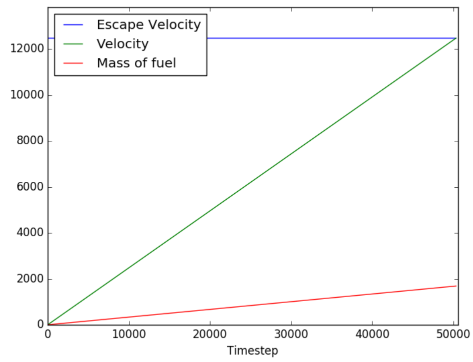
For min planet gir dette at $v \approx 12473m/s$. Vi kan nå se på et enkelt senario hvor raketten ikke bruker noe drivstoff i oppskytingen velger vi så at raketten skal nå unnslippshastigheten etter 10 min, kan vi regne oss frem til en passende mengde bokser. For å finne mengden bokser bruker vi

$$v(t) = \frac{F}{m}t = \frac{F_{perboks}n_{bokser}}{m_{launcher}}t \tag{11}$$

$$n_{bokser} = \frac{vm}{Ft} \tag{12}$$

Vi får da at vi trenger ca $1.333 \cdot 10^{13}$ bokser. Ved å øke tiden vi ønsker å bruke kan vi også senke antallet bokser vi trenger.

Vi kan nå bruke dette antallet med bokser, og regne ut hvor mye bensin vi trenger. Vi kan gjøre dette ved å øke farten men akselerasjonen ganger et lite tidssteg, og for vært tidssteg bruker vi $"massenavpartiklenesomforsvant"xtidssteget$ drivstoff. Teller vi hvor mye vi bruker for hvert tidssteg i 10 min, finner vi

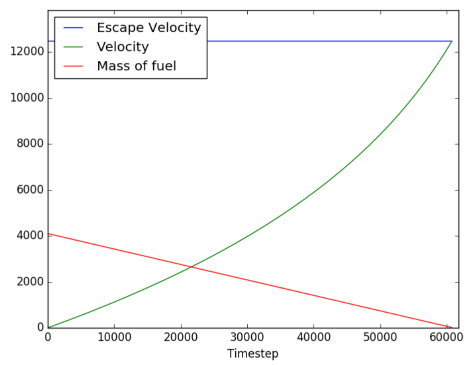


Figur 1: Simpel drivstoffutregning

drivstoffet vi trenger. For min del ble det ca 1696 kg drivstoff – hvilket passerte testen for drivstoff vi fikk utdelt. Her kan man se en graf av hastigheten og drivstoffet som trengs

Siden vi ikke tok med drivstoff når vi beregnet massen, får vi en fin lineær funksjon for hastigheten.

Men dette er en urealistisk mengde drivstoff. I en virkelig rakett må man også bære på mass av drivstoffet. I tilegg mister man drivstoff, som gjør at raketten blir lettere, og derfor akselererer raskere jo mer masse som forsvinner. Vi forventer derfor en ikke lineær graf. Her skal vi først bare gjette oss frem til drivstoffet, før vi i neste avsnitt regner oss frem til hvor mye vi trenger. Jeg gjettet ca 4100 kg drivstoff, etter litt prøving og feiling.



Figur 2: Mer realistisk utregning

Med denne gjetningen satt jeg igjen med 12 kg drivstoff, som var ganske nært –jeg jukset litt og brukte formelen jeg regner ut i neste avsnitt. (fig 2). Vi kan også se at stemte antagelsene om hvordan grafen til hastigheten ville se ut. I virkeligheten vil også tyngdekraften spilt en rolle her, og vi ville hatt måtte brukt mye mer drivstoff.

Men det er en lang reise vi skal begi oss ut på, så om vi skulle gjettet os frem til riktig mengde drivstoff, ville vi måtte brukt mye tid på prøving of feiling. I stedenfor kan vi regne ut hvor mye vi trenger.

2.2 Analytisk bereging av drivstoff

Nå er det på tide å bevege seg litt vekk fra det numerisk og inn i det analytiske, for å finne et begrep som vil gjøre det lettere for oss og bestemme mengden med drivstoff. For å gjøre dette må man ha funnet et antall bokser man vil bruke.Vi starter som man ofte gjør, men Newtons 2. lov:

$$F = ma \tag{13}$$

Her må vi bruke det vi fikk fra rakettmotoren som F og m, så:

- F_b er kraften fra hver enkelt boks
- n_b er antall bokser
- m_l er massen til laucheren
- m_f er massen til drivstoffet
- m_e er massen til partikkelene som går ut av hullet per sekund

Da kan vi sette opp en formel for akselerasjon:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_b n_b}{m_f(t) + m_l} \tag{14}$$

Og siden massen til drivstoffet endrer seg, må vi skrive dette om til:

$$a = \frac{F_b n_b}{(m_{f0} - n_b n_e t) + m_l} = \frac{F_b n_b}{(m_{f0} - \Delta m t) + m_l} \tag{15}$$

Hvor Δm er hvor mye drivstoff som brukes opp hvert sekund.
Vi kan nå gjøre litt fysikkermatte å få at

$$dv = \frac{F_b n_b}{(m_{f0} - \Delta m t) + m_l} dt \tag{16}$$

Så

$$v(t) = \int \frac{F_b n_b}{(m_{f0} - \Delta m t) + m_l} dt = K - \frac{F_b}{n_e} \ln(m_{tot} - \Delta m t) \tag{17}$$

Der $m_{tot} = m_l + m_{f0}$. Vi kan så sette inn grenseverdien og finne

$$K = v_0 + \frac{F_b}{n_e} \ln(m_{tot}) \tag{18}$$

Dette gir oss det fine svaret

$$v(t) = v_0 + \frac{F_b}{n_e} \ln\left(\frac{m_{tot}}{m_{tot} - \Delta m t}\right) \tag{19}$$

Det vi har kommet frem til nå er rakettlikningen for vår rakett. I den orginale rakettlikningen har vi en konstant som måler effektiviteten til motoren v_e, som den effektive eksoshastigheten". Vi vet nå at denne konstanten er med vår motor gitt som $v_e = \frac{F_b}{n_e}$. (Med litt enkel dimensjonsanalyse finner vi ut at $\frac{F_b}{n_e}$ har de korrekte enhetene)

Men det vi er ute etter er mengden drivstoff vi trenger. For å finne ut dette vil vi at vi sitter igjen uten drivstoff når vi har oppnådd farten vi ville ha. Så med andre ord må $m_{tot} - \Delta m t = m_l$. Med litt algebra får vi da:

$$m_{f0} = m_l(e^{\frac{\Delta v n_e}{F_b}} - 1) \tag{20}$$

Vi har nå funnet en enkel formel for å kunne regne ut mengden drivfstoff vi trenger.

Del II

Solsystemet

Sammendrag

I denne delen skal vi regne ut banene til planetene til stjernen. Vi skal også sjekke om det er mulig for en annen sivilisasjon å kunne avgjøre om solsystemet har planeter.

3 Planetbanene

3.1 2-legmesystem

3.1.1 Teori

I denne simuleringen av solsystemet skal vi bruke at denne eneste kraften som virker på planetene er gravitasjonen fra stjernen.

$$\mathbf{F_G} = m_p \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G m_p m_s}{r^3}\mathbf{r} \tag{21}$$

3.1.2 Metode

For å løse denne differensiallikningen blir Euler-Cromer litt for unøyaktig. Dette er fordi vi har et system med harmoniske bevegelser(sirkelbevegelse). Bruker man noe som en vanlig Euler-metode, vil systemet for hver rundt får litt ekstra, kunstig, energi. Så etterhvert vil banene blir mer og mer unøyaktig. Euler-Cromer bevarer *nesten* energien, så for små systemer, som feks pendler, er den god nok. Men for større systemer må vi bruker noe som bevarer energi bedre. Vi bruker derfor en leap frog-metode. Gitt ved algoritmen

$$x_i = x_{i-1} + v_{i-1/2}\Delta t$$

$$a_i$$

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + a_i \Delta t$$

Hvor

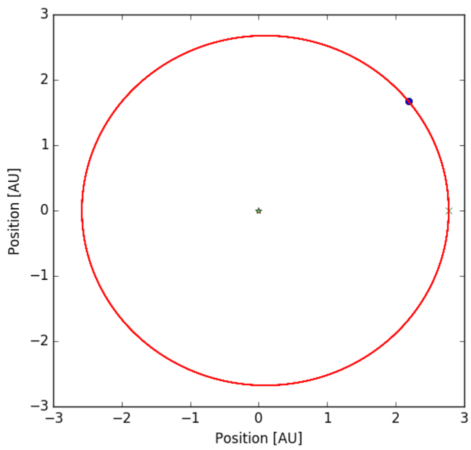
$$a_i = -\frac{G m_s}{r_i^3}\mathbf{x}_i \tag{22}$$

($\mathbf{x}$ er posisjonsvektoren til planeten og r er avstanden fra stjernen)

Har vi initialposisjonene og -hastighetene til planetene kan vi bruke algoritmen over til å regne ut banene til planetene. Vi vil at stjernen skal være i origo og stå stille. Planetene skal heller ikke ha noe kraft på stjernen. Stjernen skal derfor stå stille i origo hele tiden.

3.1.3 Utførelse og resultat

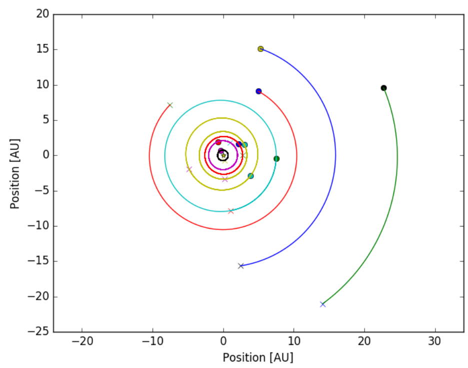
For å teste metoden vår bruker vi først én planet (fig 3). Jeg bruker 20 år. Solsystemet mitt er ca dobbelt så stort som vårt eget, så planetene bruker litt lengre tid rundt stjernen enn våre kjente planeter.



Figur 3: Den tyngste planeten i systemet i bane rundt stjernen.

Ser man nøye kan man se at banene er en ellipse, men har en eksentrisitet e veldig nærme 0.

Nå som vi vet at algoritmen fungerer, kan vi plott alle 9 planetene i systemet (fig 4)



Figur 4: Banen til alle planetene i solsystemet i bane i 20 år. x markerer startposisjonen til planetene, men prikken er sluttposisjonen.

Vi har et ganske standard solsystem. Det som mangler er gasskjemper, men det kommer jeg tilbake til senere.

3.2 Mange-legme-system

3.2.1 Teori

Teorien over er veldig lik den over, eneste forskjellen er at alle planetene skal ha en kraft på alle de andre. De skal også virke en kraft fra planetene på stjernen. Stjernen vil derfor også bevege seg.

3.2.2 Metode

Igjen er metoden veldig lik den over. Men når vi regner ut akelerasjonen til planetene (og stjernen) kan vi ikke bare ta med gravitasjonskraften fra sola, men også den fra de andre planetene. Dette betyr at utregningen blir veldig mye treigere, men med god programmering med numpy kan man klare å få den $O(N)$ ganker treigere, som men 9+1 planeter ikke er så ille.

Men som en konsekven av at vi lar stjernen bevege seg og at alle planetene innvirker alle de andre, vil ikke origo være massesenteret lenger. Ikke bare det, men massesenteret vil bevegeseg. Siden bevegelsesmengden til massesenteret er summen av bevegelsesmengden til planetene og stjernen vil

$$|M\dot{R}| = |\sum_i m_{pi} v_{pi} + m_s v_s| > 0 \tag{23}$$

Siden vi satt hastigheten til stjernet til å være 0. Men om vi setter bevegelsesmengden til stjerne som det motsatte at summen av bevegelsesmengden til planetene

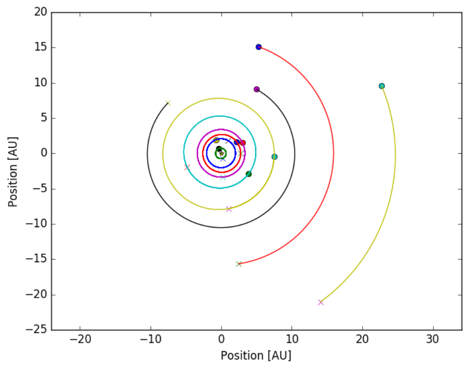
$$\sum_i m_{pi} v_{pi} = -m_s v_s \tag{24}$$

kan vi regne ut en initialhastiget for stjernen. Om denne initialhastigheten for stjernen, vil massesenteret stå stille. Dette er en veldig fordel for neste avsnitt.

3.2.3 Utføring og resultater

Etter 20 år vil et mange-legme-system med alle 9 planetene se slik ut (fig 5)

Som vi kan se er disse banene nesten helt like de for 2-legmesystet. Dette er fordi stjernen er det desidert størte legmet i systemet. Alle planetene er steinplaneter, så systemt har ingen store gasskjempen. Så selv den største planeten er bare ca 8×10^{-6} av størrelsen av stjernen.



Figur 5: Banen til alle planetene i solsystemet i bane i 20 år. Alle planetene innvirker alle de andre.

4 Er planeten mulig å se fra et annet solsystem

Sammendrag

Her skal vi se om det er mulig for en utenomjordisk sivilisasjon å finne ut at det er planeter rundt solsystemet.

4.1 Hastighetsgraf for stjernen

4.1.1 Teori

Siden planetene drar på stjernen, vil stjeren – så vel som planetene – rotere rundt et massesenter. I forrige avsnitt gjorde vi det slik at massesenteret stod stille ganske nært origo. Når en observator ser på stjernen som beveger seg i en sirkel hvor normalvektoren til sirkelen, optimalt, er 90 grader på synslinjen, vil han se beveger seg mot ham, så fra ham. Når stjernen beveger seg mot ham, vil det være en rødskift på spektret til stjernen, og når stjernen beveger seg vekk, vil det være et blåskift. Det er mulig å måle dette skiftet og bruke

$$\Delta\lambda = \frac{v}{c}\lambda \tag{25}$$

til å regne ut hastigheten til stjernen, og videre massen og avstanden til planetene. (Den virkelige hastigheten vil være $vsini$ hvor i er vinkelen på normalvektoren til banen. Men i resten av avsnittet bruker jeg at $i = 90$ for å gjøre ting enkelt.)

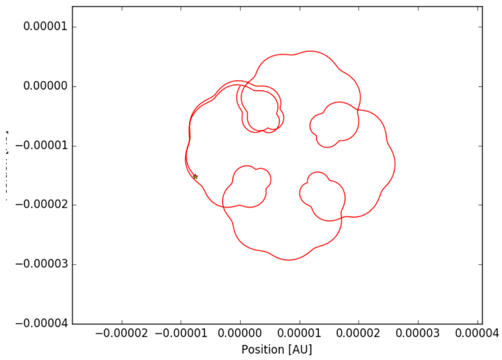
4.1.2 Metode

For å få hastighetskurven til stjernen, finner vi sirkelbevelgelsen til stjernen for de 3 tyngste planetene – dette er for ikke å gjøre kurvene for innviklet.

Vi later så som om vi en observator som ser på stjernen langs x-aksen. Vi kan så plotte x-komponenten til hastigheten til stjernen og se om den er stor nok til å kunne observeres med noe tilsvarende vår teknologi. Vi legger så til litt støy for at plottet skal se mest mulig realitisk ut − Vi bruker en normalfordeling med $\mu = 0$ og $\sigma = \frac{1}{5}max(v_s)$

4.1.3 Utføring og resultater

I fig 6 kan man se posisjonen til stjernen over 20 år

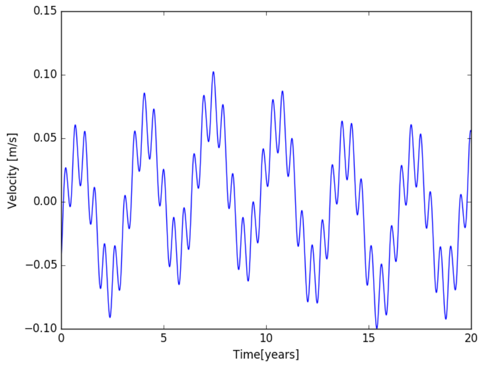


Figur 6: Banen til stjernen når de 3 tyngste planetene drar på stjernen. Banen er en superposisjon av en stor sirkelbane, men 2 mindre sirkelbaner.(Label på y-aksen mangler fordi det rett og slett ikke var plass til den...)

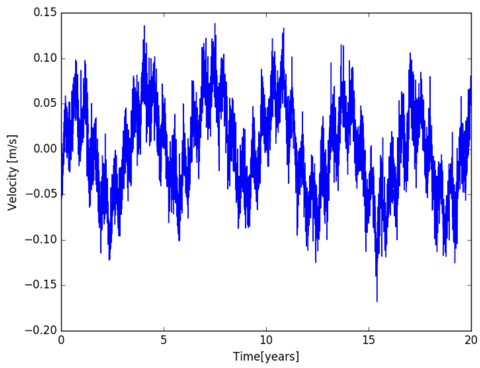
Jeg laget så et plott av x-komponentet av hastigheten for litt over en omdreining(fig 7). Jeg endret også enhetene til m/s for å letter kunne avgjøre om det er observebart.

Vi kan såvidt se at det er en superposisjon av 3 sinusfunksjoner. Vi kan bruke fourieranalyse til å finne de enkelte bølgene, men siden vi bare trenger å se på bunn- og topppunkene av farten, er en slik analyse ikke nødvendig. Vi kan se at farten varierer med $\pm 0.1m/s$. Med teknologien vi har i dag, har vi muligheten til å måle hastigheter på $1m/s$. Selv om dette er veldig imponerende, er det 10x for dårlig til å oberservere hastigetsforskjellen til stjeren min. M.a.o utenomjordiske astronomer vil **ikke** kunne finne planeter rundt min stjerne med denne metoden.

Til slutt vil jeg legge ved den mer realistiske kurven, hvor jeg har lagt til normalfordelt støy(fig 8)



Figur 7: x-hastigheten til solen over 20 år



Figur 8: Fartskuven med støy. Ligner med på det man vil se i virkeligheten